

Homológia és leszámlálás

Szakdolgozat

Szerző: Györgypál Gergő

Témavezető: Dr. Fehér László

Matematika BSc, matematikus szakirány



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Budapest, 2025

Tartalomjegyzék

1	Homológiaelmélet	5
1.1	Szimpliciális homológia	5
1.2	Szinguláris homológia	10
1.3	CW-komplexusok	11
1.4	CW-homológia	12
1.5	A homológia tulajdonságai	13
1.6	Mayer-Vietoris-sorozat	15
1.7	Redukált homológia	20
2	Homologikus algebra	24
3	Kohomológia	26
4	Fibrált nyalábok	32
4.1	Definíciók	32
4.2	Vektornyalábok	36
4.3	Karakterisztikus osztályok	38

Köszönetnyilvánítás

Első körben szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Fehér László tanár úrnak, aki a szakdolgozatom megírásában végig segített nekem, valamint heti rendszerességgel tartott konzultációt a dolgozatban feldolgozottak megértésének érdekében. Köszönetet szeretnék mondani továbbá Jörg Máté Áronnak, aki a dolgozataink témájának hasonlósága miatt sokszor segítségemre volt egy-egy probléma, bizonyítás megértésében. Végül, de nem utolsó sorban köszönetet mondok Györgypál Tamásnak a dolgozatom formázásában való segítkezéséért.

Bevezető

Az algebrai topológiában megszokhattuk, hogy topologikus terek bizonyos invariáns tulajdonságait próbáljuk meghatározni. A homológia is ezen invariánsok közé tartozik és nagy szerepe van az algebrai topológiában. Hasonlóan a fundamentális csoporthoz, a homológia is egy csoport, pontosabban egy Abel-csoport, azonban míg a fundamentális csoportot nehéz, a homológiacsoportot annál könnyebb meghatározni.

A dolgozat bevezetést nyújt a homológia fogalmába, megmutatja előnyeit és hátrányait, és felhasználását példákon, feladatokon keresztül.

Kezdetben definiálni fogom a szimpliciális, a szinguláris, majd a CW-homológiát, valamint kiszámolom adott topologikus terek ezen invariánsait. Ezek definiálásához bevezetek szükséges fogalmakat, például a CW-komplexus fogalmát vagy egy topologikus tér triangulációját. Szó lesz arról, hogy milyen információt tárol el egy topologikus tér nulladik homológiacsoportja, valamint hogy ezt milyen problémák megoldásában lehet használni.

Ezek után általános tulajdonságait ismertetem a homológiának és felhasználását is megmutatom a topológián belül. Megmutatom, hogy homotóp ekvivalens terek homológiacsoportjai megegyeznek. Szó lesz a nevezetes Mayer-Vietoris tételről, ami a dolgozatom szempontjából talán a legfontosabb tétel, és amit a legtöbbször használtam.

A következőkben bevezetem a redukált homológia fogalmát és ennek segítségével bebizonyítom a Jordan-görbe tételt.

Ezek után egy kis kitérőt teszek a homologikus algebra világába, majd bevezetem ennek segítségével a kohomológia fogalmát. A kohomológia bevezetése szükséges lesz, ugyanis bevezethető lesz rajta egy szorzás a homológiával ellentétben, ami hasznos lesz a dolgozatom utolsó részében. Emellett szó lesz a Künneth formuláról, ami szintén egy nagyon jelentős tétel.

Ezt követően fibrált nyalábokról lesz szó, ami ott fog kötődni dolgozatom témájához, hogy kohomológia segítségével fogom meghatározni bizonyos nyalábok invariáns tulajdonságait. Bevezetésre kerül a fibrált nyaláb és vektornyaláb fogalma, valamint megmutatom mi az a Hopf-fibrálás, ami talán a legfontosabb példa fibrált nyalábra.

Végül érintőlegesen bemutatom, mi az a karakterisztikus osztály. Először szó lesz egy vektortér kohomologikus irányításáról, majd ennek segítségével definiálom a Thom-osztály és az Euler-osztály fogalmát. Ezután bevezetem a karakterisztikus osztályokat, például a Chern-osztályokat.

Összességében elmondható, hogy a homológia egy nagyon tág témakör a matematikán belül és érdemes elmerülni a világában. A dolgozatom megírása közben sok olyan

fogalommal, témakörrel találkoztam amik felkeltették az érdeklődésemet és érdekesek arra, hogy foglalkozzam velük a jövőben. Ilyen volt a K-elmélet vagy a Lie-csoport elmélet.

1. Homológiaelmélet

A homológia egy Abel-csoport amely a topológiában triangulálható terek egy invariánsa és segít karakterizálni, illetve megkülönböztetni topológikus tereket. Először nézzük meg mit jelent egy topológikus tér triangulációja:

1.1 Szimpliciális homológia

Definíció: Legyen X egy topológikus tér és legyen $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ egy véges halmaz, ami a csúcsokat reprezentálja. Továbbá legyen $\Lambda \subset \mathcal{P}(V)$ egy leszálló halmazrendszer, tehát $\forall A \in \Lambda$ és $B \subset A \Rightarrow B \in \Lambda$. Λ -át a lapok halmazának hívjuk. Egy ilyen (V, Λ) párt szimpliciális komplexusnak nevezünk, valamint ha $\Lambda = \mathcal{P}(V) \setminus \emptyset$ akkor a (V, Λ) párt n -szimplexnek nevezzük.

Megjegyzés: $\Lambda_k \subset \Lambda$ halmazt a k -lapok halmazának nevezzük, ahol:

$$\Lambda_k = \{H \in \Lambda \mid |H| = k\}.$$

Megjegyzés: Vegyük $\mathbb{R}^{n+1}$ -et és benne $e_0, e_1, \dots, e_n$ szokásos bázisvektorokat. Ekkor ezen vektorok konvex kombinációiból kapott halmazt nevezzük a standard n -szimplexnek és Δ^n -el jelöljük:

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i e_i \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1, \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Definíció: Legyen (V, Λ) szimpliciális komplexus és $\lambda \in \Lambda$.

$$\Delta_\lambda = \left\{ \sum_{v \in \lambda} \alpha_v v \mid 0 \leq \alpha_v \leq 1, \sum_{v \in \lambda} \alpha_v = 1 \right\} \subset \Delta^{|V|} \subset \mathbb{R}^{|V|}$$

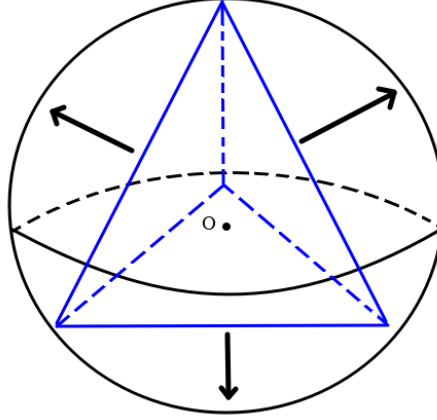
Az $R(V) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Delta_\lambda$ halmazt nevezzük Λ realizációjának.

Definíció: Legyen X topológikus tér és (V, Λ) szimpliciális komplexus. $R(V)$ az X tér triangulációja ha $X \cong R(V)$.

Lássunk egy példát egy triangulációra. Adjuk meg S^2 egy triangulációját. Erre egy jó megoldás ha vesszük $\Delta^3 := \Delta^3 \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ -at, a standard háromdimenziós szimplexet a belseje nélkül. Annak érdekében, hogy megmutassuk, hogy ez tényleg triangulációja S^2 -nek, veszünk egy szabályos tetraédert, ami homeomorf Δ^3 -el és beleágyazzuk S^2 belsejébe. Ezután megadjuk a homeomorfizmusunkat a következőképpen: S^2

középpontjából projektáljuk a tetraéderünket az S^2 -re, ami egy folytonos bijektív leképezés, valamint az inverze is folytonos.

Vagyis megadtuk S^2 egy triangulációját. Könnyen látható, hogy ha Δ^3 -ból kivennénk egy oldalt és összaragasztanánk az üres oldala mentén egy azonos szimpliciális komplexussal az is triangulációja lenne S^2 -nek.



Definíció: Egy (V, Λ) szimpliciális komplexusnak definiáljuk az n -láncait, mint az n -lapjai által generált szabad Abel-csoport:

$$C_n(\Lambda) := \left\{ \sum_{c \in \Lambda_n} n_c c \mid n_c \in \mathbb{Z} \right\}$$

.

Definíció: Definiálunk egy leképezést $C_n(\Lambda)$ és $C_{n-1}(\Lambda)$ között. Legyen ez a leképezés $\partial_n : C_n(\Lambda) \rightarrow C_{n-1}(\Lambda)$. Amennyiben $c \in \Lambda_n$, úgy reprezentálhatjuk c -t a következő alakban: $c = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ ahol $v_0, v_1, \dots, v_n$ növekvő sorrendben helyezkednek el. Ekkor definiáljuk ∂_n -t a következőképpen:

$$\partial_n[v_0, v_1, \dots, v_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$$

Ebben az összefüggésben $\widehat{v_i}$ azt jelöli, hogy v_i -t kihagytuk a reprezentációból. A definícióból jól látszik, hogy ∂_n valóban C_{n-1} -re képez. ∂_n -et határleképezésnek hívjuk.

Megjegyzés: ∂_n -et lineárisan kiterjesztjük, hogy értelmezési tartománya $C_n(\Lambda)$ és értékkészlete $C_{n-1}(\Lambda)$ legyen.

Állítás: $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

Bizonyítás: Vegyünk egy $c \in \Lambda_n$ elemet, $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ reprezentációval. Elég belátni, hogy egy ilyen c -re $\partial_n\partial_{n-1}(c) = 0$, hiszen ∂_n és ∂_{n-1} lineáris.

$$\begin{aligned}
\partial_n[v_0, v_1, \dots, v_n] &:= \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n] \\
\partial_n \partial_{n-1}[v_0, v_1, \dots, v_n] &= \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n] \\
&\quad + \sum_{i > j} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]
\end{aligned}$$

Ha jól megfigyeljük, akkor a második szummában felcserélve i -t és j -t az első szummát kapjuk egy negatív előjellel, így az állítást igazoltuk. $\square$

Az előző állítás azt jelenti, hogy a határ határa 0.

Definíció: $C = (C_n, \partial_n)$ lánckomplexus amennyiben $\partial_n \partial_{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Minden szükséges fogalmat bevezettünk annak érdekében, hogy definiálhassuk a homológiacsoportokat: Legyen $C = (C_n, \partial_n)$ lánckomplexus. Ekkor a

$$H_n := \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$$

csoportot a C lánckomplexus n . homológiacsoportjának nevezzük.

Megjegyzés: Ahhoz, hogy H_n értelmesen legyen definiálva ahhoz kell, hogy $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\partial_n)$. Viszont beláttuk korábban, hogy $\partial_{n+1} \partial_n = 0$, ami implikálja ezt.

Feladat: Számoljuk ki az n -dimenziós szimplex homológia-csoportjait.

Bizonyítás: Belátjuk, hogy:

$$H_k(\Delta^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{ha } k = 0, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Δ^n csúcsai rendre legyenek $v_0, \dots, v_n$. Δ^n k -láncainak, k -ciklusainak, illetve k -határainak szabad Abel-csoportjait jelöljük a következőkkel: C_k^n, Z_k^n, B_k^n . Ekkor teljesül, hogy:

$$H_k(\Delta^n) = Z_k^n / B_k^n.$$

Illetve a

$$0 \rightarrow Z_k^n \rightarrow C_k^n \rightarrow B_{k-1}^n \rightarrow 0$$

rövid egzakt sorozatból kapjuk, hogy

$$\text{rk } B_{k-1}^n + \text{rk } Z_k^n = \text{rk } C_k^n.$$

Másrészt tudjuk, hogy

$$\operatorname{rk} C_k^n = \binom{n+1}{k+1},$$

tekintve, hogy egy n -szimplex bármely $k+1$ csúcsa k -szimplexet alkot. Indukcióval bizonyítunk. A fenti állításnál többet fogunk belátni, mégpedig, hogy $k < n$ -re

$$\operatorname{rk} B_k^n = \binom{n}{k+1}, \quad \operatorname{rk} Z_0^n = n+1, \quad \text{és} \quad \operatorname{rk} Z_k^n = \binom{n}{k+1} \quad (n > k > 0).$$

Először belátjuk az állítást $k=0$ -ra. Ekkor $Z_0^n \cong C_0^n$, így

$$\operatorname{rk} Z_0^n = n+1.$$

Vegyük Δ^n azon éleit, amelyek egyik végpontja v_n . Ezek ∂ szerinti képeivel Z_0^n minden olyan elemét tudjuk generálni, melyre teljesül, hogy az együtthatók összege 0. Ugyanakkor az együtthatók összege B_0^n minden elemében 0, így

$$\operatorname{rk} B_0^n = n, \quad \text{és így} \quad H_0(\Delta^n) \cong \mathbb{Z}.$$

Most tegyük fel, hogy az állítást már beláttuk minden k -nál kisebb számra, és $n > k > 0$. Most pedig megmutatjuk, hogy

$$\operatorname{rk} B_k^n = \binom{n}{k+1}, \quad \operatorname{rk} Z_k^n = \binom{n}{k+1}, \quad \text{és} \quad H_k(\Delta^n) \cong 0.$$

Az indukciós feltevésből rögtön kapjuk, hogy

$$\operatorname{rk} Z_k^n = \operatorname{rk} C_k^n - \operatorname{rk} B_{k-1}^n = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$

Mivel $B_k^n \subseteq Z_k^n$, így B_k^n rangja is legfeljebb ennyi. Legyen G_1 azon szabad Abel-csoport, amelyet azon k -szimplexek generálnak, melyeknek egyik csúcsa sem v_n , és G_2 pedig azon szabad Abel-csoport, amelyet azon k -szimplexek generálnak, melyeknek egyik csúcsa v_n . Ekkor

$$C_k^n \cong G_1 \oplus G_2.$$

Vegyük Δ^n azon $(k+1)$ -szimplexeit, melyeknek egyik csúcsa v_n . Ezek ∂ szerinti képeiből minden $g_1 \in G_1$ elemre kapunk egy olyan C_k^n -beli elemet, amely előáll $g_1 + g_2$ alakban, ahol $g_2 \in G_2$. Ezt abból láthatjuk, hogy minden $(k+1)$ -szimplexnek pontosan egy olyan k -lapja van, amely nem tartalmazza v_n -t. Azaz megkaptuk, hogy

$$\operatorname{rk} B_k^n \leq \binom{n}{k+1},$$

azaz $B_k^n \cong \mathbb{Z}^{\binom{n}{k+1}}$. Végül belátjuk, hogy $H_k(\Delta^n)$ nem tartalmaz torziót, azaz minden Z_k^n -beli ciklus egyben határ is. Vegyünk egy tetszőleges $z \in Z_k^n$ ciklust. Tudjuk, hogy

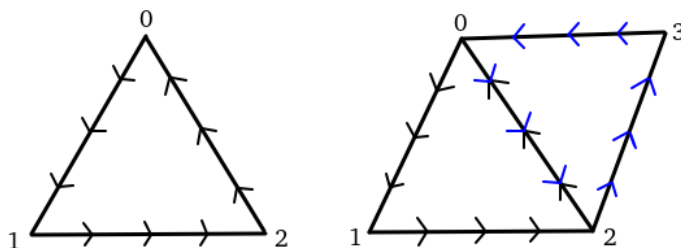
van olyan $(g_1 + g_2) \in B_k^n$, amelyre $g_1 \in G_1$, illetve $g_2 \in G_2$, g_1 -ben pedig éppen azok az együtthatók szerepelnek a megfelelő k -szimplexeknél, mint z -ben. Így elegendő $z' = z - (g_1 + g_2)$ -ről belátni, hogy határ. $z' \in G_2$, azaz csak olyan k -szimplexeket tartalmaz, amelyeknek v_n az egyik csúcsa. Ugyanakkor tudjuk, hogy $z' \in Z_k^n$, azaz a határa 0. Így minden együtthatójának 0-nak kell lennie, azaz z határ. Végül belátjuk, hogy $k = n$ esetén is teljesül az állítás. Ekkor

$$\text{rk } Z_n^n = \text{rk } C_n^n - \text{rk } B_{n-1}^n = \binom{n+1}{n+1} - \binom{n}{n} = 0,$$

azaz $H_n(\Delta^n) \cong 0$. □

Feladat: Számoljuk ki a kompakt irányítható összefüggő felületek második homológia csoportjait.

Bizonyítás: Az állítás az, hogy ha Σ egy kompakt irányítható összefüggő felület, akkor $H_2(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$. Vegyük Σ egy triangulációját és vegyünk ebből a triangulációból egy 2-dimenziós szimplexet (háromszöget). Irányítsuk ezen szimplex oldalait pozitív irányítással. Ezek után tegyük meg ezt minden további 2-dimenziós szimplexre. Ekkor bármely két szomszédos 2-szimplex közös oldala ellentétes irányítású lesz. Ez azért igaz, mert Σ irányítható.



Definíció szerint $H_2(\Sigma) = \text{Ker}(\partial_2) / \text{Im}(\partial_3)$. Mivel Σ egy 2-sokaság, ezért $\text{Im}(\partial_3) = 0$. $\text{Ker} \cong \mathbb{Z}$, mivel ha veszünk két szomszédos háromszöget és kiszámoljuk a határukat a következőt kapjuk:

$$\partial_2[0, 1, 2] = [0, 1] - [1, 2] + [0, 2]$$

$$\partial_2[0, 2, 3] = [2, 3] - [0, 2] + [0, 3]$$

Ebből látjuk, hogy ha egy ciklus tartalmaz egy háromszöget akkor tartalmazza annak összes szomszédját is. Tehát $H_2(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$. □

Állítás: Legyen X egy triangulálható topológikus tér. Ekkor X Euler-karakterisztikája:

$$\chi(X) = \sum (-1)^n b_n$$

Bizonyítás: Definíció szerint b_n a következő:

$$\begin{aligned} b_n &= \text{rk}\left(\text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})\right) \\ \sum (-1)^n b_n &= \sum (-1)^n \text{rk}\left(\text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})\right) = \\ &= \sum (-1)^n \left(\text{rk}(\text{Ker}(\partial_n)) - \text{rk}(\text{Im}(\partial_{n+1})) \right) = \\ &= \sum (-1)^n \left(\text{rk}(\text{Ker}(\partial_n)) + \text{rk}(\text{Im}(\partial_n)) \right) \end{aligned}$$

Mivel C_n egy szabad Abel-csoport ezért ez a szumma pont az Euler-karakterisztika képletét adja meg. $\square$

1.2 Szinguláris homológia

Definíció: Legyen X topológikus tér és vegyük a következő halmazt:

$$H = \{f : \Delta^n \rightarrow X \mid f \text{ homeomorfizmus}\}$$

A H halmazt a szinguláris n -szimplexek halmazának nevezzük, valamint C_n -el jelöljük a szinguláris n -szimplexek által generált szabad Abel-csoportot.

Tehát ha veszünk egy $\sigma \in C_n$ elemet, az egy véges tartójú $\mathbb{Z}$ értékű függvény lesz a szinguláris n -szimplexeken. C_n elemeit szinguláris n -láncoknak nevezzük. Hasonlóan az előzőekhez, a szinguláris-szimplexeken is definiálhatunk egy határleképezést a következőképpen:

$$\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}, \quad \partial_n(f) := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$$

Itt is ezen leképezés lineáris kiterjesztésével kapjuk meg a határleképezésünket.

Definíció: A $C(X) = (C_n(x), \partial_n)$ lánckomplexust az X topológikus tér szinguláris lánckomplexusának nevezzük, valamint a

$$H_n(X) = \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$$

csoportot az X tér n -edik szinguláris homológiacsoportjának nevezzük.

Megjegyzés: A homológia eredeti definiálásával ellentétben, ebből a definícióból egyértelműen látszik, hogy a szinguláris homológia egy X topológikus tér egyértelmű invariánsát határozza meg.

Megjegyzés: A szinguláris homológia segítségével definiálhatjuk általános topologikus terek Euler-karakterisztikáját.

Definíció: Legyen X topológikus tér, ekkor X Euler-karakterisztikája legyen egyenlő a következővel:

$$\chi(X) := \sum (-1)^n b_n$$

1.3 CW-komplexusok

Legyen X^0 egy diszkrét topológikus tér. Ekkor X^0 egy 0-dimenziós cella-komplekszus.

Azt mondjuk, hogy X^n egy n -dimenziós cella-komplexus, ha létezik egy X^{n-1} $n-1$ -dimenziós cella-komplexus és $\varphi_\alpha^n : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ ragasztó leképezések, hogy a következő teljesül:

$$X^n \cong \left(\coprod_{\alpha} D_{\alpha}^n \right) \cup X^{n-1} / \sim$$

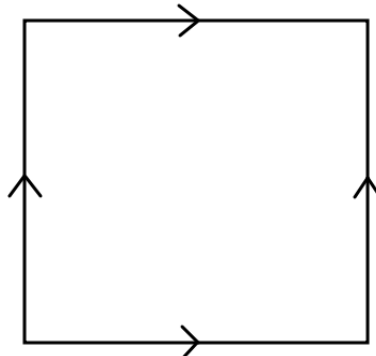
Itt a $\sim$ reláció a ragasztóleképezések által generált reláció, tehát a D_{α}^n golyók ragadnak az X^{n-1} "vázhoz".

X egy végtelen dimenziós cella-komplexus, ha $X = \bigcup_n X^n$ ahol bármely n -re X^n egy n -dimenziós cella-komplexus és szintén bármely n -re X^n a fenti módon állt elő X^{n-1} -ből, valamint $A \subset X$ zárt $\Leftrightarrow A \cap X^n \subset X^n$ zárt bármely n -re.

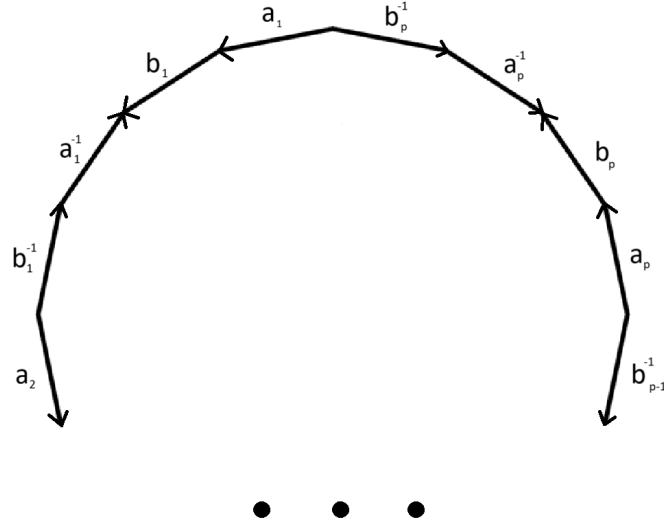
X^n -et az X n -vázának nevezzük (létezik egy természetes beágyazása X_n -nek). Definiáljuk továbbá a $\psi_n^{\alpha} : D_{\alpha}^n \rightarrow X$ karakterisztikus leképezéseket, valamint az $e_{\alpha}^n := \psi_n^{\alpha}(B_{\alpha}^n) \subset X$ halmazokat nevezzük n -celláknak, amiknek segítségével definiálhatunk egy X térnek cellafelbontását.

Feladat: Adjuk meg a $2g$ génuszú felületnek egy olyan cellafelbontását amiben egy darab 0, $2g$ darab 1 és egy darab 2-cella van.

Megoldás: Ismert a tórusz (T^2) következő azonosítása:



Jól látszik, hogy ez valóban egy cellafelbontását adja T^2 -nek. Ezt az azonosítást fogjuk általánosítani. Legyen a cellafelbontásunk a következő:



Ha megfigyeljük ezt a cella-felbontást, akkor láthatjuk, hogy a sokszög csúcsai összeragadnak egyetlen egy pontá, valamint egyetlen egy D^2 van a felbontásban és mivel az oldalak párossával ragadnak, ezért $2g$ darab 1-cella lesz a felbontásban.

1.4 CW-homológia

Definíció: Legyen az X tér $\{\varphi_\alpha^n\}$ ragasztóleképezésekkel megadott cella-felbontása. Legyen $C^{CW}(X) = (C_n^{CW}, \partial_n)$. Itt C_n^{CW} az n -cellák által generált szabad Ábelcsoport. Tehát $C_n^{CW} = \mathbb{Z}\langle \varphi_\alpha^n \rangle$. Már csak a határleképezést kell definiálnunk. Ehhez segítségül hívjuk a fokszám fogalmát. Legyen ∂_n határleképezés a következő:

$$\partial_n(\varphi_\alpha^n) := \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} \varphi_\beta^{n-1}$$

$d_{\alpha\beta}$ definiálásához használjuk a fokszám definícióját. $d_{\alpha\beta} := \deg(\varphi^{\alpha\beta})$, ahol $\varphi^{\alpha\beta} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, $\varphi^{\alpha\beta} = q^\beta \circ \varphi_\alpha^n$, valamint $q^\beta : X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1})$.

Megjegyzés: $X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}) \cong S^{n-1}$.

Definiáltunk tehát három különböző homológiát. Később be fogjuk látni, hogy ezek izomorfak egymással.

Ezt az állítást felhasználva lássuk be, hogy egy X topológikus tér nulladik homológia csoportja izomorf $\mathbb{Z}^k$ -val, ahol k az X tér útösszefüggőségi komponensek a száma.

Láttuk már korábban az általános n -szimplex homológiacsportjait:

$$H_k(\Delta^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{ha } k = 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ebből az összefüggésből következik, hogy:

$$H_0(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$$

ahol $\partial\Delta^2$ az általános kétdimenziós szimplex topológikus határát jelöli (egy háromszög a belseje nélkül), ami azt jelenti, hogy egy pont marad szabadon. Ez természetesen tovább általánosítható egy általános n -szögre. Ezek után legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ az X terünk útösszefüggőségi komponensei. Vegyük az X terünk sk_1 -ét, tehát az 1-vázát, és jól látható módon minden útösszefüggőségi komponensben egyetlen egy pont marad szabadon, tehát $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^k$, ahol k az X útösszefüggőségi komponenseinek száma.

1.5 A homológia tulajdonságai

Definíció: Legyenek X és Y triangulálható topológikus terek, valamint $f : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés a két tér között. Ekkor könnyen látható, hogy f indukál egy homomorfizmust a két tér homológiacsportjain, hiszen ha vesszük a $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ leképezésünket és ezt komponáljuk az f -el akkor kapunk egy $\sigma' : \Delta^n \rightarrow Y$ leképezést. Az indukált homomorfizmust f_* -al vagy $H_n(f)$ -el jelöljük.

Megjegyzés: Az előző definícióból következik, hogy ha $f : X \rightarrow Y$ egy homeomorfizmus akkor f_* izomorfizmus lesz a homológiacsportok között. Ebből következik az, hogy a homológia egy topológikus invariáns.

Definíció: Legyenek (C_n, ∂_n^C) , illetve (M_n, ∂_n^M) lánckomplexusok. Az $\alpha = (\alpha_n)$ homomorfizmus halmazt láncképezésnek nevezzük amennyiben az alábbi diagram kommutál:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}^C} & C_n & \xrightarrow{\partial_n^C} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^C} & C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}^C} \dots \\ & & \downarrow \alpha_n & & \downarrow \alpha_{n-1} & & \downarrow \alpha_{n-2} \\ \dots & \xrightarrow{\partial_{n+1}^M} & M_n & \xrightarrow{\partial_n^M} & M_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^M} & M_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}^M} \dots \end{array}$$

Állítás: α_n indukál egy homomorfizmust $H_n(C)$ és $H_n(M)$ között.

Bizonyítás: Elég ellenőrizni azt, hogy ha $h \in \text{Ker}(\partial_n^C)$, akkor $\alpha_n(h) \in \text{Ker}(\partial_n^M)$, illetve azt, hogy ha $h \in \text{Im}(\partial_{n+1}^C)$, akkor $\alpha(h) \in \text{Im}(\partial_{n+1}^M)$. Ezek mindegyike jól látható következménye a fenti diagram kommutativitásának. $\square$

Definíció: Legyen α és β láncleképezések C és M lánckomplexusok között, továbbá legyen $\varphi = (\varphi_n : C_n \rightarrow M_{n+1})$ homomorfizmushalmaz. A φ -t lánchomotópiának nevezzük ha teljesíti a következőt:

$$\partial\varphi = \beta - \alpha \pm \varphi\partial$$

Lemma: Amennyiben α és β láncleképezések lánchomotópok, akkor $H_n(C) = H_n(M)$.

Amennyiben α és β láncleképezések lánchomotópok, akkor $H_n(C) = H_n(M)$.

Bizonyítás: Legyen $x \in \text{Ker}\partial_n^C$, ekkor:

$$\alpha(x) - \beta(x) = \partial\varphi(x) \pm \varphi\partial(x) = \partial\varphi(x),$$

ami azt jelenti, hogy $\alpha(x) - \beta(x)$ egy határbeli elembe különbözik, tehát ugyanazt a leképezést indukálják a homológiákon. $\square$

Tétel: Legyenek f és g homotóp leképezések $(f, g : X \rightarrow Y)$. Ekkor $f_* = g_*$.

Bizonyítás: Jelöljük a $C_n(X)$ -en indukált $C_n(f)$ leképezést f_o -val. Vegyük a szokásos $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ standard n -dimenziós szimplexünket. Azt fogjuk belátni, hogy $f_o \circ \sigma$ és $g_o \circ \sigma$ "közel" vannak egymáshoz. Legyen f és g közötti homotópia az $F : X \times I \rightarrow Y$. Ekkor definiáljuk F_σ leképezést a következőképpen:

$$F_\sigma := F \circ (\sigma \times \text{Id}_I) : \Delta^n \times I \rightarrow Y$$

Ezek után daraboljuk fel a $\Delta^n \times I$ hasábot a következő módon szimplexekre:

$$\Delta^n \times I = \bigcup_{i=0}^n [0, 1, \dots, i, i', \dots, n']$$

. Itt a $\{0, 1, \dots, n\}$, illetve $\{0', 1', \dots, n'\}$ halmazok a hasáb alapjának, illetve a hasáb fedőlapjának csúcsait reprezentálják.

Ezek után definiálni fogunk homomorfizmusokat. Legyen P_F homomorfizmus a következő:

$$P_F : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}, \quad P_F(\sigma) := \sum_{i=1}^n (-1)^i F_\sigma[0, \dots, i, i', \dots, n']$$

Be fogjuk látni, hogy P_F egy lánchomotópia f_o és g_o . Ehhez a következőt kell igazolni:

$$\partial P_F = g_o - f_o \pm P_F \partial$$

$$\begin{aligned} \partial P_F(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F_\sigma[0, 1, \dots, \hat{j}, \dots, i, i', \dots, n'] \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F_\sigma[0, 1, \dots, i, i', \dots, \hat{j}, \dots, n'] \quad \text{és} \\ P_F(\partial \sigma) &= \sum_{j < i} (-1)^{i-1} (-1)^j F_\sigma[0, 1, \dots, \hat{j}, \dots, i, i', \dots, n'] \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^j F_\sigma[0, 1, \dots, i, i', \dots, \hat{j}, \dots, n'], \quad \text{tehát} \end{aligned}$$

$$\partial P_F(\sigma) + P_F(\partial \sigma) = F_\sigma[0', 1', \dots, n'] - F_\sigma[0, 1, \dots, n] = g_o(\sigma) - f_o(\sigma).$$

□

1.6 Mayer-Vietoris-sorozat

Tétel: Legyen $X = A \cup B = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$, ahol X topológikus tér. Ekkor létezik a következő hosszú egzakt sorozat:

$$\dots \rightarrow H_n(A \cap B) \rightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \rightarrow H_n(A \cup B) \rightarrow H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

Ennek a tételnek a segítségével kiszámolhatjuk bonyolultabb terek homológiacsoportjait is. A tétel testvérének mondható az ismert Van Kampen-tétel, ami szintén egy tér felbontását használja, csak míg a Mayer-Vietoris sorozat homológiák kiszámítására alkalmas, addig a Van Kampen terek fundamentális csoportjainak a kiszámítására használható.

Állítás: Legyenek L, M, N lánckomplexusok és az α illetve β leképezésekkel adott a következő rövid egzakt sorozat (RES):

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0$$

Ekkor létezik a következő hosszú egzakt sorozat (HES):

$$\dots \longrightarrow H_i(L) \xrightarrow{H_i(\alpha)} H_i(M) \xrightarrow{H_i(\beta)} H_i(N) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(L) \xrightarrow{H_{i-1}(\alpha)} \dots$$

Itt a $\partial_i[n] = [l]$, amennyiben létezik $m \in M$, hogy $\partial^M m = \alpha l$ és $\beta m = n$.

Bizonyítás: A bizonyítás diagramm vadászattal történik.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{i+1}^L} & L_i & \xrightarrow{\partial_i^L} & L_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}^L} & \dots \\
& & \downarrow \alpha_i & & \downarrow \alpha_{i-1} & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{i+1}^M} & M_i & \xrightarrow{\partial_i^M} & M_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}^M} & \dots \\
& & \downarrow \beta_i & & \downarrow \beta_{i-1} & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial_{i+1}^N} & N_i & \xrightarrow{\partial_i^N} & N_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}^N} & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

A diagrammban a ∂_i leképezés helyes és valóban kapunk egy hosszú egzakt sorozatot.

A fenti diagrammon látszik, hogy az előbb definiált ∂_i leképezés helyes és valóban kapunk egy hosszú egzakt sorozatot. $\square$

Láthatjuk tehát, hogy a Mayer-Vietoris sorozathoz kell egy rövid egzakt sorozatot találnunk.

Jelölés: Legyen X topológikus tér és legyen $A \subset X$. Jelöljük $C(A)$ -val az olyan szinguláris láncokat amelyek szinguláris szimplexei A -ba képződnek.

Ha a Mayer-Vietoris tételben szereplő A és B halmazokat vesszük akkor könnyen látszik, hogy kapunk egy rövid egzakt sorozatot (RES-t):

$$0 \longrightarrow C(A \cap B) \longrightarrow C(A) \oplus C(B) \longrightarrow C(A) + C(B) \longrightarrow 0$$

Ez a RES azonban jól látható módon nem a Mayer-Vietoris sorozatot indukálja, hiszen a $H_n(A \cup B)$ homológiacsoporthoz helyett $H_n(C(A) + C(B))$ csoportok vannak. Ennek a "kijavítására" használjuk a kis láncok tételét:

Tétel: Legyen X topológikus tér nyílt fedése az $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ halmazrendszer. Ezen kívül $X = \bigcup_\alpha \text{int}(U_\alpha)$. Definíció szerint legyen $C^\mathcal{U}(X)$ a következő:

$$C^\mathcal{U}(X) := \sum_\alpha C(U_\alpha) = \text{Im} \left(\bigoplus_\alpha C(U_\alpha) \xrightarrow{+} C(X) \right)$$

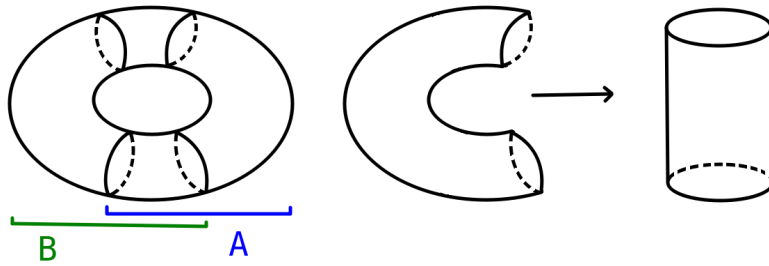
Ekkor igaz, hogy az $i : C^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C(X)$ természetes inklúzió izomorfizmust indukál a homológiacsoporthokon. Tehát igaz lesz, hogy

$$H_n(i) : H_n(C^{\mathcal{U}}(X)) \rightarrow H_n(X)$$

izomorfizmus.

Feladat: Igazoljuk, hogy $X = S^1 \times S^1 = T^2$ és $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ homológiacsoporthjai megegyeznek, de nem homeomorfak egymással.

Megoldás: Bontsuk fel T^2 -öt A és B halmazokra a következőképpen:



Írjuk fel a Meyer-Vietoris sorozatot az alábbi $A - B$ felbontással:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_2(A \cap B) \longrightarrow H_2(A) \oplus H_2(B) \longrightarrow H_2(T^2) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_1(A \cap B) \longrightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \longrightarrow H_1(T^2) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \longrightarrow H_0(T^2) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

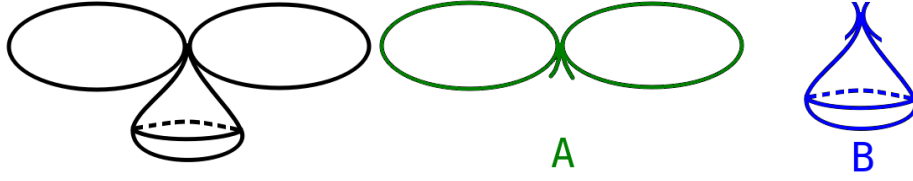
A T^2 homológiacsoporthjain kívül minden más homológiacsoporth könnyedén kiszámolható felhasználva, hogy a nulladik homológiacsoporth az útösszefüggőségi komponenseket "számolja ki":

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow ? \longrightarrow \\ &\longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow ? \longrightarrow \\ &\longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow ? \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Mivel a T^2 -nek egy darab útösszefüggőségi komponense van, ezért tudjuk, hogy $H_0(T^2) = \mathbb{Z}$. Továbbá egy egzakt sorozatunk van, tehát:

$$H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$$

. Az $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ -nek vegyük a következő felbontását:



Erre az A - B felbontásra felírva a Mayer-Vietoris sorozatot hasonló sort mint az előbb, tehát:

$$H_*(T^2) \cong H_*(S^1 \vee S^1 \vee S^2)$$

Már csak annyit kell beléssünk, hogy $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ és T^2 nem homeomorfak egymással. De ez könnyen látszik abból, hogy $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ -ben létezik olyan pont amit ha elvonnánk a térből, úgy három különböző útösszefüggőségi komponenst kapnánk, míg a T^2 esetében ilyen pont nem létezik.

Definíció: Legyen X topológikus tér és $A \subset X$. $C(X, A) := C(X)/C(A)$ lánckomplexus elemeit relatív láncoknak nevezzük, míg a $H_n(X, A) := H_n(C(X, A))$ -át az n . homológiacsoporthoz tartozóknak.

Vegyük a következő rövid egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow C(A) \longrightarrow C(X) \longrightarrow C(X, A) \longrightarrow 0$$

Ez indukál egy hosszú egzakt sorozatot amit az (X, A) térpár relatív homológia hosszú egzakt sorának nevezzük:

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_n} H_n(X) \xrightarrow{j_n} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

Definíció: A $C^{\mathcal{U}}(X, A) := C^{\mathcal{U}}(X)/C^{\mathcal{U} \cap A}(A)$ a relatív $\mathcal{U}$ kis láncok szimpliciális komplexusának nevezzük, ahol $\mathcal{U} \cap A = \{U_\alpha \cap A\}$.

Tétel: (Relatív kis láncok tétele): Legyen X topológikus tér és $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ nyílt fedése az X -nek, úgy hogy $X = \bigcup_\alpha \text{int}(U_\alpha)$, valamint legyen $A \subset X$. Ekkor igaz lesz az, hogy a $C^{\mathcal{U} \cap A}(X) \rightarrow C(A)$, valamint a $C^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C(X)$ inklúziók indukálnak egy $i : C^{\mathcal{U}}(X, A) \rightarrow C(X, A)$ láncképezést, ami pedig indukál egy izomorfizmust a homológiacsoporthoz tartozóknak:

$$H_n(C^{\mathcal{U}}(X, A)) \cong H_n(X, A)$$

Bizonyítás: Vegyük a következő diagrammot:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^{\mathcal{U} \cap A}(A) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X) & \longrightarrow & C^{\mathcal{U}}(X, A) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i & & \\
0 & \longrightarrow & C(A) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X, A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Az i definíciója miatt ez egy kommutatív diagramm lesz, valamint a felső és alsó sor is egy-egy rövid egzakt sorozat, amik egyenként indukálnak egy-egy hosszú egzakt sorozatot homológiacsoporthoz. Emellett a vertikális leképezések indukálni fognak leképezéseket a homológiacsoporthoz, tehát kapunk egy újabb diagrammot két darab hosszú egzakt sorozattal, valamint leképezésekkel a két sorozat között (egy végtelen létrát). Erre az új diagrammra alkalmazzuk az ötös lemmát és megkapjuk a kívánt állítást. $\square$

Megjegyzés: Az ötös lemma azt mondja ki, hogy ha adott egy kommutatív diagramm ami a következőképpen néz ki, valamint a felső és alsó sor egy-egy rövid egzakt sorozat és az $i_1, \dots, i_4$ leképezések izomorfizmusok, akkor a j leképezés is izomorfizmus lesz (az $A_1, \dots, B_5$ objektumok Abel-csoportok).

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\
\downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \downarrow j & & \downarrow i_3 & & \downarrow i_4 \\
B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5
\end{array}$$

Tétel: Vegyük az X topologikus teret és az U illetve A halmazokat úgy, hogy $U \subset A \subset X$, valamint $\bar{U} \subset \text{int}(A)$. Ekkor teljesül, hogy az $(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ inklúzió izomorfizmust indukál a homológiákon:

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_n(X, A)$$

A tétel egy átfogalmazása lehet a következő: legyen $X = A \cup B$, valamint legyen igaz is, hogy $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Ekkor igaz lesz az, hogy a $(B, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, A)$ inklúzió izomorfizmust indukál:

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(A \cup B, A)$$

Megjegyzés: A két állítás ekvivalenciája látható a $B = X \setminus U$ választással.

Bizonyítás: Definíció szerint legyen $\mathcal{U} = \{A, B\}$. Alkalmazhatjuk Noether izomorfizmus tételét alkalmazva láthatjuk, hogy $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ inklúzió izomorfizmust indukál:

$C(B, A \cap B) \rightarrow C^{\mathcal{U}}(X, A)$ izomorfizmus.

Felhasználva azt, hogy a következő diagramm kommutál, valamint alkalmazva a kis láncok tételét kapjuk a kivágási tétel állítását:

$$\begin{array}{ccc} C(B, A \cap B) & \xrightarrow{\quad} & C^{\mathcal{U}}(X, A) \\ & \searrow & \swarrow \\ & C(X, A) & \end{array}$$

□

1.7 Redukált homológia

Definíció: Legyen (X, x_0) egy pontozott tér, ahol $x_0 \in X$. A $\tilde{H}_n(X) := H_n(X, x_0)$ az X tér n . redukált homológia-csoportjának nevezzük.

Nem nehéz meggondolni, hogy az x_0 pont választásától nem függ $\tilde{H}_n(X) \forall n \in \mathbb{N}$, valamint $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$, ha $n > 0$. Emellett $\tilde{H}_0(X) = \mathbb{Z} \oplus H_0(X)$.

Definíció: Legyen X topologikus tér és legyen $A \subset X$. Azt mondjuk, hogy (X, A) jó pár, ha létezik olyan V környezete A -nak X -ben, hogy A deformációs retraktuma V .

Tegyük fel, hogy (X, A) egy jó pár. Ekkor a $q : X \rightarrow X/A$ hányadosleképezés indukál egy h_1 és h_2 homeomorfizmust, ahol $h_1 : X/A \rightarrow X/A \setminus A/A$ és $h_2 : V/A \rightarrow V/A \setminus A/A$.

Tétel: Legyen X topologikus tér, valamint (X, A) jó pár. Ekkor a $h : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ hányadosleképezés izomorfizmust indukál a következő homológia-csoportokon:

$$h_* : (X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A) \text{ izomorfizmus.}$$

Bizonyítás: Vegyük a következő diagrammot:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X, V) & \xleftarrow{\text{kivágási tétel}} & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow h_* & & \downarrow h_* & & \downarrow h_* \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{\text{kivágási tétel}} & H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A) \end{array}$$

Ezen diagramm kommutativitásából következik a tétel állítása.

□

Definíció: Legyen X topologikus tér és $x \in X$. A $H_n(X, X \setminus x)$ homológiacsoportokat lokális homológiacsoportoknak nevezzük.

Példa: Ha M egy n -sokaság és $x \in M$, valamint legyen U az x egy nyílt környezete úgy hogy $U \cong B^n$. Alkalmazva kivágási tételt kapjuk, hogy:

$$H_i(M, M \setminus x) \cong H_i(U, U \setminus x) \cong H_i(B^n, B^n \setminus 0) \cong \tilde{H}_i(S^n).$$

De tudjuk, hogy:

$$\tilde{H}_i \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{ha } i = n, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy egy n -dimenziós sokaság dimenziója valóban a sokaság egy invariánsa.

Tétel: Vegyük a $b : D^k \rightarrow S^n$ leképezést, ami a topologikus beágyazása D^k -nak S^n -be. Ekkor igaz a következő:

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus b(D^k)) \cong 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ezek után vegyük a $h : S^k \rightarrow S^n$ leképezést, az S^k topologikus beágyazását S^n -be, ahol $k < n$. Ekkor:

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)) \cong \tilde{H}_i(S^{n-j-1}) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Bizonyítás: Az első fontos megfigyelés az, hogy $D^k \cong I^k$, ahol $I^k = [0, 1]^k$. A bizonyítás indukcióval történik k -ra: Defináljuk A_+ és A_- halmazokat:

$$A_+ := S^n \setminus b\left(I^{k-1} \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$$

$$A_- := S^n \setminus b\left(I^{k-1} \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

Ezen definíciókat használva kapjuk a következő összefüggéseket:

$$A_+ \cap A_- = S^n \setminus b(I^k)$$

$$A_+ \cup A_- = S^n \setminus b\left(I^{k-1} \times \left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$$

Az állítás $k = 0$ -ra triviálisan igaz. Most az indukciós lépést felhasználva tudjuk, hogy:

$$\tilde{H}_i(A_+ \cup A_-) \cong 0$$

Továbbá az A_+, A_- felbontásból származó redukált Mayer-Vietoris sorozatból kapjuk, hogy:

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus b(I^k)) \cong \tilde{H}_i(A_+) \oplus \tilde{H}_i(A_-)$$

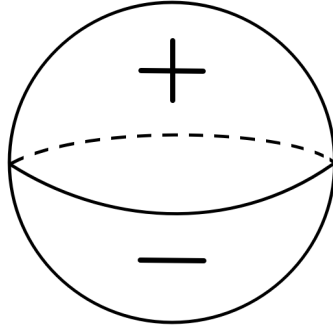
Ezt felhasználva indirekten tegyük fel, hogy létezik egy α ciklus $S^n \setminus b(I^k)$ -ban ami viszont nem határ. De az előző izomorfizmus összefüggést felhasználva kapjuk, hogy α A_+ -ban, vagy A_- -ban sem határ. Vegyünk most egy intervallumsorozatot a következőképpen:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots,$$

ahol $I_1 = [0, 1]$. Továbbá legyen $p = \bigcap I_i$ egy pont. Az I_i sorozat definíciójából kapjuk, hogy α nem határ $S^n \setminus b(I^{k-1} \times I_i)$ -ben sem bármely $i \in \mathbb{N}$. Azonban az indukciós feltevésünk miatt α határ $S^n \setminus b(I^{k-1} \times p)$ -ben, vagyis $\exists \beta : \partial \beta = \alpha$. Viszont β tartója kompakt, ezért létenie kell olyan $i \in \mathbb{N}$ -nek, hogy:

$$\beta \in S^n \setminus b(I^{k-1} \times I_i).$$

A tétel második részének bizonyításához szintén a matematikai indukció módszerét használjuk. Ismét a $k = 0$ eset triviálisan igaz. Bontsuk fel az S^k gömbfelületet az északi és déli félgömb únójjára: $S^k = D^+ \cup D^-$.



Definiáljuk a B_+ és a B_- halmazokat:

$$B_+ = S^n \setminus b(D_+^k)$$

$$B_- = S^n \setminus b(D_-^k)$$

Most használjuk fel a tétel első részét, valamint a B_+ és B_- felbontással vett redukált Mayer-Vietoris sorozatot és kapjuk, hogy:

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^{k-1})) \cong \tilde{H}_i(S^n \setminus h(S^k)).$$

□

Jordan-görbe tétel: Legyen $h : S^1 \rightarrow S^2$ topologikus beágyazása S^1 -nek S^2 -be. Ekkor igaz lesz, hogy $S^2 \setminus \text{im}(h)$ tér két darab útösszefüggőségi komponensre bomlik.

Bizonyítás: Az előző tételt alkalmazva kapjuk, hogy:

$$\tilde{H}_0(S^2 \setminus h(S^1)) \cong \mathbb{Z}$$

ami azt jelenti, hogy a térnek két darab útösszefüggőségi komponense van. A tétel tovább általánosítható, hiszen ha most a h az S^{n-1} topologikus beágyazása S^n -be, akkor igaz az, hogy:

$$\tilde{H}_0(S^n \setminus h(S^{n-1})) \cong \mathbb{Z}$$

ami pedig szintén azt jelenti, hogy az $S^n \setminus S^{n-1}$ térnek két darab útösszefüggőségi komponense van. $\square$

Említettem, hogy a homológia különböző megközelítései ugyanazokat a homológia csoportokat definiálják. Annak a bizonyítását hogy a CW-homológia ugyanazokat a homológia-csoportokat indukálja mint a szimpliciális vagy a szinguláris homológia nem ismertetem a dolgozatban.

2. Homologikus algebra

Definíció: Legyen A egy R -modulus ($A \in R\text{-Mod}$). Tekintsük az alábbi sorozatot:

$$\underline{F} \longrightarrow A \longrightarrow 0 = \dots \longrightarrow F_n \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Amennyiben a fenti sorozat egzakt, valamint az összes F_i szabad R -modulus, úgy eme sorozatot az A R -modulus egy szabad feloldásának nevezzük.

Amennyiben $\mathcal{F} : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ egy additív funktor, valamint az A egy R -modulus és F ennek egy szabad feloldása, akkor $\mathcal{F}(F)$ félig egzakt és igaz hasonlóan a szimpliciális komplexusokhoz, hogy itt is $H_i(\mathcal{F}(F))$ azt méri, hogy $\mathcal{F}(F)$ mennyire egzakt.

Lemma: Legyen $h : A \rightarrow B$ egy modulus-homomorfizmus és $F = \underline{F} \rightarrow A \rightarrow 0$, valamint $G = \underline{G} \rightarrow B \rightarrow 0$ szabad feloldások. Ekkor igaz lesz, hogy h indukál egy $\underline{h} : F \rightarrow G$ láncleképezést.

Bizonyítás: A két szabad feloldás között szeretnénk definiálni leképezéseket. Tekintsük az alábbi diagrammot és jelöljük a feloldásokban a lévő leképezéseket a diagrammnak megfelelően:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{f_{n+1}} & F_n & \xrightarrow{f_n} & \dots & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h_n & & & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_0 & & \downarrow h & & \\ \dots & \xrightarrow{g_{n+1}} & G_n & \xrightarrow{g_n} & \dots & \xrightarrow{g_2} & G_1 & \xrightarrow{g_1} & G_0 & \xrightarrow{g_0} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

A h_0 definiálásával könnyű dolgunk van, hiszen g_0 szürjektív. Ahhoz hogy h_1 -et megfelelően definiálhassuk, tudnunk kell azt, hogy:

$$\text{Im}(\alpha_0 f_1) \subset \text{Im}(g_1)$$

Ez azonban következik abból, hogy egzakt sorunk van felül és abból ahogyan definiáltuk h_0 -át. A további leképezéseket hasonló módon definiálhatjuk indukció segítségével. $\square$

Állítás: A $H_i(\mathcal{F}(F))$ csoportok nem függenek a szabad feloldástól, csakis kizárólag az $\mathcal{F}$ -től valamint A -tól.

Bizonyítás: Az előző lemmát alkalmazva az $\text{Id}_A : A \rightarrow A$ identikus leképezésre kapjuk az állítást. $\square$

Definíció: Vegyük az $\mathcal{F} : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ additív funktort. Ekkor az $\mathcal{F}$ i -edik derivált funktorát a következőképpen definiáljuk:

$$\text{Der}^i(\mathcal{F})(A) := H_i(\mathcal{F}(F)).$$

Itt az A egy R -modulus és az F az A egy szabad feloldása. Jelölje a $\otimes G$ a G Abel-csoporttal való tenzorszorzást: $\otimes G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$. Ennek a funktornak a derivált funktorát a következőképpen jelöljük:

$$\text{Tor}(A; G) := \text{Der}^1(\otimes G)(A).$$

Nem nehéz látni, hogy a magasabb derivált funktorok mind nullák.

Tétel: Legyen C lánckomplexus. Ekkor a következő sorozat egzakt:

$$0 \longrightarrow H_n(C \otimes G) \longrightarrow H_n(C; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(C); G) \longrightarrow 0$$

A tételt nem bizonyítom.

Definíció: Legyen R egy kommutatív egységelemes gyűrű, valamint legyen L egy lánckomplexus. Tegyük fel, hogy az L lánckomplexus grádicsai R -modulusok (L_i -k a grádicsok), valamint tegyük fel azt is, hogy a határleképezések R -modulus homomorfizmusok. Ekkor L -et R -lánckomplexusnak nevezzük.

Definíció: Legyenek L és M két R -lánckomplexus. Ekkor definiáljuk az $L \otimes_R M$ R -lánckomplexust:

$$(L \otimes_R M)_n := \bigotimes_i L_i \otimes_R M_{n-i}$$

Definiálnunk kell még a határleképezésünket is. Amennyiben $l \in L_i$, $m \in M_{n-i}$, úgy legyen a határleképezésünk a következő:

$$\partial(l \otimes m) := \partial l \otimes m + (-1)^i l \otimes \partial m$$

Tétel: Legyenek L és M R -lánckomplexusok, ahol az R főideálgyűrű. Ekkor a következő egy egzakt sor lesz:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_i H_i(L) \otimes_R H_{n-i}(M) \longrightarrow H_n(L \otimes_R M) \longrightarrow \bigoplus_i \text{Tor}_R(H_i(L), H_{n-i-1}(M)) \longrightarrow 0$$

3. Kohomológia

Az előzőekben szó esett funktorokról. Ilyen volt például a $\otimes G$ tenzorszorzás funktor. A kohomológia definiálásához ezúttal a következő funktort hívjuk segítségül: $\text{Hom}(\cdot, G)$. Ez a funktor kontravariáns, ami a későbbiekben sok hasznunkra fog válni.

Definíció: Vegyünk egy (C, ∂) lánckomplexust, valamint egy G Abel-csoportot. Cseréljük ki a C_i grádicsokat a G szerinti duálisukra, pontosabban $\text{Hom}(C_i, G)$ -re, valamint vegyük a ∂ határleképezések duális homomorfizmusait: $\partial^* = d$. Így kapunk egy láncot, ahol megfordulnak a nyilak irányai:

$$\dots \xleftarrow{d_{i+1}} \text{Hom}(C_{i+1}, G) \xleftarrow{d_i} \text{Hom}(C_i, G) \xleftarrow{d_{i-1}} \text{Hom}(C_{i-1}, G) \xleftarrow{d_{i-2}} \dots$$

Ezt a struktúrát kolánckomplexusnak nevezzük.

Definíció: $C^*(X, G)$ -vel jelöljük az X szinguláris kolánckomplexusát, valamint $H^i(X, G)$ -vel a kolánc kohomológia-csoportjait.

Több homológiaelméleti tételnek is létezik duálisa. Ilyen például a Mayer-Vietoris tétel:

Tétel: Legyen X topologikus tér, valamint legyen $A, B \subset X$, úgy hogy $X = A \cup B$. Az is legyen igaz továbbá, hogy $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Ekkor létezik a következő hosszú egzakt sorozat:

$$\dots \leftarrow H^n(A \cap B) \leftarrow H^n(A) \oplus H^n(B) \leftarrow H^n(A \cup B) \leftarrow H^{n-1}(A \cap B) \leftarrow \dots$$

Hasonlóan definiálhatjuk a relatív kohomológia-csoportokat:

Definíció: Legyen X topologikus tér és legyen $A \subset X$ egy jó térpár. Ekkor

$$C^*(X, A; G) = \text{Hom}(C_*(X, A), G)$$

jelöli a relatív kolánccokat, valamint a

$$H^i(X, A; G)$$

jelöli az i -edik relatív kohomológia-csoportokat.

Tétel: Vegyük a következő rövid egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow C^*(X, A; G) \longrightarrow C^*(X; G) \longrightarrow C^*(A, G) \longrightarrow 0$$

Ez a RES indukál egy hosszú egzakt sorozatot:

$$\dots \longleftarrow H^n(A) \longleftarrow H^n(X) \longleftarrow H^n(X, A) \longleftarrow H^{n-1}(A) \longleftarrow \dots$$

Definíció: Legyen X topologikus tér valamint legyen $x_0 \in X$. Ekkor az i -edik redukált kohomológia-csoport a következő:

$$\tilde{H}^n(X) := H^n(X, x_0)$$

Megszokhattuk ad eddigiekben, hogy a C lánckomplexusaink szabad Abel-csoportoknak lánckomplexusai. Ezt használjuk fel a következő definícióban:

Definíció: Legyen C szabad Abel-csoportok egy lánckomplexusa. Ekkor legyen a h egy homomorfizmus:

$$h : H^n(C; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C), G)$$

h definíciója a következő:

$$h[\alpha]([\beta]) := \alpha(\beta)$$

Itt $\alpha \in \text{Hom}(C_n, G)$ kociklus valamint $\beta \in C_n$ ciklus.

Definíció: Vegyünk egy $h : A \rightarrow B$ homomorfizmust. Ennek a homomorfizmusnak a komagja a következő:

$$\text{Coker}(h) := B / \text{Im}(h)$$

Megjegyzés: Ellenőrizhetjük, hogy a Coker definíciója valóban duálisa a ker-nek. Ez az alábbi két darab rövid egzakt sorozatból látszik:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(h) \longrightarrow A \xrightarrow{h} B$$

$$0 \longleftarrow \text{Coker}(h) \longleftarrow B \xleftarrow{h} A$$

Könnyű azt is ellenőrizni, hogy ha a

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

sorozat egzakt, akkor kaphatunk belőle egy RES-t:

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(\partial_{n+2}) \longrightarrow C_n \longrightarrow \text{ker}(\partial_{n-1}) \longrightarrow 0$$

Állítás: A fentebb ismertetett $h : H^n(C; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(C), G)$ homomorfizmus jól definiált, valamint szürjektív. Emellett igaz lesz az is, hogy:

$$\text{ker}(h) \cong \text{Coker}(i_{n-1}^*)$$

Itt az i_{n-1}^* a következő:

$$i_{n-1}^* : Z_{n-1}^* \rightarrow B_{n-1}^*, \text{ az } i_{n-1} : B_{n-1} \rightarrow Z_{n-1} \text{ inklúzió duálisa.}$$

Bizonyítás: Először meg kell mutatnunk, hogy a h jóldefiniált. Definíció szerint $\delta\alpha(\beta) = \alpha(\partial\beta)$. Ekkor tehát igaz, hogy:

$$\alpha \text{ kociklus} \Leftrightarrow \delta\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha|_{B_n} = 0$$

Legyen $\alpha' = \alpha + a$, valamint $\beta' = \beta + b$, ahol a kohatár és b pedig határ. Ekkor igaz lesz, hogy $\alpha'(\beta') = \alpha'(\beta)$. Ez azért van mert az α kociklus és mivel β' egy ciklus, így teljesül a következő:

$$a(\beta') = \delta u(\beta') = u(\partial\beta') = 0$$

Ezekből következik, hogy $\alpha'(\beta') = \alpha(\beta)$. Ezek után igazolnunk kell, hogy a h leképezés szürjektív. Vegyük az $i : Z_n \rightarrow C_n$ inklúziót. Ehhez létezik egy $p : C_n \rightarrow Z_n$ homomorfizmus, amire igaz lesz, hogy $pi = \text{Id}_{Z_n}$. Ezek után legyen $\varphi \in \text{Hom}(H_n(C), G)$. Jól látszik, hogy $\exists! \varphi_1 : Z_n \rightarrow G$ úgy hogy $\varphi_1|_{B_n} = 0$ és $\forall \beta : \varphi[\beta] = \varphi_1(\beta)$, ahol β egy ciklus. Definíció szerint legyen $\varphi_2 := \varphi_1 p$. Ekkor igaz lesz, hogy:

$$\delta\varphi_2(\beta) = \varphi_2(\partial\beta) = \varphi_1 p(\partial\beta) = \varphi_1(\partial\beta) = 0$$

Itt kihasználtuk azt, hogy $\varphi_1|_{B_n} = 0$. Megkapjuk ezek után, hogy φ_2 kociklus, valamint:

$$h[\varphi_2](\beta) = \varphi_2(\beta) = \varphi_1(\beta) = \varphi[\beta]$$

Hátra maradt még annak a bizonyítása, hogy $\text{Ker}(h) \cong \text{Coker}(i_{n-1}^*)$. Ehhez vegyük a következő rövid egzakt sorozatot:

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

Vegyük most a Z_n -ek, a C_n -ek és B_n -ek hosszú egzakt sorozatait, majd azoknak vegyük a következő rövid egzakt sorozatát:

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow C \longrightarrow B_- \longrightarrow 0$$

Itt a B_- azt jelöli csupán hogy ott az indexek egyel csökkentve vannak. Az előzőekben láthattuk hogy az $i : Z_n \rightarrow C_n$ hasad:

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\quad} C \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Vegyük ennek a rövid egzakt sorozatnak a duálisát, ami szintén egy rövid egzakt sorozat lesz hiszen a $\text{Hom}(\cdot, G)$ funktorral állítottuk elő és tudjuk hogy a funktorok megtartják az "egyenleteket":

$$0 \longleftarrow Z^* \longleftarrow C^* \longleftarrow B_-^* \longleftarrow 0$$

Itt az $A^* = \text{Hom}(A, G)$ -t jelöli. Használjuk most az egyik "duális tételünket", miszerint a fenti rövid egzakt sorozat indukálja a következő hosszú egzakt sorozatot:

$$\dots \longleftarrow B_n^* \xleftarrow{d_n} Z_n^* \longleftarrow H^n \longleftarrow B_n^* \xleftarrow{d_{n-1}} Z_{n-1}^* \longleftarrow \dots$$

A d_n kohatár-leképezést az alábbi diagram definiálja:

$$\begin{array}{ccccccc} Z_{n+1}^* & \longleftarrow & C_{n+1}^* & \xleftarrow{\delta} & B_n^* & & \\ & \nwarrow 0 & \swarrow \delta & \nearrow d_n & \nwarrow 0 & & \\ & & Z_n^* & \longleftarrow & C_n^* & \longleftarrow & B_{n-1}^* \end{array}$$

Ebből következik az is, hogy $i_n^* = d_n$. A hosszú egzakt sorozatunkból az előbbieken ismertetett módon vágjuk ki a következő rövid egzakt sorozatot:

$$0 \longleftarrow \ker(i_n^*) \longleftarrow H^n \longleftarrow \text{Coker}(i_{n-1}^*) \longleftarrow 0$$

Mivel $\ker(i_n^*) = \{\varphi : Z_n \rightarrow G : \varphi|_{B_n} = 0\}$ amik bijekcióban állnak a $Z_n/B_n \rightarrow G$ homomorfizmusokkal, vagyis igaz az, hogy:

$$\ker(i_n^*) \cong \text{Hom}(H_n(C), G).$$

Ebből viszont az következik, hogy a rövid egzakt sorozatunkban a $H^n \rightarrow \ker(i_n^*)$ megegyezik a h -val. Tehát következik az állításunk utolsó része:

$$\ker(h) \cong \text{Coker}(i_{n-1}^*)$$

□

Vegyük a $H_{n-1}(C)$ csoport következő szabad feloldását:

$$F : 0 \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(C) \longrightarrow 0$$

Most erre az F szabad feloldásra hattatva a $\text{Hom}(\cdot, G)$ funktort kapjuk a következő félig egzakt sort:

$$F^* : 0 \longleftarrow B_{n-1}^* \longleftarrow Z_{n-1}^* \longleftarrow H_{n-1}^*(C) \longleftarrow 0$$

Kiszámolva az F^* első kohomológia-csoportját kapjuk, hogy:

$$H^1(F^*) = \text{Coker}(i_{n-1}^*)$$

Ez pedig a $\text{Hom}(\cdot, G)$ funktor első derivált funktora, aminek a jelölése: $\text{Ext}(\cdot, G)$.

Tétel: Legyen C lánckomplexus. Ekkor a következő sorozat egzakt:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C); G) \longrightarrow H^n(C; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(C); G) \longrightarrow 0$$

A tételt nem bizonyítom.

A kohomológia bevezetésének eddig látszólag nem sok értelme van, azonban van egy tulajdonsága a homológiával szemben, mégpedig az, hogy bevezethető rajta egy művelet, egy szorzás:

Definíció: Legyen X egy topologikus tér és legyen R egy gyűrű. Emellett legyen $\varphi \in C^k(X, R)$, valamint $\psi \in C^l(X, R)$ két darab kolánc. Ekkor φ és ψ csészeszorzata $(\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X; R))$ a következő:

$$\varphi \smile \psi(\sigma) = \varphi(\sigma \mid [v_0, \dots, v_k])\psi(\sigma \mid [v_k, \dots, v_{k+l}])$$

Itt a $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$ egy szinguláris $k+l$ szimplex.

Lemma: Legyen $\varphi \in C^k(X, R)$, valamint $\psi \in C^l(X, R)$ két darab kolánc. Ekkor:

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi$$

Bizonyítás: Elég megmutatni egy szimplexre. Legyen $\Delta^{k+l+1} \rightarrow X$, ekkor:

$$\delta\varphi \smile \psi(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma \mid [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k])\psi(\sigma \mid [v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1}])$$

valamint

$$(-1)^k \varphi \smile \delta\psi(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma \mid [v_0, \dots, v_k])\psi(\sigma \mid [v_k, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}])$$

Összeadva a két egyenlőséget kapjuk, hogy:

$$\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi \smile \psi(\partial\sigma)$$

Tudva azt, hogy:

$$\partial\sigma = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \sigma \mid [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}]$$

következzik az lemma állítása. □

Tétel: Vegyük az X és Y topologikus tereket, amik egyben cella-komplexusok is, valamint tegyük fel, hogy $H^k(Y; R)$ szabad R -modulus minden k -ra. Ekkor igaz lesz, hogy

$$H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y; R)$$

izomorfizmus. Itt az $\times(\alpha \otimes \beta) = \alpha \times \beta := p_X^*(\alpha) \smile p_Y^*(\beta)$. Ezt a tételt Künneth formulának is szokás hívni.

A tételt nem bizonyítom. Ennek ellenére ennek a tételnek fontos szerepe lesz a későbbiekben, ugyanis később bevezetem a vektornyaláb fogalmát és ezeken belül is a komplex vektornyalábok tanulmányozásában fontos szerepet játszik a tétel abban, hogy eme nyalábok bizonyos invariánsait meghatározzuk. Ez lesz kibontva akkor amikor Chern osztályokról lesz szó.

A kohomológiát számos helyen használják az algebrai topológián belül. A dolgozatban azonban csak vektornyalábok karakterizálásában fogom alkalmazni.

4. Fibrált nyalábok

4.1 Definíciók

Definíció: Legyenek E, F és B topologikus terek valamint legyen $q : E \rightarrow B$ leképezés a két tér között úgy, hogy létezik egy $\mathcal{U}$ nyílt fedése B -nek, hogy léteznek $\varphi_U : U \times F \rightarrow q^{-1}U$ homeomorfizmusok $\forall U \in \mathcal{U}$ -ra, hogy $\pi_U = q\varphi_U$. Ekkor q leképezést F fibrumú fibrált nyalábnak nevezzük. A B topologikus teret bázis, míg az E teret totális térnek nevezzük.

$$\begin{array}{ccc} E & \longleftarrow & F \\ \downarrow q & & \\ B & & \end{array}$$

Továbbá φ_U homeomorfizmusokat térképeknek, míg a $\{\varphi_U : U \in \mathcal{U}\}$ halmazt a fibrált nyaláb atlaszának hívjuk.

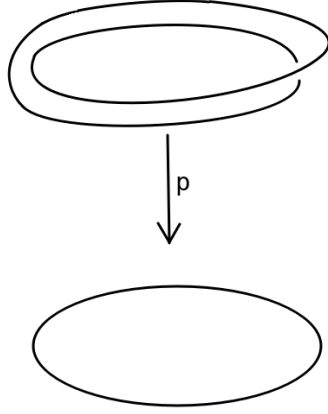
Definíció: Amennyiben az E totális tér $B \times F$ alakú úgy triviális nyalábról beszélünk.

Például vegyük azt a nyalábot aminek a totális tere az $S^1 \times I$:

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times I & \longleftarrow & I \\ \downarrow \pi & & \\ S^1 & & \end{array}$$

Példa: Talán a legfontosabb példa a fibrált nyalábra a Hopf-nyaláb (Hopf-fibrálás): Legyen a totális térünk az S^3 , valamint a bázisunk S^2 . Az F fibrumunk S^1 lesz, úgy hogy azonosítjuk az S^3 gömbfelületünket $\mathbb{C}^2$ egységgömbjével, és minden $s \in S^3$ -hoz rendeljük hozzá az $[s] \in \mathbb{CP}^1$ projektív egyenest.

Példa: Egy másik fontos példa a diszkrét fibrumú nyalábok. Ezek nem mások mint a topológiából jól ismert fedések. Például az S^1 kettős fedése, ahol minden pont fibruma két pont:



Nézzük meg a Hopf-fibrálás egy konkrét konstrukcióját:

Amint az előzőekben említettem S^3 -at azonosítsuk $\mathbb{C}^2$ egységgömbjével. Tehát $S^1 = (z_1, z_2)$, ahol $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, valamint $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Az S^2 -öt azonosítsuk a következővel: $S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, $S^2 = (z, r)$, ahol $z \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ és $|z|^2 + r^2 = 1$. Magát a fibrálást definiáljuk a következőképpen:

$$q(z_0, z_1) := (2z_0z_1^*, |z_0|^2 - |z_1|^2)$$

Ellenőrizzük, hogy $q(z_0, z_1) \in S^2$:

$$(2z_0z_1^*)^2 + (|z_0|^2 - |z_1|^2)^2 = (|z_0|^2 + |z_1|^2)^2 = 1$$

q definíciójából jól látszik, hogy ha veszünk két különböző elemet $\mathbb{C}^2$ -ből $((z_0, z_1)$ -et és (v_0, v_1) -öt), akkor $q(z_0, z_1) = q(v_0, v_1) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, (z_0, z_1) = \lambda(v_0, v_1)$. Ebből az következik, hogy egy pont ösképe S^2 -ön egy S^1 , tehát minden pont fibruma egy S^1 :

$$\begin{array}{c} S^3 \longleftarrow S^1 \\ \downarrow q \\ S^2 \end{array}$$

Definíció: Legyen $q : E \rightarrow B$ egy F fibrumú nyaláb, valamint legyenek φ_U és φ_v lokális térképei a nyalábnak. A $q^{-1}(U \cap V)$ -nek megadtuk két tréképét is. Definiálunk egy áttérésfüggvényt φ_{UV} -t a következőképpen:

$$\varphi_{UV} : U \cap V \rightarrow \text{Homeo}(F)$$

és igaz rá, hogy:

$$\varphi_V(b, f) = \varphi_U(b, \varphi_{UV}(b)f)$$

.

Megjegyzés: A fibrúlt nyaláb definíciójából következik, hogy egyetlen egy függvény rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Definíció: Vegyük a $q : E \rightarrow B$ F fibrumú nyalábot. A $\sigma : B \rightarrow E$ leképezést szelésnek nevezzük, ha:

$$q\sigma = \text{Id}_B$$

A szelések halmazát $\Gamma(E)$ -vel jelöljük.

Definíció: Vegyük a $q : E \rightarrow B$ F fibrumú nyalábot, valamint vegyük az $\alpha : A \rightarrow B$ folytonos leképezést. Ekkor:

$$\alpha^* := \{(a, e) \in A \times E : \alpha(a) = q(e)\}$$

az E visszahúzása α mentén.

Állítás: Legyen $q : E \rightarrow B$ egy F fibrumú nyaláb. Ekkor a $q_\alpha : \alpha^* \rightarrow A$ projekció egy F fibrumú nyaláb lesz.

Bizonyítás: Vegyük a $\varphi_U : U \times F \rightarrow q^{-1}U$ térképet, valamint definíció szerint legyen $V = \alpha^{-1}U$. Ekkor definiáljuk $\bar{\varphi}_V$ -t:

$$\bar{\varphi}_V : V \times F \rightarrow q_\alpha^{-1}V$$

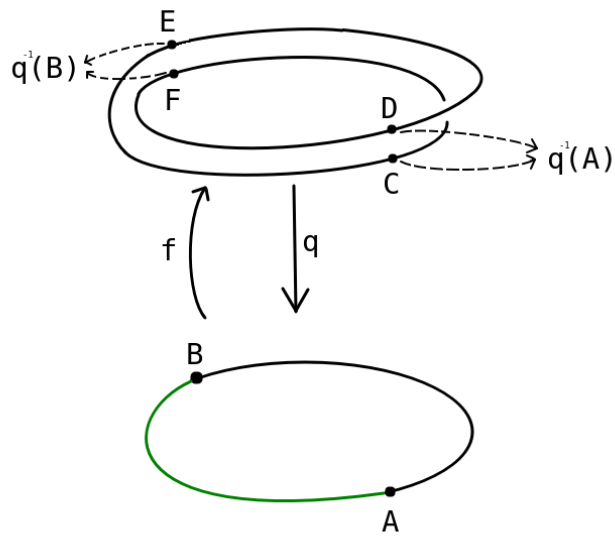
és definíció szerint

$$\bar{\varphi}_V(v, f) = (v, \varphi_U(\alpha(v), f))$$

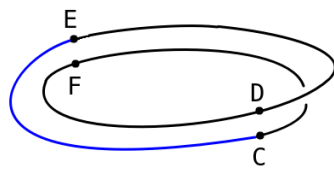
Ez térképe lesz $\alpha^*(E)$ -nek. □

Feladat: Bizonyítsuk be, hogy a kétrétű fedésnek nincsen szelése.

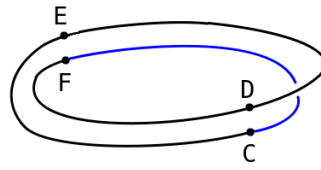
Bizonyítás: Tekintsük a következő ábrát. Legyen A és B két különböző pont S^1 -en, valamint E, F, D, C ezek ősképek a fedőtéren. Tegyük fel, hogy a nyalábunknak létezik szelése, legyen ez az f leképezés.



Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $f(A) = C$. Az ábrán látható AB körív f szerinti képe a folytonosságból következően két halmaz lehet:

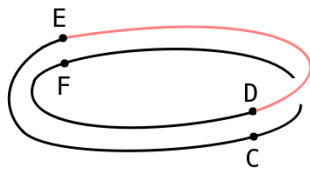


1. eset

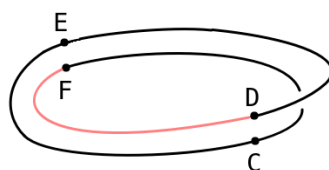


2. eset

De látható, hogy az AB körív komplementere ráképződik kötelezően a következőre:



1. eset



2. eset

Ez azonban ellentmond f folytonosságának a C pontban.

□

4.2 Vektornyalábok

Definíció: A V fibrumú $q : E \rightarrow B$ nyalábot vektornyalábnak nevezünk, ha V -n adott egy vektortérstruktúra, valamint az áttérésfüggvények lineárisak is:

$$\varphi_{UV} : U \cap V \rightarrow \text{GL}(V).$$

Definíció: Legyen G egy Lie-csoport. Vegyük a G fibrumú $q : E \rightarrow B$ fibrált nyalábot. Azt mondjuk, hogy q egy principális G -nyaláb, amennyiben az E totális téren adott egy G jobb-hatás és a lokális térképek választhatóak G ekvivariánsan, azaz minden $b \in B$ pontnak létezik olyan U nyílt környezete, hogy ahhoz tartozik egy $\varphi_U : U \times G \rightarrow q^{-1}_U$ homeomorfizmus, amire igaz, hogy $q\varphi_U = \pi_U$, valamint:

$$\varphi_U(u, gh) = \varphi_U(u, g)h$$

minden $u \in U$ -ra és minden $g, h \in G$ -re.

Tekintetbe véve, hogy a principális G -nyalábok térképei G -ekvivariánsak, így következik az is, hogy az áttérésfüggvényeik is G -ekvivariánsak, hiszen G -ekvivariáns függvények kompozíciói:

$$\varphi_{UV}(b)(hg) = \varphi_{UV}(b)(h)g.$$

Legyen $\alpha : G \rightarrow G$ egy G -ekvivariáns leképezés, vagyis a G csoport a jobbszorzással hat saját magán. De ekkor:

$$\alpha(g) = \alpha(1)g$$

tehát létezik olyan $h \in G$, hogy az α leképezés a vele való balról szorzás. Emiatt igaz lesz, hogy léteznek olyan $\psi_{UV} : U \cap V \rightarrow G$ függvények, hogy:

$$\varphi_{UV}(b)(g) = \psi_{UV}(b)g.$$

Nem nehéz látni ezek után, hogy eme ψ_{UV} függvények családja teljesíti a kociklus feltételt:

$$\psi_{UV}(b)\psi_{VW}(b) = \psi_{UW}(b).$$

Definíció: Vegyük a $q : P \rightarrow B$ principális G -nyalábot és a $\rho : G \rightarrow \text{Homeo}(F)$ -et mint egy bal-hatást az F téren (azt is mondhatnánk, hogy q egy homomorfizmus). Definiáljuk a következő ekvivalenciarelációt:

$$(pg, f) \sim (p, gf), \quad \forall g \in G$$

Ezek után definiáljuk az E teret a következőképpen:

$$E = P \times_{\rho} F = P \times F / \sim$$

Állítás: Az E tér egy F fibrumú nyaláb totális tere lesz a $q_E : E \rightarrow B$, $q_E([p, f]) := q(p)$ leképezésre nézve.

Bizonyítás: Vegyük az eredeti nyalábunk atlaszát: $\{\varphi_U^P : U \in \mathcal{U}\}$. Ekkor ebből gyártsunk új atlaszt a következőképpen:

$$\varphi_U^F := [\varphi_U^P(u, 1), f]$$

Ez atlasza lesz az új nyalábunknak. □

Definíció: q_E -t a q principális G -nyalábhoz és a ρ hatásához tartozó asszociált nyalábnak is nevezzük.

Megjegyzés: Ha az F fibrum egyben egy vektortér is, valamint a G hatás lineáris, úgy az $E = P \times_G F$ egy vektornyaláb is egyben.

Megjegyzés: Amennyiben érthető melyik hatásról van szó, úgy használjuk az $E = P \times_G F$ jelölést is.

Definíció: Legyen $q_1 : E_1 \rightarrow B_1$ egy F_1 fibrumú, míg $q_2 : E_2 \rightarrow B_2$ egy F_2 fibrumú nyaláb. A $q_1 \times q_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ $F_1 \times F_2$ fibrumú fibrált nyalábot a két nyaláb direkt szorzatának nevezzük.

Definíció: Amennyiben P_1 egy principális G_1 -nyaláb, valamint P_2 egy G_2 -nyaláb, akkor $P_1 \times P_2$ egy principális $G_1 \times G_2$ nyaláb.

Definíció: Vegyük a $q : E \rightarrow B$ vektornyalábot, valamint legyen $S \subset E$. Azt mondjuk, hogy S résznyalábja E -nek, ha a $q^S := q|_S : S \rightarrow B$ egy vektornyaláb, továbbá a beágyazás egy vektornyaláb-leképezés.

Állítás: Vegyük az $\alpha : G \rightarrow \text{GL}(n)$ reprezentációt. Legyen H rész Lie-csoportja G -nek, valamint tegyük fel azt is, hogy a $V \subset \mathbb{R}^n$ altér H -invariáns:

$$\alpha(h)(V) = V, \forall h \in H$$

Ekkor igaz lesz, hogy:

$$\{(g[H], gv) : g \in G, v \in V\} \rightarrow G/H$$

egy vektor-nyaláb.

Megjegyzés: A $[H]$ jelölés a G/H faktorizáció kitüntetett elemére utal.

Bizonyítás: Vegyük az $l : U \rightarrow G$ lokális szeletet H -hoz. Ekkor definiáljuk a $\varphi_{q(U)}$ leképezéseket a következőképpen:

$$\varphi_{q(U)}(x, v) := (ql(x), l(x)v)$$

Ezek lokális trivializációi lesznek a $\{(g[H], gv) : g \in G, v \in V\}$ halmaznak. □

Definíció: Legyen X topologikus tér és legyen megadva rajta egy G -hatás, ahol G egy Lie-csoport (X egy G -tér). Vegyük most egy G -hatást a $q : E \rightarrow X$ fibrált nyalábon. Amennyiben teljesül, hogy:

$$q(ge) = g(qe) \quad \forall e \in E \text{ és } \forall g \in G$$

akkor azt mondjuk, hogy G hatás q -n felemelése a G hatásnak X -en. Ebben az esetben E -t G -nyalábnak nevezzük.

Megjegyzés: Amennyiben az E egy vektornyaláb, úgy megköveteljük, hogy a felemelés fibrumonként lineáris legyen.

Állítás: Legyen $E \rightarrow G/H$ egy G -nyaláb, ami egyben vektornyaláb is. Ekkor igaz az, hogy $E \cong G \times_H E_{[H]}$. Itt az $E_{[H]}$ az E nyaláb $[H]$ feletti fibruma.

Bizonyítás: Egyszerű megkonstruálni egy bijekciót, csupán vegyük a következő leképezést:

$$[g, v] \rightarrow gv$$

Ez fibrumonként lineáris lesz G definíciója miatt. □

4.3 Karakterisztikus osztályok

Vegyük egy V vektorteret, aminek a dimenziója k .

Definíció: A V vektortér két bázisát ekvivalensnek nevezzük, ha az áttérés determinánsa pozitív.

Így jóllátható módon kapunk két darab ekvivalenciaosztályt, amit a V vektortér két irányításának hívjuk.

Vegyük észre, hogy ha $\overset{\circ}{V} = V \setminus \{0\}$ akkor $H_k(V, \overset{\circ}{V}) \cong \mathbb{Z}$. Jelöljük b -vel V egy bázisát ($b = (b_1, \dots, b_k)$). Legyen $b_0 = -\sum_{i=1}^k b_i$. Ekkor a 0 benne lesz a $\{b_0, \dots, b_k\}$ konvex burkában. Ezek után legyen $\sigma_b : \Delta^k \rightarrow V$ az a szinguláris szimplex aminek a csúcsai rendre b_0 -ba, ... b_k -ba képződnek. Ez a szimplex azért fontos számunkra, mert ekkor

$[\sigma_b]$ generátora lesz $H_k(V, \mathring{V})$ -nek, valamint $[\sigma_b] = [\sigma_{b'}]$ akkor és csak akkor, ha a b és b' bázisok ugyanazt az irányítást adják.

A kohomológia résznél ismerttetett "univerzális együttható tétel" miatt tudjuk, hogy $H^k(V, \mathring{V}) \cong \mathbb{Z}$. Ez azért fontos, mert így a k -adik kohomológiasoport generátorait is megfeleltethetjük V irányításaival.

Definíció: Vegyük az $E \rightarrow B$ k -rangú vektornyalábot. Vegyük a $H^k(E, \mathring{E})$ kohomológia-csoport egy elemét, α -át. Amennyiben minden fibrumra megszorítva $H^k(E_b, \mathring{E}_b) \cong \mathbb{Z}$, úgy α -át Thom-osztálynak nevezzük.

Megjegyzés: Definiálhatjuk a Thom-osztályt hasonlóan $\mathbb{Z}_2$ csoporttal.

Tétel: Vegyük az $E \rightarrow B$ k -rangú vektornyalábot. Ekkor igaz lesz, hogy ha E irányított, akkor létezik egy egyértelmű $\alpha \in H^k(E, \mathring{E})$ Thom-osztály. Ez az α minden fibrumon az adott irányításra szorul meg.

Bizonyítás: Használjuk azt az állítást, hogy ha az E irányítható, akkor az 1-váza fölött triviális. Vegyük az $E = \mathbb{R}^k \times B \rightarrow B$ triviális nyalábot. Mivel az 1-váza fölött triviális, így ott létezik Thom-osztály. Most alkalmazzuk a már bemutatott Künneth-formulát:

$$H^k(E, \mathring{E}) \cong H^k(\mathbb{R}^k, \mathring{\mathbb{R}}^k) \otimes H^0(B) \cong \mathbb{Z}$$

Valamint ha $i < k$, akkor igaz, hogy:

$$H^i(E, \mathring{E}) \cong 0$$

Vagyis látjuk, hogy a fibrum meghatározza a Thom-osztályt. Ezek után megmutatjuk, hogy a nagyobb dimenziós cellákra indukciósan kiterjeszthető a Thom-osztály. Tehát a következőt tesszük: az indukciós feltevésünkből adódóan tudjuk, hogy $E|_Y$ -nak létezik Thom-osztálya és bizonyítanunk kell, hogy $X \cup_\varphi D^n$ -nek is. Vegyük $D_{1/2}^n$ és $S_{1/2}^{n-1}$ képét X -ben. Ekkor írjuk fel a következő relatív Mayer-Vietoris sorozatot:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^{k-1}(E_{S_{1/2}^{n-1}}, \mathring{E}_{S_{1/2}^{n-1}}) \longrightarrow H^k(E_X, \mathring{E}_X) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^k(E_{X \setminus B_{1/2}^n}, \mathring{E}_{X \setminus B_{1/2}^n}) \oplus H^k(E_{D_{1/2}^n}, \mathring{E}_{D_{1/2}^n}) \longrightarrow H^k(E_{S_{1/2}^n}, \mathring{E}_{S_{1/2}^n}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Mivel hogy $X \setminus B_{1/2}^n \simeq Y$, ezért igaz az, hogy:

$$H^i(E_{X \setminus B_{1/2}^n}, \mathring{E}_{X \setminus B_{1/2}^n}) \cong H^i(E_Y, \mathring{E}_Y)$$

Az előzőekből már tudjuk, hogy $H^{k-1}(E_{S_{1/2}^n}, \mathring{E}_{S_{1/2}^n}) \cong 0$. Az egyértelműségéből következően $X \setminus B_{1/2}^n$ és $D_{1/2}^n$ feletti Thom-osztályok $S_{1/2}^n$ felett megegyeznek. Ezek után a relatív Mayer-Vietoris sorozat miatt összeragaszthatóak lesznek.

□

Megjegyzés: Ha tekintjük az előző bizonyításban szereplő relatív Mayer-Vietoris sorozatot, akkor adódik, hogy:

$$H^i(E, \mathring{E}) \cong \begin{cases} 0 & \text{ha } i < k \\ \mathbb{Z} & \text{ha } i = k \end{cases}$$

Definíció: Vegyük az $E \rightarrow B$ k -rangú vektornyalábot ami most legyen irányított. Legyen ennek u_E a Thom-osztálya. $e(E) := u_E|_B \in H^k(B)$ -t az E Euler-osztályának nevezzük.

Ez a definíció egy kis magyarázatra szorul. Ugyanis mit jelent az, hogy $u_E|_B$? Először is vegyük az $i_B : B \rightarrow E$ természetes beágyazást, valamint az $f : E \rightarrow (E, \mathring{E})$ beágyazást. Ekkor legyen $i = i_B \circ f$, vagyis $i : (B, \emptyset) \rightarrow (E, \mathring{E})$. Vegyük akkor ebből az i -ből indukált i^* leképezést, ahol $i^* = f^* \circ i_B^*$. Ez a leképezés homomorfizmus $H^k(E, \mathring{E})$ és $H^k(B)$ között. Ezt a homomorfizmust jelöltem $|_B$ -vel.

Tétel: Amennyiben egy $E \rightarrow B$ irányított vektornyaláb rendelkezik seholsem 0 szeléssel, úgy az Euler-osztálya $e(E) = 0$.

Bizonyítás: Az első fontos megfigyelés az, hogy bármely szelés homotóp a zéró-szeléssel. Legyen ezek után $\sigma : B \rightarrow E$ egy tetszőleges szelés. Ekkor $e(E) = \sigma^* \circ f^* \circ u_E$, valamint mivel σ sehol sem 0 ezért felírhatjuk őt a következőképpen:

$$\sigma = j \circ \sigma'$$

Itt j az E beágyazása $\mathring{E}$ -be, tehát $j : E \rightarrow \mathring{E}$ beágyazás. σ' pedig egy $\mathring{E}$ -en való szelés, $\sigma' : B \rightarrow \mathring{E}$. Ebből az következik, hogy $\sigma^* \circ f^* = \sigma'^* \circ j^* \circ f^*$. Ez viszont a null leképezés, hiszen felírva a $(E, \mathring{E})$ hosszú egzakt sorozatát kapjuk, hogy j^* és f^* két egymás melletti leképezés a sorozatban (kohomologikus hosszú egzakt sorozatról van szó). □

Definíció: Vegyük az X topologikus teret és az R gyűrűt, valamint legyen $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ egy szinguláris szimplex. Emellett legyen $\varphi \in C^l(X, R)$, ahol $k \geq l$. Definíció szerint ekkor $\sigma \frown \varphi$ a következő:

$$\sigma \frown \varphi := \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_l]})\sigma|_{[v_l, \dots, v_k]}$$

Megjegyzés: A $\frown$ művelet lineáris kiterjesztése indukál egy $C_k(X; R) \times C^l(X; R) \rightarrow C_{k-l}(X; R)$ bilineáris leképezést.

Lemma: $\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^l(\partial\sigma \frown \varphi) - (\sigma \frown \delta\varphi)$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\partial\sigma \frown \varphi &= \sum_{i=0}^l (-1)^i \varphi(\sigma \mid [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{l+1}]) \sigma \mid [v_{l+1}, \dots, v_k] + \\ &\quad + \sum_{i=l+1}^k (-1)^i \varphi(\sigma \mid [v_0, \dots, v_l]) \sigma \mid [v_l, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k] \\ \sigma \frown \delta\varphi &= \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \varphi(\sigma \mid [v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{l+1}]) \sigma \mid [v_{l+1}, \dots, v_k] \\ \partial(\sigma \frown \varphi) &= \sum_{i=l}^k (-1)^{i-l} \varphi(\sigma \mid [v_0, \dots, v_l]) \sigma \mid [v_l, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k]\end{aligned}$$

□

Tétel: Legyen M egy kompakt irányított n -sokaság. Ekkor igaz lesz az, hogy:

$$H^k(M) \cong H_{n-k}(M)$$

Tehát duális kapcsolat van a homológia és a kohomológiasoportok között. Ezt a tétel Poincaré dualitásnak is hívjuk. A tételt nem bizonyítom.

Definíció: Vegyük az M kompakt irányított n -sokaságot. A $H_n(M)$ homológiasoport M irányításával kompatibilis $[M]$ generátorát fundamentális osztálynak nevezzük.

Megjegyzés: Ha α egy homológia vagy kohomológia-osztály, akkor ennek a Poincaré duálisát $\text{Pd}(\alpha)$ -val jelöljük.

Definíció: Ismételten legyen M egy kompakt irányított n -sokaság, valamint legyen $i : X \rightarrow M$ részsokasága M -nek. A $\text{Pd}(i_*[X])$ kohomológia-osztályt az X részsokaság Poincaré duálisának nevezzük.

A következőkben be fogunk vezetni egy Riemann-metrikát az M sokaságunkon. Ez azért lesz jó nekünk mert így bevezethetjük az $e : TM \rightarrow M$ exponenciális leképezést, valamint a $\nu(X) = \nu(X \subset M) = TM|_X / TX$. Az e exponenciális leképezést megszoríthatjuk $\nu(X)$ -re.

Lemma: Vegyük az $e : \nu(X) \rightarrow M$ exponenciális leképezést megszorítva $\nu(X)$ -re. Ez a leképezés beágyazás lesz az X egy környezetében.

Bizonyítás: A bizonyítás indirekten történik. Feltesszük, hogy van $x_n, y_n \in N(X)$ úgy, hogy $x_n \neq y_n$, valamint $\|x_n\|, \|y_n\| < \frac{1}{n}$ és $e(x_n) = e(y_n)$. Tudjuk, hogy $\nu_{\leq 1}(X)$ kompakt, ezért:

$$x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow e(x) = e(y)$$

Mivel $\|x_n\|, \|y_n\| < \frac{1}{n}$ ezért $x, y \in X$. De az e -t megszorítva X -re vagyis $e|_X$ beágyazás amiből következik, hogy $x = y$. Másrészt a derivált $d_x(e|_{\nu(X)})$ egy invertálható leképezés, vagyis x egy kis környezetében beágyazás, tehát ellentmondásra jutottunk. $\square$

A kivágási tételt alkalmazva kapjuk, hogy $H^{n-k}(M, M \setminus X) \cong H^{n-k}(\nu(X), \dot{\nu}(X))$.

Definíció: Legyen M kompakt sokaságnak X részsokasága, ami zárt és d a kodi-menziója. Emellett feltesszük, hogy X koirányított, vagyis az $N(X \subset M)$ normál-nyalábnak adott egy irányítása. Ekkor az X részsokaság $[X] \in H^d(M)$ Poincaré-duálisa az u_ν Thom-osztály képe a $H^d(\nu, \dot{\nu}) \cong H^d(M, M \setminus X) \rightarrow H^d(M)$ leképezés mentén.

Definíció: Legyen M és N két darab differenciálható sokaság, valamint $f : M \rightarrow N$ sima leképezés a kettő sokaság között. Azt mondjuk, hogy az f leképezés transzverzális az $X \subset N$ részsokaságra, amennyiben bármely $y \in M$ -re $f(y) \in X$ -ből következik, hogy:

$$T(f)T_y M + T_x X = T_x N$$

Tétel: Legyen M és N két darab differenciálható kompakt sokaság, valamint $f : M \rightarrow N$ sima leképezés a kettő sokaság között. Emellett legyen $X \subset N$ koirányított zárt részsokaság és f transzverzális X -re. Ekkor igaz lesz, hogy:

$$f^*[X] = [f^{-1}(X)]$$

Megjegyzés: Az $f^{-1}(X)$ részsokaság az implicit-függvény tétel miatt, ráadásul zárt.

Bizonyítás: A bizonyítás első részében belátjuk, hogy ha $f : M \rightarrow N$ sima leképezés transzverzális az X -re, az pontosan akkor történik meg, mikor $f^{-1}(X) \subset M$ részsokaság és $\nu(Y) \cong f^*\nu(X)$. Az f derivált leképezését jelöljük $T(f)$ -el ($T(f) : TM \rightarrow TN$). Ezek után legyen $y \in Y$, $x = f(y)$. Igaz lesz, hogy $T(f)(T_y Y) \subset T_x X$, így $T(f)$ indukálni fog egy $\varphi : \nu_y Y = T_y M / T_y Y \rightarrow \nu_x X = T_x N / T_x X$ lineáris leképezést. De tudjuk, hogy $T_x X + T(f)(T_y M) = T_x N$ a transzverzáltság miatt, amiből következik, hogy φ szürjektív. Az implicit-függvény tétel miatt igaz az, hogy $\text{codim}(X) = \text{codim}(Y)$,

amiből következik, hogy $\dim(\nu_y Y) = \dim(\nu_x X)$. Tehát megkaptuk, hogy φ izomorfizmus. Ez azért jó nekünk, mert így a következő diagramm kommutálni fog:

$$\begin{array}{ccc} \nu Y & \xrightarrow{\varphi} & \nu X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Tehát $\nu(Y) \cong f^* \nu(X)$. Ezzel be is láttuk amit szerettünk volna. Most vegyük u_E -t az E irányított nyáláb Thom osztályát. Ekkor $f^* u_E$ Thom osztálya az $f^* E$ visszahúzott nyálábnak a visszahúzott irányítással. A bizonyítást a következő diagramm kommutativitása teszi teljessé:

$$\begin{array}{ccccccc} H^d(M) & \longleftarrow & H^d(M, M \setminus Y) & \xleftarrow{\cong} & H^d(U_\varepsilon, U_\varepsilon \setminus Y) & \xrightarrow{\cong} & H^d(\nu_Y, \dot{\nu}_Y) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \cong \uparrow \\ H^d(N) & \longleftarrow & H^d(M, M \setminus X) & \xleftarrow{\cong} & H^d(U_\varepsilon, U_\varepsilon \setminus X) & \xrightarrow{\cong} & H^d(\nu_X, \dot{\nu}_X) \end{array}$$

□

Tétel: Legyen M kompakt sokaság és legyen ennek a sokaságnak X és Y két darab koirányított transzverzális részsokasága. Ekkor igaz lesz, hogy $X \cap Y$ szintén koirányított, valamint hogy:

$$[X] \smile [Y] = [X \cap Y]$$

Bizonyítás: A teljes bizonyítást nem vázolom, csupán annak lényegi részét: Vegyük az E_1, E_2 irányított vektornyalábokat a B tér felett. Emellett vegyük a $p_i : E_1 \oplus E_2 \rightarrow E_i$ fibrumonkénti projekciót. Ekkor az $u_E = p_1^* u_{E_1} \smile p_2^* u_{E_2}$ a megfelelő irányításhoz. □

A következőkben komplex vektorterek invariánsairól lesz szó. Definiálni fogom komplex vektornyalábok karakterisztikus osztályait. Ezek olyan α hozzárendelések, amik egy E k -rangú komplex vektornyalábhoz hozzárendelnek egy $\alpha(E) \in H^*(B, \mathbb{Z})$ osztályt. Emellett igaz rájuk, hogy $\alpha(f^* E) = f^* \alpha(E)$. Ezt hívjuk természetességi feltételnek.

Először is idézzük fel a Künneth formulát:

Tétel: Vegyük az X és Y topologikus tereket, amik egyben cella-komplexusok is, valamint tegyük fel, hogy $H^k(Y; R)$ szabad R -modulus minden k -ra. Ekkor igaz lesz, hogy

$$H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) \xrightarrow{\times} H^*(X \times Y; R)$$

izomorfizmus. Itt az $\times(\alpha \otimes \beta) = \alpha \times \beta := p_X^*(\alpha) \smile p_Y^*(\beta)$.

Ezt felhasználva kapjuk a következőt: legyen X egy cella-komplexus és $\mathbb{P}^\infty$ a végtelen komplex projektív tér. Használva a Künneth formulát kapjuk, hogy:

$$H^*(X \times \mathbb{P}^\infty) \cong H^*(X)[x]$$

Itt $H^*(\mathbb{P}^\infty) = \mathbb{Z}[x]$, valamint $x = e(\gamma)$, a tautologikus nyáláb Euler-osztálya. Vagyis megkaptuk, hogy ha $y \in H^n(X \times \mathbb{P}^\infty)$, akkor y egyértelműen felírható a következő alakban:

$$y = \sum y_i x^{n-i}$$

ahol $y \in H^{2i}(X)$.

Definíció: Legyen $E \rightarrow B$ egy k -rangú komplex vektornyáláb. Ennek a vektornyálábnak az i . Chern osztálya c_i , ahol:

$$e(E \otimes \gamma) = \sum_{i=0}^k c_i x^{2(k-i)}$$

Itt $c_j(E) = 0$, ha $j < 0$ vagy ha $j > k$.

Állítás: Vegyük a k -rangú vektornyálábokat. Ezeknek a Chern osztályainak megvannak az alábbi tulajdonságai:

1. Ha $f : X \rightarrow Y$ folytonos és $E \rightarrow X$, akkor teljesül a természetességi tulajdonság, vagyis hogy $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$
2. $c_0 = 1$, valamint $c_k(E) = e(E)$
3. $c_i(E \oplus E') = \sum_{j=0}^i c_j(E)c_{i-j}(E')$

Megjegyzés: A hármas tulajdonságot Whitney szorzat-formulának nevezik.

Bizonyítás: 1. $e(f^*E \otimes \gamma) = e((f \times \text{Id}_{\mathbb{P}^\infty})^*(E \otimes \gamma)) = (f \times \text{Id}_{\mathbb{P}^\infty})^*e(E \otimes \gamma) = \sum_{i=0}^k f^*c_i(E)x^{2(k-i)}$

2. $c_0 x^k = e(E \otimes \gamma) |_{\mathbb{P}^\infty} = e((E \otimes \gamma) |_{\mathbb{P}^\infty}) = e(\mathbb{C}^k \otimes \gamma) = x^k$ és $c_k = e(E \otimes \gamma) |_X = e((E \otimes \gamma) |_X) = e(E)$

3. $e((E \oplus E') \otimes \gamma) = e((E \otimes \gamma) \oplus (E' \otimes \gamma)) = e(E \otimes \gamma)e(E' \otimes \gamma)$

□

Amennyiben használjuk a $c(E^k) := \sum_{i=0}^k c_i$ jelölést akkor a hármas formula a következő alakba írható:

$$c(E \oplus E') = c(E)c(E')$$

Ebból az is következik, hogy $c_i(E \oplus E') = c_i(E)$, amennyiben az E' triviális nyaláb. További érdekesség, hogy ha az L_i -k egyenes nyalábok, akkor:

$$c\left(\bigoplus_{i=1}^k L_i\right) = \prod_{i=1}^k (1 + \alpha_i) = \sum_{j=0}^k \sigma_j(\underline{\alpha})$$

Itt $\alpha_i = e(L_i) = c_1(L_i)$, valamint $\sigma_j(\underline{\alpha})$ jelöli az α_i -k j . elemi szimmetrikus polinomját.

References

- [1] Hatcher, A., 2005. Algebraic topology. Tsinghua University.
- [2] Hatcher, A., 2003. Vector bundles and K-theory. Im Internet unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [3] JOHNSON, J., 2024. BASICS OF REPRESENTATION THEORY.
- [4] Kirillov, A.A., 1976. Lie Groups and Lie Algebras. In Elements of the Theory of Representations (pp. 83-107). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- [5] López, M.E.G., Introduction to characteristic classes. University of Copenhagen.
- [6] Nadathur, P., 2007. An introduction to homology. University of Chicago.

Mesterséges intelligencia alapú eszközök használatáról szóló nyilatkozat

Alulírott Györgypál Gergő nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Nyelvhelyesség ellenőrzése	Writefull	Teljes dolgozat	—

A felsoroltakon túl más mesterséges intelligencia alapú eszközt nem használtam.