

Petőfi Bori

MARKOV-LÁNCOK ÉS A CUTOFF JELENSÉG

BSc szakdolgozat

Témavezető:

Dr. Gerencsér Balázs
egyetemi adjunktus

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



2025

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás	3
1. Bevezetés	4
2. Alapok, definíciók	6
2.1. Markov-lánc	6
2.1.1. Stacionárius eloszlás	7
2.1.2. Megfordíthatóság	7
2.1.3. Totális variáció távolság	7
2.1.4. Keverési idő	8
2.2. Alsó korlátok a keverési időre	8
2.2.1. Cheeger-állandó	9
2.3. Coupling	9
3. Cutoff jelenség Markov-láncoknál	11
3.1. Cutoff	11
3.2. Bevezető példák	12
3.2.1. Gilbert-Shannon-Reeds kártyakeverés	12
3.2.2. Random cserék (egy kártyapakliban)	12
3.2.3. Ehrenfest urnája	12
3.3. Bolyongás a hiperkockán	13
3.4. Bolyongás az egész számokon	22
3.4.1. Véletlen egydimenziós séta	22
3.4.2. Gyorsítás determinisztikus függvényekkel	23
3.4.3. Bizonyítás a 3.11 tételhez	23
3.4.4. Ellenpélda	29
4. Kiegészítések	33
4.1. Product condition: A cutoff egy szükséges feltétele	33
4.2. Szeparációs cutoff	34
4.3. Cutoff a limitált entrópiánál	34

5. Összefoglalás	36
Mesterséges Intelligencia használat	38

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni a rengeteg segítséget a témavezetőmnek, Gerencsér Balázsnak, akinek köszönhetően mélyebb betekintést kaphattam a Markov-láncok témakörébe. Köszönöm a rendszeres konzultációs alkalmakat, amelyeken hasznos tanácsokkal és javaslatokkal látott el, illetve hogy bármikor kereshettem kérdéseimmel, amelyekre mindig részletes, segítő válaszokat kaptam.

Ezenkívül szeretném megköszönni a családomnak és a barátaimnak a sok-sok támogatást, és hogy minden nehezebb pillanatomban mellettem álltak és biztattak.

1. fejezet

Bevezetés

Szakedolgozatom témája és célja az először a 80-as években felfedezett, a Markov-láncok témaköréhez tartozó cutoff jelenség bevezetése és példákon keresztül történő megismertetése volt. A jelenségről legelőször Diaconis, Shahshahani és Aldous tettek említést, akik a jelenséget a kártyakeverési problémákkal kapcsolatban fedezték fel, amikor azt vizsgálták, hogy hány keverés után lesz elég közel a kevert kártyák sorrendjének eloszlása az egyenleteshez. Például ilyen volt a később a 3. fejezetben is említésre kerülő Gilbert-Shannon-Reeds kártyakeverési módszernél, azaz a "riffle shuffle" keverésnél megjelenő ismert, elhíresültebb állítás - miszerint "Nyolc keverés elég" - bizonyítása.

Dolgozatomban a 2. fejezetben ismertetem a Markov-láncokkal kapcsolatos alapfogalmakat, illetve definiálok néhány, a cutoff jelenség ismertetéséhez szükséges fogalmat, köztük a keverési idő (mixing time) matematikai jelentését is. Ezen keverési idő, és a hozzátartozó totális variációs távolság segítségével tudunk majd a továbbiakban a cutoff jelenségről beszélni. Ezenkívül pár, a későbbi bizonyításokhoz hasznosnak bizonyuló módszert és ismert állítást is megfogalmazok, mint például a Cheeger-állandóra vonatkozó egyenlőtlenség és a coupling módszer.

A 3. fejezetben a cutoff jelenség leírásához a Diaconis által megfogalmazott definíciókat használom fel, majd az ő cikke alapján [1] ismertetem pár egyszerű példánál a cutoff megjelenését. Ezután a hiperkockán való bolyongás cutoffját és annak idejének bizonyítását írom le, a Hamming-súly segítségével, illetőleg visszavezetve ezt a problémát az Ehrenfest-féle urnamodellre és a kuponygyűjtő problémára.

Az egész számokon történő egyszerű szimmetrikus bolyongásnak ugyan nincsen cutoffja, de egy egyszerű módosítással kapott változatát vizsgálva már tapasztalhatjuk a jelenséget, így megkapva egy elégséges feltételét a cutoff létrejöttére (3.11), amelynek a bizonyítása is szerepel a 3. fejezetben. Ez a feltétel elégséges ugyan, de nem szükséges, mint ahogy azt a fejezet végén egy egyszerű példán, a duplázó sétán keresztül, ábrákkal és grafikonokkal kiegészítve megmutatjuk.

Az utolsó fejezetben leírok még egy szükséges feltételt a cutoff jelenségre, ezenfelül megjegyezve, hogy nem csak a keverési idő szerint számolhatunk, bevezetjük a szeparációs időt, illetve a limitált entrópiát. Ezek segítségével szintén érdekes állításokhoz jutunk Markov-láncok cutoffjával kapcsolatban.

A jelenség létrejöttének bizonyítása a legtöbb esetben komplikált, különböző bonyolult valószínűségszámítási, algebrai és kombinatorikai módszereket használ, így szakdolgozatom is felhasznál különböző egyenlőségeket, egyenlőtlenségeket, tételeket ezen témakörökből (ilyen lesz például a Cheeger-állandóra vonatkozó egyenlőtlenség a 3.11 tétel bizonyításában, amelynek bizonyítását a szakdolgozatban nem írom le).

2. fejezet

Alapok, definíciók

Néhány bevezető definíció a Markov-láncok elméletéhez. Ebben a fejezetben csak a későbbiekben rendszeresen használt fogalmakat, állításokat ismertetjük, a teljesség igénye nélkül. Nem célunk minden alapfogalom definiálása, felfrissítése.

2.1. Markov-lánc

Vezessük be tehát a Markov-láncokkal kapcsolatos alapfogalmakat, diszkrét idejű Markov-láncok esetén. Azaz legyen $t \in T, T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

2.1. Definíció. Vegyük az $\mathcal{X}$ állapotteret, $(X_1, X_2, \dots)$ random valószínűségi változók sorozatát és P átmeneti mátrixot, amely $\forall x, y \in \mathcal{X}$ -re meghatározza az átlépés valószínűségét ($x \in \mathcal{X}$ esetén a szomszédos csúcsokba való átlépés valószínűsége: $P(x, \cdot)$). Ez egy Markov-lánc, ha tetszőleges $t \geq 1$ -re és $x, y \in \mathcal{X}$ -re teljesül a Markov-tulajdonság, azaz:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x, y) &= \mathbb{P}(\{X_{t+1} = y\} \mid \{X_t = x\} \cap \{X_{t-1} = x_{t-1}\} \cap \dots \cap \{X_1 = x_1\}) = \\ &= \mathbb{P}(\{X_{t+1} = y\} \mid \{X_t = x\}),\end{aligned}$$

ahol $\mathbb{P}(\{X_t = x\} \cap \{X_{t-1} = x_{t-1}\} \cap \dots \cap \{X_1 = x_1\}) > 0$.

Tegyük fel innentől, hogy az általunk tárgyalt Markov-láncok homogének, azaz az átmenetvalószínűségek függetlenek a t időparamétertől. Ekkor felírható egy általános P átmeneti mátrix az átmenetvalószínűségek alapján, amelynek egy-egy sora egy adott x -re vonatkozó $P(x, \cdot)$ eloszlást ad meg [2, 1.fejezet].

2.2. Definíció. P sztochasztikus, ha $\forall P(x, y) \geq 0$ és $\sum_{y \in \mathcal{X}} P(x, y) = 1 \ \forall x \in \mathcal{X}$ -re.

2.3. Definíció. Egy Markov-lánc irreducibilis (azaz 1 osztályból áll), ha $\forall x, y \in \mathcal{X}$ -re $\exists t \in \mathbb{Z} : P^t(x, y) > 0$.

2.4. Definíció. Legyen $\tau(x) := \{t \geq 1 : P^t(x, x) > 0\}$, tehát azok az idők, ami után a lánc visszatérhet az x kezdőpontjába. A Markov-lánc periódusa a $\tau(x)$ -ek legnagyobb közös osztója, és ha a periódus 1 minden állapotra, akkor a Markov-lánc aperiodikus.

2.5. Definíció. Egy Markov-lánc ergodikus, ha irreducibilis (1 csúcsosztályból áll) és aperiodikus (periódusa 1). Többségében az ilyen jellegű láncokról fogunk beszélni a következőkben.

2.1.1. Stacionárius eloszlás

2.6. Definíció. Azt a π valószínűségi eloszlást, amelyre $\pi = \pi P$ teljesül a Markov-lánc stacionárius eloszlásának nevezzük.

2.7. Tétel. Ez az eloszlás egyértelműen létezik minden ergodikus Markov-lánchoz. [2, 6.fejezet]

2.1.2. Megfordíthatóság

2.8. Definíció. Ha egy $\mathcal{X}$ -n vett Markov-lánc átmenetvalószínűségeire és π valószínűségi eloszlásra, $\forall x, y \in \mathcal{X}$ teljesül, hogy:

$$\pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x),$$

akkor azt mondjuk, hogy a π eloszlás teljesíti a részletes egyensúlyi feltételeket.

2.9. Definíció. Azok a láncok, amelyek teljesítik a részletes egyensúlyi feltételeket megfordíthatóak.

2.10. Lemma. Minden ilyen π eloszlás stacionárius eloszlás a P -n. [2, 6.fejezet]

2.1.3. Totális variáció távolság

2.11. Definíció. Defináljuk két valószínűségi eloszlás távolságát az alábbi módon: Q_1 és Q_2 valószínűségi eloszlásokra:

$$\|Q_1 - Q_2\|_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{g \in G} |Q_1(g) - Q_2(g)|,$$

ahol teljesül a $0 \leq \|Q_1 - Q_2\|_{TV} \leq 1$ egyenlőtlenség.

Ez a definíció átírható másik alakba:

$$\|Q_1 - Q_2\|_{TV} = \max_{A \subseteq \mathcal{X}} |Q_1(A) - Q_2(A)|$$

2.12. Lemma. Az irreducibilis, aperiodikus (tehát ergodikus) Markov láncok eloszlása tart a stacionárius eloszláshoz. [2, 6.fejezet]

2.13. Definíció. Defináljuk az adott időpontban vett eloszlásunk és a stacionárius eloszlás távolságát az alábbi módon:

$$d(t) := \max_{x \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV}.$$

2.14. Tétel. (Konvergencia tétel:) Ha P egy irreducibilis és aperiodikus Markov-lánc átmeneti mátrixa, π stacionárius eloszlással, akkor létezik $\alpha \in (0, 1)$ és $C > 0$, hogy: [2, 4.fejezet]

$$d(t) \leq C\alpha^t.$$

2.1.4. Keverési idő

2.15. Definíció. A keverési idő segítségével tudjuk kifejezni, hogy a Markov-láncnak mennyi idő szükséges olyan keveredéshez, hogy eloszlása nagyon közel legyen a stacionárius eloszláshoz:

$$t_{mix}(\epsilon) = \min\{t : d(t) \leq \epsilon\} \text{ és}$$

$$t_{mix} = t_{mix}\left(\frac{1}{4}\right).$$

Ezen definíciók mellett a későbbi bizonyításokban többször Markov-láncok sorozatáról fogunk beszélni, ezekről állítjuk be állításainkat. Jelölje ebben az esetben például $t_{mix}^{(n)}$ az n . lánc keverési idejét.

2.2. Alsó korlátok a keverési időre

Mivel a dolgozatban többnyire ergodikus Markov-láncokról lesz szó, így nézzük meg az alábbi két alsó korlátot, amelyek ergodikus láncok esetén mindig teljesülnek a keverési időre.

2.16. Definíció. Legyen P egy irreducibilis és aperiodikus Markov-lánchoz tartozó átmeneti mátrix az $\mathcal{X}$ állapottéren. Jelölje ekkor $d_{out}(x)$ az x -ből egy lépésben elérhető csúcsok számát, azaz $d_{out}(x) = |\{y : P(x, y) > 0\}|$ és jelölje Δ ezek közül a maximumot, tehát $\Delta := \max_{x \in \mathcal{X}} d_{out}(x)$. Emellett jelölje $\mathcal{X}_t^x$ az x -ből t lépésben elérhető csúcsok halmazát. Ekkor nyilván teljesül, hogy:

$$|\mathcal{X}_t^x| \leq \Delta^t.$$

Ha egy adott ϵ -ra teljesül, hogy:

$$\Delta^t \leq (1 - \epsilon)|\mathcal{X}|,$$

akkor, amennyiben π stacionárius eloszlás az egyenletes eloszlás:

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} \geq P^t(x, \mathcal{X}_t^x) - \pi(\mathcal{X}_t^x) \geq 1 - \frac{\Delta^t}{|\mathcal{X}|} \geq 1 - \frac{(1 - \epsilon)|\mathcal{X}|}{|\mathcal{X}|} = 1 - (1 - \epsilon) = \epsilon,$$

amiből pedig átrendezve az egyenlőtlenséget, majd logaritmust véve megkapjuk az alábbi alsó korlátot $t_{mix}(\epsilon)$ keverési időre [2, 7.fejezet]:

$$t_{mix}(\epsilon) \geq \frac{\log(|\mathcal{X}|(1 - \epsilon))}{\log \Delta}.$$

2.17. Definíció. Legyen P átmeneti mátrix irreducibilis és aperiodikus az $\mathcal{X}$ állapotterén, ahol $\forall x, y \in \mathcal{X}$ -re, melyre teljesül, hogy $P(x, y) + P(y, x) > 0$, a P -hez tartozó gráfban behúzzuk az (x, y) élet. Ennek a gráfnak átmérőjét jelölje L , ami a maximális, a páronkénti csúcs-távolságok közül.

Legyen x_0 és y_0 két egymástól L távolságra levő csúcs. Így teljesül, hogy $P^{\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor}(x, \cdot)$ és $P^{\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor}(y, \cdot)$ pozitív, két diszjunkt halmazra koncentrált mérték. Így $\bar{d}(\lfloor \frac{L-1}{2} \rfloor) = 1$, ahol:

$$\bar{d}(t) := \max_{x, y \in \mathcal{X}} \|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{TV},$$

és ez alapján $\forall \epsilon < \frac{1}{2}$ -re megkapjuk, hogy [2, 7.fejezet]:

$$t_{mix}(\epsilon) \geq \frac{L}{2}.$$

2.2.1. Cheeger-állandó

2.18. Definíció. Legyen ν az éleken vett mérték és $\nu(A, \bar{A}) = \sum_{x \in A, y \in \bar{A}} \nu(x, y)$, ahol $\nu(x, y) = \pi(x)p_{xy}$ és $\bar{A} = S \setminus A$. Tehát $\nu(A, \bar{A})$ annak a valószínűségét jelöli, hogy a stacionárius eloszlásból indulva egy lépés alatt A -ból a $\bar{A}$ halmazba jutunk.

A Cheeger-állandó, egy a gráf keresztmetszetének szükségét leíró szám (másképpen bottleneck ratio), amelyet az alábbi módon definiálhatunk, a fenti valószínűség definíció segítségével:

2.19. Definíció. Egy adott S halmazra jelölje $\Phi(S)$ a Cheeger-állandót, amelyet az alábbi módon számíthatunk ki:

$$\Phi(S) := \frac{\nu(S, \bar{S})}{\pi(S)}.$$

Az egész láncon vett állandót pedig jelölje:

$$\Phi := \min_{S: \pi(S) \leq \frac{1}{2}} \Phi(S).$$

2.20. Tétel. Ekkor a fent definiált Cheeger-állandóra és a keverési időre teljesül az alábbi általunk a 3.16-ban kihasznált összefüggés [2, 7.fejezet]:

$$t_{mix} = t_{mix} \left(\frac{1}{4} \right) \geq \frac{1}{4\Phi}.$$

2.3. Coupling

Vezzessük be még ebben a fejezetben a coupling fogalmát is, amelyet majd később a 3.6 bizonyításában fogunk használni az állítás és ezáltal a bizonyítás leegyszerűsítésére.

2.21. Definíció. Két valószínűségi eloszlás couplingjának nevezzük az X és Y valószínűségi változóból alkotott (X, Y) párt, amelynek marginális eloszlása megegyezik az eredeti valószínűségi változók eloszlásával, azaz:

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \mu(x) \text{ és } \mathbb{P}\{Y = y\} = \nu(y),$$

tehát μ az X szerinti, ν az Y szerinti marginális eloszlás.

Tehát μ és ν eloszlások $(X, Y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ couplingjára teljesül minden q közös eloszlásra, hogy [2, 5.fejezet]:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \mathbb{P}\{X = x, Y = y\} \text{ esetén:} \\ \sum_{y \in \mathcal{X}} q(x, y) &= \sum_{y \in \mathcal{X}} \mathbb{P}\{X = x, Y = y\} = \mathbb{P}\{X = x\} = \mu(x), \text{ és} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}} q(x, y) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{P}\{X = x, Y = y\} = \mathbb{P}\{Y = y\} = \nu(y). \end{aligned}$$

2.22. Lemma. Legyen μ és ν két valószínűségi eloszlás $\mathcal{X}$ -en. Ekkor a totális variációs távolságukra teljesül, hogy [2, 5.fejezet]:

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \inf\{\mathbb{P}\{X \neq Y\} : \forall \mu, \nu \text{ eloszláshoz tartozó } (X, Y) \text{ coupling}\}.$$

3. fejezet

Cutoff jelenség Markov-láncoknál

Most pedig térjünk át a szakdolgozat fő témáját adó cutoff jelenségre, amely jelenség vizsgálatával elsőként többek között Persi Diaconis foglalkozott részletesebben 1996-os megjelenésű cikkében [1]. Több Markov-láncként felírható folyamatot gyűjtött össze, amelyeknél tapasztalható volt, hogy a 2.12 lemma állításában szereplő stacionárius állapothoz való konvergenciában nagyobb ugrás történik bizonyos idő elteltével; ezt a jelenséget nevezte cutoff-nak, azaz levágásnak.

3.1. Cutoff

3.1. Definíció. (Diaconis-féle definíció) Legyenek $a_n \rightarrow +\infty$ és $b_n \rightarrow +\infty$ sorozatok, melyekre $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, ahogy $n \rightarrow \infty$ és legyen $k_{n,\theta} = \lfloor a_n + \theta b_n \rfloor$ (ahol $\theta \in \mathbb{R}$). Ekkor P_n Markov-láncok egy sorozatára, $n \rightarrow \infty$ esetén teljesül:

$$\|\mathbb{P}_n^{k_n} - \pi_n\| \rightarrow c(\theta),$$

amely c függvényre: $c(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow +\infty} 0$ és $c(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow -\infty} 1$.

3.2. Definíció. (Általános definíció) Azt mondjuk, hogy egy Markov-láncnak cutoffja van, ha teljesül $\forall \epsilon \in (0, 1)$, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{mix}^{(n)}(\epsilon)}{t_{mix}^{(n)}(1 - \epsilon)} = 1.$$

3.3. Definíció. Egy cutoff tartama (window-ja) $\mathcal{O}(w_n)$ nagyságú, ha $w_n = o(t_{mix}^{(n)})$ és teljesül, hogy:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} d_n(t_{mix}^{(n)} - \alpha w_n) = 1,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} d_n(t_{mix}^{(n)} + \alpha w_n) = 0.$$

Másképpen, egy folyamat cutoffjának tartama $w_n = o(t_{mix}^{(n)})$ nagyságú, ha $\forall \epsilon \in (0, 1)$ teljesül, hogy $\exists c_\epsilon : \forall$ elég nagy n -re:

$$t_{mix}^{(n)}(\epsilon) - t_{mix}^{(n)}(1 - \epsilon) \leq c_\epsilon w_n.$$

3.4. Definíció. Egy Markov-láncnak pre-cutoffja van, ha a láncra teljesül, hogy:

$$\sup_{0 < \epsilon < \frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{mix}^{(n)}(\epsilon)}{t_{mix}^{(n)}(1 - \epsilon)} < \infty.$$

A fejezet további részében először pár egyszerűbb példát fogunk megnézni, amelyeknél tapasztalható cutoff, majd áttérünk a hiperkockán való (lusta) bolyongásra, és az egész számokon való, modulo n bolyongásra. Emellett bizonyítunk egy állítást, ami ezen bolyongás konvergenciasebességének növeléséről szól. Végül megvizsgáljuk milyen szükséges feltételei vannak annak, hogy egy Markov-láncnak lehessen cutoffja.

3.2. Bevezető példák

3.2.1. Gilbert-Shannon-Reeds kártyakeverés

Ennél a keverési módszernél a keverés folyamán mindig n db kártyát bontunk kétfelé binomiális eloszlás alapján: A, B . Itt legyen $|A| = a$ és $|B| = b = n - a$. Az A és B kupac összekeverésénél tehát annak valószínűsége, hogy a következő kártya A -ból kerül ki: $\frac{a}{n}$, annak hogy a B kupacból: $\frac{b}{n}$. A folyamat tart a $\pi = \frac{1}{n!}$ egyenletes eloszláshoz.

Ennél a folyamatnál éles cutoff-ot is tapasztalhatunk [1], [3] $k_{n,\theta} = \frac{3}{2} \log_2 n + \theta, n \rightarrow \infty$ esetén, a definícióban szereplő sorozatok: $a_n = \frac{3}{2} \log_2 n, b_n = 1$ választásával. (Ráadásul ennél a keverésnél például $n = 52$ -re a hatodik keveréstől kezdve $q = \frac{1}{2}$ arányú, konstans leesést tapasztalhatunk a stacionárius eloszlástól vett távolságban.)

3.2.2. Random cserék (egy kártyapakliban)

Vegyünk egy másik a kártyák keverésével kapcsolatos módszert, ahol n kártyát kiterítünk sorban, majd keverünk úgy, hogy mindig egymástól függetlenül választunk két egész számot az $[1, n]$ intervallumból és felcseréljük a nekik megfelelő lapokat (tehát $\frac{1}{n}$ valószínűséggel ugyanazt a számot választjuk kétszer és így nem történik csere). A folyamat itt is a $\pi = \frac{1}{n!}$ egyenletes eloszláshoz tart, cutoff-ja pedig $k_{n,\theta} = \frac{1}{2} n(\log n + \theta)$ -nél van [1], [4].

3.2.3. Ehrenfest urnája

Paul és Tatyana Ehrenfest urnamodelljénél adva van két urnánk (M és N), illetve d darab golyónk, amelyek a $t = 0$ időpillanatban mind az M urnában vannak. Minden $t \geq 1$ -re az egyik véletlenszerűen választott golyót átrakjuk a másik urnába. Az M urnából vett

átmenetvalószínűségeket a folyamatnál vegyük az alábbiaknak, (ahol engedjük meg, hogy bármely állapotból $\frac{1}{d+1}$ valószínűséggel önmagába érjünk vissza, hogy elkerüljük a periódussal kapcsolatos problémákat):

$$\mathbb{P}(i, i-1) = \frac{i}{d+1}, \quad \mathbb{P}(i, i) = \frac{1}{d+1}, \quad \mathbb{P}(i, i+1) = \frac{d-i}{d+1}.$$

A kérdés, hogy milyen időpillanatban lesz a golyók elhelyezkedése elég közel a stacionárius eloszláshoz, ami itt a $\pi(j) = \frac{\binom{d}{j}}{2^d}$ binomiális eloszlás.

Ennek a folyamatnak szintén van cutoff-ja $k_{d,\theta} = \frac{1}{4}(d+1)(\log d + \theta)$ időben [1].

3.3. Bolyongás a hiperkockán

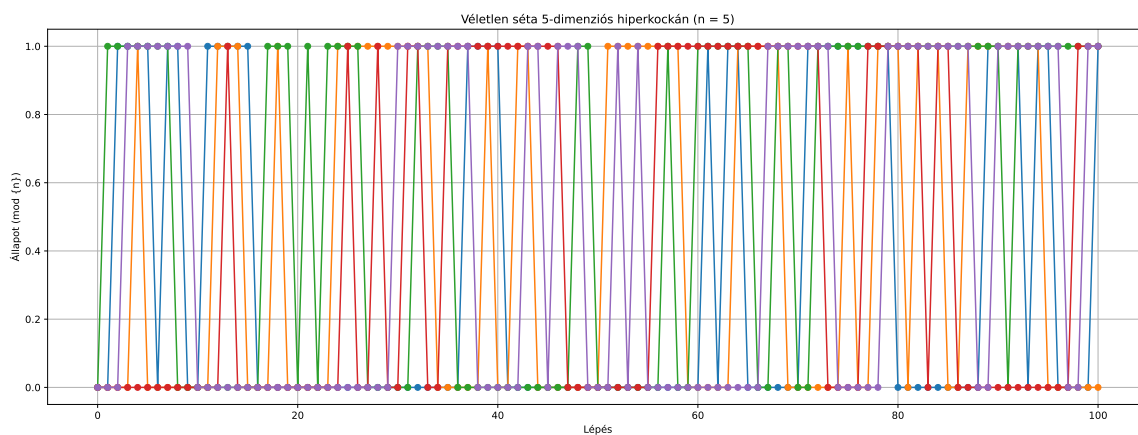
Most pedig ezen bevezető példák után nézzük meg a hiperkockán való bolyongást kicsit részletesebben, bizonyítással együtt:

Vegyük az n dimenziós hiperkockát egy olyan gráfnak, melynek a csúcsaira egy-egy n hosszú koordináta van írva, mely koordináták elemei a $\{0, 1\}^n$ halmaznak. Ebben a gráfban egy él akkor van behúzva két csúcs között, ha ezek koordinátái pontosan 1 helyen térnek el egymástól. A hiperkockán vett egyszerű véletlen sétát definiáljuk úgy, hogy adott csúcsból indulva, minden lépésnél válasszunk a szomszédos csúcsok közül egyenlő valószínűséggel és ide lépünk tovább (minden csúcson n szomszédja van, hiszen ennyi koordinátában térhetnek el az eredeti csúcsonk koordinátájától). Ezt azonban kicsit módosítanunk kell, hiszen az így definiált Markov-láncnak a periódusa 2, így hát definiáljuk a lusta véletlen sétát, ahol $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az eredeti csúcson maradunk. Ekkor már egy aperiodikus láncot kapunk.

3.5. Definíció. Legyen egy $x \in \{0, 1\}^n$ vektor vagy koordináta Hamming-súlya a nemnulla elemeinek száma:

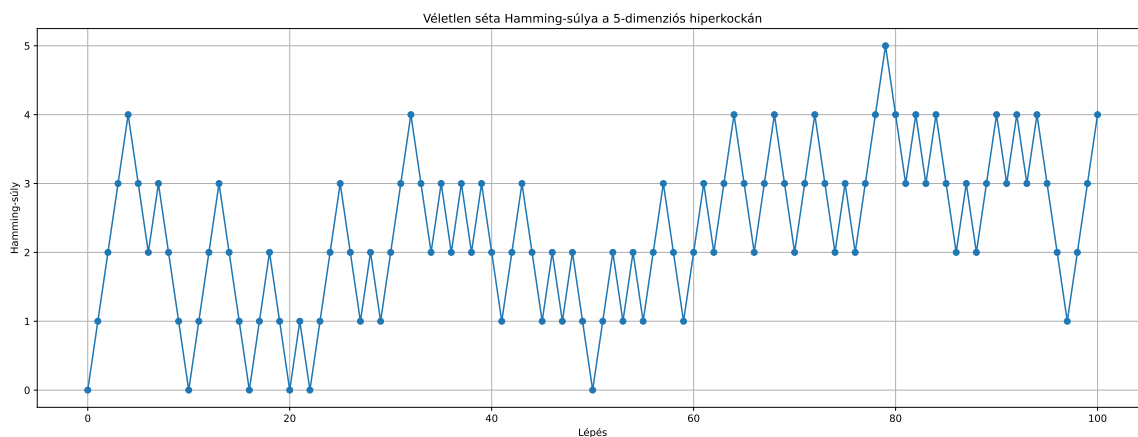
$$W(x) = \sum_{j=1}^n x_j.$$

Ez a Hamming-súly ekvivalenciaosztályokra bontja a csúcshalmazunkat, attól függően, hogy a csúcsok koordinátái mennyi 1-et tartalmaznak. Jelölje az x csúcs, illetve hozzá tartozó vektor ekvivalenciaosztályát $[x]$. Ha x és x' egy osztályban vannak, akkor a $p_{x[y]} = p_{x'[y]}$ átmenetvalószínűségek egyenlőek. Egyszerű véletlen séta esetén minden lépésnél eggyel nő vagy csökken a Hamming-súly, attól függően, hogy 0-ról 1-re, vagy 1-ről 0-ra változtatunk koordinátát. Ennek a példának az ekvivalenciaosztályokat tekintve a 3.2.3 Ehrenfest urna példa egy projekciója, az osztályokra vonatkozó stacionárius eloszlás pedig a $\pi_W : \text{Binom}(n, \frac{1}{2})$ lesz, akárcsak az Ehrenfest urna modell esetében.



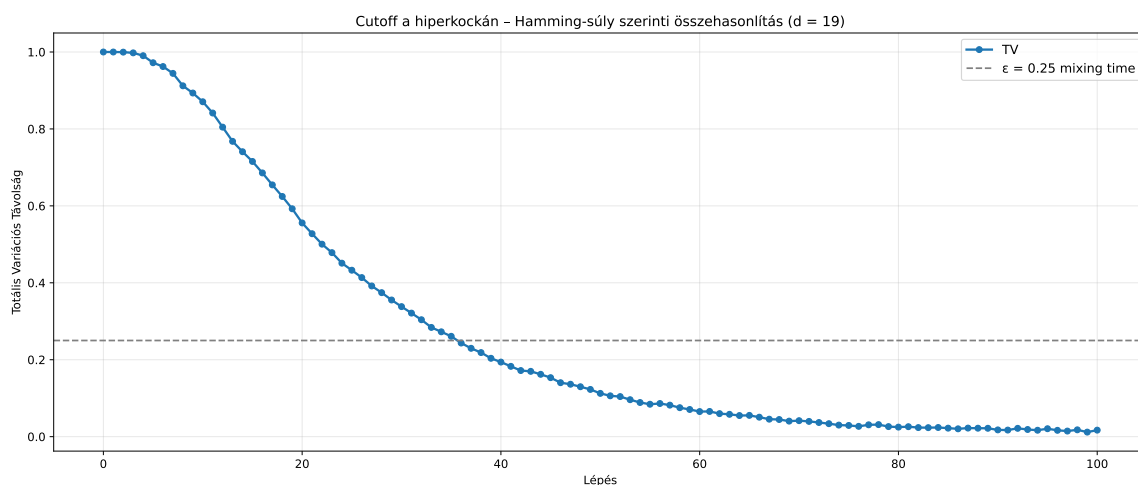
3.1. ábra. Egy 5 dimenziós hiperkockán való bolyongás koordinátáinként.

Mivel ebből nem kapunk túl informatív ábrát, nézzük a Hamming-súly változását ennél a bolyongásnál:

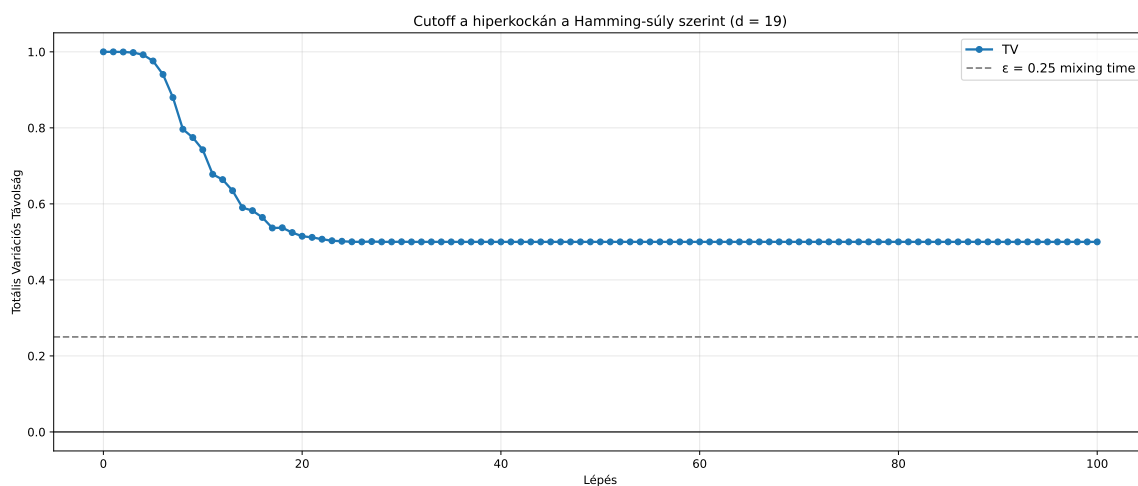


3.2. ábra. Egy 5 dimenziós hiperkockán való bolyongás Hamming-súlya.

Ennek a függvénynek a grafikonja már inkább hasonlít egy szimmetrikus bolyongás grafikonjára, stacionárius eloszlása viszont a binomiális eloszlás lesz.



3.3. ábra. Az $n=19$ dimenziós hiperkockán való lusta véletlen séta Hamming-súlya és ennek távolsága a binomiális eloszlástól (ami a Hamming-súlyok stacionárius eloszlása).



3.4. ábra. Az $n=19$ dimenziós hiperkockán való (NEM lusta) véletlen séta Hamming-súlya és ennek távolsága a binomiális eloszlástól (ami a Hamming-súlyok a stacionárius eloszlása).

Itt látható, hogy ha nem a lusta sétát nézzük, akkor mivel a periódus 2, a totális variációs távolság nem tud a 0-hoz tartani, csak a 0,5-höz, hiszen a paritás alapján a teljes állapotteret két diszjunkt és egyenlő csúcshalmazra osztva (egyikben a páros, másikban a páratlan Hamming-súlyú csúcsok), az adott lépés paritásától függően csak az egyik meghatározott

csúcshalmazban lehetünk.

3.6. Tétel. Az n dimenziós hiperkockán vett lusta véletlen sétának cutoffja van $k = \frac{1}{2}n \log_2 n$ időben $O(n)$ tartamban. [2, 18.fejezet]

Bizonyítás. A tételünk bizonyítása két részre osztható: bizonyítanunk kell a cutoff definíciójában (3.2) szereplő alsó és felső korlátot. Kezdjük bizonyításunkat a felső korlát belátásával, azaz hogy [2, 18.fejezet]:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} d_n \left(\frac{1}{2}n \log n + \alpha n \right) = 0.$$

Ehhez vegyük az alábbi lemmát:

3.7. Lemma. Legyen $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^n)$ a 0-ból kiinduló véletlen séta állapota egy adott t időpillanatban, és legyen $W_t = W(X_t) = \sum_{j=1}^n X_t^j$. Jelölje P_1 az 1., P_n az n . csúcsból induló folyamatot, π az (X_t) -hez, π_W pedig a (W_t) -hez tartozó stacionárius eloszlást. Ekkor W_t -re és X_t -re teljesül, hogy [2, 18.fejezet]:

$$\|P_1\{X_t \in \cdot\} - \pi\|_{TV} = \|P_n\{W_t \in \cdot\} - \pi_W\|_{TV},$$

így 3.7 alapján elég lenne W_t -t vizsgálnunk X_t helyett.

Lássuk be először a 3.7 lemma állítását. Legyen $\mathcal{X}_w := \{x : W(x) = w\}$, azaz az ugyanolyan " w " Hamming-súllyal rendelkező csúcsok halmaza.

Mivel a szimmetria miatt az $f : x \rightarrow P_1\{X_t = x\}$ függvények és π konstans $\mathcal{X}_w$ felett, így a különbségük is konstans, tehát minden x -re ugyanannyi, és emiatt az abszolútérték kiemelhető a szummából:

$$\sum_{x: W(x)=w} |P_1\{X_t = x\} - \pi(x)| = \left| \sum_{x: W(x)=w} P_1\{X_t = x\} - \pi(x) \right|.$$

Ekkor elvégezve az összegzést:

$$\left| \sum_{x: W(x)=w} P_1\{X_t = x\} - \pi(x) \right| = |P_1\{W_t = w\} - \pi_W(w)|.$$

X_n nyilván tranzitív, így pedig mindkét egyenletet w szerint összegezve és 2-vel leosztva a totális variáció távolságokat kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{x: W(x)=w} \sum_{w \in \{0, \dots, n\}} |P_1\{X_t = x\} - \pi(x)| &= \|P_1(X_t) - \pi\|_{TV} = d(t) \\ \frac{1}{2} \sum_{w \in \{0, \dots, n\}} |P_1\{W_t = w\} - \pi_W(w)| &= \|P_n(W_t) - \pi_W\|_{TV} \end{aligned}$$

Ezeket összevetve megkapjuk, hogy

$$d(t) = \|P_1(X_t) - \pi\|_{TV} = \|P_n(W_t) - \pi_W\|_{TV}$$

Tehát a lemmát ezzel beláttuk. $\square$

Lássuk ez alapján a felső korlát bizonyítását. Ehhez vegyünk két Markov-láncot: W_t, Z_t -t, amelyek két különböző állapotból: a w -ből, illetve z -ből kiinduló Ehrenfest urnamodellen történő lusta bolyongást írnak le. Vegyük ekkor a (W_t, Z_t) coupling-ot, ahol $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az egyik láncban, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel a másik láncban lépünk (míg a másik lánc ugyanabban a pozícióban marad). A két rész az első találkozásuktól kezdve együtt mozog. Jelölje τ az első találkozás időpontját, azaz $\tau := \min\{t \geq 0 : W_t = Z_t\}$.

Feltehetjük, hogy $z \geq w$, és mivel az első találkozástól együtt mozognak, minden t -re teljesülni fog, hogy $Z_t \geq W_t$. Jelölje D_t a $|Z_t - W_t|$ különbséget. Itt nyilván $D_t = |Z_t - W_t| = Z_t - W_t > 0$.

Ekkor $t < \tau$ esetén legyen $(W_t, Z_t) = (w_t, z_t)$ és mivel teljesül, hogy $W_t \neq Z_t$, így $z_t \neq w_t$.

Vegyük ekkor a $D_{t+1} - D_t$ különbséget:

$D_{t+1} - D_t = 1$, ha $D_{t+1} > D_t$, melynek valószínűsége $\frac{1}{2}(1 - \frac{z_t}{n}) + \frac{1}{2}(\frac{w_t}{n})$, és
 $D_{t+1} - D_t = -1$, ha $D_{t+1} < D_t$, melynek valószínűsége $\frac{1}{2}(\frac{z_t}{n}) + \frac{1}{2}(1 - \frac{w_t}{n})$.

Innen kiszámolva a feltételes várható értéket:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D_{t+1} - D_t \mid Z_t = z_t, W_t = w_t] &= \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{z_t}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{w_t}{n} \right) \right) - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{z_t}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{w_t}{n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z_t}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z_t}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{w_t}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{w_t}{n} \\ &= -\frac{(z_t - w_t)}{n} = -\frac{D_t}{n}, \text{ ha } t < \tau. \end{aligned}$$

Ebből pedig következik, hogy

$$\mathbb{E} \left[D_{t+1} - D_t + \frac{D_t}{n} \mid Z_t = z_t, W_t = w_t \right] = 0, \text{ azaz}$$

$$\mathbb{E}[D_{t+1} \mid Z_t = z_t, W_t = w_t] = D_t - \frac{D_t}{n} = D_t \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

Mivel $t < \tau$ pontosan akkor teljesül, amikor $W_t \neq Z_t$, ezért $\mathbb{1}_{\{t < \tau\}} = \mathbb{1}_{\{W_t \neq Z_t\}}$. Tehát ezen az eseményen D_{t+1} feltételes várható értéke felírható:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{t < \tau\}} D_{t+1} \mid W_t, Z_t] = \mathbb{E}_{z,w}[\mathbb{1}_{\{t < \tau\}} D_{t+1}] = \left(1 - \frac{1}{n} \right) D_t \mathbb{1}_{\{t < \tau\}}.$$

A jobboldali kifejezés ekkor ugyanaz, mintha a várható értéket vennénk, hiszen a kifejezés mérhető a feltételre:

$$\mathbb{E}_{z,w}[\mathbb{1}_{\{t < \tau\}} D_{t+1}] = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}_{z,w}[D_t \mathbb{1}_{\{t < \tau\}}],$$

és mivel $\mathbb{1}_{\{t+1 < \tau\}} \leq \mathbb{1}_{\{t < \tau\}}$:

$$\mathbb{E}_{z,w}[\mathbb{1}_{\{t+1 < \tau\}} D_{t+1}] \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}_{z,w}[D_t \mathbb{1}_{\{t < \tau\}}].$$

Ezt iterálva azt kapjuk, hogy:

$$\mathbb{E}_{z,w}[\mathbb{1}_{\{t < \tau\}} D_{t+1}] \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t D_0 \mathbb{1}_{\{0 < \tau\}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t (z - w) \leq n e^{\frac{-t}{n}}.$$

Vegyük a D_t sorozat S_t szimmetrikus bolyongással vett couplingját, ahol $D_0 = S_0$, (illetve mindkét sorozatot a 0-ba érve megállítjuk,) és mivel láttuk, hogy $w_t \geq z_t \forall t$ -re (a $w < z$ feltétel miatt):

$$\begin{aligned} \frac{w_t}{n} &< \frac{z_t}{n} \\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{z_t}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{w_t}{n} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{z_t}{n} + -\frac{1}{2} \cdot \frac{w_t}{n} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z_t}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{w_t}{n} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{z_t}{n} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{w_t}{n}\right), \end{aligned}$$

ezért a D_t sorozat nagyobb valószínűséggel csökken, mint nő és $D_t \leq S_t$ is teljesül.

Legyen $\tau' := \min\{t \geq 0 : S_t = 0\}$. Ekkor mivel $\{S_t = 0\} \subseteq \{D_t = 0\}$, teljesül, hogy $\tau \leq \tau'$.

Tudjuk, hogy létezik olyan c konstans, amelyre: [2, 2.fejezet]

$$\mathbb{P}_k\{\tau > u\} \leq \mathbb{P}_k\{\tau' > u\} \leq \frac{ck}{\sqrt{u}}.$$

Ez alapján, feltéve, hogy D_s -ből indulunk ki:

$$\mathbb{P}_{z,w}\{\tau > s + u \mid D_s\} = \mathbb{1}_{\{s < \tau\}} \mathbb{P}_{D_s}\{u < \tau\} \leq \frac{c D_s \mathbb{1}_{\{s < \tau\}}}{\sqrt{u}}.$$

Itt az imént kiszámolt felső becslést használva a várható értékre:

$$\frac{c}{\sqrt{u}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{s < \tau\}} D_s) \leq \frac{c n e^{\frac{-s}{n}}}{\sqrt{u}}.$$

Ekkor $u := \alpha n$ és $s := \frac{1}{2} n \log n$ választással:

$$d_n(s + u) = d_n\left(\frac{1}{2} n \log n + \alpha n\right) \leq \frac{c}{\sqrt{\alpha}}.$$

Ebből viszont megkapjuk, hogy

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} d_n \left(\frac{1}{2} n \log n + \alpha n \right) = 0,$$

azaz beláttuk a felső korlátot.

Ezután nézzük a bizonyítás másik felét, az alsó korlátot, ahol azt fogjuk belátni, hogy [2, 7.fejezet]: $d(\frac{1}{2}n \log n - \alpha n) \geq 1 - 8e^{2-2\alpha}$.

Vegyünk $f := W$ -t, azaz legyen f az a függvény, ami egy $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \{0, 1\}^n$ vektorhoz a Hamming-súlyát rendeli hozzá. W eloszlása a π egyenletes stacionárius eloszláson binomiális, így

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi(W) &= np = n \frac{1}{2} = \frac{n}{2}, \\ \sigma_\pi^2(W) &= np(1-p) = n \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4}. \end{aligned}$$

Jelölje R_t azon elemek számát egy koordinátában, amelyek a t időpontig még nem lettek frissítve. Legyen $\mathbb{1} := (1, \dots, 1)$ a kiindulási koordináta. Ekkor $R_t = r$ azt jelenti, hogy a koordinátában r db 1-esen kívül a maradék $n - r$ elem 1 és 0 értékű is lehet. Emellett legyen $B : \text{Binom}(n - r, \frac{1}{2})$ eloszlású valószínűségi változó. Ezen B -vel R_t definíciója alapján teljesül, hogy a feltételes $(W(X_t)|R_t = r)$ és $r + B$ eloszlások megegyeznek:

$$(W(X_t)|R_t = r) \stackrel{d}{=} r + B.$$

Ennek segítségével már kiszámolhatjuk a $\mathbb{E}(W(X_t)|R_t = r)$ feltételes várható értéket, kihasználva, hogy B binomiális eloszlású paraméter várható értéke $(n - r)p = \frac{(n-r)}{2}$:

$$\mathbb{E}(W(X_t)|R_t = r) = \mathbb{E}(r + B) = r + \frac{(n - r)}{2}.$$

Ezt általánosítva:

$$\mathbb{E}(W(X_t)|R_t) = R_t + \frac{n - R_t}{2} = \frac{1}{2}(R_t + n) = n \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_t}{n} \right).$$

Ebből pedig, mivel R_t közelítőleg binomiális eloszlású, (várható értéket veszünk, így nincs szükségünk a függetlenségre, és számolhatunk binomiális eloszlásként) $p = \left(\frac{n-1}{n}\right)^t = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t$ paraméterrel (akárcsak a kupongyűjtési problémáknál). Innen következik hogy:

$$\mathbb{E}(R_t) = np = n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^t,$$

innen pedig kiszámolva $W(X_t)$ várható értékét:

$$\mathbb{E}_1(W(X_t)) = n \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mathbb{E}(R_t)}{n} \right) = n \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^t}{n} \right) = \frac{n}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right)^t \right].$$

A szórásnégyzetekre igaz az alábbi egyenlőség a feltételes szórásnégyzet tétel alapján (ahol $\sigma_1, \mathbb{E}_1$ az 1-ből induló folyamatra vonatkozik):

$$\sigma_1^2(W(X_t)) = \sigma_1^2(\mathbb{E}(W(X_t)|R_t)) + \mathbb{E}_1(\sigma_1^2(W(X_t)|R_t)),$$

amiből $\mathbb{E}(W(X_t)|R_t) = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{R_t}{n}\right)$ behelyettesítéssel:

$$\sigma_1^2(W(X_t)) = \frac{1}{4}\sigma_1^2(R_t) + \frac{1}{4}(n - \mathbb{E}_1(R_t)) = \frac{1}{4}(\sigma_1^2(R_t) + n - \mathbb{E}_1(R_t)).$$

Ekkor R_t felírható negatívan korrelált $(0, 1)$ értékeket felvevő identikátorok összegeként, ahol a négyzetreemelés nem változtat se 0, se 1 értékén. Emiatt σ és σ^2 értéke ugyanaz. Így a variancia kisebb, mint a várhatóérték:

$$\sigma_1^2(R_t) \leq \mathbb{E}_1(R_t).$$

Ebből az egyenlőtlenségből pedig következik, hogy

$$\sigma_1^2(W(X_t)) = \frac{1}{4}(\sigma_1^2(R_t) + n - \mathbb{E}_1(R_t)) \leq \frac{1}{4}(\mathbb{E}_1(R_t) + n - \mathbb{E}_1(R_t)) = \frac{n}{4}.$$

Legyen $\sigma := \sqrt{\max\{\sigma_\pi^2(W), \sigma_1^2(W(X_t))\}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$. Ekkor teljesül:

$$|\mathbb{E}_\pi(W) - \mathbb{E}_1(W(X_t))| = \left| \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t \right] \right| = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t = \sigma\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^t.$$

Ekkor felhasználva, hogy $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < e^{-1} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$ igaz minden egész n -re, $t_n := \frac{1}{2}(n-1)\log n - (\alpha-1)n > \frac{1}{2}n\log n - \alpha n = n(\frac{1}{2}\log n - \alpha)$ választással teljesül:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}_\pi(W) - \mathbb{E}_1(W(X_{t_n}))| &= \sigma\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t_n} = \sigma\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)\log n - (\alpha-1)n} \\ &= \sigma\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n(\frac{1}{2}\log n - \alpha + 1)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\log n} \\ &> \sigma\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(n-1)(\frac{1}{2}\log n - \alpha + 1)} > \sigma\sqrt{n} e^{-(\frac{1}{2}\log n - \alpha + 1)} \\ &= \sigma\sqrt{n} e^{-\frac{1}{2}\log n} e^{\alpha-1} = \sigma\sqrt{nn}^{-\frac{1}{2}} e^{\alpha-1} \\ &= e^{\alpha-1}\sigma. \end{aligned}$$

3.8. Lemma. Tudjuk [2, 7.fejezet] alapján, hogy tetszőleges r esetén:

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \geq 1 - \frac{8}{r^2},$$

ha $f : \mathcal{X} \rightarrow \Lambda$ egy a mintaterről a valósakra képző függvényre, és σ -ra (ahol legyen $\sigma^2 := \max\{Var_\mu f, Var_\nu f\}$), teljesül $|\mathbb{E}_\mu(f) - \mathbb{E}_\nu(f)| \geq r\sigma$.

Tehát egy P átmeneti mátrixú X_n Markov-láncre átírva ezt a lemmát:

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi\| \geq 1 - \frac{8}{r^2}.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $\mathbb{E}_\mu(f) \leq \mathbb{E}_\nu(f)$. Így felírható a Csebisev egyenlőtlenség, tehát tetszőleges A eseményre:

$$\mathbb{P}(|A - \mathbb{E}(A)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Ebbe behelyettesítve $A := (\mathbb{E}_\mu(f) + r\frac{\sigma}{2}, \infty)$ -t, (ahol jelölje $\mathbb{E}_\mu$ a μ eloszlásból induló folyamatot) és $k := \frac{r}{2}$ választással megkapjuk, hogy:

$$\mathbb{P}(|\mathbb{E}_\mu(f) + r\frac{\sigma}{2} - \mathbb{E}(\mathbb{E}_\mu(f) + r\frac{\sigma}{2}, \infty)| \geq \frac{r}{2}\sigma) \leq \frac{1}{(\frac{r}{2})^2} = \frac{4}{r^2},$$

$$\mu f^{-1}(A) \leq \frac{4}{r^2}.$$

Illetve a korábbi feltevés miatt szimmetrikusan:

$$\nu f^{-1}(A) \geq 1 - \frac{4}{r^2}.$$

Ezeket összevetve megkapjuk, hogy:

$$\|\mu f^{-1} - \nu f^{-1}\|_{TV} \geq 1 - \frac{8}{r^2}.$$

Legyen $f : \mathcal{X} \rightarrow \Lambda$, ahol Λ véges halmaz és $A \subseteq \Lambda$. Ekkor ha μ és ν valószínűségi eloszlás $\mathcal{X}$ -en, akkor jelölje $(\mu f^{-1})(A) := \mu(f^{-1}(A))$. Ezenkívül teljesül, hogy:

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \geq \|\mu f^{-1} - \nu f^{-1}\|_{TV},$$

mivel

$$\begin{aligned} |\mu f^{-1}(B) - \nu f^{-1}(B)| &= |\mu(f^{-1}(B)) - \nu(f^{-1}(B))|, \\ \max_{B \subseteq \Lambda} |\mu f^{-1}(B) - \nu f^{-1}(B)| &\leq \max_{A \subseteq \mathcal{X}} |\mu(A) - \nu(A)|. \end{aligned}$$

Ezek segítségével már megkapjuk a lemma állítását:

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \geq \|\mu f^{-1} - \nu f^{-1}\|_{TV} \geq 1 - \frac{8}{r^2}.$$

□

$|\mathbb{E}_\pi(W) - \mathbb{E}_1(W(X_{t_n}))| > e^{\alpha-1}\sigma$ egyenlőség miatt $r := e^{\alpha-1}$ választással teljesül az előző lemma feltétele és a lemma állítása alapján megkapjuk, hogy:

$$d(t_n) = d\left(\frac{1}{2}n \log n - \alpha n\right) \geq \|P^{t_n}(1, \cdot) - \pi\|_{TV} \geq 1 - \frac{8}{(e^{\alpha-1})^2} = 1 - 8(e^{2-2\alpha})$$

Ebből viszont következik, hogy:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} d\left(\frac{1}{2}n \log n - \alpha n\right) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 - 8(e^{2-2\alpha})) = 1,$$

amivel beláttuk, hogy ez az alsó korlát is teljesül. Tehát ezen paraméterekre teljesül a cutoff definíciója. Ezzel befejeztük a tételünk bizonyítását, a hiperkockán való lusta szimmetrikus bolyongás cutoffja valóban $k = \frac{1}{2}n \log n$ időben, $O(n)$ tartamban történik.

3.4. Bolyongás az egész számokon

3.4.1. Véletlen egydimenziós séta

Nézzük tehát az egyszerű, (lusta) random sétát $\mathbb{Z}_n$ -en, amelynél egy adott számon állva azonos valószínűséggel léphetünk egyet előre, egyet hátra, vagy maradhatunk az adott számon. Defináljuk ezt a folyamatot az alábbi (X_k) sorozattal:

3.9. Definíció. Legyen $X_0 = 0$ és legyen $(\varepsilon_i)_{i=1}$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változó sorozat $\{1, 0, -1\}$ halmazon, azaz:

$$\forall i \in \mathbb{N}^+ - \text{re} : \mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = 0) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{3}.$$

Ekkor X_{k+1} -et rekurzívan az alábbi módon kaphatjuk meg:

$$X_{k+1} = X_k + \varepsilon_{k+1} \pmod{n}.$$

Az egyszerű, random egydimenziós bolyongás azonban $O(n^2)$ lépés alatt kerül nagyon közel a stacionárius állapothoz, ami itt az egyenletes eloszlás $\mathbb{Z}_n$ -en, azaz $\pi_i = \frac{1}{n}$. Ez nagyon lassú konvergencia, azonban könnyen felgyorsítható egy egyszerű lépéssel:

Jelöljük S -sel a csúcsok halmazát a gráfban. Legyen f egy bijektív $S \rightarrow S$ függvény (azaz a f megadja a csúcsok egy permutációját). Ekkor vizsgáljuk az alábbi, módosított rekurzió konvergenciáját:

$$X_{k+1} = f(X_k) + \varepsilon_{k+1} \pmod{n}.$$

Így a módosított lánc már majdnem minden f bijekcióra $O(\log n)$ időben éri el a stacionárius állapotát. [5]

3.4.2. Gyorsítás determinisztikus függvényekkel

A következő tételhez vegyük Markov-láncok egy családját:

Legyen S véges halmaz: $|S| = n$ és P pedig az átmenet mátrix egy olyan tetszőlegesen S -en vett Markov-lánchoz, amelyekre teljesülnek az alábbiak:

1. A Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus,
2. $\forall i \in S : p_{ii} > 0$,
3. $i, j \in S$ -re, ha $p_{ij} > 0$, akkor $p_{ji} > 0$ is teljesül (azaz i és j közlekednek),
4. μ az egyenletes eloszlás S -en, amely egyben a stacionárius eloszlása is a láncnak.

3.10. Definíció. Jelöljük δ -val a minimális (nemnulla) átmenetvalószínűséget:

$$\delta := \min\{p_{ij} : i, j \in S, p_{ij} > 0\}.$$

3.11. Tétel. Valamely $A \subseteq S$ -re legyen $\mathcal{E}(A) = \{j \in S : \exists i \in A : p_{ij} > 0\}$ (tehát $\mathcal{E}(A)$ az A -ból 1 lépéssel elérhető csúcsokból álló halmaz). Tegyük fel, hogy létezik $\epsilon \in (0, 1)$, ami mellett $\forall |A| \leq \frac{n}{2}$ -re teljesül, hogy:

$$|\mathcal{E} \circ f \circ \mathcal{E}(A)| \geq (1 + \epsilon)|A|.$$

Ezenkívül legyen $f : S \rightarrow S$ bijekció, amelynek permutációmátrixát jelölje Π . Vezessük be a Q jelölést a $Q := \Pi P$ mátrixok szorzatára, azaz Q azon lánc átmenet mátrixa, ahol lépünk egyet f bijekció szerint, majd a P szerint. Ekkor a Q által definiált láncra már teljesül, hogy míg stacionárius eloszlása szintén a μ egyenletes eloszlás, $O(\log n)$ időben keveredik, mivel teljesül rá az alábbi egyenlőtlenség [5]:

$$\|\mu_i^k - \mu\|_{TV} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \left(1 - \frac{\epsilon^2 \delta^8}{2}\right)^{\frac{k-2}{4}}, \quad \forall i \in S$$

ahol δ -t a 3.10 szerint definiáljuk, ϵ a tétel feltételeinek megfelelően választjuk, μ_i^k pedig az X_k eloszlása $X_0 = i$ kiindulás esetén.

3.4.3. Bizonyítás a 3.11 tételhez

Legyen $R := L^2(L^T)^2$, ahol $L := P\Pi$.

Mivel $L = P\Pi$, ahol P -ről feltehetjük, hogy duplán sztochasztikus átmenet mátrix (ez következik abból, hogy a stacionárius eloszlása az egyenletes eloszlás), Π pedig egy permutációmátrix, ami mindig duplán sztochasztikus. Két duplán sztochasztikus mátrix szorzata mindig duplán sztochasztikus marad, így L is duplán sztochasztikus lesz, akárcsak L^T , illetve az ezek szorzatából álló $R = L^2(L^T)^2$.

R valójában az alábbi alakban is írható:

$$R = L^2(L^T)^2 = P\Pi P\Pi (P\Pi)^T (P\Pi)^T = P\Pi P\Pi \Pi^T P^T \Pi^T P^T = P\Pi P P^T \Pi^T P^T.$$

3.12. Lemma. A fent definiált R szimmetrikus és pozitív szemidefinit, míg a hozzátartozó Markov-lánc irreducibilis, aperiodikus, reverzibilis, és a stacionárius eloszlása az egyenletes eloszlás.

Bizonyítás. P definíciójában feltettük, hogy a P -hez tartozó stacionárius eloszlás az uniform eloszlás, így természetesen $L = P\Pi$ -hez is az egyenletes eloszlás lesz a stacionárius, és az ebből definiált R -hez is. R szimmetriája adódik a definíciójából, mivel egy mátrixnak és transzponáltjának szorzata $L^2(L^T)^2$ mindig szimmetrikus mátrixot ad, és R szimmetriájából következik, hogy az R -hez tartozó Markov-lánc reverzibilis is lesz, az uniform stacionárius eloszláson nézve. Emellett R pozitív szemidefinit is, mivel egy mátrixot és transzponáltjával szorozva mindig pozitív szemidefinit mátrixot kapunk:

$$x^T A A^T x = (A^T x)^T (A^T x) = \|A^T x\|_2^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mivel $R = P\Pi P P^T \Pi^T P^T$, ahol P a véges S -en vett átmenet mátrix volt és π_{ij} -re (amely π_{ij} a Π megfelelő eleme), $\pi_{ij} = 1$, ha $j = f(i)$ és $\pi_{ij} = 0$, ha $j \neq f(i)$, teljesül $r_{ii} \in R$ -re, hogy:

$$r_{ii} \geq p_{ii} \pi_{if(i)} p_{f(i)f(i)} p_{f(i)f(i)} \pi_{f(i)i} p_{ii}.$$

Ezenkívül feltettük, hogy $\forall i \in S : p_{ii} > 0$, így:

$$p_{ii} \pi_{if(i)} p_{f(i)f(i)} p_{f(i)f(i)} \pi_{f(i)i} p_{ii} > 0.$$

Tehát R -re teljesül, hogy aperiodikus, mivel a hozzátartozó Markov-lánc minden csúcsából önmagába pozitív valószínűséggel tud egy lépéssel eljutni: $\forall i \in R$ -re:

$$r_{ii} > 0.$$

Emellett

$$r_{ij} \geq p_{ij} \pi_{jf(j)} p_{f(j)f(j)} p_{f(j)f(j)} \pi_{f(j)i} p_{ij},$$

és ha $p_{ij} > 0$ teljesül egy i, j párra, akkor

$$p_{ij} \pi_{jf(j)} p_{f(j)f(j)} p_{f(j)f(j)} \pi_{f(j)i} p_{ij} > 0.$$

Tehát ha P irreducibilis, akkor R is az, mivel $p_{ij} > 0$ -ból következik, hogy $r_{ij} > 0$ adott i, j esetén. Márpedig P -ről feltettük, hogy irreducibilis, így pedig R is az.

□

3.13. Lemma. R legnagyobb sajátértéke 1, egyszeres multiplicitással, míg minden más sajátértéke szigorúan kisebb 1-nél és nemnegatív, (tehát $1 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$), a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor pedig az $(1, 1, \dots, 1)^T$ vektor, amelyre vezessük be az $\mathbb{1} := (1, 1, \dots, 1)^T$ jelölést.

Bizonyítás. Az előző 3.12 lemmában beláttuk, hogy R irreducibilis, aperiodikus, szimmetrikus és pozitív szemidefinit. Utóbbival ekvivalens, hogy R minden sajátértéke nemnegatív. Ezenkívül egy átmenet mátrixnak mindig $\lambda_1 = 1$ értékű a legnagyobb sajátértéke és a hozzátartozó vektor az $\mathbb{1}$, és ha a hozzátartozó lánc irreducibilis, akkor ez csak egyszeres multiplicitással szerepel (emiatl itt is egy ilyen sajátérték lesz a szorzatként előálló R mátrix sajátértékei között). [2, 12.fejezet] $\square$

3.14. Lemma. Bármely $k \geq 1$ -re és $x \in \mathbb{R}^n$ -re, ahol x merőleges a $\mathbb{1}$ -re:

$$\|L^k x\| \leq \lambda_2^{(k-1)/4} \|x\|,$$

ahol $\|x\|$ alatt a 2-es normáját értjük, azaz $\|x\|_2$ -t.

Bizonyítás. Mivel $R = L^2(L^T)^2$ egy szimmetrikus mátrix, ezért a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai merőlegesek. Mivel x merőleges $\mathbb{1}$ -re, ahol $\mathbb{1}$ a λ_1 -hez tartozó sajátvektor, ezért x -et a $v_1, v_2, \dots, v_n$ egység sajátvektorok lineáris kombinációjaként felírva, a v_1 vektorhoz tartozó együttható 0. Tehát

$$x = \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i,$$

és így az x normanégyszetét nézve csupán az együtthatók négyzetösszege marad:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=2}^n \alpha_i^2.$$

x -et R -rel balról szorozva kapjuk, hogy:

$$Rx = \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i v_i,$$

mivel $Rv_i = \lambda_i v_i$. Innen pedig megkapjuk, hogy:

$$x^T Rx = \sum_{i=2}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$

A sajátértékeket λ_2 -vel felülről becsülve:

$$x^T Rx \leq \lambda_2 \|x\|^2,$$

$$x^T Rx = x^T L^2 (L^T)^2 x = ((L^T)^2 x)^T ((L^T)^2 x) = \|(L^T)^2 x\|^2 \leq \lambda_2 \|x\|^2.$$

Illetve $L = P\Pi$ -ről tudjuk, hogy duplán sztochasztikus, így teljesül, hogy $\mathbb{1}^T (L^T)^2 = \mathbb{1}^T$, és $\mathbb{1}^T x = 0$, mert merőlegesek. Így $(L^T)^2 x$ továbbra is merőleges lesz $\mathbb{1}$ -re, azaz teljesül, hogy:

$$\mathbb{1}^T (L^T)^2 x = \mathbb{1}^T x = 0.$$

Ez alapján a fentit pedig iterálni is tudjuk:

$$\begin{aligned} \|(L^T)^4 x\|^2 &= \|(L^T)^2 (L^T)^2 x\|^2 \leq \lambda_2 \|(L^T)^2 x\|^2 \leq \lambda_2^2 \|x\|^2 \\ &\vdots \\ \|(L^T)^{2k} x\|^2 &\leq \lambda_2^k \|x\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Befejezésül, mivel L egy duplán sztochasztikus mátrix, ezért az L -vel való szorzás egy ℓ^2 -beli gyenge kontrakció, akárcsak az L^T -vel való szorzás, azaz:

$$\|Lx\| \leq \|x\|.$$

Így már beláthatjuk eredeti állításunkat, hiszen páros kitevőre már beláttuk, páratlan kitevőre pedig ebből következik:

$$\|(L^T)^{2k+1} x\|^2 \leq \|(L^T)^{2k} x\|^2 \leq \lambda_2^k \|x\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Tehát teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\|(L^T)^k x\|^2 \leq \lambda_2^{\frac{(k-1)}{2}} \|x\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Mivel az L duplán sztochasztikus, ezért teljesülnek az alábbi ekvivalenciák:

$$\|(L^T)^n x\| \leq a \Leftrightarrow \forall y \perp \mathbb{1} : y^T (L^T)^n x \leq a \Leftrightarrow x^T L^n y \leq a \Leftrightarrow \|L^n y\| \leq a,$$

Így az előzőből gyököt vonva, a lemmánk állítását kapjuk:

$$\|(L^T)^k x\| \leq \lambda_2^{\frac{(k-1)}{4}} \|x\|, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

□

3.15. Lemma. Bármely $k \geq 2$ -re és $x \in \mathbb{R}^n$ -re, ahol x merőleges a $\mathbb{1}$ -re:

$$\|Q^k x\| \leq \lambda_2^{(k-2)/4} \|x\|,$$

ahol $Q = \Pi P$ mátrixot jelölte.

Bizonyítás. Mivel P és Π is duplán sztochasztikus, így ezek is ℓ^2 -beli gyenge kontrakciók és $\mathbb{1}^T x = 0$ esetén $\mathbb{1}^T P x = 0$ is teljesül. Ezenkívül felírhatjuk, hogy $Q^2 = (\Pi P)(\Pi P) = \Pi L P$, amit iterálva kapjuk:

$$Q^k = (\Pi P)^k = \Pi L^{(k-1)} P,$$

és mivel Π és P kontrakció, megkapjuk, hogy:

$$\|Q^k x\| = \|\Pi L^{(k-1)} P x\| \leq \|L^{(k-1)} P x\| \leq \lambda_2^{(k-2)/4} \|P x\| \leq \lambda_2^{(k-2)/4} \|x\|.$$

□

3.16. Lemma. Jelölje λ_2 az R második legnagyobb sajátértékét. Ha ϵ megfelel a 3.11 tételbeli feltételeknek az R -hez tartozó Markov-láncre, akkor:

$$\lambda_2 \leq 1 - \frac{\epsilon^2 \delta^8}{2}.$$

Bizonyítás. Definiáljuk a ν valószínűségi mértéket $S \times S$ -en:

$$\nu(i, j) = \mu(i) r_{ij} = \frac{r_{ij}}{n},$$

mivel μ stacionárius eloszlás itt az egyenletes eloszlás.

Jelölje $\bar{A}$ az A csúcshalmaz komplementerét, azaz legyen $\bar{A} = S \setminus A$. Az R átmeneti mátrixhoz tartozó Markov-láncre írjuk fel a Cheeger-konstans általános képletét, amelyet 2.2.1-ben vezettünk be, az alábbi módon [2, 7.fejezet]:

$$\Phi = \min_{A \subseteq S, \mu(A) \leq \frac{1}{2}} \frac{\nu(A, \bar{A})}{\mu(A)},$$

$$\text{ahol } \nu(A, \bar{A}) = \sum_{i \in A, j \in \bar{A}} \nu(i, j).$$

Helyettesítsük be a fent kiszámolt $\nu(i, j) = \frac{r_{ij}}{n}$ -t. Újra kihasználva, hogy itt μ stacionárius eloszlás, az uniform eloszlás:

$$\Phi = \min_{A \subseteq S, |A| \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A, j \in \bar{A}} r_{ij}.$$

Mivel δ definíciója miatt $0 < p_{ij}$ esetén $\delta \leq p_{ij}$ is teljesül, ezért egy i, j párra, ha $r_{ij} \geq 0$, akkor az is teljesül $r_{ij} \geq p_{ij} \pi_{j f(j)} p_{f(j) f(j)} p_{f(j) f(j)} \pi_{f(j) j} p_{jj}$ miatt, hogy $r_{ij} \geq \delta^4$ (hiszen $p_{ij}, p_{jj}, p_{f(j) f(j)} \geq \delta$ -nak is igaznak kell lennie sorra $r_{ij}, r_{jj}, r_{f(j) f(j)} > 0$ esetén $\forall i, j \in S$).

Legyen A' a R által definiált láncban egy lépésben elérhető csúcsok halmaza: $A' = \{j \in S : \exists i \in A : r_{ij} > 0\}$ és legyen $\mathcal{E}(A)$ az P által definiált láncban egy lépésben elérhető csúcsok halmaza: $\mathcal{E}(A) = \{j \in S : \exists i \in A : p_{ij} > 0\}$.

Mivel $p_{ij} > 0$ ekvivalens azzal, hogy $p_{ji} > 0$, teljesül hogy:

$$\sum_{i \in A, j \in \bar{A}} r_{ij} \geq \delta^4 |A' \cap \bar{A}|,$$

és (hiszen mindkettő az A -ból elérhető, de nem A -beli csúcsokat írja le) és teljesül, hogy $A \subseteq A'$ (hiszen $p_{ii} > 0, \forall i \in S$):

$$\delta^4 |A' \cap \bar{A}| = \delta^4 (|A'| - |A|),$$

Így pedig:

$$\sum_{i \in A, j \in \bar{A}} r_{ij} \geq \delta^4(|A'| - |A|).$$

A' -t az alábbi módon, az $R = P\Pi P P^T \Pi^T P^T$ definíció alapján felírva, ahol $\mathcal{E}$ egy P vagy P^T szerint tett lépést jelöl, f pedig a Π permutáció alkalmazását, kapjuk az alábbi egyenlőséget:

$$A' = \mathcal{E} \circ f^{-1} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{E} \circ f \circ \mathcal{E}(A).$$

Mivel tudjuk, hogy $A \subseteq \mathcal{E}(A)$, így egy $\mathcal{E}$ szerint vett lépés, ahogy f , illetve f^{-1} sem csökkentheti a halmaz méretét:

$$A' \supseteq \mathcal{E} \circ f \circ \mathcal{E}(A)$$

Ekkor ϵ 3.11-beli definíciója miatt teljesül, hogy:

$$|A'| \geq |\mathcal{E} \circ f \circ \mathcal{E}(A)| \geq (1 + \epsilon)|A|.$$

Összefoglalva:

$$\sum_{i \in A, j \in \bar{A}} r_{ij} \geq \delta^4(|A'| - |A|) \geq \delta^4((1 + \epsilon)|A| - |A|) = \delta^4 \epsilon |A|,$$

$$\text{és } \Phi = \min_{A \subseteq S, |A| \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A, j \in \bar{A}} r_{ij}$$

A felső egyenlőtlenséget behelyettesítve tehát megkaptuk, hogy $\Phi \geq \epsilon \delta^4$, amiből következik, hogy:

$$\Phi^2 \geq \epsilon^2 \delta^8.$$

Ekkor felhasználva a sajátértékek és a Cheeger-konstans közötti összefüggést [2, 7.fejezet], tudjuk, hogy λ_2 második legnagyobb sajátértékre fennáll, hogy:

$$\frac{\Phi^2}{2} \leq 1 - \lambda_2 \leq \Phi, \text{ azaz}$$

$$\lambda_2 \leq 1 - \frac{\Phi^2}{2}.$$

Ezeket összevetve kijön a lemma állítása:

$$\lambda_2 \leq 1 - \frac{\epsilon^2 \delta^8}{2}.$$

□

Ezekből már bizonyítani tudjuk a 3.11 tételt:

Bizonyítás. Legyen x olyan $\mathbb{R}^n$ -beli vektor, melynek az i . ($i \in S$) koordinátája $1 - \frac{1}{n}$, többi koordinátája pedig $-\frac{1}{n}$, azaz $x = (-\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, -\frac{1}{n})$, tehát x gyakorlatilag az i . egységvektor és a stacionárius eloszlás különbségeként írható fel. Ez nyilván merőleges $\mathbb{1}$ -re.

Ekkor ha vesszük a $(Q^T)^k x$ szorzatot, akkor ennek az l . komponense $\mu_i^k(l) - \mu(l)$ lesz, így pedig $\|(Q^T)^k x\| = \left(\sum_{j \in S} (\mu_i^k(j) - \mu(j))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Ez alapján a 3.15 és 3.16 lemmákat felhasználva:

$$\begin{aligned} \|\mu_i^k - \mu\|_{TV} &= \frac{1}{2} \sum_{j \in S} |\mu_i^k(j) - \mu(j)| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(n \sum_{j \in S} (\mu_i^k(j) - \mu(j))^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{2} \left(\sum_{j \in S} (\mu_i^k(j) - \mu(j))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2} \|(Q^T)^k x\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \lambda_2^{(k-2)/4} \|x\| \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{2} \left(1 - \frac{\epsilon^2 \delta^8}{2} \right)^{\frac{k-2}{4}} \|x\|, \end{aligned}$$

Viszont x definíciója miatt az is teljesül, hogy $\|x\| \leq 1$, így pedig visszacapjuk az eredeti tétel állítását:

$$\|\mu_i^k - \mu\|_{TV} \leq \frac{\sqrt{n}}{2} \left(1 - \frac{\epsilon^2 \delta^8}{2} \right)^{\frac{k-2}{4}}.$$

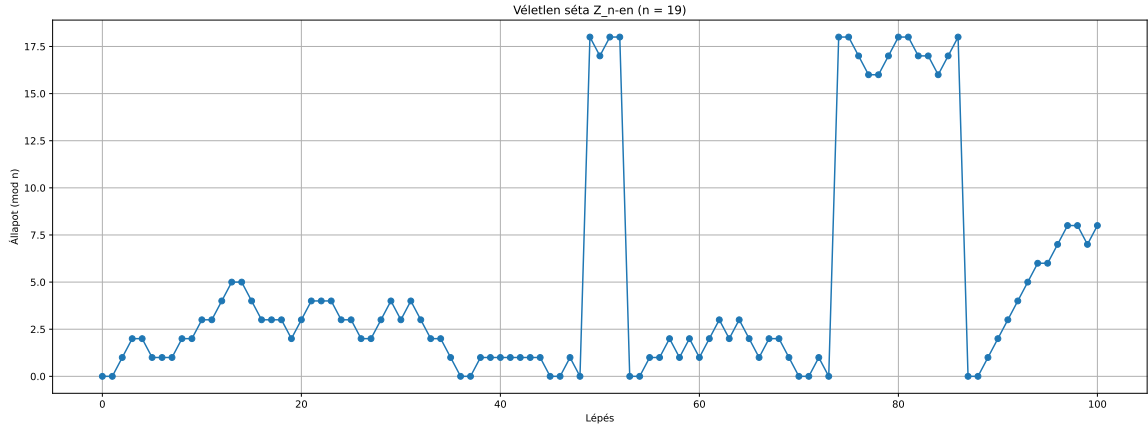
Ez természetesen $\forall i \in S$ -re ugyanígy teljesülni fog, hiszen sehol sem használtuk ki, hogy i hanyadik koordináta, így a tételt beláttuk, a fentiek szerint definiált Q -val megadott Markov-láncnak valóban $\log n$ nagyságrendű a keverési ideje.

□

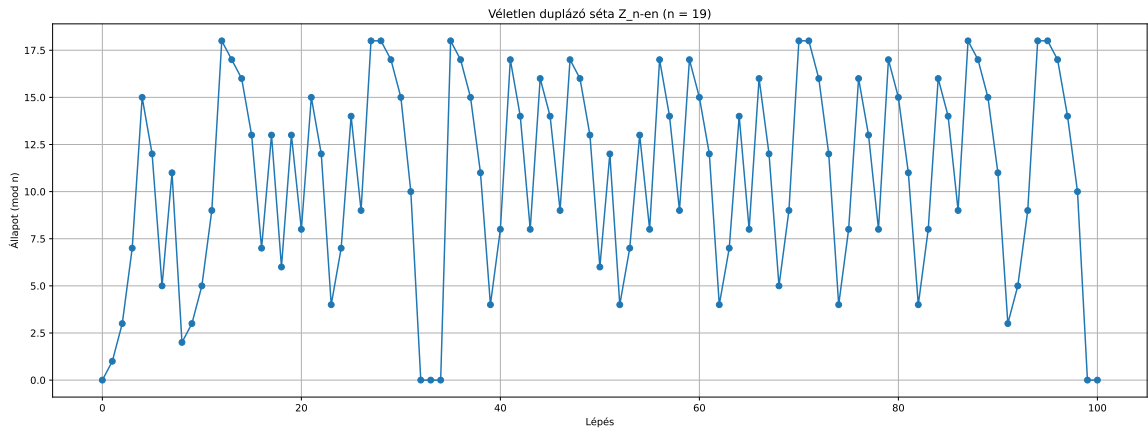
3.4.4. Ellenpélda

Vegyünk azon speciális "duplázó" f bijekciót, amely az alábbi módon módosítja a random sétánkat:

$$X_{k+1} = 2X_k + \epsilon_{k+1} \pmod{n}.$$



3.5. ábra. Egy véletlen 1 dimenziós séta az idő szerint.



3.6. ábra. Egy véletlen duplázó 1 dimenziós séta az idő szerint.

Erről a módosításról tudni, hogy a keverési ideje $O(\log n)$ [5], azonban mégsem feltétlenül teljesül rá a 3.11 tételben szereplő feltétel. Vegyük például az $n = 4m - 1$ -en történő duplázó sétát, és válasszuk az A halmazt az alábbiak:

$$A := \{1, 2, \dots, m - 1\} \cup \{2m + 1, \dots, 3m - 1\}.$$

Ekkor az A -ból egy lépésben elérhető csúcsok halmaza: $\mathcal{E}(A) = \{0, 1, \dots, m\} \cup \{2m, \dots, 3m\}$, hiszen minden csúcsból az eggyel kisebb, illetve eggyel nagyobb csúcsok érhetőek el.

Ekkor ha alkalmazzuk $\mathcal{E}(A)$ -ra a duplázó f függvényt:

$$f \circ \mathcal{E}(A) = f \circ \{0, 1, \dots, m\} \cup f \circ \{2m, \dots, 3m\} = \{0, 2, 4, \dots, 2m\} \cup \{1, 3, \dots, 2m+1\} = \{0, 1, 2, \dots, 2m, 2m+1\}.$$

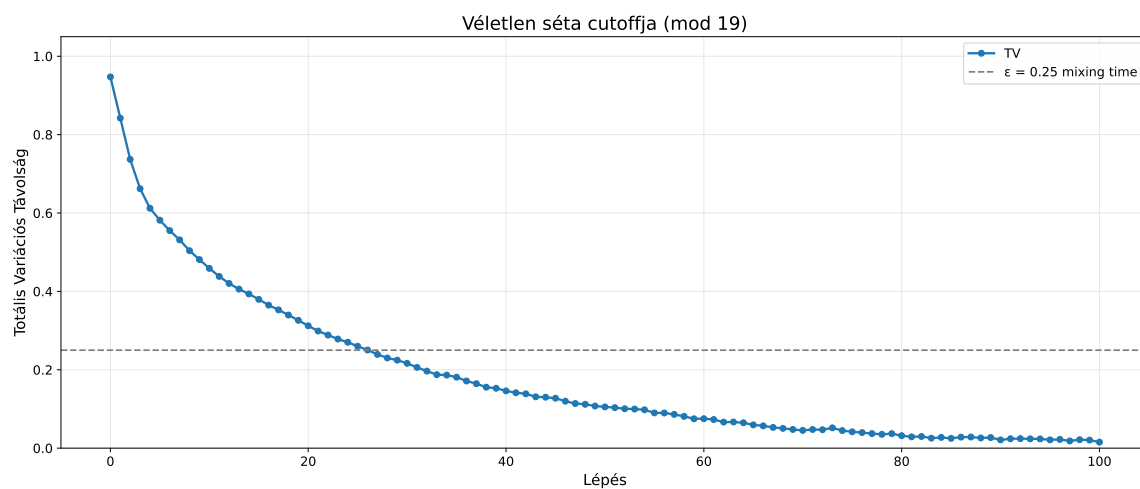
Innen pedig még egy lépést téve, a $f \circ \mathcal{E}(A)$ -ból elérhető csúcsok halmaza:

$$\mathcal{E} \circ f \circ \mathcal{E}(A) = \{4m-1, 0, 1, 2, \dots, 2m+2\},$$

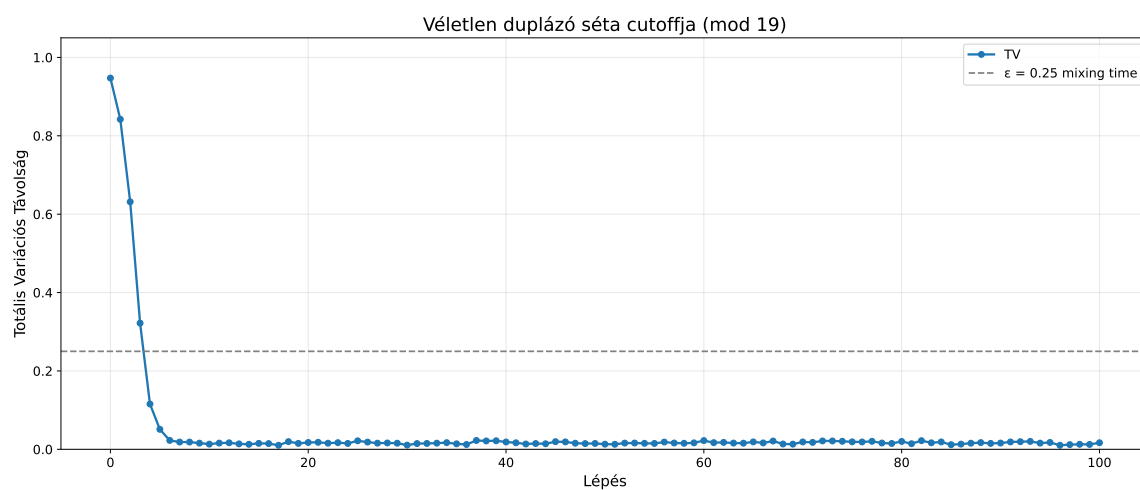
tehát $|\mathcal{E} \circ f \circ \mathcal{E}(A)| = 2m+4$. Így láthatjuk, hogy a 3.11 tételbeli feltételek közül $|A| \leq \frac{n}{2}$ ugyan teljesül A választásával ($|A| = 2m-2$), de $|\mathcal{E} \circ f \circ \mathcal{E}(A)| \geq (1+\epsilon)|A|$ feltétel jelen esetben:

$$2m+4 \geq (1+\epsilon)(2m-2).$$

Ebből $\frac{2m+4}{2m-2} = 1 + \frac{6}{2m-2} \geq 1+\epsilon$, tehát $\frac{6}{2m-2} \geq \epsilon$. Erre az ϵ -ra alkalmazva a 3.11 tételt, csak $\Omega(n)$ idejű keveredést kapnánk, ez viszont gyengébb mint a tényleges keverési idő, ami itt $\mathcal{O}(\log n)$. Ez egy jó példa arra, hogy a 3.11 tétel állítása elégséges a gyorsított keverés létrejöttéhez, de nem mindig szükséges hozzá.



3.7. ábra. 10.000 darab véletlen 1 dimenziós séta átlagának, totális variációs távolságának változása.



3.8. ábra. 10.000 darab véletlen duplázó 1 dimenziós séta átlagának, totális variációs távolságának változása.

4. fejezet

Kiegészítések

4.1. Product condition: A cutoff egy szükséges feltétele

4.1. Definíció. Legyen P átmeneti mátrix $\mathcal{X}$ állapotterén szimmetrikus, tehát legyen P minden sajátértéke valós. Emellett legyen P irreducibilis és megfordítható (ami a mátrix szimmetrikusságból már automatikusan következik), illetve a hozzá tartozó Markov-lánc lusta (azaz $\forall x \in \mathcal{X}$ -re teljesüljön, hogy $P(x, x) \geq \frac{1}{2}$). Ekkor definiáljuk P relaxációs idejét az alábbi módon :

$$t_{rel} := \frac{1}{(1 - \lambda_2)},$$

ahol λ_2 P második legnagyobb sajátértéke, amelyre igaz, hogy $\lambda_2 < 1$ a feltételek miatt.

Ekkor teljesül az alábbi összefüggés a keverési idő és a relaxációs idő között [6]:

$$(t_{rel} - 1) \log \left(\frac{1}{2\epsilon} \right) \leq t_{mix}(\epsilon) \leq \log \left(\frac{1}{\epsilon \min_x \pi(x)} \right) t_{rel}.$$

A product condition láncok egy sorozatához vett ezen két mérőszám sorozat $(t_{rel}^{(n)}, \text{ és } t_{mix}^{(n)})$ összefüggésére ad feltételt.

4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy láncok egy sorozata teljesíti a product condition-t (azaz szorzási feltételt), ha teljesül rá, hogy:

$$(1 - \lambda_2)^{(n)} t_{mix}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ avagy : } t_{rel}^{(n)} = o(t_{mix}^{(n)}).$$

Ezekből már megkaphatjuk az alábbi rendkívül erős tételt a cutoff létezésének szükséges feltételére:

4.3. Tétel. Egy irreducibilis és aperiodikus Markov-lánc sorozatnak, ahol $t_{rel}^{(n)}$ a relaxációs idők, és $t_{mix}^{(n)}$ a keverési idők, csak akkor létezhet cutoff-ja, ha $t_{rel}^{(n)} = o(t_{mix}^{(n)})$ teljesül a mérőszám sorozatokra, $n \rightarrow \infty$ esetén. [6]

4.2. Szeparációs cutoff

4.4. Definíció. Defináljuk egy Markov-lánc szeparációs távolságát a csúcsokon vett szeparációs távolságok közül a maximálisnak, azaz legyen [2, 18.fejezet]:

$$s(t) = \max_{x \in \mathcal{X}} s_x(t), \text{ ahol}$$

$$s_x(t) := \max_{y \in \mathcal{X}} \left[1 - \frac{P^t(x, y)}{\pi(y)} \right],$$

π pedig a stacionárius eloszlás.

4.5. Definíció. Ekkor legyen egy lánc szeparációs ideje adott $\epsilon \in (0, 1)$ -re $t_{sep}(\epsilon)$, ahol:

$$t_{sep}(\epsilon) := \inf \{t \geq 0 : s(t) \leq \epsilon\}.$$

Egy Markov-lánc sorozatnak szeparációs cutoff-ja van, ha teljesül a szeparációs keverési idők sorozatára, hogy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{sep}^{(n)}(\epsilon)}{t_{sep}^{(n)}(1 - \epsilon)} = 1, \forall \epsilon \in (0, 1).$$

4.6. Tétel. Az n dimenziós hiperkockán való lusta sétának $n \log n$ időben van szeparációs cutoffja is van, $w_n = \mathcal{O}(n)$ tartamban. [2, 18.fejezet]

4.3. Cutoff a limitált entrópiánál

4.7. Definíció. Legyen $H := -\frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n P(i, j) \log P(i, j) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n P(i, j) \log \frac{1}{P(i, j)}$. Ekkor definiáljuk a limitált entrópiát az alábbi módon: [7] [8]

$$t_{ent} := \frac{\log n}{H}.$$

Vegyük a 3.11 tételben szereplő definíciók szerint egy P bisztochasztikus mátrixot és Π permutáció mátrixot, illetve a szorzatukként előálló, már korábban is használt $Q := P\Pi$ mátrixot. Tudjuk, hogy a P -hez, és így a Q -hoz is tartozó stacionárius eloszlás az egyenletes. Ekkor ha a $P^{(n)}$ mátrixsorozat teljesít bizonyos feltételeket, akkor majdnem minden permutációra a $Q^{(n)}$ mátrixokhoz tartozó láncsorozatnak limitált entrópiánál (azaz t_{ent} időben) cutoffja van.

4.8. Tétel. Legyen P_n bisztochasztikus mátrixok egy sorozata (tehát a mátrixoknál legyen minden sorban és oszlopban az elemek összege 1) $\mathcal{X}_n$ -en, ahol $|\mathcal{X}_n| = n \geq 1$. Ekkor ha teljesül az alábbi három feltétel:

- Szórtság:

$$\delta_n := \min \{P_n(i, j) : i, j \in \mathcal{X}_n, P_n(i, j) > 0\} = \frac{1}{n^{o(1)}}.$$

- Nem-degeneráltság:

$$\Delta := \sup_{n \geq 1} \max_{i,j \in \mathcal{X}_n} P_n(i,j) < 1.$$

- Limitált entrópia:

$$H = o\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)$$

akkor a fenti feltételek mellett a P -hez tartozó Markov-láncnak nagy valószínűséggel létezik μ stacionárius eloszlása. Ezenkívül $t = \lambda t_{ent} + o(t_{ent})$ esetén:

$$\lambda > 1 : \max_{i \in [n]} \|P_n^t(i, \cdot) - \mu\|_{TV} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\lambda < 1 : \min_{i \in [n]} \|P_n^t(i, \cdot) - \mu\|_{TV} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Tehát összefoglalva megkapjuk a cutoff limitált entrópiára vonatkozó definícióját: ha Π egy $\mathcal{X}_n$ -n levő permutációmátrix, akkor a $Q = P\Pi$ lánc keverési idejére teljesül, hogy [7]:

$$\forall \epsilon \in (0, 1) : \max_{i \in [n]} \left| \frac{t_{mix}^{(i)}(\epsilon)}{t_{ent}} - 1 \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

majdnem biztosan, azaz [8]:

$$\frac{H_n t_{mix}^{(n)}(\epsilon)}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ sztochasztikusan.}$$

5. fejezet

Összefoglalás

Ez volt tehát a szakdolgozatom - egy rövidke betekintés a cutoff jelenségbe, annak elméleti hátterének kibontása, illetve a legismertebb példák bemutatása, néhány esetben szemléltetése.

(A dolgozat ábráihoz tartozó Python-kódok, melyek a GPT-4o segítségével készültek, a <https://github.com/petofibori/cutoff/blob/main/szakdogaa.ipynb> linken érhetőek el.)

Jelenleg a cutoff jelenség létrejöttére nem ismert átfogó, egyben szükséges és elégséges tétel, így több nyitott kérdés is van még a jelenség vizsgálatával kapcsolatban. Frissességének és hasznosságának köszönhetően, (többek között fontos szerepe van például a ferromágnesességet leíró Ising-modell vizsgálatánál, az erre használt Glauber dynamics szimulációknál,) aktív terület a matematikában és sok potenciállal rendelkezik.

Irodalomjegyzék

- [1] Persi Diaconis. The cutoff phenomenon in finite Markov chains. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 93(4):1659–1664, 1996.
- [2] David A Levin and Yuval Peres. *Markov chains and mixing times*, volume 107. American Mathematical Soc., 2017.
- [3] Dave Bayer and Persi Diaconis. Trailing the dovetail shuffle to its lair. *The Annals of Applied Probability*, pages 294–313, 1992.
- [4] Persi Diaconis and Mehrdad Shahshahani. Generating a random permutation with random transpositions. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 57(2):159–179, 1981.
- [5] Sourav Chatterjee and Persi Diaconis. Speeding up Markov chains with deterministic jumps. *Probability Theory and Related Fields*, 178:1193–1214, 2020.
- [6] Riddhipratim Basu, Jonathan Hermon, and Yuval Peres. Characterization of cutoff for reversible Markov chains. In *Proceedings of the twenty-sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 1774–1791. SIAM, 2014.
- [7] Charles Bordenave, Pietro Caputo, and Justin Salez. Cutoff at the “entropic time” for sparse Markov chains. *Probability Theory and Related Fields*, 173:261–292, 2019.
- [8] Anna Ben-Hamou and Yuval Peres. Cutoff for permuted Markov chains. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et statistiques*, volume 59, pages 230–243. Institut Henri Poincaré, 2023.

Mesterséges Intelligencia használat

Alulírott, Petőfi Bori, nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye
Programkód írása	GPT-4o	Minden megírt Python kód a GPT-4o segítségével készült.
Ábrakészítés	GPT-4o	Az összes ábra Pythonban írt kódja.
LaTeX jelölések kikeresése	GPT-4o	Teljes dolgozat.
LaTeX táblázat	GPT-4o	Ez a 5 táblázat.
Nyelvhelyesség ellenőrzése	GPT-4o	Teljes dolgozat.

5.ábra

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.

Petőfi Bori