

Véges-állapotterű, diszkrét idejű Markov-láncok konvergenciája

Kolozsvári Bence Tamás

ELTE TTK Matematika BSc

Témavezető: Csáji Balázs Csanád



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2025

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Csáji Balázs Csanádnak a segítségéért. Ugyan a témavezető kiválasztását sokáig halogattam, de a Tanár Úr a felkérést követően rögtön mondta, hogy elvállal, és a téma kiválasztásában is rendkívül rugalmas volt. Továbbá szeretném megköszönni a konzultációkat, ahol a szakdolgozat tökéletesítésén túl szó volt például a mesterszakon történő továbbtanulásról, amiben nagy segítséget nyújtott, amiért szintén hálás vagyok.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. A Markov-láncok elméleti alapjai	4
2.1. A Markov-lánc definíciója	4
2.2. Példa: Elemér filmjei és sorozatai	5
2.3. Irreducibilitás, aperiodicitás	8
2.4. Stacionárius eloszlás	16
2.5. További érdekes állítások	26
3. Markov-láncok konvergenciája	30
3.1. Állítás pozitív rekurrens Markov-láncokról	30
3.2. Teljes variációs távolság	34
3.3. Konvergenca tétel	37
4. Összefoglalás	42
Irodalom	43

1. fejezet

Bevezetés

A Markov-láncok időben folyamatosan változó véletlen jelenségek legegyszerűbb matematikai modelljei. Elméletük alapja, hogy a jelen csak a tegnapon múlik, nem számít, hogy régebben mi történt. Az viszont, hogy tegnap mi volt, igenis számít, tehát az események nem függetlenek egymástól. Viselkedésük pont egyszerűségük miatt nagyon jól tanulmányozható, és már korábban is sokan vizsgálták, így akit nagyon megfog eme szakdolgozat, az utána többféle irányba is elindulhat. Az alapok megértése rendkívül fontos, elsajátításuk nélkül az ember később könnyedén el tud veszni a bonyolultabb matematikai modellek sűrűjében, amelyek megértése a Markov-láncok teljes körű megértésén alapul.

Szakdolgozatom, amely csak a véges-állapotterű, diszkrét idejű Markov-láncokkal foglalkozik, első fejezetében a Markov-láncok alapjait járja körbe, definiáljuk az alapvető fogalmakat, a hozzájuk tartozó fontos tételeket pedig kimondjuk és bebizonyítjuk. A 2. fejezet a Markov-láncok hosszú távú viselkedésével foglalkozik, ami a szakdolgozat fő témája, és azzal az állítással végződik, hogy a Markov-láncok exponenciális sebességgel konvergálnak a stacionárius eloszlásukhoz. Szakdolgozatom az érintett lemmák és tételek teljes bizonyítását tartalmazza, így még érhetőbb, hogy hogyan is jutunk el a végső bizonyítására az exponenciális konvergenciának.

2. fejezet

A Markov-láncok elméleti alapjai

2.1 A Markov-lánc definíciója

A Markov-lánc egy olyan folyamat, amely egy előre meghatározott halmaz elemei között lépked a következőképpen: amennyiben jelenleg egy adott x állapotban van, akkor, hogy ezt követően melyik állapotba kerül, az csak és kizárólag x -től függ, mégpedig egy előre meghatározott valószínűségi eloszlást követve. Ezt kicsit precízebben: Adott $(X_0, X_1, \dots)$ valószínűségi változók sorozata Markov-lánc a véges X állapottérrel, P átmeneti mátrixszal, hogyha bármely $x, y \in X$, $t \geq 1$ valamint minden olyan $H_{t-1} = \bigcap_{s=0}^{t-1} \{X_s = x_s\}$ eseményre, amelyre $\mathbb{P}(H_{t-1} \cap \{X_t = x\}) > 0$, teljesül, hogy:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = y \mid H_{t-1} \cap \{X_t = x\}) = \mathbb{P}(X_{t+1} = y \mid X_t = x) = P(x, y).$$

Ezt nevezzük Markov-tulajdonságnak, ami azt mutatja meg, amennyiben a jelenben az x állapotban vagyunk, akkor annak a valószínűsége, hogy a következő állapot amibe kerülünk y lesz teljes mértékben független attól, hogy a múltban mely állapotokat jártuk be, továbbá hogy milyen sorrendben jártuk be azon állapotokat, csak és kizárólag a jelenen múlik.

A P mátrix mérete $|X| \times |X|$ lesz, az x -edik sora azt írja le, hogy az x állapotból a többi állapotba milyen eséllyel lépünk. Természetesen a mátrixnak nem lehet negatív eleme, amiből következik, hogy a P mátrix sztochasztikus, ami azt jelenti, hogy minden eleme nemnegatív, és teljesül rá, hogy

$$\sum_{y \in X} P(x, y) = 1 \quad \text{minden } x \in X \text{ esetén.}$$

Ez egy rendkívül fontos tény a P mátrixokról, amit az elkövetkezőkben sokszor fogunk hasznosítani

2.2 Példa: Elemér filmjei és sorozatai

Elemér nagy mozgókép-rajongó, emiatt minden nap néz valami érdekeset a TV-ben. Mivel a filmeket és a sorozatokat is szereti, viszont nem túl magabiztos, minden nap a szerencsére bízva, hogy mit nézzon. A következő módszert tanulta el az apukájától: amennyiben előző nap filmet nézett, másnap feldobja a Csillagok háborújás pénzérméjét, ami $1 - p$ eséllyel esik a Yoda mesteres oldalára, és p eséllyel a Darth Vaderesre. Amennyiben a Yoda mesteres oldalára esik, akkor másnap is filmet néz, amennyiben a Darth Vaderesre, akkor másnap sorozatot. Amennyiben előző nap sorozatot nézett, a Twin Peaks-es pénzérméjét dobja fel, ami $1 - q$ eséllyel esik a Cooper ügynökös oldalra és q eséllyel a Bobos oldalra. Amennyiben az előbbi, akkor marad a sorozatnézésnél, amennyiben utóbbi, vált filmnézésre.

A fentebbi mese nyilván könnyedén Markov-láncként írható fel, mégpedig úgy, hogy az állapottér legyen 2 elemű: f, s . A valószínűségi változók sorozata pedig az, hogy az egymást követő napokon mit nézett Elemér. Tegyük fel, hogy a 0. napon filmet nézett, tehát először a Yodás érmét dobja fel. Ekkor a P átmenet mátrix is könnyedén

meghatározható:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(f, f) & P(f, s) \\ P(s, f) & P(s, s) \end{pmatrix}$$

Az első kérdés, ami felmerülhet bennünk az, hogy ahogy telnek a napok, mi is történik, azaz hogy sokadik napon mostani tudásunk szerint mit néz Elemér, filmet vagy sorozatot. Azt még kézzel is fel lehet írni, hogy az első pár nap milyen eséllyel néz majd mit Elemér, viszont hosszú távon ez túl sok számolást eredményezne.

Egy új megközelítésre lesz tehát szükségünk, amihez vezessük be a következő μ -vel jelölt fogalmat:

$$\mu_t := (\mathbb{P}\{X_t = f \mid X_0 = f\}, \mathbb{P}\{X_t = s \mid X_0 = f\})$$

Erre úgy érdemes gondolni, hogy azt tároljuk el a μ_t -kben, hogy a t -edik időpontban mekkora az esélye, hogy Elemér éppen filmet vagy sorozatot néz, amennyiben filmnézéssel kezdett a 0. napon.

Nyilvánvaló, hogy bárhonnan is indulunk, annak az esélye, hogy valamit néz Elemér a t . időpontban 1, tehát

$$\sum_{x \in X} \mu(x) = 1$$

Tehát $\mu_0 = (1, 0)$. Most ha felelevenítjük magunk előtt a mátrix szorzás tulajdonságait, amikor egy négyzetes mátrixot szorzunk egy sorvektorral, láthatjuk, hogy teljesül, hogy $\mu_1 = \mu_0 P$. Nyilván ebből indukcióval látható, hogy $\mu_t = \mu_0 P^t$.

Amint már korábban említettem a legérdekesebb számunkra az, hogy hogyan is viselkedik ez a μ_t amennyiben $t \rightarrow \infty$. Ez lesz a dolgozat egyik központi témája. Egyelőre tegyük fel, hogy valóban létezik egy olyan π sorvektor, amihez tart a μ_t sorozat. Ekkor annak a π -nek teljesítenie kell a következő egyenletet: $\pi = \pi P$

Most ezt oldjuk meg a mi mesénkre: Ez esetben a keresett π , ami teljesíti a $\pi = \pi P$ egyenletet, a következő alakban írható fel:

$$\pi = (\pi(f), \pi(s))$$

Most fel lehet írni a következő egyenletet:

$$\pi(f) = \pi(f)(1-p) + \pi(s)q,$$

$$\pi(s) = \pi(f)p + \pi(s)(1-q).$$

Itt segítségül hívjuk, hogy $\pi(f) + \pi(s) = 1$, majd vegyünk az első egyenletet:

$$\pi(f) = \pi(f)(1-p) + \pi(s)q.$$

Vonjuk ki $\pi(f)(1-p)$ -t mindkét oldalról:

$$\pi(f) - \pi(f)(1-p) = \pi(s)q = \pi(f) \left[1 - (1-p) \right].$$

Nyilván $1 - (1-p) = p$, ebből:

$$\pi(f)p = \pi(s)q, \quad \implies \pi(f) = \frac{q}{p}\pi(s).$$

Most használjuk a már korábban tárgyalt feltételt, azaz, hogy $\pi(f) + \pi(s) = 1$.

Helyettesítve a fenti kifejezésbe:

$$\frac{q}{p}\pi(s) + \pi(s) = 1 \quad \implies \quad \pi(s) \left(\frac{q}{p} + 1 \right) = 1.$$

Látható, hogy $\frac{q}{p} + 1 = \frac{q+p}{p}$, ezt felhasználva:

$$\pi(s) \frac{q+p}{p} = 1, \quad \text{így } \pi(s) = \frac{p}{p+q}.$$

Már csak a visszahelyettesítés maradt:

$$\pi(f) = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{p+q} = \frac{q}{p+q}.$$

Összegezve:

$$\pi(f) = \frac{q}{p+q}, \quad \pi(s) = \frac{p}{p+q}$$

Most pedig vezessünk be egy új mennyiséget, Δ_t -t a következő módon:

$$\Delta_t = \mu_t(f) - \frac{q}{p+q} \quad \text{amennyiben } t \geq 0,$$

Ekkor μ_{t+1} definíciója alapján a (Δ_t) sorozat kielégíti:

$$\Delta_{t+1} = \mu_t(f)(1-p) + (1-\mu_t(f))q - \frac{q}{p+q} = (1-p-q)\Delta_t.$$

Így amennyiben $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, akkor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(f) = \frac{q}{p+q}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t(s) = \frac{p}{p+q}.$$

Tehát μ_t konvergál π -hoz, amikor $t \rightarrow \infty$

2.3 Irreducibilitás, aperiodicitás

Most pedig fedezzünk fel két egyszerű tulajdonságot, amelyek az általunk vizsgált Markov-láncokra mindig teljesülnek.

Egy P átmeneti mátrixú Markov-láncot irreducibilisnek nevezünk, ha bármely két $x, y \in X$ állapotra létezik olyan $t \in \mathbb{N}$, amelyre $P^t(x, y) > 0$. Egy P átmeneti mátrix reducibilis, ha nem irreducibilis. Hogyha egy átmeneti mátrix irreducibilis, az azt jelenti, hogy csak pozitív valószínűségű átmeneteket használva a lánc bármely állapotából eljuthatunk bármely másik állapotába. A továbbiakban nem fogjuk újra

kihangsúlyozni mindig, de úgy gondolunk majd a láncokra, hogy teljesülnek rájuk az irreducibilitási feltételek.

A mi Eleméres példánkban is egy irreducibilis láncról van szó, most nézzünk egy reducibiliset [1.4 Example 4.1]: Tekintsünk egy Markov-láncot az $(X_0, X_1, \dots)$ állapot-halmazzal és az alábbi átmeneti mátrixszal:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Az átmeneti mátrixot megnézve rögtön láthatjuk, hogy ha a lánc az 1-es vagy 2-es állapotból indul, akkor örökre az 1-es és 2-es állapotok között marad. Ugyanígy, ha a lánc a 3-as vagy 4-es állapotból indul, akkor pedig a végtelenségig a 3-as és 4-es állapot között fog ugrálni. Tehát a lánc reducibilis.

Most nézzük a másik fontos fogalmat

$$T(x) := \{t \geq 1 : P^t(x, x) > 0\}$$

azoknak az időpontoknak a halmaza, amikor a lánc visszatérhet a kiinduló x állapotba. Az x állapot periódusát $T(x)$ legnagyobb közös osztójával definiáljuk.

Amennyiben ez 1, azt mondjuk, hogy az állapot aperiodikus

Egy irreducibilis láncot aperiodikusnak nevezünk, ha minden állapot aperiodikus.

Ha a lánc nem aperiodikus, periodikusnak nevezzük.

Most lássunk be egy egyszerű lemmát az irreducibilitásról:

2.3.1. Lemma. [3, 1.6 lemma] Ha P irreducibilis, akkor az összes állapot periódusa

meg egyezik, vagyis

$$\text{LNKO}(T(x)) = \text{LNKO}(T(y)) \quad \forall x, y \in X.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk két állapotot: x -t és y -t. Mivel P irreducibilis, léteznek $r, l \geq 0$ egész számok úgy, hogy

$$P^r(x, y) > 0 \quad \text{és} \quad P^l(y, x) > 0.$$

Legyen $m = r + l$. Ekkor $m \in T(x)$, mivel x -ből y -ba r lépésben, majd y -ból x -be l lépésben eljuthatunk, ami összesen $r + l = m$ lépés. Hasonlóan, $m \in T(y)$.

Amennyiben $a \in T(x)$, akkor

$$a + m \in T(y),$$

mivel elmegyünk y -ből x -be, majd x -ből x -be a lépésen keresztül, és végül x -ből vissza y -ba, összesen

$$l + a + r = a + m \text{ lépés.}$$

Ezért:

$$a \in T(y) - m \quad \forall a \in T(x),$$

ahol

$$T(y) - m = \{n - m \mid n \in T(y)\}.$$

Tehát:

$$T(x) \subseteq T(y) - m.$$

Vegyünk egy $n \in T(y)$ elemet. A LNKO definíciója szerint:

$$\text{LNKO}(T(y)) \mid n.$$

Mivel $m \in T(y)$, ezért:

$$\text{LNKO}(T(y)) \mid m.$$

Ebből pedig:

$$\text{LNKO}(T(y)) \mid (n - m) \quad \forall n \in T(y).$$

Másképp fogalmazva:

$$\text{LNKO}(T(y)) \mid a \quad \forall a \in T(y) - m.$$

Mivel korábban kimutattuk, hogy

$$T(x) \subseteq T(y) - m,$$

ezért:

$$\text{LNKO}(T(y)) \mid a \quad \forall a \in T(x).$$

Tehát $\text{LNKO}(T(y))$ közös osztója $T(x)$ elemeinek, ami a LNKO definíciója alapján azt jelenti, hogy:

$$\text{LNKO}(T(y)) \mid \text{LNKO}(T(x)).$$

Hasonló érveléssel, ha x és y szerepét felcseréljük, akkor:

$$\text{LNKO}(T(x)) \mid \text{LNKO}(T(y)).$$

Ezért:

$$\text{LNKO}(T(x)) = \text{LNKO}(T(y)) \quad \forall x, y \in x.$$

□

A következő fejezetben szükség lesz még egy lemmára, aminek a bebizonyításához pedig szükség van a következő lemmára számelméletből:

2.3.2. Lemma. [5, 1.4.1 nyomán] Ha $S \subseteq \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ összeadásra zárt (azaz $a + b \in S \quad \forall a, b \in S$), továbbá $\text{LNKO}(S) = 1$, akkor létezik egy M szám, amelyre igaz, hogy

$$a \in S \quad \forall a \geq M.$$

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy létezik egy véges $T \subseteq S$ részhalmaz, amelyre

$$\text{LNKO}(T) = 1.$$

Legyen $S_0 = \{a_0\}$, ahol $a_0 \in S$ tetszőleges elem.

Ha $\text{LNKO}(S_0) = 1$, akkor $T = S_0$ és készen vagyunk. Amennyiben nem, létezik egy $a_1 \in S$ elem, amelyre

$$\text{LNKO}(S_0 \cup \{a_1\}) < \text{LNKO}(S_0),$$

mivel ellenkező esetben

$$\text{LNKO}(S) = \text{LNKO}(S_0) \neq 1.$$

Legyen ekkor

$$S_1 = S_0 \cup \{a_1\}.$$

Ahogy az előbb is említettük

$$\text{LNKO}(S_1) < \text{LNKO}(S_0).$$

Ezt folytatva minden lépésben találunk egy $a_i \in S$ elemet, amelyre

$$S_i = \text{LNKO}(S_{i-1} \cup \{a_i\}),$$

és

$$\text{LNKO}(S_i) < \text{LNKO}(S_{i-1}).$$

Így egy olyan véges halmazsorozatot kapunk, ahol a LNKO szigorúan csökken, amíg végül

$$\text{LNKO}(S_i) = 1.$$

Ekkor $T = S_i$ és készen vagyunk.

Ez a folyamat biztosan véget ér, mivel egy konkrét számtól indulva egy szigorúan csökkenő számsorozat véges lépésszámban eléri az 1-et.

Mivel $\text{LNKO}(T) = 1$, létezik egy lineáris kombinációja a T elemeinek, ahol 1 az eredmény, azaz, hogyha

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\},$$

akkor léteznek olyan $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$ egészek, amelyekre

$$c_1 t_1 + c_2 t_2 + \dots + c_n t_n = 1.$$

Most pedig 2 részre bontjuk $c_1, c_2, \dots, c_n$ -t: Vegyük fel $1 \leq k \leq n$ indexet, méghozzá úgy, hogy

$$c_1, c_2, \dots, c_k \geq 0 \quad \text{és} \quad c_{k+1}, \dots, c_n < 0.$$

Ekkor az összes negatív tagot átvisszük a másik oldalra:

$$c_1 t_1 + c_2 t_2 + \dots + c_k t_k = 1 + c_{k+1} t_{k+1} + \dots + c_n t_n.$$

Mivel S összeadásra zárt, és minden $t_i \in T \subseteq S$, az egyenlet mindkét oldalán lévő nemnegatív lineáris kombinációk is S beliek. Ezeket nevezzük el p -nek és q -nak.

Ekkor $p, q \in S$ és

$$p = 1 + q.$$

Lehetséges, hogy a jobb oldal pontosan 1 (hogya $q = 0$), ekkor

$$p = 1 \in S.$$

Mivel S összeadásra zárt, választhatjuk $M = 1$ -et, és készen vagyunk. Ellenkező esetben legyen

$$M = q(q - 1).$$

Ekkor bármely $a \geq M$ esetén az polinommaradék-tétel tétel szerint

$$a = kq + r \quad \text{ahol} \quad 0 \leq r < q \quad \text{és} \quad k \geq q - 1.$$

Mivel $0 \leq r \leq q - 1 \leq k$, ezért

$$k - r \geq 0.$$

Ebből látszik, hogy a felírható nemnegatív lineáris kombinációjaként p -nek és q -nak:

$$a = kq + r = (k - r)q + r(q + 1) = rp + (k - r)q.$$

Ezért:

$$a \in S \quad \forall a \geq M.$$

□

2.3.3. Lemma. [3, proposition 1.7.] Ha P aperiodikus és irreducibilis, akkor létezik $r \geq 0$ egész szám, amelyre:

$$P^r(x, y) > 0 \quad \forall x, y \in X.$$

Bizonyítás. Bármely $x \in X$ esetén láthatjuk, hogy $T(x)$ olyan nemnegatív egész

számok halmaza, amely összeadásra zárt. Ha $a, b \in T(x)$, akkor

$$P^a(x, x) > 0 \quad \text{és} \quad P^b(x, x) > 0.$$

Ezért:

$$P^{a+b}(x, x) \geq P^a(x, x) \cdot P^b(x, x) > 0,$$

vagyis $a + b \in T$.

Mivel P aperiodikus,

$$\text{LNKO}(T(x)) = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy alkalmazhatjuk az előző lemmát, amely szerint létezik egy M_x , amelyre

$$P^t(x, x) > 0 \quad \forall t \geq M_x.$$

Legyen

$$M = \max\{M_x : x \in X\}.$$

Ekkor:

$$P^t(x, x) > 0 \quad \forall t \geq M \quad \forall x \in X.$$

Mivel P irreducibilis, bármely $x, y \in X$ esetén létezik egy t , amelyre

$$P^t(x, y) > 0.$$

Legyen

$$t_0 = \max\{\text{bármely } t, \text{ amelyre } P^t(x, y) > 0 : x, y \in X\}.$$

Ez az összes ilyen t maximuma. Legyen:

$$r = t_0 + M.$$

Ekkor bármely $x, y \in X$ esetén létezik egy $t \leq t_0$, amelyre

$$P^t(x, y) > 0.$$

Ekkor

$$r - t = M + (t_0 - t) \geq M,$$

ami azt jelenti, hogy

$$P^{r-t}(x, x) > 0.$$

Ezért:

$$P^r(x, y) \geq P^{r-t}(x, x) \cdot P^t(x, y) > 0.$$

2.4 Stacionárius eloszlás

Ahogy már korábban említettük, egy Markov-lánc hosszú távú viselkedését mutatja igazából meg a stacionárius eloszlás, amit a következő módon definiálunk:

Legyen P átmeneti mátrix a véges X állapothalmazon. A $\pi : X \rightarrow [0, 1]$ eloszlás stacionárius, ha

$$\pi = \pi P \iff \pi(y) = \sum_{x \in X} \pi(x) P(x, y) \quad (y \in X).$$

Látható, hogy amennyiben a láncot π szerint indítjuk, minden időpontban ugyanabban az eloszlásban marad.

Most vegyünk egy egyszerű példát: Legyen egy $G = (V, E)$ gráfon futó egyszerű véletlen bolyongásunk. Bármely $y \in V$ csúcsra

$$\sum_{x \in V} \deg(x) P(x, y) = \sum_{x \sim y} \frac{\deg(x)}{\deg(x)} = \deg(y).$$

Mivel $\sum_{y \in V} \deg(y) = 2|E|$, normálással a következő valószínűségi mértéket kapjuk:

$$\pi(y) = \frac{\deg(y)}{2|E|} \quad (y \in V).$$

Tehát a fokszámokkal arányos π minden esetben stacionárius eloszlása a gráfon történő véletlen bolyongásnak.

Most pedig elkezdjük vizsgálni a stacionárius eloszlásokat, amihez először defináljuk a harmonikus függvényeket, és egy hozzájuk kapcsolódó lemmát.

Egy $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt harmonikusnak nevezünk az $x \in X$ pontban, ha

$$h(x) = \sum_{y \in X} P(x, y) h(y).$$

Ha h minden állapotban harmonikus az $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ halmazon, akkor azt mondjuk, hogy h harmonikus X -en. Ekkor mátrixos formában

$$Ph = h,$$

ahol h az alábbi oszlopvektor:

$$h = \begin{pmatrix} h(x_1) \\ h(x_2) \\ \vdots \\ h(x_n) \end{pmatrix}.$$

2.4.1. Lemma. [3, lemma 1.16] Ha P irreducibilis és h harmonikus az X halmazon, akkor h konstans függvény.

Bizonyítás. Abból, hogy X véges-állapotterű következik, hogy h felvesz egy maximumot valamely $x_0 \in X$ állapotban, azaz

$$h(x_0) \geq h(y) \quad \text{minden } y \in X \text{ esetén.}$$

Legyen $z \in X$ valamelyik olyan állapot, amelyre $P(x_0, z) > 0$, majd tegyük fel, hogy $h(z) < h(x_0)$. Mivel h harmonikus az x_0 pontban,

$$h(x_0) = \sum_{y \in X} P(x_0, y) h(y).$$

Az összeg felbontásával:

$$h(x_0) = P(x_0, z) h(z) + \sum_{y \in X, y \neq z} P(x_0, y) h(y).$$

Fontos, hogy $h(x_0)$ maximális:

$$h(y) \leq h(x_0) \quad \text{minden } y \neq z \text{ esetén.}$$

Így:

$$h(x_0) \leq P(x_0, z) h(z) + \sum_{y \in X, y \neq z} P(x_0, y) h(x_0).$$

Mivel $P(x_0, z) > 0$ és $h(z) < h(x_0)$ szigorúan, az egyenlőtlenség szigorúan kisebb lesz:

$$P(x_0, z) h(z) + \sum_{y \in X, y \neq z} P(x_0, y) h(x_0) < P(x_0, z) h(x_0) + \sum_{y \in X, y \neq z} P(x_0, y) h(x_0).$$

Viszont $h(x_0)$ kiemelésével:

$$P(x_0, z) h(x_0) + \sum_{y \in X, y \neq z} P(x_0, y) h(x_0) = \left(\sum_{y \in X} P(x_0, y) \right) h(x_0) = h(x_0)$$

Amivel ellentmondásra jutottunk, tehát $h(x_0) = h(z)$.

Mivel P irreducibilis, bármely két állapotból eljuthatunk bárhova. Válasszuk ki egy lehetséges eljutást x_0 -tól y -ig:

$$x_0, x_1, \dots, x_n = y,$$

ahol $P(x_i, x_{i+1}) > 0$ minden $0 \leq i < n$ esetén.

Az előzőekből következik, hogy:

$$h(x_0) = h(x_1) = h(x_2) = \dots = h(x_n) = h(y).$$

Így:

$$h(y) = h(x_0) \quad \text{minden } y \in X \text{ esetén.}$$

Tehát h nem lehet más, mint konstans függvény. □

Ezeket felhasználva most belátjuk a következőt:

2.4.2. Állítás. *[1, Theorem 5.3] Amennyiben az irreducibilis P -nek létezik egy stationárius eloszlása, π , akkor pontosan az az 1 fog létezni.*

Bizonyítás. A iménti lemma szerint a harmonikus függvények a következő alakúak:

$$h(x) = c \quad \forall x \in X,$$

valamilyen konstans c mellett.

Ha ezt vektor alakban írjuk fel, akkor ez azt jelenti, hogy a

$$Ph = h \quad \text{vagy} \quad (P - I)h = 0$$

A $(P - I)h = 0$ egyenlet egyetlen megoldása a következő:

$$h = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért:

$$\dim(\ker(P - I)) = 1.$$

A dimenziótétel szerint:

$$\text{rank}(P - I) = |X| - 1.$$

Mivel a mátrix sor- és oszloprangja mindig megegyezik:

$$\text{rank}(P - I) = \text{rank}((P - I)^T) = \text{rank}(P^T - I) = |X| - 1.$$

Ismét a dimenziótétellel:

$$\dim(\ker(P^T - I)) = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy az összes sorvektor $v \in \mathbb{R}^{|X|}$ esetén az

$$(P^T - I)v^T = 0$$

egyenlet megoldásterének dimenziója is 1.

Mivel ez az egyenlet ekvivalens azzal, hogy

$$vP = v,$$

továbbá tudjuk, hogy $\pi P = \pi$ egy megoldás, minden más megoldás csak a következő alakban létezhet:

$$v = \lambda \pi,$$

ahol λ egy skalár.

Azonban, mivel a megoldás vektor elemei összegének 1-nek kell lennie, és π -ről feltettük, hogy jó megoldás, szükséges, hogy: $\lambda = 1$.

Tehát az egyetlen stacionárius eloszlás π . □

Most pedig azt fogjuk belátni, hogy minden irreducibilis Markov-láncnak van stacionárius eloszlása, még hozzá olyan módon, hogy kreálunk egyet. Ha ezt is beláttuk tehát megvan az, hogy mindig létezik pontosan 1 stacionárius eloszlása az irreducibilis Markov-láncoknak.

Ehhez viszont előbb még definiálnunk kell pár dolgot: Egy tetszőleges Markov-lánc esetén az $x \in X$ állapot elérési ideje az az időpont, amikor a lánc először jár az x állapotban. Jelölése:

$$\tau_x = \min\{t \geq 0 : X_t = x\}.$$

Általában azt szeretnénk, hogy az elérési idő szigorúan pozitív legyen, akkor azt így jelöljük:

$$\tau_x^+ = \min\{t > 0 : X_t = x\}.$$

Hogyha $X_0 = x$, ezt első visszatérési időnek nevezzük.

2.4.3. Állítás. *Az erős Markov-tulajdonság szerint ha τ egy visszatérési idő, akkor a $\{X_{\tau+k}\}_{k \geq 0}$ lánc (az X_τ állapotból újrainduló Markov-lánc), és független a múltbeli történésektől, azaz a $\{X_k\}_{k < \tau}$ sorozattól, feltéve, hogy $\tau < \infty$.*

A továbbiakban pedig az E fogja jelölni egy változó várható értékét, és az E_x az $X_0 = x$ kezdeti feltétel melletti várható értéket jelöli. P_x -szel pedig egy esemény

valószínűségét, hogyha $X_0 = x$

2.4.4. Lemma. [3, lemma 1.13.] *Ha veszünk egy irreducibilis Markov-láncot, akkor bármely kettő $x, y \in X$ -ra az $E_x(\tau_y^+)$ véges.*

Bizonyítás. Mivel P irreducibilis, bármely két állapot ($z, w \in X$) esetén létezik egy olyan legkisebb $s > 0$, amelyre

$$P^s(z, w) > 0.$$

(Nyilván lehet, hogy $z = w$, ekkor olyan utat veszünk, amely z -ből egy másik állapotba megy, majd visszatér z -be, így hogy tényleg $s > 0$.)

Legyen r az ilyen s értékek maximuma az összes $z, w \in X$ esetén, és legyen:

$$\varepsilon = \min\{P^s(z, w) > 0 \mid 0 < s \leq r, z, w \in X\}.$$

Ekkor minden $z, w \in X$ esetén létezik $0 < s \leq r$ úgy, hogy

$$P^s(z, w) \geq \varepsilon > 0.$$

Azaz bármely X_t esetén a valószínűsége annak, hogy a lánc az y állapotba kerül az t és $t + r$ időpontok között, legalább ε . Ebből következik, hogy:

$$\mathbb{P}\{X_s \neq y : \forall t < s \leq t + r\} \leq 1 - \varepsilon.$$

A τ_y^+ definíciójából következik, hogy ha

$$\tau_y^+ > n \implies X_t \neq y \quad \forall 0 < t \leq n.$$

Tehát ha $k > 0$, akkor:

$$\begin{aligned}
 P_x\{\tau_y^+ > kr\} &= P_x\{X_t \neq y \forall 0 < t \leq kr\} \\
 &= P_x\{X_t \neq y \forall 0 < t \leq (k-1)r\} \cdot P_x\{X_t \neq y \forall (k-1)r < t \leq kr\} \\
 &\leq P_x\{X_t \neq y \forall 0 < t \leq (k-1)r\} \cdot (1 - \varepsilon) \\
 &\leq P_x\{X_t \neq y \forall 0 < t \leq (k-2)r\} \cdot (1 - \varepsilon)^2 \\
 &\leq \dots \leq (1 - \varepsilon)^k.
 \end{aligned}$$

Ismert, hogy bármely nemnegatív egész értékű változóra:

$$E(Y) = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{P}\{Y > t\}$$

Nyilvánvalóan $\mathbb{P}\{\tau_y^+ > t\}$ csökkenő függvény t -re nézve, ebből:

$$\mathbb{P}\{\tau_y^+ > t+1\} \leq \mathbb{P}\{\tau_y^+ > t+1\} + \mathbb{P}\{\tau_y^+ = t+1\} = \mathbb{P}\{\tau_y^+ > t\}.$$

Ennek a felhasználásával pedig:

$$\begin{aligned}
 E_x(\tau_y^+) &= \sum_{t=0}^{\infty} P_x\{\tau_y^+ > t\} \\
 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} r P_x\{\tau_y^+ > kr\} \\
 &\leq r \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \varepsilon)^k.
 \end{aligned}$$

Definíció szerint $0 < \varepsilon \leq 1$, ezért $0 \leq 1 - \varepsilon < 1$, ami azt jelenti, hogy ez az összeg konvergens, tehát $E_x(\tau_y^+)$ véges. $\square$

Most pedig már minden tudás a birtokunkban van a következő tételhez:

2.4.5. Állítás. [1, Theorem 5.1] Ha P irreducibilis, akkor létezik egyetlen stacionárius eloszlása, π , ahol $\pi(x) > 0 \quad \forall x \in X$, és az alábbi képlettel adható meg:

$$\pi(x) = \frac{1}{E_x(\tau_x^+)}.$$

Bizonyítás. Először rögzítsünk egy tetszőleges $z \in X$ állapotot. Ezután definiáljuk:

$$\tilde{\pi}(y) = E_z(\text{az } y \text{ állapot látogatásainak száma, mielőtt visszatérne a folyamat } z\text{-be})$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_t = y, \tau_z^+ > t\},$$

(A fenti várható érték úgy számolható, hogy szummázzuk valószínűségeit azon eseményeknek, amikor a lánc az y állapotot eléri a visszatérési időnél kevesebb lépésben.)

Bármely láncra, aminél $X_0 = z$, az y állapot látogatásainak száma a visszatérés előtt maximum τ_z^+ . Ezért:

$$\tilde{\pi}(y) \leq E_z(\tau_z^+),$$

ami az 2.4.4 szerint véges, tehát minden $\tilde{\pi}(y)$ véges.

Mivel P irreducibilis, legalább egyszer biztosan meglátogatható az y állapot, tehát az y állapot visszatérés előtti látogatásainak várható száma pozitív, így

$$\tilde{\pi}(y) > 0.$$

Most megmutatjuk, hogy $\tilde{\pi}$ stacionárius, azaz minden y -ra $(\tilde{\pi}P)(y) = \tilde{\pi}(y)$. Először nézzük:

$$(\tilde{\pi}P)(y) = \sum_{x \in X} \tilde{\pi}(x)P(x, y).$$

Felhasználva a korábbi $\tilde{\pi}(x)$ kifejezést, valamint $\tau_z^+ > t$ helyett a $\tau_z^+ \geq t+1$ kifejezést

alkalmazva:

$$(\tilde{\pi}P)(y) = \sum_{x \in X} \sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_t = x, \tau_z^+ \geq t+1\}P(x, y).$$

Mivel az $\{\tau_z^+ \geq t+1\}$ esemény kizárólag az $X_0, X_1, \dots, X_t$ változóktól függ, ezért az $X_t = x$ feltétel mellett független az $X_{t+1} = y$ eseménytől. Ez azt jelenti, hogy:

$$P_z\{X_t = x, X_{t+1} = y, \tau_z^+ \geq t+1\} = P_z\{X_t = x, \tau_z^+ \geq t+1\}P_z\{X_{t+1} = y \mid X_t = x\}.$$

Mivel $P_z\{X_{t+1} = y \mid X_t = x\} = P(x, y)$

$$P_z\{X_t = x, X_{t+1} = y, \tau_z^+ \geq t+1\} = P_z\{X_t = x, \tau_z^+ \geq t+1\}P(x, y).$$

Ezt az előzőleg kifejezett $(\tilde{\pi}P)(y)$ alakba helyettesítjük úgy, hogy a szummák sorrendjét felcseréljük (mivel a belső összeg minden $x \in X$ esetén konvergens, ezt megtehetjük), a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} (\tilde{\pi}P)(y) &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{x \in X} P_z\{X_t = x, X_{t+1} = y, \tau_z^+ \geq t+1\} \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} P_z\{X_{t+1} = y, \tau_z^+ \geq t+1\} = \sum_{t=1}^{\infty} P_z\{X_t = y, \tau_z^+ \geq t\}. \end{aligned}$$

Az utolsó szumma kifejezhető az eredeti $\tilde{\pi}(y)$ kifejezésből:

$$(\tilde{\pi}P)(y) = \tilde{\pi}(y) - P_z\{X_0 = y, \tau_z^+ > 0\} + \sum_{t=1}^{\infty} P_z\{X_t = y, \tau_z^+ = t\}.$$

Ennek az összegnek az utolsó tagja nyilván 1, ha $y = z$, és 0 különben, mivel a Markov-láncnak a kiindulási pontba kell visszaérnie. Az utolsó előtti tagnál pedig triviálisan látszik, hogy szintén akkor lesz 1, ha $y = z$, különben 0, tehát ez a 2 tag kiüti egymást minden esetben. Így:

$$(\tilde{\pi}P)(y) = \tilde{\pi}(y) \quad \forall y \in X, \quad \text{vagyis} \quad \tilde{\pi}P = \tilde{\pi}.$$

Tehát a stacionárius eloszlás kiszámításához már csak $\tilde{\pi}$ minden elemét el kell osztani az elemek összegével:

$$\sum_{x \in X} \tilde{\pi}(x) = \sum_{x \in X} E_z(\text{az } x\text{-ben járások száma, mielőtt visszatérnénk } z\text{-be}) = E_z(\tau_z^+).$$

(Mivel a visszatérési idő bármely megegyezik a a többi állapotban járások összegével.) Tehát ha vesszük:

$$\pi(x) = \frac{\tilde{\pi}(x)}{E_z(\tau_z^+)}$$

Stacionárius eloszlást kapunk, mivel $\tau_z^+ > 0$. Korábban beláttuk, hogy ez a π az egyetlen ilyen stacionárius eloszlás. Tehát bármely $z \in X$ választása esetén ugyanazt a stacionárius eloszlást kapjuk:

$$\pi(x) = \frac{\tilde{\pi}(x)}{E_x(\tau_x^+)} \quad \forall x \in X.$$

Végül pedig gondoljunk bele, hogyha $z = x$ -et választunk, akkor $\tilde{\pi}(x)$ az x állapotba való visszatérés előtti x látogatások várható értéke lesz, ami 1, Ezért:

$$\pi(x) = \frac{1}{E_x(\tau_x^+)} \quad \forall x \in X$$

□

2.5 További érdekes állítások

2.5.1. Állítás. [3, Exercise 1.6] Legyen P egy irreducibilis átmeneti mátrix, amelynek periódusa b . Ekkor az X állapothalmaz minden esetben felosztható b darab részhalmazzra $(C_1, \dots, C_b)$ -re, úgy, hogy $P(x, y) > 0$ csak akkor, ha $x \in C_i$ és $y \in C_{i+1}$. (Az $i + 1$ összeadás modulo b -n van értelmezve.)

Bizonyítás. Az, hogy P periódusa b azt jelenti, hogyha minden állapotra megnézzük

a lehetséges visszatérések időpontjait, azok azonos LNKO-val rendelkeznek:

$$\text{LNKO}(T(x)) = b \quad \forall x \in X.$$

Ezek után fixáljunk le egy tetszőleges állapotot, legyen ez s , majd definiáljuk a C_i halmazokat a következő módon:

$$C_i = \{y \in X : \exists n \geq 0 : P^n(s, y) > 0 \text{ és } n \equiv i \pmod{b}\}, \quad i = 0, 1, \dots, b-1$$

Mivel P irreducibilis, minden állapot kerül legalább egy C_i -be, azt kell először megvizsgálni, hogy van-e olyan állapot, ami kerül többbe is.

Ezt indirekt módon belátjuk: tegyük fel, hogy y 2 különböző C_i -be is került. Ekkor létezne n és m úgy, hogy

$$P^n(s, y) > 0, \quad n \equiv i \pmod{b} \quad \text{és} \quad P^m(s, y) > 0, \quad m \equiv j \pmod{b}, \quad i \neq j.$$

Irreducibilitás miatt y -ból vissza tudunk jutni s -be egy valamilyen d -lépéses úton, így

$$P^{n+d}(s, s) > 0, \quad P^{m+d}(s, s) > 0$$

Viszont akkor teljesülnie kéne, hogy

$$b \mid (n - m).$$

Ez ellentmondás, ha $i \neq j$. Tehát ezzel beláttuk, hogy diszjunkt felbontása a fentebbi az állapotoknak. Most nézzük az átmeneteket: Vegyük bármely x -t és y -t melyekre $P(x, y) > 0$, majd nézzük azt C_i -t, amelynek eleme x . Ekkor valamely n -re

$$P^n(s, x) > 0, \quad n \equiv i \pmod{b}.$$

és mivel $P(x, y) > 0$, a következő lépésben y -ba jutunk, tehát:

$$P^{n+1}(s, y) \geq P^n(s, x) P(x, y) > 0,$$

Tehát $y \in C_{i+1} \pmod{b}$. □

2.5.2. Állítás. [3, Exercise 1.7] Egy átmeneti mátrix P szimmetrikus, ha minden $x, y \in X$ esetén

$$P(x, y) = P(y, x).$$

Amennyiben P szimmetrikus, akkor X -en az egyenletes eloszlás stacionárius P -re.

Bizonyítás. Az egyenletes eloszlás azt jelenti itt, hogy $\pi(x) = \frac{1}{|X|}$ (minden $x \in X$).

Tehát az állítás bebizonyításához azt kellene belátnunk, hogy minden $y \in X$ -re:

$$(\pi P)(y) = \sum_{x \in X} \pi(x) P(x, y) = \pi(y)$$

Egy átmeneti mátrix minden sorának összege 1. Mivel ez esetben egy szimmetrikus átmeneti mátrixról van szó, itt minden oszlop összeg is 1 lesz. A korábbiakból:

$$(\pi P)(y) = \sum_{x \in X} \pi(x) P(x, y) = \sum_{x \in X} \frac{1}{|X|} P(x, y) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} P(x, y).$$

Itt pedig kihasználjuk, hogy az oszlop összegből adódik, hogy $\sum_{x \in X} P(x, y) = 1$, tehát

$$(\pi P)(y) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} P(x, y) = \frac{1}{|X|} \cdot 1 = \pi(y)$$

□

2.5.3. Állítás. [3, Exercise 1.12] Legyen P egy irreducibilis Markov-lánc átmeneti mátrixa. Legyen $A \subset X$ egy részhalmaz, továbbá legyen:

$$f(x) = \mathbb{E}_x(\tau_A)$$

ahol τ_A az első visszatérési idő az A halmazba, x pedig a kezdeti állapot. Amennyiben $x \notin A$, akkor:

$$f(x) = 1 + \sum_{y \in X} P(x, y) f(y).$$

Bizonyítás. Mivel a kezdeti állapot nincs A -ban, ezért τ_A legalább 1. Ezen felül pedig úgy néz ki $f(x)$, hogy ellépünk x -ből valamely $y \in X$ állapotba $P(x, y)$ valószínűséggel, majd tekinthetünk hogy a folyamatra, mintha y -ból indulnánk, csak még 1 lépés, így $f(x) = 1 + f(y)$. Tehát

$$\mathbb{E}_x(\tau_A) = \sum_{y \in X} P(x, y) [1 + \mathbb{E}_y(\tau_A)] = \sum_{y \in X} P(x, y) (1 + f(y)).$$

Innen pedig már könnyű befejezni, mivel $\sum_{y \in X} P(x, y) = 1$

$$f(x) = \sum_{y \in X} P(x, y) (1 + f(y)) = \sum_{y \in X} P(x, y) + \sum_{y \in X} P(x, y) f(y) = 1 + \sum_{y \in X} P(x, y) f(y)$$

□

3. fejezet

Markov-láncok konvergenciája

3.1 Állítás pozitív rekurrens Markov-láncokról

A fejezetet egy érdekes állítással kezdjük, amihez definiálni kell az állapotok egy fontos tulajdonságát. Legyen

$$f_{ij}^{(0)} = 0, \quad f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j, X_k \neq j \text{ minden } k = 1, 2, \dots, n-1 \mid X_0 = i), \quad n \geq 1.$$

Az $f_{ij}^{(n)}$ tehát annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc az i állapotból indulva pontosan az n -edik lépésben éri először a j állapotot, továbbá legyen

$$f_{ij}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)},$$

ami annak a valószínűsége, hogy a lánc az i állapotból indulva valamikor eléri a j állapotot. Ekkor az i állapotot rekurrensnek (vagy visszatérőnek) nevezzük, ha $f_{ii}^* = 1$, ellenkező esetben tranziensnek. Ha i rekurrens, akkor az i állapot átlagos visszatérési ideje:

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)}.$$

Az i állapotot pozitív rekurrensnek nevezzük, ha $m_i < \infty$, ami különösen fontos számunkra, mivel az általunk vizsgált véges-állapotterű Markov-láncoknál ha egy lánc rekurrens, akkor biztosan pozitív rekurrens.

3.1.1. Állítás. [6, 2.28. Tétel] Legyen $\{X_n\}_{n \geq 0}$ egy irreducibilis és pozitív rekurrens Markov-lánc, π stacionárius eloszlással, és legyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Amennyiben a

$$I(f) = \sum_{i \in X} f(i) \pi_i$$

sor abszolút konvergens, akkor

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(f) \quad 1 \text{ valószínűséggel}$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $i \in X$ állapotot. Nézzük az i állapotba történő visszatérések időpontjait:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots,$$

azaz τ_n az n -edik visszatérés időpontja. Mivel a lánc pozitív rekurrens, ezek a megállási idők 1 valószínűséggel végesek. Most vezessük be az $\ell(n)$ jelölést, amely megadja, hogy az n -edik lépésig hányszor tért vissza a lánc az i állapotba. Ekkor egy fontos formula felírható $n - re$:

$$\tau_{\ell(n)} \leq n < \tau_{\ell(n)+1}.$$

A jelölések megkönnyítése végett legyen $Z_k = f(X_k)$. Ekkor Z_k -k összegét a következő módon lehet felbontani:

$$\sum_{k=0}^n Z_k = \sum_{k=0}^{\tau_1-1} Z_k + \sum_{h=1}^{\ell(n)-1} \sum_{s=\tau_h}^{\tau_{h+1}-1} Z_s + \sum_{k=\tau_{\ell(n)}}^n Z_k,$$

amelyet jelölhetünk így:

$$\sum_{k=0}^n Z_k = Y' + \sum_{h=1}^{\ell(n)-1} Y_h + Y''(n),$$

ahol Y' az első visszatérést megelőző összeg, Y_h a $h - 1$ -edik és h -edik visszatérés közötti összeg, $Y''(n)$ pedig a maradék.

Mivel pozitív és negatív részre történő szétválasztással minden f helyettesíthető nemnegatív függvénnyel, feltételezhető, hogy $f \geq 0$. Ekkor:

$$\frac{1}{\ell(n)} \sum_{h=1}^{\ell(n)-1} Y_h \leq \frac{1}{\ell(n)} \sum_{k=0}^n Z_k \leq \frac{1}{\ell(n)} \left(Y' + \sum_{h=1}^{\ell(n)} Y_h \right).$$

Az 2.4.3 állítás miatt Y_h változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Amiatt, hogy a lánc az i állapotba 1 valószínűséggel végtelen sokszor visszatér, $\ell(n)$ 1 valószínűséggel tart a végtelenhez. Emiatt felhasználható a nagy számok erős törvénye:

$$\frac{1}{\ell(n)} \sum_{h=1}^{\ell(n)} Y_h \rightarrow \mathbb{E}(Y_h) \text{ (1 valószínűséggel)}$$

Másrészt

$$\frac{Y'}{\ell(n)} \rightarrow 0 \text{ (1 valószínűséggel)}$$

Ezekből következik, hogy

$$\frac{1}{\ell(n)} \sum_{k=0}^n Z_k \rightarrow \mathbb{E}(Y_h) \text{ (1 valószínűséggel)}.$$

Tegyük fel, hogy a láncunk i -ből indul. Ekkor

$$\mathbb{E}(Y_h) = \mathbb{E} \left(\sum_{k=0}^{\infty} Z_k \cdot \chi_{\{k < \tau_1\}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j \in X} f(j) \cdot \mathbb{P}(X_k = j, k < \tau_1) = \sum_{j \in X} f(j) \cdot v_j,$$

ahol:

$$v_j := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_k = j, k < \tau_1).$$

v_j azt fejezi ki, hogy két látogatás között i -be hányszor jár a lánc átlagosan j -ben, a kezdőpont bele van számolva, de a végpont nem. Vegyük észre, hogy

$$\sum_{j \in I} v_j = m_i < \infty.$$

Most pedig meg fogjuk mutatni, hogy v_j a stacionárius eloszlás egyenletrendszerét kielégíti.

$$\sum_j v_j P(j, l) = \sum_j \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_k = j, k < \tau_1) \mathbb{P}(X_{k+1} = l \mid X_k = j).$$

Mivel minden tag nemnegatív, felcserélhetjük a szummák sorrendjét:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_j \mathbb{P}(X_k = j, k < \tau_1) \mathbb{P}(X_{k+1} = l \mid X_k = j).$$

Ezután teljes valószínűség tételét alkalmazva a belső összegre:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{k+1} = l, k < \tau_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k = l, k \leq \tau_1)$$

Tehát tényleg

$$\sum_j u_j P(j, l) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_k = l, k \leq \tau_1) = v_l.$$

Ez valóban u_l , ugyan a kezdőpont nincs benne, de a végpont igen, de mivel a lánc az i állapotból indul és τ_1 -kor újra i -ben van, ez nem változtat az összegben. Ezért $v_j = c \cdot \pi_j$.

Ha $i = j$, akkor $v_i = 1$, így $1 = c \cdot \pi_i$, $v_j = \frac{\pi_j}{\pi_i}$

Ekkor:

$$\mathbb{E}(Y_h) = \sum_{j \in X} f(j)v_j = \frac{1}{\pi_i} \sum_{j \in X} f(j)\pi_j = \frac{I(f)}{\pi_i}.$$

Ha $f(j) = 1$ minden $j \in X$ esetén, akkor $Z_k = 1$, és így:

$$\frac{n+1}{\ell(n)} = \frac{1}{\ell(n)} \sum_{k=0}^n Z_k \rightarrow \frac{1}{\pi_i}.$$

Ebből következik, hogy:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n Z_k = \frac{\ell(n)}{n+1} \cdot \frac{1}{\ell(n)} \sum_{k=0}^n Z_k \rightarrow I(f) \text{ 1 valószínűséggel}$$

□

3.2 Teljes variációs távolság

Legyen az X véges állapottéren két valószínűségi eloszlás, μ és ν . A teljes variációs távolságukat a következő módon definiáljuk:

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \max_{A \subseteq X} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

ahol

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(x).$$

Most pedig be fogjuk látni, hogy egy a teljes variációs távolságot más alakban is ki lehet fejezni, későbbiekben pedig ezt az alakot fogjuk hasznosítani

3.2.1. Állítás. [3, proposition 4.2.]

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} |\mu(x) - \nu(x)|$$

Bizonyítás. Legyen

$$B = \{x \in X : \mu(x) \geq \nu(x)\}$$

azoknak az állapotoknak a halmaza, amelyekre $\mu(x) - \nu(x) \geq 0$. Ennek komplementere:

$$B^c = X \setminus B = \{x \in X : \mu(x) < \nu(x)\},$$

Tehát B^c azon állapotoknak a halmaza, amelyekre $\mu(x) - \nu(x) < 0$.

Legyen $A \subseteq X$ tetszőleges állapothalmaz. Ekkor A felírható az $A \cap B$ és $A \cap B^c$ diszjunkt uniójaként. Minden $x \in A \cap B^c$ elemre igaz, hogy $x \in B^c$, ezért $\mu(x) - \nu(x) < 0$, így:

$$\mu(A) - \nu(A) = (\mu(A \cap B) - \nu(A \cap B)) + (\mu(A \cap B^c) - \nu(A \cap B^c)) \leq \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B).$$

B felírható az $A \cap B$ és $B \setminus A$ diszjunkt uniójaként. Bármely $x \in B \setminus A$ esetén $x \in B$, ezért $\mu(x) - \nu(x) \geq 0$, így:

$$\mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) \leq (\mu(A \cap B) - \nu(A \cap B)) + (\mu(B \setminus A) - \nu(B \setminus A)) = \mu(B) - \nu(B).$$

Tehát:

$$\mu(A) - \nu(A) \leq \mu(B) - \nu(B).$$

Ezt a gondolatmenetet a másik irányba lefolytatva $A \cap B^c$ -vel megkapjuk, hogy:

$$\mu(B^c) - \nu(B^c) \leq \mu(A) - \nu(A).$$

Nyilván

$$\mu(B) + \mu(B^c) = \nu(B) + \nu(B^c) = 1,$$

Ezt felhasználva

$$\mu(B^c) - \nu(B^c) = \nu(B) - \mu(B) = -(\mu(B) - \nu(B)).$$

Ezért, ha az előző 2 egyenlőtlenséget felhasználjuk:

$$-(\mu(B) - \nu(B)) \leq \mu(A) - \nu(A) \leq \mu(B) - \nu(B),$$

vagyis:

$$|\mu(A) - \nu(A)| \leq \mu(B) - \nu(B).$$

Tehát $|\mu(A) - \nu(A)|$ értékét $\mu(B) - \nu(B)$ korlátozza felülről. Hogyha $A = B$ -t veszünk, akkor pont egyenlőség fog fenn állni, mivel

$$|\mu(B) - \nu(B)| = \mu(B) - \nu(B)$$

Ami abból jön, hogy

$$\mu(B) - \nu(B) \geq 0 \quad \forall x \in B.$$

Végül ebből az következik, hogy (a 3. egyenlőségnél felhasználjuk, hogy $\mu(B) - \nu(B) = \nu(B^c) - \mu(B^c)$):

$$\begin{aligned} \|\mu - \nu\|_{TV} &= \max_{A \subseteq X} |\mu(A) - \nu(A)| \\ &= \mu(B) - \nu(B) \\ &= \frac{1}{2} [(\mu(B) - \nu(B)) + (\nu(B^c) - \mu(B^c))] \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in B} |\mu(x) - \nu(x)| + \sum_{x \in B^c} |\mu(x) - \nu(x)| \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in X} |\mu(x) - \nu(x)| \end{aligned}$$

□

3.2.2. Állítás. *A bizonyításban szerepelt az is, hogy $\|\mu - \nu\|_{TV} = \mu(B) - \nu(B)$. Mivel $\mu(B) \leq 1$ és $\nu(B) \geq 0$, nyilván*

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \leq 1,$$

bármely μ és ν eloszlás esetén.

Most pedig készen állunk, hogy bebizonyítsuk a fő állítását a szakdolgozatnak, mégpedig azt, hogy egy irreducibilis, aperiodikus Markov-lánc exponenciális sebességgel konvergál a stacionárius eloszlásához.

3.3 Konvergencia tétel

3.3.1. Tétel. *[3, Theorem 4.9] Ha P irreducibilis és aperiodikus, és van egy π stacionárius eloszlása, akkor léteznek 2 konstans, $0 < \alpha < 1$ és $C > 0$, amelyekre:*

$$\max_{x \in X} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} \leq C\alpha^t$$

Bizonyítás. Mivel P irreducibilis és aperiodikus, a 2.3.2 lemma szerint létezik egy $r \geq 0$, amelyre:

$$P^r(x, y) > 0 \quad \forall x, y \in X.$$

Legyen

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$$

az a $|X| \times |X|$ méretű mátrix, amelynek minden sora a Markov-lánc stacionárius eloszlása, π , így Π egy sztochasztikus mátrix. (azaz minden eleme nemnegatív,

sorösszeg mindenhol 1)

Mivel $P^r(x, y) > 0 \quad \forall x, y \in X$ és $\pi(y) > 0 \quad \forall y \in X$, az 2.4.5 állítás szerint:

$$\delta' = \min_{x, y \in X} \frac{P^r(x, y)}{\pi(y)} > 0$$

teljesül, tehát mivel $\frac{P^r(x, y)}{\pi(y)} \geq \delta'$:

$$P^r(x, y) \geq \delta' \pi(y) \quad \forall x, y \in X.$$

Nyilván például $\delta = \min\{\delta', \frac{1}{2}\}$ -t használva δ' helyett szintén teljesül az egyenlőtlenség. Viszont ekkor $0 < \delta < 1$. Vezessük be: $\theta = 1 - \delta$, ekkor $0 < \theta < 1$. Most definiáljuk Q -t:

$$Q = \frac{P^r - (1 - \theta)\Pi}{\theta}.$$

Q minden eleme nemnegatív, mivel

$$P^r(x, y) - (1 - \theta)\Pi(x, y) = P^r(x, y) - \delta\pi(y) \geq 0,$$

a δ definíciója alapján. Mivel P^r és Π is sztochasztikus mátrixok és Q minden sorának összege

$$\frac{1 - (1 - \theta)}{\theta} = 1,$$

Q is egy sztochasztikus mátrix.

Minden $n \geq 0$ esetén Q^n is sztochasztikus, ami Q sztochasztikusságából belátható indukciósan. Első lépés: $n = 1$ -re igaz:

$$Q(x, y) \geq 0, \quad \sum_{y \in X} Q(x, y) = 1 \quad \forall x \in X.$$

Indukciós lépés: n -ről $n + 1$ -re

$$(Q^{n+1})(x, y) = \sum_{z \in X} Q^n(x, z) Q(z, y) \geq 0,$$

$$\sum_{y \in X} (Q^{n+1})(x, y) = \sum_{z \in X} Q^n(x, z) \sum_{y \in X} Q(z, y) = \sum_{z \in X} Q^n(x, z) = 1.$$

Ezt felhasználva:

$$(Q^n \Pi)(x, y) = \sum_{z \in X} Q^n(x, z) \Pi(z, y) = \pi(y) \sum_{z \in X} Q^n(x, z) = \pi(y) = \Pi(x, y).$$

Tehát

$$Q^n \Pi = \Pi,$$

Mivel $\pi P = \pi$,

$$\Pi P = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \pi P \\ \vdots \\ \pi P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix} = \Pi,$$

ezért

$$\Pi P^n = (\Pi P) P^{n-1} = \Pi P^{n-1} = \dots = \Pi P = \Pi.$$

Most pedig ezekkel az azonosságokkal indukciósan bizonyítjuk, hogy

$$P^{rk} = (1 - \theta^k) \Pi + \theta^k Q^k \quad \forall k \geq 1.$$

Első lépés: $k = 1$ -re igaz, mivel

$$P^r = (1 - \theta) \Pi + \theta Q$$

Indukciós lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k = n$ esetén, azaz:

$$P^{rn} = (1 - \theta^n) \Pi + \theta^n Q^n.$$

Ebből kell belátni $n + 1$ -re:

$$\begin{aligned} P^{r(n+1)} &= P^{rn} P^r \\ &= [(1 - \theta^n)\Pi + \theta^n Q^n] P^r \\ &= (1 - \theta^n)\Pi P^r + \theta^n Q^n P^r \end{aligned}$$

Volt, hogy $\Pi P^n = \Pi$ továbbá, P^n helyére $((1 - \theta)\Pi + \theta Q)$ -t helyettesítve

$$\begin{aligned} &= (1 - \theta^n)\Pi + \theta^n Q^n [(1 - \theta)\Pi + \theta Q] \\ &= (1 - \theta^n)\Pi + \theta^n(1 - \theta)Q^n\Pi + \theta^{n+1}Q^{n+1} \\ &= (1 - \theta^n)\Pi + (\theta^n - \theta^{n+1})\Pi + \theta^{n+1}Q^{n+1} \\ &= (1 - \theta^{n+1})\Pi + \theta^{n+1}Q^{n+1}. \end{aligned}$$

Ezzel az indukciós lépést bizonyítottuk.

Szorozzuk meg mindkét oldalt P^j -vel, ahol $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} P^{rk+j} &= (1 - \theta^k)\Pi P^j + \theta^k Q^k P^j = (1 - \theta^k)\Pi + \theta^k Q^k P^j \\ &= \Pi + \theta^k(Q^k P^j - \Pi) \text{ máshogy kifejezve: } P^{rk+j} - \Pi = \theta^k(Q^k P^j - \Pi) \end{aligned}$$

Vizsgáljunk meg egy tetszőleges x sort az utolsó egyenlet két oldalán látható mátrixoknál a teljesen variációs távolság 2 ekvivalens definíciója segítségével, és használjuk fel, hogy $\Pi(x, \cdot) = \pi$: $(P^{rk+j} - \Pi)(x, \cdot) = \theta^k(Q^k P^j - \Pi)(x, \cdot)$. Tehát:

$$\begin{aligned} \|P^{rk+j}(x, \cdot) - \pi\|_{TV} &= \|P^{rk+j}(x, \cdot) - \Pi(x, \cdot)\|_{TV} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{y \in X} |(P^{rk+j} - \Pi)(x, y)| \\ &= \theta^k \frac{1}{2} \sum_{y \in X} |(Q^k P^j - \Pi)(x, y)| \end{aligned}$$

$$= \theta^k \|Q^k P^j(x, \cdot) - \Pi(x, \cdot)\|_{TV} \leq \theta^k,$$

Abból, hogy Q , P és Π sztochasztikusak mátrixok, következik, hogy $Q^k P^j(x, \cdot)$ és $\Pi(x, \cdot)$ eloszlások, tehát teljes variációs távolságuk maximum 1 a 3.2.2 állítás alapján.

Most definiáljuk a következő állandókat: $\alpha = \sqrt[r]{\theta}$ és $C = \alpha^{-r}$. Legyen $t \geq 0$, és határozzuk meg k és j értékét úgy, hogy: $t = rk + j$, ahol $0 \leq j < r$.

Mivel $0 < \theta < 1$ és $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} &= \|P^{rk+j}(x, \cdot) - \pi\|_{TV} \\ &\leq \theta^k = \alpha^{rk} \leq \alpha^{rk} \alpha^{j-r} = \alpha^{-r} \alpha^{rk+j} = C \alpha^t. \end{aligned}$$

Mivel ez igaz minden $x \in X$ esetén, ezért tetszőleges $t \geq 0$ esetén is igaz, hogy:

$$\max_{x \in X} \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} \leq C \alpha^t.$$

□

4. fejezet

Összefoglalás

Szakdolgozatomban tehát bevezettem a véges-állapotterű Markov-láncok alapvető fogalmait, a stacionárius eloszlást, a megértésüket több helyen is példákkal segítetttem, majd a megismert definíciók és tételek segítségével végül beláttam, hogy az irreducibilis, aperiodikus Markov-láncok exponenciális sebességgel konvergálnak a stacionárius eloszlásukhoz.

A második fejezetben először definiáltuk a Markov-lánc fogalmát, majd egy könnyed mese segítségével példát is láttunk arra, hogy hogyan is képzelhetjük el mindezt egyszerű esetben. Ezután definiáltuk a számunkra 2 legfontosabb fogalmat, az irreducibilitást és az aperiodicitást, majd a fontos lemmákat láttunk be ezzel a két fogalommal kapcsolatban. Ezek után rátértünk stacionárius eloszlásra. Ehhez először definiáltuk a harmonikus függvényeket, majd beláttunk róluk egy lemmát. Ezután pedig bebizonyítottunk két fontos állítást a stacionárius eloszlásról. Először azt, hogy amennyiben létezik irreducibilis esetben stacionárius eloszlás, akkor pontosan 1 létezik, másrésről pedig azt, hogyha szintén irreducibilis esetben tényleg létezik stacionárius eloszlás. A fejezet végén pedig még néhány érdekes állítást bebizonyítottunk, a tágabb megértés érdekében. A harmadik fejezetben először beláttunk egy állítást pozitív rekurrens láncok hosszú távú viselkedéséről, majd defináltuk 2

valószínűségi eloszlás teljes variációs távolságát, ezután beláttunk a teljes variációs távolságra egy alternatív formulát, végül pedig bebizonyítottuk, hogy az irreducibilis, aperiodikus Markov-láncok exponenciális sebességgel konvergálnak a stacionárius eloszlásukhoz.

Irodalomjegyzék

- [1] Olle Hagström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. Cambridge University Press, 2002
- [2] James R. Norris, *Markov Chains*. Cambridge University Press, 1997
- [3] David A. Levin, Yuval Peres with contributions by Elizabeth L. Wilmer. *Markov chains and mixing times, second edition*. American Mathematical Society, 2017
- [4] Nicolas Privault, *Understanding Markov Chains, Examples and Applications, Second Edition*. Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2018
- [5] John G. Kemeny, J. Laurie Snell, *Finite Markov Chains*. Springer, 1976
- [6] Csiszár Villő *Diszkrét és folytonos idejű Markov-láncok*. ELTE egyetemi jegyzet, kiadás éve ismeretlen

Alulírott Kolozsvári Bence Tamás nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Latexben írás	GPT-4o	képletek a szakdolgozatban	Amennyiben nem tudtam egy képlethez a megfelelő parancsot, megkérdeztem az AI-t
Helyesírás ellenőrzése	GPT-4o	Egész szakdolgozat	
A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.			