

Feszítőfa-bijekciók

Szakdolgozat

Készítette:

Gurin Tünde
Matematika BSc

Témavezető:

Tóthmérés Lilla
*ELTE Matematikai Intézet,
Operációkutatás Tanszék*



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2025

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni őszinte köszönetemet témavezetőmnek, Tóthmérés Lillának, aki a rendszeres konzultációkkal, szakmai útmutatásával és támogatásával rengeteget segített a szakdolgozatom elkészítése során. Türelme, valamint bátorító hozzáállása nagyban hozzájárult ahhoz, hogy a témában végig lelkes maradjak.

Köszönöm továbbá a családomnak és a barátaimnak is, akik végig biztattak, és türelmesen meghallgatták és megválaszolták az ezernyi kis "hogyan jobb" kérdésemet.

Tartalomjegyzék

Bevezető	3
1. Postnikov tétele	4
1.1. Alapvető fogalmak	4
1.2. A gyökpolitóp	7
1.3. Jelölők és bijekciók	11
2. Bijekció-fajták	17
2.1. A Jaeger-fák	17
2.2. Jaeger-fás bijekciók	21
2.3. Disszekciók és triangulációk	25
3. További kérdések	30
3.1. Bijekciók és fák	30
3.2. Fás bijekciók és szimplexek	33

Bevezető

Egy páros gráf feszítőfáit vizsgálva az alsó és felső csúcsosztályon megjelenő fokszámokra tekinthetünk akár egy-egy sorozatként is: rögzítsünk a csúcsokon egy tetszőleges sorrendet fenn és lenn is, és az n . csúcs fokszámát tekintsük a sorozat n . elemének. Első ránézésre nehéz lenne megmondani, hogy a két csúcsosztályon milyen fokszámeloszlások fordulhatnak elő, hányféle különböző fokszámsorozat létezik, illetve hogy ezek milyen módon függenek egymástól. Az nyilvánvaló, hogy multiplicitással számolva ugyanannyi fokszámsorozatnak kell lennie fenn és lenn is, hiszen minden feszítőfához tartozik egy fokszámsorozat mindkét csúcsosztályon. De vajon mi lehet a helyzet multiplicitás nélkül, csak a különböző megvalósítható fokszámsorozatokat számolva?

Alexander Postnikov egy meglepően elegáns eredményt bizonyított be ezzel kapcsolatban:

Tétel. [5] *Bármely páros gráf esetében a két csúcsosztályon feszítőfák által megvalósítható fokszámsorozatok száma azonos.*

Ez az eredmény nemcsak a gráfelmélet szempontjából izgalmas, hanem az alkalmazott módszerek miatt is. Postnikov bizonyítása ugyanis jelentős mértékben támaszkodik geometriai eszközökre, és így érdekes kapcsolatokat fed fel a geometria és a gráfok között.

A dolgozat első fejezetében a szükséges fogalmak, majd Postnikov tételének bizonyítása szerepelnek. A második fejezetben bizonyos speciális feszítőfa-halmazokról látom be, hogy bijekciót határoznak meg a fokszámsorozatok között, illetve egy algoritmust is bemutatok ilyenek keresésére. A harmadik fejezetben néhány saját eredmény szerepel a témával kapcsolatban felmerült kérdésekről.

1. Postnikov tétele

1.1. Alapvető fogalmak

Páros gráfnak egy $G = (V_0, V_1, E)$ hármast nevezünk, ahol V_0 és V_1 diszjunkt véges halmazok (a színosztályok), és E egy szintén véges élhalmaz, amely összeköt egy V_0 -beli elemet egy V_1 -beli elemmel. Többszörös élek itt nem megengedettek.

Hipergráfnak egy $H = (V, E)$ párt nevezünk, ahol V és E véges halmazok, és E a V nemüres részhalmazaiából áll. A V elemeit csúcsoknak, míg az E elemeit hiperéleknek hívjuk. Ugyanakkor a hipergráfot alkotó V és E halmazokat tekinthetjük akár egy páros gráf két színosztályának is. Ezt a gráfot Bip_H -val szokás jelölni, és egy $v \in V$ csúcsot itt akkor köt össze él egy $e \in E$ hiperélel, ha $v \in e$. Szokás az E halmazt Bip_H smaragd (emerald), míg a V -t Bip_H ibolya (violet) színosztályának nevezni.

1.1. Példa.



1. ábra. Egy hipergráf és a hozzá tartozó páros gráf

A Bip_H konstrukciója megfordítható, így egy G páros gráf egyik vagy másik színosztályát kiválasztva két hipergráf hozható létre: $H_0 = (V_1, V_0)$ és $H_1 = (V_0, V_1)$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy G indukálja H_0 -t és H_1 -et.

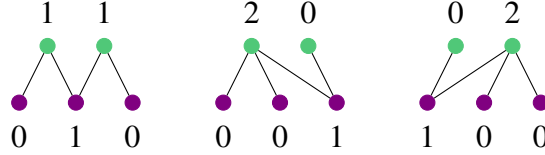
1.2. Definíció. A H és $\bar{H}$ hipergráfokat egymás absztrakt duálisainak nevezzük, ha a csúcsok és a hiperélek szerepének megcserélésével hozhatók létre, azaz $H = (V, E)$ és $\bar{H} = (E, V)$.

Legyen most $H = (V, E)$ egy hipergráf úgy, hogy a hozzá tartozó páros gráf, Bip_H összefüggő. (Ebben az esetben szokás magát H -t is összefüggőnek nevezni.)

1.3. Definíció. Egy H -beli hiperfa alatt egy olyan $f: E \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ függvényt (vektort) értünk, melyhez létezik olyan feszítőfa Bip_H -ban, amelyben minden $e \in E$ csúcs foka $f(e) + 1$.

Egy ilyen Bip_H -beli feszítőfáról azt mondjuk, hogy realizálja vagy indukálja f -et. A H összes hiperfájának halmazát B_H -val jelöljük.

1.4. *Példa.* A $K_{2,3}$ teljes páros gráf által indukált hipergráfoknak, H_0 -nak és H_1 -nek egyaránt három hiperfája van. H_0 -nak az $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, míg H_1 -nek a $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, melyeket a $K_{2,3}$ feszítőfáiból kaphatunk meg, ha egyet kivonunk minden fokszámból:



2. ábra. A H_0 és H_1 hiperfáit indukáló feszítőfák

Ahhoz, hogy jellemezni tudjuk azokat a vektorokat, amik a hiperfáknak felelnek meg, vezessünk be néhány jelölést. Egy G páros gráfra (E és V színosztályokkal), valamint egy $E' \subseteq E$ részhalmazra jelölje $G|_{E'}$ azt a gráfot, amelyet E' elemei, a rájuk illeszkedő élek és azok V -beli végpontjai alkotnak. Jelölje $c(E')$ a $G|_{E'}$ összefüggő komponenseinek számát, és $\cup E'$ a $V \cap G|_{E'}$ -t. Végül pedig legyen μ olyan, hogy $\mu(\emptyset) = 0$, és egyébként $\mu(E') = |\cup E'| - c(E')$.

1.5. Lemma. [1, Theorem 3.4.] Ha G összefüggő, akkor $\mu(E) = |V| - 1$, és a $H = (V, E)$ hiperfái pontosan azok az egész megoldások, amelyek kielégítik a következő egyenlőtlenségeket:

$$f(e) \geq 0 \quad \forall e \in E\text{-re}, \quad \sum_{e \in E} f(e) = |V| - 1, \quad \sum_{e \in E'} f(e) \leq \mu(E') \quad \forall E' \subseteq E\text{-re}.$$

Megjegyzés. Ekvivalens egyenlőtlenség-rendszert kapunk, ha a harmadik feltételt lecseréljük a $\sum_{e \in E'} f(e) \leq |\cup E'| - 1$ egyenlőtlenségre, amelyet továbbra is minden $E' \subseteq E$ nemüres részhalmazra megkövetelünk. Ez azért működik, mert ha a $G|_{E'}$ gráf nem összefüggő, tehát $c(E') > 1$ lenne, akkor az összefüggő komponenseket $G|_{E''}$ alakban felírva, az ezekre vonatkozó egyenlőtlenségek összegeként a feltétel szigorúbb változatát kapjuk vissza.

Bizonyítás. A nemnegativitási feltétel következik a másik két feltételből. Ez az $E = \{e\}$ esetben nyilvánvaló, hiszen ekkor $f(e) = |V| - 1$, ami ≥ 0 . Egyébként pedig $E' = E \setminus \{e\}$ választással

$$f(e) = |V| - 1 - \sum_{e' \in E'} f(e') \geq |V| - 1 - \underbrace{(|\cup E'| - c(E'))}_{\mu(E')} = (|V| - |\cup E'|) + (c(E') - 1),$$

ahol a jobb oldalon két nemnegatív mennyiség összege szerepel, hiszen $\cup E'$ a V részhalmaza, és a komponensek száma mindig legalább 1.

Az is könnyen belátható, hogy minden f hiperfa teljesíti a $\sum_{e \in E} f(e) = |V| - 1$ összefüggést, hiszen mivel a feszítőfának $|V| + |E| - 1$ éle van, így ennyi a foksámösszeg mindkét színosztályon (minden élnek az egyik vége az egyik, a másik vége a másik színosztályba esik), tehát $\sum_{e \in E} (f(e) + 1) = \sum_{e \in E} f(e) + |E| = |V| + |E| - 1$, azaz $\sum_{e \in E} f(e) = |V| - 1$.

A harmadik feltétel pedig azért szükséges, mert világos, hogy egy feszítőerdő (maximális, körmentes részgráf) éleinek száma megegyezik a gráf csúcsainak számával mínusz az összefüggő komponensek számával, illetve minden körmentes részgráf része valamely feszítőerdőnek. Egy adott f hiperfa és $E' \subseteq E$ részhalmaz esetén a G egy f -et realizáló feszítőfájának $G|_{E'}$ -vel való metszete $G|_{E'}$ egy körmentes részgráfja. Mint ilyen, legfeljebb $|E'| + |\cup E'| - c(E')$ éle lehet. Mivel minden él pontosan egy végpontja E' -beli, ezért $\sum_{e \in E'} (f(e) + 1) \leq |E'| + |\cup E'| - c(E')$, azaz $\sum_{e \in E'} f(e) \leq |\cup E'| - c(E')$.

Annak belátásához, hogy a feltételek elégségesek is, megfogalmazunk egy segédtevélt. Fontos megjegyezni, hogy egy gráfnak akkor és csak akkor 0 a nullitása, ha körmentes. (A gráf nullitása a gráf A adjacencia mátrixának nullításával egyezik meg. Az A $n \times n$ -es mátrix nullitása pedig $n - r$, ahol r a mátrix rangja.)

1.6. Lemma. [1, Lemma 3.7.] *Tegyük fel, hogy az $f: E \rightarrow \mathbb{N}$ vektor kielégíti az első és harmadik feltételt (de a másodikat nem feltétlenül). Ekkor létezik G -ben olyan körmentes részgráf, amelyben minden $e \in E$ csúcs fokszáma $f(e) + 1$.*

Legyen f a feltételeket kielégítő vektor, és válasszunk egy tetszőleges $P \subseteq G$ részgráfot, amelyben minden $e \in E$ foka $f(e) + 1$. Ez lehetséges, mert a harmadik feltétel $E' = \{e\}$ esetén éppen azt mondja, hogy $f(e) \leq |e| - 1$. Ha P körmentes, kész vagyunk. Tegyük fel, hogy nem.

Elég megmutatni, hogy létezik G -nek egy másik olyan részgráfja, amely ugyanazokat a foksámokat veszi fel minden $e \in E$ -re ($f(e) + 1$ -et), de amelynek nullitása eggyel kisebb, mint P -é. Mivel P nem körmentes, van benne egy kört tartalmazó összefüggő komponens: C . Legyen $E' = C \cap E$. Ekkor van olyan $e \in E'$, amelyhez létezik egy ε G -beli "kilépő" él, amely e -ből indul ugyan, de a másik végpontja nem része C -nek. (A harmadik feltételt E' -re alkalmazva $\sum_{e \in E'} (f(e) + 1) \leq |E'| + |\cup E'| - c(E')$, ahol a bal oldal egyenlő az E' -ből induló élekkel C -ben. Ha E' minden él

C -beli volna, akkor a jobb oldal $= |C| - 1$, ami pont egy feszítőfa élszámának felel meg C -n, tehát nem alkothat összefüggő és még kört is tartalmazó gráfot.)

Ha az $e \in E'$ része egy körnek C -ben, akkor elég kivenni a kör egy e -hez kapcsolódó élét és bevenni helyette ε -t, ekkor a fokszámok nem változnak E -n, de a nullitás eggyel csökken. Ha azonban az e -ből kiinduló összes él más-más komponensbe vezet $C - \{e\}$ -ben (azaz e nem eleme egyetlen körnek sem), akkor legalább az egyik komponens (C') továbbra is tartalmaz kört. Ekkor az egyik e -ből induló élt cseréljük le ε -ra, így kapunk egy új P' részgráfot, melynek ugyanazok a fokai és ugyanaz a nullitása, de a kört tartalmazó komponens, C' kevesebb E -csúcsot tartalmaz, mint C . Ezt az eljárást ismételve P' -vel és C' -vel minden lépésben csökken a kört tartalmazó komponensbeli E -csúcsok száma, míg végül az első eset szerinti e -t kapunk. Ezzel kész a lemma bizonyítása.

Ha most ezt a lemmát egy olyan f -re alkalmazzuk, amely mindhárom feltételt kielégíti, akkor az így kapott körmentes részgráf a második feltétel miatt feszítőfa is lesz. $\square$

1.2. A gyökpolitóp

Ebben a fejezetben bevezetjük a Postnikov tételének geometriai bizonyításához szükséges gyökpolitóp fogalmát, illetve megnézzük az alapvető tulajdonságait.

1.7. Definíció. [2, Definition 3.1.] Legyen G egy páros gráf az E és V színosztályokkal. Tekintsük az $\mathbb{R}^E \oplus \mathbb{R}^V$ térben az összes $\mathbf{i}_{\{e\}} + \mathbf{i}_{\{v\}}$ alakú vektort ($\mathbf{i}_X$ az X halmaz indikátorfüggvénye), ahol $e \in E$ és $v \in V$, és ev él G -ben. Ezen vektorok konvex burkát Q_G -vel jelöljük és G gyökpolitópjának nevezzük.

Megjegyzés. Q_G csúcsai $\mathbf{i}_{\{e\}} - \mathbf{i}_{\{v\}}$ alakban is megadhatók. A két verzió megfeleltethető egymásnak, ha minden V -koordinátát -1 -gyel megszorozunk.

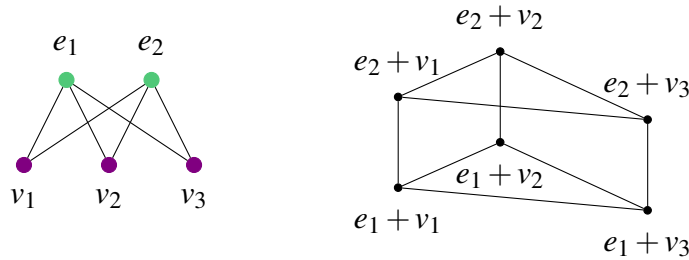
A koordináták összege Q_G minden csúcsán 2, egy E -koordináta és egy V -koordináta. Ha G összefüggő, akkor Q_G dimenziója $|E| + |V| - 2$ lesz, ugyanis egy feszítőfa $|E| + |V| - 1$ darab élével G összes többi élét is "ki tudjuk fejezni", a faéleknek megfelelő csúcsok pedig lineárisan függetlenek lesznek.

Pontosabban, mivel bármely nem-faél behúzása egy kört hoz létre a feszítőfában, így a létrejövő kör faéleinek megfelelő politóp-csúcsokat felváltva $+/--$ -szal összeadva a következő csúcs "kez-

dőpont koordinátája" mindig kiejti az előző "végpont koordinátáját". Ez alól csak az utolsó végpont koordináta lesz kivétel, ami $+$ -szal fog szerepelni, hiszen mivel páros gráfban csak páros hosszú körök lehetnek, így páratlan sok faélt kellett összeadnunk. Ebből az is következik, hogy egyrészt eredményként a politóp-csúcsok egy affin kombinációját kapjuk, hiszen a csúcsok együtthatóinak összege 1 volt, másrészt a kapott pont éppen a nem-faélnek megfelelő politóp-csúcs lesz, hiszen az él két végpontjának megfelelő koordinátákban 1, egyébként 0.

A feszítőfa $|E| + |V| - 1$ élének megfelelő politóp-csúcsok pedig azért lesznek affin függetlenek, mert a fagraf egy 1 fokú csúcsába menő élt törölve egy olyan koordináta tűnik el, amely csak az annak az élnek megfelelő vektorban szerepel nem 0-ként, tehát nem lehet a többi vektor affin kombinációja.

1.8. *Példa.* Az E és V színosztályokkal rendelkező teljes páros gráf gyökpolitópja definíció szerint a Δ_E és Δ_V egységsszimplexek direkt szorzata. (Az egységsszimplex Δ_E azon $|E|$ darab egységvektor konvex burka, amelyeknek egyetlen E -koordinátájuk 1-es, a többi 0, Δ_V definíciója ugyanez, csak V -koordinátákkal.) A $G = K_{2,3}$ esetben ez egy 5 dimenzióba beágyazott 3 dimenziós politóp lesz, ami az alábbi módon néz ki ($\mathbf{i}_{\{x\}}$ -et most jelölje x a könnyebb olvashatóság kedvéért):



3. ábra. A $K_{2,3}$ gráf és gyökpolitópja

A gyökpolitóp szerkezetének megértése érdekében természetes gondolat lehet megpróbálni fel-szabdalni azt kisebb, jól kezelhető darabokra, például szimplexekre. Egy d -dimenziós szimplex a tér $d + 1$ affin független pontjának (azaz olyan pontoknak, amelyek nem esnek egy $d - 1$ dimen-ziós altérbe) konvex burka. Geometriailag ez a legegyszerűbb lehetséges d -dimenziós politóp: 0 dimenzióban egy pont, 1 dimenzióban egy szakasz, 2 dimenzióban egy háromszög, 3 dimenzióban egy tetraéder, és így tovább.

A gyökpólítóp esetében a szimplexek előállítása szorosan összefügg a kiindulási gráf szerkezetével. A gyökpólítópot alkotó szimplexek ugyanis mind konkrétan megfeleltethetők az kiindulási gráf bizonyos részgráfjainak.

1.9. Lemma. [5, Lemma 12.5.] Egy $G' \subseteq G$ részgráfra a G' éleinek megfelelő Q_G -beli csúcsok konvex burka egy szimplex akkor és csak akkor, ha G' erdő G -ben. Egy ilyen szimplex $|E| + |V| - 2$ dimenziós akkor és csak akkor, ha G' feszítőfája G -nek.

Bizonyítás. Ha G' erdő, tehát körmentes, akkor az éleknek megfelelő vektorok lineárisan függetlenek lesznek, tehát egy szimplexet feszítenek ki. Ha pedig G' tartalmaz kört, akkor a megfelelő élek vektorai lineárisan összefüggőek lesznek, hiszen felváltva $+/--$ -szal összeadva őket az összegük 0 lesz, így nem lehetnek egy szimplex csúcsai.

Ha G' feszítőfája G -nek, akkor az $|E| + |V| - 1$ darab élének megfelelő lineárisan független vektorok nyilván egy $|E| + |V| - 2$ dimenziós szimplexet fognak kifeszíteni. Ha pedig a szimplex $|E| + |V| - 2$ dimenziós, akkor $|E| + |V| - 1$ darab csúcsa kell legyen, tehát G' -nek ennyi éle van, de mivel erdő, így csak feszítőfa lehet. $\square$

Más szóval a Q_G -beli szimplexek G -beli erdőknek fognak megfelelni, a maximális dimenziójú szimplexek pedig bijekcióba állíthatók G feszítőfaival.

1.10. Definíció. A Q poliéder egy disszekciója olyan maximális dimenziójú szimplexek összessége, amelyeket Q csúcsai feszítenek ki, bármely két szimplex belsőleg diszjunkt, és az uniójuk az egész Q -t adja.

A polítópot ennél szigorúbb feltételek mellett is felbonthatjuk, például úgy, hogy olyan szimplexek uniójaként írjuk fel úgy, amelyek csak közös oldalaik mentén metszik egymást.

1.11. Definíció. A Q poliéder egy triangulációja olyan maximális dimenziójú szimplexek összessége, amelyeket Q csúcsai feszítenek ki, bármely két szimplex metszete egy közös oldal, és az uniójuk az egész Q -t adja.

Abban, hogy szimplexek egy halmazáról el tudjuk dönteni, hogy megfelel-e a feltételeknek, és elemei triangulációt alkotnak-e, egy lemma fog segíteni, ami az egymást megfelelő módon metsző szimplexpárokat írja le.

Legyen Γ_1 és Γ_2 két feszítőfa G -ben. Jelölje $U(\Gamma_1, \Gamma_2)$ azt az irányított gráfot, amelynek élhalmaza $\{(i, j) \mid (i, j) \in \Gamma_1\} \cup \{(j, i) \mid (i, j) \in \Gamma_2\}$, vagyis $U(\Gamma_1, \Gamma_2)$ a Γ_1 és Γ_2 éleinek uniója, ahol Γ_1 éleit fentről lefelé, míg Γ_2 éleit lentől felfelé irányítjuk meg. Egy irányított kör egy olyan $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{k-1}, i_k), (i_k, i_1)$ élsorozat, ahol $i_1, \dots, i_k$ különböző csúcsok. Jelölje egy $M \subseteq G$ erdőre $\Delta_M := \text{ConvexHull}(\mathbf{i}_{\{i\}} + \mathbf{i}_{\{j\}} \mid (i, j) \text{ él } M\text{-ben})$ az M élei által feszített szimplexet.

1.12. Lemma. [5, Lemma 12.6.] Legyen Γ_1 és Γ_2 két feszítőfa G -ben, a megfelelő Q_G -beli szimplexek pedig γ_1 és γ_2 . Ekkor a következő két állítás ekvivalens:

- 1) γ_1 és γ_2 metszete egy közös oldal, 2) $U(\Gamma_1, \Gamma_2)$ nem tartalmaz ≥ 4 hosszú irányított kört.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $U(\Gamma_1, \Gamma_2)$ tartalmaz egy legalább 4 hosszú irányított kört. A kör élei Γ_1 -ben és Γ_2 -ben olyan M_1 és M_2 (részleges) párosításokat alkotnak, amelyek diszjunkt élhalmazúak, és ugyanazokon a csúcsokon vannak értelmezve. Mind M_1 , mind M_2 $k \geq 2$ élből áll. Legyen

$$x = \frac{1}{k} \sum_{(i,j) \in M_1} (\mathbf{i}_{\{i\}} + \mathbf{i}_{\{j\}}) = \frac{1}{k} \sum_{(i,j) \in M_2} (\mathbf{i}_{\{i\}} + \mathbf{i}_{\{j\}}),$$

ekkor $x \in \gamma_1 \cap \gamma_2$, hiszen mindkét feszítőfában az élek egy részhalmazának megfelelő csúcsok konvex kombinációjaként írható fel. Azonban γ_1 x -et tartalmazó minimális oldala Δ_{M_1} , míg γ_2 -é Δ_{M_2} . Mivel M_1 és M_2 diszjunktak, és mindkét halmazban az éleknek megfelelő csúcsok lineárisan függetlenek, ezért $\Delta_{M_1} \neq \Delta_{M_2}$, így a metszet nem lehet közös oldal.

Fordítva, tegyük fel, hogy $U(\Gamma_1, \Gamma_2)$ nem tartalmaz ≥ 4 hosszú irányított kört. Legyen $F = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, azaz a Γ_1 és Γ_2 által is tartalmazott élekből álló erdő. Mivel $U(\Gamma_1, \Gamma_2)$ irányított kör mentes (illetve bár 2 hosszú körök ugyan lehetnek benne, de ezek pont az F -beli éleknek felelnek meg, ezért nem fognak zavarni), így létezik olyan $h : \{1, \dots, m, \bar{1}, \dots, \bar{n}\} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($m = |E|$, $n = |V|$), amelyre teljesül, hogy E elemeihez ≥ 0 -t rendel, V elemeihez ≤ 0 -t, és egyrészt F minden összefüggő komponensén $|h|$ konstans, másrészt minden olyan $(i, j) \in U(\Gamma_1, \Gamma_2)$ irányított élre, amely különböző komponenseket köt össze, $|h(i)| < |h(j)|$ teljesül. Ez lehetséges, mivel a komponensek erősen összefüggőek, így nem mehet két komponens közt mindkét irányban él, hiszen akkor lenne irányított kör $U(\Gamma_1, \Gamma_2)$ -ben. A második feltétel miatt, ha $(i, j) \in \Gamma_1$, akkor $|h(i)| < |h(j)|$, és ha $(j, i) \in \Gamma_2$, akkor $|h(i)| > |h(j)|$.

A h függvény definiál egy f_h lineáris leképezést $\mathbb{R}^{m+n}$ -en, amelynek standard bázisbeli koordinátái $h(1), \dots, h(m), h(\bar{1}), \dots, h(\bar{n})$. A feltételek alapján ha $x \in \Delta_F$, akkor $f_h(x) = 0$, mert Δ_F csúcsai (azaz F élei) mind 0-t kapnak, hiszen a két végpontjukon ellentett számok állnak, így Δ_F

csúcsainak bármely konvex kombinációja is 0-t kap. Ha $x \in \Delta_{\Gamma_1} \setminus \Delta_F$, akkor $f_h(x) < 0$, hiszen a csúcsok mind nempozitív értéket kapnak és van köztük negatív is, és ezek konvex kombinációjaként áll elő x . Ha $x \in \Delta_{\Gamma_2} \setminus \Delta_F$, akkor pedig $f_h(x) > 0$ hasonlóan. Más szóval a $f_h(x) = 0$ hipersík egy közös oldalon metszi a Δ_{Γ_1} és Δ_{Γ_2} szimplexeket, a többi csúcsot pedig szeparálja. Ez azt jelenti, hogy $\Delta_{\Gamma_1} \cap \Delta_{\Gamma_2} = \Delta_F$ közös oldal. $\square$

A lemma feltételeinek megfelelő Γ_1, Γ_2 feszítőfákat kompatibilisek nevezzük. Tehát a gyökpolitóp egy triangulációja olyan páronként kompatibilis maximális szimplexek összessége lesz, amelyek uniója Q_G . Mivel minden ilyen maximális dimenziójú szimplex térfogata azonos, így Q_G minden triangulációja ugyanannyi szimplexből áll.

1.13. Állítás. Egy Γ feszítőfához tartozó $d = |E| + |V| - 2$ dimenziós γ szimplex térfogata

$$V_\gamma = \frac{1}{d!} \cdot \left| \det \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_d \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{d!}.$$

Bizonyítás. A determináns számolásakor akkor kapunk nem nulla tagokat, ha minden oszlopból a három darab 1-es közül választunk: az oszlopnak megfelelő Γ -beli él két végpontja vagy az utolsó sor 1-ese közül. Ám az a sor, ami Γ -ban egy levél csúcsnak felel meg csak egyetlen helyen 1-es, abban az oszlopban, ami belőle kimenő egyetlen élnek felel meg. Ebből az oszlopból tehát ezt az elemet kell választanunk.

A maradék oszlopoknak megfelelő élek szintén fát alkotnak, tehát ebben is lesz levél, így a levélbe menő él oszlopából szintén muszáj a levél csúcsának megfelelő 1-est választanunk. Ezt iterálva végül egyetlen oszlopunk marad, amiből az utolsó sor 1-esét választhatjuk, tehát az így kiválasztott egyetlen oszloppermutáció ad nem nulla eredményt (± 1 -et), így ennyi lesz a determináns értéke. Ennek abszolút értéke 1, így a szimplex térfogata valóban $1/d!$ lesz. $\square$

1.3. Jelölők és bijekciók

Ez a fejezet lényegében Kálmán Tamás és Alexander Postnikov *Root polytopes, Tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite graphs* [2] című cikkének 3.4. fejezete alapján készült.

A gyökpolitóp triangulációinak fontos tulajdonsága, hogy összepárosítják $H = (V, E)$ és az absztrakt duális, $\overline{H} = (E, V)$ hiperfát. Mivel ezek lényegében a Bip_H feszítőfáihoz tartozó külön-

böző fokszámsorozatokot jelentik a két színosztályon, így valójában ezek között keresünk bijekciót, és ezzel bebizonyítjuk Postnikov tételét. A megfeleltetés felállításához a következő összefüggésekre van szükségünk:

Először is, Q_G természetes módon vetíthető a standard egységssimplexekre $\Delta_E \subseteq \mathbb{R}^E$ -re és $\Delta_V \subseteq \mathbb{R}^V$ -re. A Δ_V súlypontjának, $\mathbf{i}_V/|V|$ -nek a Δ_V -re való vetítés szerinti ősképe az $|E| - 1$ dimenziós Minkowski-összeg

$$S_E = \frac{1}{|V|} \left(\sum_{v \in V} \Delta_v \right) + \frac{1}{|V|} \mathbf{i}_V,$$

ahol $\Delta_v \subseteq \Delta_E \subseteq \mathbb{R}^E$ az $\{\mathbf{i}_{\{e\}} \mid ev \text{ él } G\text{-ben}\}$ halmaz konvex burka, azaz a v G -beli szomszédjaihoz tartozó indikátorvektorok konvex burka.

Amikor megnézzük, hogy Q_G mely pontjainak vetülete lesz Δ_V súlypontja, lényegében azt kérdezzük, hogy fix $(1/|V|)$ -s V -koordináták mellett milyen E -koordináták adnak Q_G -be eső pontokat. Mivel minden Q_G -beli pont egy $\sum_{ev \in E(G)} \lambda_{ev} (\mathbf{i}_{\{e\}} + \mathbf{i}_{\{v\}})$, $\sum \lambda_{ev} = 1$, $\lambda_{ev} \geq 0$ konvex kombináció, így a rögzített V -koordináták meghatározzák az egyes $v \in V$ csúcsokból kimenő élek összsúlyát, hiszen egy V -koordináta éppen $\sum_{ev} \lambda_{ev} \cdot \mathbf{i}_{\{v\}}$, azaz minden $v \in V$ -hez az onnan kimenő élek λ -súlyainak összege. Ha ez minden V -koordinátára $1/|V|$, akkor minden v -re a Δ_v csúcsainak összsúlyáról tudjuk, hogy az is $1/|V|$ kell legyen. A keresett pontok E -koordinátáit tehát úgy kapjuk meg, ha minden Δ_v -ből veszünk egy pontot (mivel itt a csúcsok összsúlya még 1, így le kell osztani $|V|$ -vel) és összeadjuk őket.

Speciálisan, egy $\Gamma \subseteq G$ feszítőfának megfelelő $\gamma \subseteq Q_G$ maximális simplex vetítése esetén a

$$\gamma \cap S_E = \frac{1}{|V|} \left(\sum_{v \in V} \Delta_v^\Gamma \right) + \frac{1}{|V|} \mathbf{i}_V$$

pontok projektálódnak $\mathbf{i}_V/|V|$ -be, ahol Δ_v^Γ a Δ_v azon oldala, amelyet a v Γ -beli szomszédjaihoz tartozó $\mathbf{i}_{\{e\}}$ egységvektorok feszítenek ki. Nyilván, hiszen γ pontjainál csak olyan csúcsok kaphatnak nem 0 súlyt, akiknek megfelelő élek szerepelnek a fában.

Egy gyors dimenziószámlálás megmutatja, hogy az előző képletben szereplő Minkowski-összeg egy direkt összeg, azaz elemei egyértelműen felírhatók mint az egyes tagok egy-egy vektorának összege. Ez abból is látszik, hogy mivel Γ fa, így bármely két V -csúcsnak maximum egy közös E -csúcs szomszédja lehet benne, különben nem lenne körmentes. Így két különböző Δ_v^Γ metszete egyetlen csúcs vagy az üres halmaz lesz. Ezen kívül a Δ_v^Γ -k olyan egy-egy csúcsban összekapcsolódó láncá sem létezhet, ami körbeérne, hiszen az is egy körnek felelne meg a gráfban.

Ha tehát feltennénk, hogy ugyanahhoz a $\gamma \cap S_E$ -beli ponthoz két különböző felírás is létezik, és ezek (többek között) a $\Delta_{v_1}^\Gamma$ első csúcsának együtthatójában nem egyeznek meg (mert a második felírásban kisebb az együttható), akkor ennek a csúcsnak (a $\Delta_{v_1}^\Gamma$ -gyel ebben a csúcsában szomszédos) $\Delta_{v_2}^\Gamma$ -ben nagyobb súlyt kell kapnia, mint az első felírásban. Ekkor azonban itt valamely más csúcs súlya kellett csökkenjen az első felíráshoz képest (hiszen az összsúly 1), amit egy másik szomszédos $\Delta_{v_3}^\Gamma$ -ban kell pótolni, és így tovább. Ez a sorozat azonban a Δ_v^Γ -k egy körre összekapcsolódó láncát alkotná, ami viszont nem létezhetett.

A későbbiekben néha S_E helyett egyszerűbb lesz csak a homotetikus képét (kicsinyített eltoltját), $P_E = \sum_{v \in V} \Delta_v$ -t használni, hiszen a lényegi információt úgyis ez hordozza a halmazról. A $\gamma \cap S_E$ -t, valamint a homotetikus képét,

$$M_\Gamma = \sum_{v \in V} \Delta_v^\Gamma \subset P_E$$

is a Γ feszítőfához tartozó Minkowski-cellának nevezzük.

Az M_Γ a Δ_E egységsszimplex egyetlen egész eltoltját tartalmazza, ez $\mathbf{f} + \Delta_E$, ahol $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^E$ a Γ által indukált hiperfa H -ban. Ezt tartalmazza, ehhez elég belátni, hogy $\mathbf{f} + \Delta_E$ csúcsait tartalmazza, hiszen mivel M_Γ konvex (konvex halmazok Minkowski-összege), így néhány pontjának konvex burkát is tartalmazni fogja.

Az eltolt szimplex egy csúcsa úgy néz ki, hogy egy $e \in E$ csúcsnak megfelelő koordinátájában az e Γ -beli foksámát veszi fel, a többi koordinátában pedig eggyel kevesebbet. Ez azonos azzal az M_Γ -beli ponttal, ami úgy jön létre, hogy az $\mathbf{i}_{\{e\}}$ -t tartalmazó összes Δ_v^Γ -ből az $\mathbf{i}_{\{e\}}$ -t választjuk ki (1 súllyal), majd ezen szimplexek összes többi csúcsát kiválasztjuk az őket tartalmazó összes többi szimplexből, és így tovább. Ez megtehető, mivel Γ körmentes, így minden szimplexből csak egy pontot választunk ki, és e -n kívül minden e' -re $\mathbf{i}_{\{e'\}}$ csak egy darab őt tartalmazó szimplexből marad ki a Minkowski-összegben.

Más egész eltolt nincs benne M_Γ -ban, hiszen ha az eltolásvektor valamely koordinátája nagyobb mint $\mathbf{f}$, akkor a szimplexnek egy ebben a koordinátában maximális pontja nem lesz benne a Minkowski-összegben, mert ott egy koordináta maximum akkora súllyal szerepelhet, amennyi Δ_v^Γ tartalmazza a neki megfelelő egységvektort, ami pedig épp $\mathbf{f} + 1$. Ha pedig az eltolásvektor valamely koordinátája kisebb mint $\mathbf{f}$ (és azt már tudjuk, hogy egy másik sem lehet nagyobb), akkor a szimplex pontjaiban a koordinátaösszeg kisebb lesz, mint $\sum \mathbf{f}(e) + 1 = |V|$. Ezzel szemben a Minkowski-összegben mindig $|V|$ lesz a koordinátaösszeg, így nem lehetnek közös pontjaik.

Jelölje ennek az eltolt szimplexnek a súlypontját

$$\mathbf{f}^+ = \mathbf{f} + \frac{1}{|E|} \mathbf{i}_E.$$

Mind $\mathbf{f}^+$ -t, mind pedig a hozzá tartozó Q_G -beli pontot,

$$\frac{1}{|V|} \mathbf{f}^+ + \frac{1}{|V|} \mathbf{i}_V \in \gamma \cap S_E\text{-t}$$

a γ szimplex smaragd jelölőjének nevezzük. A smaragd jelölők halmaza a hiperfák B_H halmazának (a jelölőket az első értelemben használva) csupán egy egyszerű eltolása.

Természetesen minden Q_G -beli maximális szimplex tartalmaz egy ibolya jelölőt is, azaz egy elemet az ibolya jelölők halmazából,

$$\frac{1}{|E|} \left(B_{\overline{H}} + \frac{1}{|V|} \mathbf{i}_V \right) + \frac{1}{|E|} \mathbf{i}_E\text{-ből.}$$

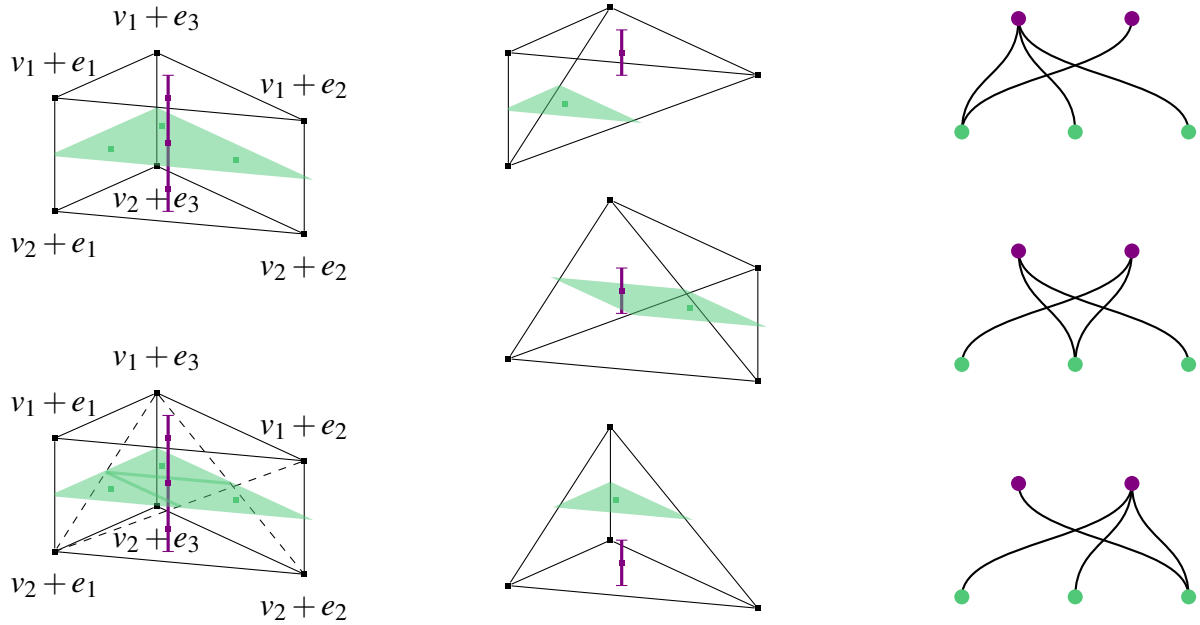
1.14. Tétel. *Tetszőleges Q_G -beli trianguláció bijekciót állít fel $H = (V, E)$ és az absztrakt duális, $\overline{H} = (E, V)$ hiperfái között.*

Bizonyítás. Ha rögzítünk egy Q_G -beli triangulációt, minden smaragd, illetve ibolya jelölő egy-egy különböző szimplex belsejében fog elhelyezkedni, mivel minden szimplexnek mindkét színű jelölőjéből csak egy darab van (amelyek lényegében a feszítőfából indukált hiperfák). Így egy bijekciót kaptunk B_H és $B_{\overline{H}}$ elemei között. $\square$

Megjegyzés. A tétel disszekciókra is igaz lesz, mivel a bizonyítás csupán azt használja, hogy a szimplexek belsőleg diszjunktak, és ezt a feltételt disszekciót alkotó szimplexek is kielégítik.

1.15. Példa. Vizsgáljuk meg a $G = K_{2,3}$ teljes páros gráf gyökpolitópját. Legyen a smaragd színosztály $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, az ibolya színosztály pedig $V = \{v_1, v_2\}$. Ekkor Q_G a kétdimenziós Δ_E , és az egydimenziós Δ_V egységsszimplexek szorzata lesz.

Az ábra bal felső részén láthatók az S_E és S_V metszetek, valamint a mindkét színhez tartozó jelölők (három-három darab). Alatta Q_G egy kiválasztott triangulációja látható, és az így kapott Minkowski-cellák a metszetekben. Ezek az S_V egydimenziós metszetben három egybevágó szakaszt adnak, míg az S_E -ben két háromszöget és egy rombuszt kapunk. Középen és jobb oldalt a trianguláció szimplexei, és a hozzájuk tartozó feszítőfák láthatók.



4. ábra. A $K_{2,3}$ gyökpolitópja a jelölőkkel, illetve egy trianguláció és a megfelelő feszítőfák

Hasznos lesz még egy információ a $\Gamma \subseteq G$ feszítőfa, a hozzá tartozó maximális szimplex $\gamma \subseteq Q_G$, valamint az indukált hiperfa $f \in B_H$ kapcsán. Már tudjuk γ smaragd jelölőjének, f^+ -nak a koordinátáit $\mathbb{R}^E$ természetes bázisában. Ugyanakkor hasznos lesz a jelölőpontot a Minkowski-cella, M_Γ direkt összeges felbontása szerint is leírni.

1.16. Lemma. [2, Lemma 3.14.] Legyen Γ a G egy feszítőfája, amely az f hiperfát indukálja. Ekkor a smaragd jelölőt, $f^+ \in M_\Gamma$ -t előállító súlyok (Γ élein) az alábbi módon számolhatóak: Minden $v \in V$ csúcsra az E elemei a v -ből Γ élein át való elérhetőségük alapján partíciókat alkotnak. Egy él súlyát úgy kapjuk, hogy a neki megfelelő halmaz (azon e -k, akik rajta keresztül érhetők el v -ből) méretét elosztjuk $|E|$ -vel.

Bizonyítás. Ez a hozzárendelés minden Δ_v^Γ -ből a csúcsok egy konvex kombinációját választja ki, hiszen a v -vel szomszédos éleken szétosztott súlyok összege 1 lesz.

Továbbá, ha Γ -ban egy $e \in E$ fokszáma $d = f(e) + 1$, akkor az e -hez tartozó élek súlyainak összege:

$$\frac{(|E| - 1)(d - 1) + d}{|E|} = d - 1 + \frac{1}{|E|} = f(e) + \frac{1}{|E|} = f^+(e),$$

tehát valóban a jelölőt állítja elő. A képlet azért érvényes, mert amikor kiszámítjuk a d darab súlyt, az e csúcs mind a d alkalommal szerepelni fog mint az adott élen keresztül elérhető smaragd csúcs,

miközben E többi eleme csak $d - 1$ alkalommal jelenik meg. Hiszen E egy adott eleme pontosan annál az ev élnél fog kimaradni, ahol azt a v -t vesszük, akinek (Γ -t e gyökerű fának tekintve) az adott elem a leszármazottja. Itt kimarad, de a többi v -nél e partíciójába fog kerülni, mert az ev élen lesz elérhető v -ből. □

2. Bijekció-fajták

2.1. A Jaeger-fák

Ahogy azt az előző részben láttuk, a gyökpolitóp maximális szimplexei a gráf feszítőfáinak felelnek meg. Ennélfogva, ha egy konkrét bijekciót szeretnénk mutatni a feszítőfák fokszámsorozatai (avagy a hipergráfok hiperfái) között, célszerű lenne karakterizálni azokat a feszítőfa-halmazokat, amelyeknek megfelelő szimplexek Q_G egy disszekcióját adják.

A következőkben az úgynevezett Jaeger-fákról lesz szó, amelyek disszekciókat indukálnak a gyökpolitópon, így hasznosak lesznek egy konkrét bijekció meghatározásánál. A Jaeger-fák definiálásához először rögzítenünk kell egy *szalagstruktúrát*. A G gráf szalagstruktúrája egy ciklikus permutációcsalád: minden $x \in V(G)$ csúcsra megadjuk az x végpontú élek egy ciklikus permutációját. Egy xy él esetén a következő jelöléseket használjuk (ha a G gráf világos a kontextusból, az alsó indexet elhagyhatjuk):

- xy_G^+ : az xy -t követő él az x csúcsnál,
- yx_G^+ : az $xy = yx$ -et követő él az y csúcsnál,
- xy_G^- : az xy -t megelőző él az x csúcsnál,
- yx_G^- : az $xy = yx$ -et megelőző él az y csúcsnál.

A szalagstruktúra mellett rögzítenünk kell egy *bázist* is, egy (b_0, b_0b_1) párt, ahol b_0 tetszőleges csúcs, b_0b_1 pedig egy b_0 -lal szomszédos él.

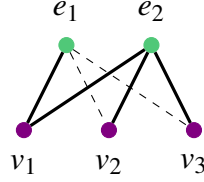
Innentől legyen $H = (V, E)$ egy összefüggő hipergráf, $G = \text{Bip}_H$ a hozzá tartozó páros gráf, amin rögzített szalagstruktúrával és bázissal dolgozunk. Ekkor bármely $T \subseteq G$ feszítőfán kapunk egy természetes „sétát”, amit Bernardi definiált, és az ő nyomán a *túrájának* nevezzük.

2.1. Definíció. [4, Definition 5.1.] Legyen G egy szalagstruktúrával ellátott gráf, (b_0, b_0b_1) bázis, és $T \subseteq G$ egy feszítőfa. A T túrája egy csúcs-él párokból álló sorozat, a (b_0, b_0b_1) párral kezdve. Ha az aktuális pár (x, xy) , és $xy \notin T$, akkor az aktuális pár (x, xy^+) lesz, ha viszont $xy \in T$, akkor (y, yx^+) lesz. Az első esetben azt mondjuk, hogy a túra kihagyja az xy élt, a másodikban azt, hogy bejárja. A túra akkor áll meg, amikor a (b_0, b_0b_1) pár ismét sorra kerülne.

Bernardi megmutatta, hogy bármely T feszítőfa túrájában minden xy él pontosan kétszer szerepel mint aktuális él. Egyszer x -szel, és egyszer y -nal mint aktuális csúccsal.

2.2. Példa. Legyen $G = K_{2,3}$ és tekintsük azt a szalagstruktúrát, amit a sík pozitív orientációja indukál. Legyen T az a feszítőfa, melynek a vastag vonalak az élei (a nem-faélek szaggatott

vonallal vannak ábrázolva). A $(b_0, b_0b_1) = (v_1, v_1e_2)$ bázis választásával a következő túrát kapjuk: $(v_1, v_1e_2); (e_2, e_2v_2); (v_2, v_2e_1); (v_2, v_2e_2); (e_2, e_2v_3); (v_3, v_3e_1); (v_3, v_3e_2); (e_2, e_2v_1); (v_1, v_1e_1); (e_1, e_1v_2); (e_1, e_1v_3); (e_1, e_1v_1)$.



5. ábra. A T feszítőfa túrája

Más szóval, a T túrája során lineáris sorrendben felsorolásra kerülnek az (v, ε) párok, ahol v a gráf egy csúcsa, ε pedig egy olyan él, amely szomszédos v -vel. Ezt a sorrendet $<_T$ -vel jelöljük, és azt mondjuk, hogy $(v, \varepsilon) \leq_T (v', \varepsilon')$, ha vagy $v = v'$ és $\varepsilon = \varepsilon'$, vagy pedig $(v, \varepsilon) <_T (v', \varepsilon')$. Ez a reláció természetes módon a gráf élei között is indukál egy rendezést.

2.3. Definíció. Egy szalagstruktúrával és bázissal ellátott G gráfban bármely T feszítőfához hozzárendeljük G éleinek egy sorrendjét úgy, hogy az xy él kisebb, mint az $x'y'$ él pontosan akkor, ha

$$\min_{\leq_T} \{(x, xy), (y, xy)\} \leq_T \min_{\leq_T} \{(x', x'y'), (y', x'y')\},$$

azaz ha a T túrájában az egyik xy -t tartalmazó pár előbb válik aktuálissá, mint bármely $x'y'$ -t tartalmazó pár. Ezt a rendezést is $\leq_T$ -vel jelöljük.

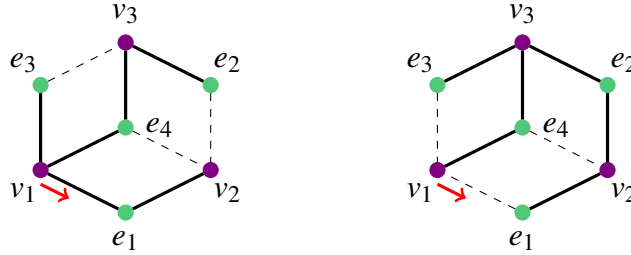
A T feszítőfa túrájára tekinthetünk úgy, mint egy módszerre, amellyel „kivágjuk T -t a gráfból,” vagy úgy, mint egy módszerre, amely „felépíti T -t.” Abban az esetben, ha xy nem élé T -nek (azaz a túra kihagyja), akkor tekinthetjük úgy, hogy xy kivágásra kerül a gráfból. Ha $(x, xy) <_T (y, xy)$, akkor azt mondjuk, hogy xy az x irányából kerül kivágásra, ha fordítva, akkor az y irányából. És ezzel el is jutunk a Jaeger-fák fogalmához.

2.4. Definíció. [3, Definition 6.1.] A G gráf egy T feszítőfáját V -vágású Jaeger-fának (illetve E -vágású Jaeger-fának) nevezzük, ha a T túrája során minden $xy \notin T$ él az ibolya (illetve a smaragd) végpontjánál kerül kivágásra.

A G egy feszítőfája akkor Jaeger-fa, ha vagy V -vágású, vagy E -vágású Jaeger-fa. Vagyis Jaeger-fák azok, amelyek túrája során minden nem-faél először ugyanazon rögzített színű végpontjánál

kerül kivágásra. A tipikus eset az, hogy rögzítünk egy szalagstruktúrát és egy bázist, majd ezek mellett vizsgáljuk az összes Jaeger-fát. (Különböző bázisokra a Jaeger-fák halmaza jelentősen eltérhet.)

2.5. Példa. Vegyük a sík pozitív orientációja által indukált szalagstruktúra az alábbi páros gráfon. Legyen v_1 a bázispont és v_1e_1 a bázisé.



6. ábra. Egy V -vágású Jaeger-fa és egy feszítőfa, ami nem Jaeger-fa

Ekkor a bal oldali feszítőfa tûrája: $(v_1, v_1e_1); (e_1, e_1v_2); (v_2, v_2e_2); (v_2, v_2e_4); (v_2, v_2e_1); (e_1, e_1v_1); (v_1, v_1e_4); (e_4, e_4v_2); (e_4, e_4v_3); (v_3, v_3e_2); (e_2, e_2v_2); (e_2, e_2v_3); (v_3, v_3e_3); (v_3, v_3e_4); (e_4, e_4v_1); (v_1, v_1e_3); (e_3, e_3v_3); (e_3, e_3v_1)$. Ez egy V -vágású Jaeger-fa, mivel például $(v_2, v_2e_2) <_T (e_2, e_2v_2)$, és hasonló tulajdonság igaz a másik két nem-faélre is. Ezzel szemben a jobb oldali feszítőfa nem Jaeger-fa, mivel v_1e_1 az ibolya végpontjánál, míg e_4v_2 a smaragd végpontjánál kerül kivágásra.

Bár külön V -, illetve E -vágású Jaeger-fákról beszélünk, ezek igazából ugyanazokat a feszítőfahalmazokat jelentik, csak más szalagstruktúra és bázis mellett. Egy adott szalagstruktúra megfordításán azt értjük, hogy minden ciklikus sorrendet az ellenkezőjére cserélünk.

2.6. Lemma. [3, Lemma 6.5.] Egy V -vágású Jaeger-fa a (b_0, b_0b_1) bázis mellett megegyezik egy E -vágású Jaeger-fával a megfordított szalagstruktúra és a $(b_0, b_0b_1^-)$ bázis mellett (ahol ez utóbbi az eredeti szalagstruktúra szerinti irányt jelöli).

Bizonyítás. Legyen T a G egy feszítőfája. A T tûrája során minden ε nem-faél kétszer válik aktuálissá (mindkét végpontjánál egyszer). A feszítőfa pontosan akkor V -vágású, ha ε ibolya végpontja mindig előbb válik aktuálissá, mint a smaragd. A megfordított szalagstruktúrában ε két előfordulásának sorrendje megfordul, hiszen pontosan a $<_T$ rendezés szerinti fordított sorrendben megyünk végig a csúcs-él párokon. Tehát T akkor és csak akkor V -vágású az eredeti struktúra mellett, ha E -vágású a megfordítottottra. $\square$

2.7. *Példa.* A 6. ábra bal oldalán látható feszítőfa a sík óramutató járásával megegyező (negatív) orientációja által indukált szalagstruktúrával, a (v_1, v_1e_3) bázis mellett E -vágású Jaeger-fa lesz.

A szimmetria alapján egy E -vágású Jaeger-fa a (b_0, b_0b_1) bázis mellett egyben V -vágású Jaeger-fának is tekinthető ugyanazon bázisponttal, de a $b_0b_1^-$ bázissal és a megfordított szalagstruktúrával. Mivel a szalagstruktúra megfordítása involúció (a megfordítás megfordításával önmagát kapjuk vissza), a következő állítást lesz igaz:

2.8. Lemma. [3, Lemma 6.7.] *Az E -vágású Jaeger-fák halmaza a (b_0, b_0b_1) bázis mellett megegyezik a V -vágású Jaeger-fák halmazával a megfordított szalagstruktúra és a $(b_0, b_0b_1^-)$ bázis mellett.*

2.9. Definíció. [3, Definition 6.8.] *Egy T V -vágású Jaeger-fa esetén T túráját (az eredeti szalagstruktúra szerint) T ibolya túrájának nevezzük. A túrát, amely a $(b_0, b_0b_1^-)$ bázis és a megfordított szalagstruktúra szerint történik, T smaragd túrájának nevezzük.*

Az 2.7.-es lemma alapján egy V -vágású Jaeger-fa esetén a smaragd túra során minden nem-faél a smaragd végpontjánál kerül levágásra. Az ibolya és a smaragd túra egyaránt indukál egy-egy sorrendet G élei között.

2.10. Definíció. [3, Definition 6.9.] *Egy T V -vágású Jaeger-fára az ibolya T -rendezés a G éleinek azt a sorrendjét jelenti, amely szerint az élek megjelennek T ibolya túrájában úgy, hogy épp az ibolya végpontjuk az aktuális csúcs. Jelöljük ezt a rendezést $<_{T,V}$ -vel. Tehát $ev <_{T,V} e'v'$ pontosan akkor, ha $(v, ev) <_T (v', e'v')$, ahol $<_T$ a már korábban definiált rendezés.*

Hasonlóan, a smaragd T -rendezés a G éleinek azt a sorrendjét jelenti, amely szerint az élek megjelennek T smaragd túrájában úgy, hogy épp a smaragd végpontjuk az aktuális csúcs. Jelöljük ezt a rendezést $<_{T,E}$ -vel. Tehát $ev <_{T,E} e'v'$ pontosan akkor, ha $(e, ev) <_T (e', e'v')$, ahol $<_T$ a megfordított szalagstruktúra által definiált rendezés.

2.11. Definíció. [3, Definition 6.10.] *Legyen $T \subseteq G$ egy V -vágású Jaeger-fa. A G éleinek smaragd T -sorrendje indukál egy sorrendet az E halmaz elemein úgy, hogy e_1 kisebb e_2 -nél akkor, ha van olyan e_1 -gyel szomszédos él, amely kisebb bármely e_2 -vel szomszédos élnél a smaragd T -sorrend szerint. (Hasonló módon definiálhatunk egy sorrendet a V halmazon az ibolya T -sorrend alapján.)*

2.12. *Példa.* A 6. ábra bal oldalán látható Jaeger-fa esetén az ibolya T -rendezés szerint $v_1 e_1 <_{T,V} v_2 e_2 <_{T,V} v_2 e_4 <_{T,V} v_2 e_1 <_{T,V} v_1 e_4 <_{T,V} v_3 e_2 <_{T,V} v_3 e_3 <_{T,V} v_3 e_4 <_{T,V} v_1 e_3$, a smaragd T -rendezés szerint pedig $e_3 v_3 <_{T,E} e_3 v_1 <_{T,E} e_4 v_3 <_{T,E} e_2 v_2 <_{T,E} e_2 v_3 <_{T,E} e_4 v_2 <_{T,E} e_4 v_1 <_{T,E} e_1 v_2 <_{T,E} e_1 v_1$. Az ibolya rendezés a $v_1 < v_2 < v_3$ sorrendet indukálja a V -csúcsokra, míg a smaragd rendezés az $e_3 < e_4 < e_2 < e_1$ -et az E -csúcsokra.

2.2. Jaeger-fás bijekciók

A következőkben belátjuk, hogy a Jaeger-fák valóban olyan feszítőfa-halmazokat alkotnak, amelyeknek megfelelő szimplexek Q_G egy disszekcióját adják, tehát bijekciót határoznak meg a fokszámsorozataink között.

Legyen T a G gráf egy feszítőfája és $\varepsilon \in T$. Ekkor $T - \varepsilon$ két összefüggő komponensre esik szét, és azokat az éleket, amelyek e két komponenset összekötik a G gráfban, *alapvágásnak* (fundamentális vágásnak) nevezzük, és $C^*(T, \varepsilon)$ -nal jelöljük. Azt a komponenset, amely tartalmazza b_0 -t, *báziskomponensnek* nevezzük.

A Jaeger-fák alapvágásai szépen összefonódnak a fák által indukált él-sorrendekkel. Az alábbi, meglehetősen intuitív lemmát Bernardi bizonyította, az itt következő megfogalmazás a jelen dolgozatban használt jelöléseket követi.

2.13. Lemma. [3, Lemma 6.13.] *Legyen T a G egy feszítőfája, és $xy \in T$. Jelölje T_0 és T_1 a $T - xy$ két komponensét úgy, hogy T_0 tartalmazza az bázispontot. Ha $(x, xy) <_T (y, xy)$, akkor x a T_0 csúcshalmazában van. Továbbá:*

$$\{(z, zw) \mid (x, xy) <_T (z, zw) \leq_T (y, xy)\} = \{(z, zw) \mid z \text{ benne van } T_1 \text{ csúcshalmazában}\}.$$

Tehát a T_1 komponens csúcsaihoz tartozó csúcs-él párok pontosan azok a párok, amik a T -sorrend szerint a feszítőfa vágásbeli xy élének két megjelenése közé esnek.

2.14. Lemma. [3, Lemma 6.14.] *Legyen T egy V -vágású Jaeger-fa, $\varepsilon \in T$, és $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ az alapvágás élei, azaz $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in C^*(T, \varepsilon)$. Ha ε_1 ibolya végpontja a $T - \varepsilon$ báziskomponensében, és ε_2 smaragd végpontja szintén ebben a komponensben található, akkor $\varepsilon_1 <_{T,V} \varepsilon_2$, és $\varepsilon_1 \leq_{T,V} \varepsilon$.*

Megjegyzés. Másként fogalmazva, a T túrája először azokat az éleket látogatja meg $C^*(T, \varepsilon)$ -ből, amelyek ibolya végpontja a $T - \varepsilon$ báziskomponensében van. Ezek közül az utolsó, és ebben az

esetben az egyetlen, amelyet nem vágunk le, maga ε lehet. Ha ε smaragd végpontja van a báziskomponensben, akkor ez lesz az első ilyen él, amelyet a túra elér, de mivel smaragd irányból haladunk át rajta, így a $<_{T,V}$ reláció szerint tipikusan nem ez lesz a legkisebb. (Valójában ez lesz a legnagyobb.) Mindkét esetben, amikor ε -on áthaladunk, a túra elhagyja a báziskomponenst, és ezután a maradék éleket a $C^*(T, \varepsilon)$ halmazból ibolya végpontjuknál vágja le. Mire a túra visszatér a báziskomponensbe (amikor másodszor halad át ε -on), a $C^*(T, \varepsilon)$ minden éle, ε kivételével, le lett vágva.

Bizonyítás. A $T - \varepsilon$ részgráf egy erdő, amely a báziskomponensből (T_0) és egy másik komponensből (T_1) áll. Legyen $\varepsilon = xy$, és tegyük fel, hogy $(x, \varepsilon) <_T (y, \varepsilon)$, azaz x van T_0 -ban és y van T_1 -ben. Legyen $i = 1, 2$ -re $\varepsilon_i = v_i e_i \in C^*(T, \varepsilon)$, ahol $v_i \in V$ ibolya csúcs, $e_i \in E$ smaragd csúcs.

Mivel ε_1 ibolya végpontja (v_1) a T_0 komponensben van, smaragd végpontja (e_1) a T_1 komponens csúcshalmazából való. Ekkor a 2.14.-es lemma szerint $(x, \varepsilon) <_T (e_1, \varepsilon_1) \leq_T (y, \varepsilon)$. Mivel a sorrendet T ibolya bejárása indukálja, két eset lehetséges: vagy $\varepsilon_1 = \varepsilon$ (és ekkor $x = v_1$), vagy pedig ε_1 ki lett vágva az ibolya végpontjánál, azaz $(v_1, \varepsilon_1) <_T (e_1, \varepsilon_1)$. Mivel $v_1 \notin T_1$, ezért (v_1, ε_1) nem eshet a T -sorrendben (x, ε) és (y, ε) közé, de mivel kisebb, mint (e_1, ε_1) , így $(v_1, \varepsilon_1) \leq_T (x, \varepsilon)$. Ebből közvetlenül következik a lemma második állítása, azaz hogy akár x , akár y az ε ibolya végpontja, mindig fennáll $(v_1, \varepsilon_1) \leq_T (x, \varepsilon) <_T (y, \varepsilon)$.

Most nézzük ε_2 smaragd végpontját (e_2 -t), mivel ez a T_0 báziskomponensben van, így ibolya végpontja (v_2) a T_1 komponensből származik. Ekkor a 2.14.-es lemma szerint $(x, \varepsilon) <_T (v_2, \varepsilon_2) \leq_T (y, \varepsilon)$. Következésképpen $(v_1, \varepsilon_1) <_T (v_2, \varepsilon_2)$, tehát $\varepsilon_1 <_{T,V} \varepsilon_2$. $\square$

2.15. Lemma. [3, Lemma 6.15.] *Tegyük fel, hogy a T és a T' V -vágású Jaeger-fák (ibolya) bejárásai megegyeznek egészen addig, amíg az ε él aktuális élként meg nem jelenik, továbbá $\varepsilon \in T$, de $\varepsilon \notin T'$. Ekkor ε ibolya végpontja a $T - \varepsilon$ báziskomponensében található. Továbbá, ha $\varepsilon' \in T'$ és $\varepsilon' \in C^*(T, \varepsilon)$, akkor ε' smaragd végpontja a $T - \varepsilon$ báziskomponensében van.*

Bizonyítás. Amíg a két túra megegyezik, addig ε sem kivágásra nem került (különben nem lehetne él T -ben), sem bejárásra (különben szerepelne T' -ben is). Tehát ekkor történik meg, hogy T' bejárása levágja ε -t, és mivel T' egy V -vágású Jaeger-fa, az aktuális csúcs (v) ibolya színű kell legyen. Mivel v egy olyan úton érhető el b_0 -ból T -ben, amely nem tartalmazza ε -t, így az első állítás igaz lesz.

A 2.15.-ös lemma alapján minden olyan $C^*(T, \varepsilon) \setminus \{\varepsilon\}$ halmazbeli él, amelynek ibolya végpontja a báziskomponensben van, már ε elérése előtt aktuális él volt T ibolya bejárásában (az ibolya végpontjánál), és ezek ki lettek vágva. Mivel T és T' ibolya bejárásai ε -ig megegyeznek, ezek az élek T' -ben sem szerepelhetnek. Továbbá mivel $\varepsilon \notin T'$, ezért minden $T' \cap C^*(T, \varepsilon)$ -beli élnek a smaragd végpontja van $T - \varepsilon$ báziskomponensében. $\square$

2.16. Lemma. [3, Lemma 7.7.] *Tetszőleges két V -vágású Jaeger-fa esetén az ezekhez tartozó maximális szimplexek belsőleg diszjunktak a Q_G gyökpolitópban.*

Bizonyítás. Legyen T_1 és T_2 két V -vágású Jaeger-fa, és tegyük fel, hogy a túráik egy ε él eléréséig megegyeznek, ahol $\varepsilon \notin T_1$ és $\varepsilon \in T_2$. Elég megmutatnunk, hogy a két fához tartozó maximális szimplexet egy hipersík elválasztja egymástól. Ilyen hipersíkokat G -beli vágások segítségével konstruálhatunk.

Legyen $E = E_1 \sqcup E_2$ és $V = V_1 \sqcup V_2$ a csúcsosztályok egy-egy felosztása. Rendeljünk az $\mathbb{R}^E \oplus \mathbb{R}^V$ bázisvektoraihoz -1 -et, ha $E_1 \cup V_2$ -höz tartoznak, és 1 -et, ha $E_2 \cup V_1$ -hez. Ez egyértelműen kiterjeszthető egy $\kappa : \mathbb{R}^E \oplus \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezéssé. Ekkor κ értéke a Q_G csúcsain (melyek G éleihez tartoznak)

- 0 , ha a megfelelő él a vágásba esik (E_1 és V_1 közti vagy E_2 és V_2 közti élek),
- -2 , ha a megfelelő él E_1 és V_2 között megy,
- 2 , ha a megfelelő él E_2 és V_1 között megy.

Így κ magtere egy olyan hipersík lesz, amely tartalmazza Q_G minden olyan csúcsát, amely vágásbeli él, a többi csúcs pedig e sík két oldalára esik attól függően, hogy smaragd vagy ibolya végpontjuk esik-e az előre rögzített oldalra.

Most a megfelelő hipersík megkonstruálásához tekintsük a $C^*(T_2, \varepsilon)$ vágást. Legyen $E_1 \cup V_1$ azoknak a csúcsoknak a halmaza, amelyek az ε él eltávolítása után a T_2 azon komponensében vannak, amely tartalmazza ε ibolya végpontját v . Ekkor $E_2 \cup V_2$ a másik komponens csúcsainak halmaza. Ezzel a konstrukcióval a κ leképezés értéke a Q_{T_2} maximális szimplex csúcspontjain a következő lesz: $\kappa(\varepsilon) = 2$, és minden más élre $\kappa = 0$.

A T_1 esetén éppen ellenkező a helyzet. Az éleinek megfelelő Q_G csúcsokon κ értéke nem pozitív. Ehhez az kell, hogy $C^*(T_2, \varepsilon) \cap T_1$ élei mind E_1 és V_2 között menjenek, ami viszont pontosan a 2.16.-os lemma állítása. $\square$

A fő tétel bizonyításához, miszerint a Jaeger-fák disszekciót indukálnak, egy lineáris rendezést vezetünk be a szalagstruktúrával ellátott gráf feszítőfái között (amely függ a választott bázistól).

Két feszítőfa, T és T' tûrájának van egy maximális kezdeti része, amely megegyezik. Az ezt követô pár, a túra első eltérô eleme egy (x, ε) pár, ahol a ε él szerepel az egyik fában, de nem szerepel a másikban. Ezt az élt nevezzük a fák első különbségének.

2.17. Definíció. [4, Definition 5.10.] Legyen T és T' két feszítőfa egy szalagstruktúrával ellátott gráfban, adott bázis mellett. Azt mondjuk, hogy $T' \prec T$, ha az első különbségük, ε , teljesíti az alábbiak valamelyikét:

- $\varepsilon \in T$, és T' tûrája a Jaeger-szabály szerint hagyja ki ε -t (azaz a megfelelő irányból);
- $\varepsilon \in T'$, és T tûrája a Jaeger-szabályt sértve hagyja ki ε -t (azaz nem a megfelelő irányból).

2.18. Lemma. [4, Lemma 5.11.] A $\prec$ reláció teljes rendezést ad a feszítőfák halmazán.

Bizonyítás. Mivel bármely két fa összehasonlítható, elegendô a tranzitivitást igazolni. Tegyük fel, hogy $T_1 \prec T_2$ és $T_2 \prec T_3$. Jelölje ε az T_1 és T_2 közötti első különbséget, illetve ε' az T_2 és T_3 közötti első különbséget. Belátható, hogy $\varepsilon = \varepsilon'$ nem fordulhat elő, hiszen akkor T_2 vagy mindkét másik fánál kisebb lenne, vagy mindkettônél nagyobb.

Ha ε a T_2 tûrájában korábban jelenik meg, mint ε' , akkor T_1 és T_3 első különbsége is ε , így sorrendjük megegyezik T_1 és T_2 sorrendjével, tehát $T_1 \prec T_3$. Ha viszont ε' jelenik meg elôbb a T_2 tûrájában, akkor T_1 és T_3 első különbsége ε' , így sorrendjük megegyezik T_2 és T_3 sorrendjével, tehát ismét $T_1 \prec T_3$ adódik. □

A következô lemma az irányított gráfokra vonatkozó [4, Theorem 5.8.] tétel bizonyítását írja le az irányítatlan esetben, ahogyan ebben a dolgozatban szükség lesz rá.

2.19. Lemma. Minden hiperfához létezik legalább egy V -vágású Jaeger-fa.

Megjegyzés. Természetesen a szimmetria miatt a lemma E -vágású Jaeger-fával is igaz lesz.

Bizonyítás. Vegyünk egy a hiperfát realizáló feszítőfát, T -t. Ha T Jaeger-fa, abban az esetben készen vagyunk, tegyük fel tehát, hogy T nem Jaeger-fa. Ekkor belátjuk, hogy létezik egy olyan $T' \prec T$ feszítőfa, ami szintén a hiperfát realizálja. Mivel csak véges sok feszítőfa létezik, így elôbb-utóbb olyat kell kapnunk, ami már Jaeger-fa lesz.

Ha T nem Jaeger-fa, akkor a t  r  ja során létezik olyan nem-faél, amelyet először a rossz, smaragd végpontjánál   r  nk el. Legyen $\varepsilon = xy$ az el  s   ilyen   l (x a smaragd, y az ibolya csúcs). Vegyük be ε -t a fába, ekkor a $T \cup \{\varepsilon\}$ részgráf pontosan egy kört tartalmaz. Ebből t  r  lj  k ki az ε ibolya végpontja fel  li szomszédját, $\varepsilon' = yz$ -t, ekkor az   gy megkapott T' gráf a hiperfát realizáló feszítőfa lesz, hiszen az ibolya csúcsok foks  za nem változott T -hez képest.

Most belátják, hogy $T' \prec T$. Ha (x, ε) a T t  r  j  ban megelőzi (y, ε') -t és (z, ε') -t is, t  h  t ε' -t csak ε után látnánk, akkor ε lesz az el  s   különbség T   s T' között. Mivel $\varepsilon \in T'$, de a T t  r  j  ban a Jaeger-szabály megsértésével van kihagyva, ebből $T' \prec T$ következik.

Ha viszont ε' el  bb jelenik meg, mint ε , akkor ε' lesz az el  s   különbség. Ha ε' -t először az ibolya végpontja fel  l látják, akkor T' t  r  ja a Jaeger-szabály szerint hagyja ki, azaz $T' \prec T$ ismét. Az az eset pedig, hogy ε' -t először a smaragd végpontja fel  l látják nem lehetséges, mert ekkor egyrészét $(z, \varepsilon') <_T (x, \varepsilon)$ és $(z, \varepsilon') <_T (y, \varepsilon)$ lenne, hiszen ε' -t látják először, méghozzá a z , smaragd végpontjánál. M  sr  sz  t mivel x és y a $T - \varepsilon'$ különböző komponenseiben vannak,   gy a 2.14.-es lemma alapján $\varepsilon = xy$ a t  r  ban váló k  t megjelenése közül pontosan az egyiket fogjuk ε' k  t megjelenése között látni (a m  sik  t csak utánuk láthatjuk, hiszen (z, ε') mindk  t  t megelőzi). T  h  t ε -t először y fel  l fogjuk látni (hiszen x van a báziskomponensben, y pedig a másikban), ami az ibolya végpont. $\square$

2.20. Tétel. [3, Theorem 7.6.] Az E   s V színosztályokkal rendelkező G összefüggő páros gráfon tetszőleges szalagstruktúrát (illetve bázispontot és bázisélt) választva a G gy  kpolit  pj  ban, Q_G -ben a V -vágású Jaeger-fákhoz tartozó szimplexek a Q_G egy disszekcióját adják.

Bizonyítás. Mivel az előző lemma alapján minden hiperf  hoz tartozik legalább egy V -vágású Jaeger-fa,   gy a V -vágású Jaeger-f  k s  z  ma legalább annyi, mint a B_H halmaz hiperf  inak s  z  ma. Az 2.17.-es lemma alapján a V -vágású Jaeger-fákhoz tartozó maximális szimplexek belsőleg diszjunktak lesznek. Mivel minden maximális szimplex térfogata megegyezik, és Q_G térfogata éppen a hiperfák s  z  m  nak és az egységes szimplext  rfogatnak a szorzata,   gy ezek a szimplexek teljesen kitöltik Q_G -t. Más szóval, ezek a szimplexek a gyökpolitóp egy disszekcióját adják. $\square$

2.3. Disszekciók és triangul  ci  k

B  r az előbb bel  tj  t, hogy a Jaeger-f  k segítségével foks  zsorozat-bijekciók konstru  lhat  ak, önmagában mégsem magától értetődő, hogy ez érdemi előrelépést jelent, hiszen a Jaeger-f  k

meghatározása sem feltétlenül egyszerűbb feladat, mint közvetlenül egy bijekció előállítás. A helyzet ennél mégis jobb, ugyanis létezik egy algoritmus, amely hatékonyan állít elő ilyen fákat.

2.21. Definíció. [4, Definition 7.3.] Legyen f egy adott hiperfa E -n (vagy V -n). Az algoritmus minden időpillanatban egy aktuális csúcs-él párt és egy aktuális gráfot tart fenn. Kezdetben az aktuális gráf maga G , az aktuális csúcs b_0 , az aktuális él pedig b_0b_1 .

Egy lépés során, ha az aktuális csúcs $x \in E$, akkor megnézzük, hogy a G_c aktuális gráf és az xy aktuális él esetén az f vektor hiperfát határoz-e meg E -n (vagy V -n) a $G_c - xy$ gráfban. Ha igen, akkor a következő lépésben az aktuális gráf legyen $G_c - xy$, az aktuális csúcs-él pár pedig $(x, xy_{G_c}^+)$. Ha nem, akkor az aktuális gráf marad G_c , az aktuális csúcs-él pár pedig $(y, yx_{G_c}^+)$ lesz. Ha az aktuális csúcs $x \in V$, és az aktuális él xy , akkor a következő lépésben az aktuális gráf marad G_c , az aktuális csúcs-él pár pedig $(y, yx_{G_c}^+)$ lesz.

Az algoritmus akkor áll meg, amikor egy csúcs-él pár másodszor is aktuálissá válik. A kimenet a folyamat végén kapott aktuális gráf lesz.

Megjegyzés. Amennyiben a hiperfa E -n adott, a folyamatot $(ht : E, cut : E)$ Bernardi-folyamatnak nevezzük, ha a hiperfa V -n adott, akkor $(ht : V, cut : E)$ Bernardi-folyamatnak. Nyilvánvaló, hogy a szimmetria miatt értelmezhető a $(ht : V, cut : V)$ és a $(ht : E, cut : V)$ változat is.

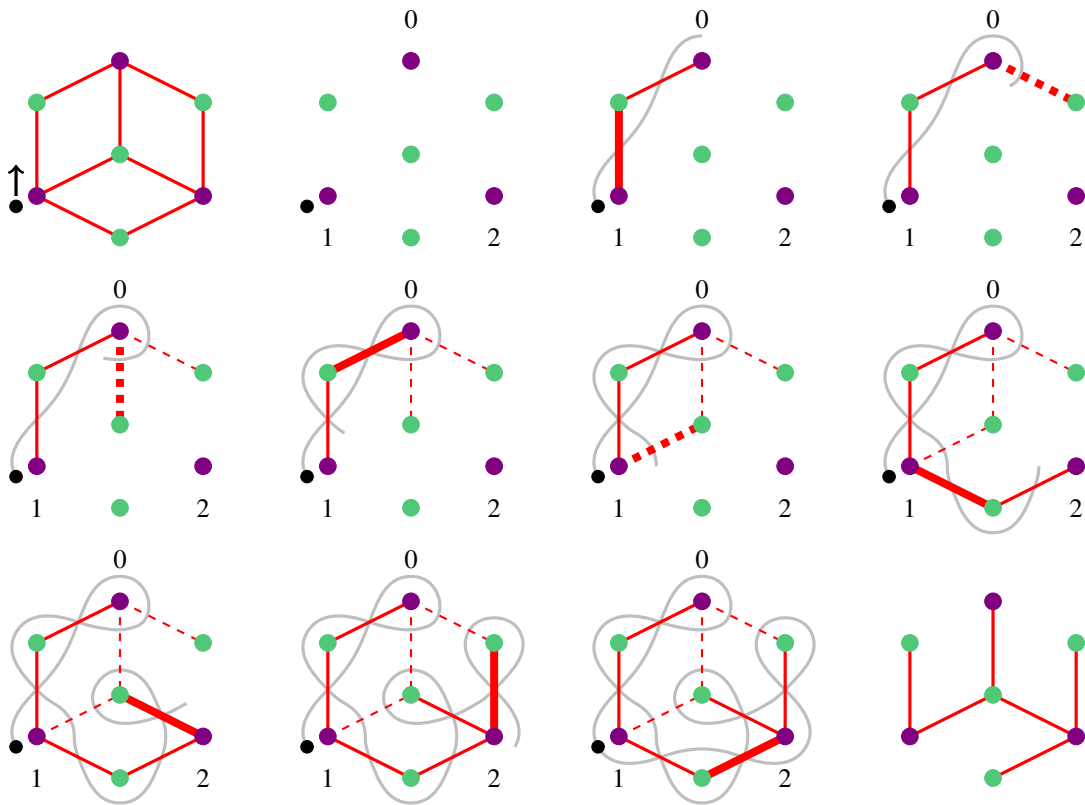
2.22. Példa. Legyen G az ábra első paneljén látható páros gráf, melyben négy smaragd csúcs alkotja az E színosztályt, három ibolya pedig a V -t. A szalagstruktúra úgy van megválasztva, hogy az ibolya csúcsoknál az élek az óramutató járásával megegyező sorrendben, a smaragd csúcsoknál ellenkező irányban követik egymást. A bal alsó ibolya csúcs a bázispont, a bázisél pedig a bal szélső függőleges él.

Az ibolya csúcsok fölé írt számok $(0, 1, 2)$ egy hiperfát határoznak meg V -n. A 2–11. panelek a $(ht : V, cut : V)$ Bernardi-folyamatot illusztrálják az előbb leírt bemenettel. Kezdetben csak a hiperfa adott, a folyamat pedig a bázispontnál indul.

Az első lépés során a bázisélt tekintjük aktuálisnak. A hiperfa szerint a bázispont foka $1 + 1 = 2$ kell legyen, ezért az ember azt várná, hogy a három kapcsolódó él közül az elsőt eltávolítjuk. Azonban, ha ezt megteszük, a megmaradó gráfban az alsó rombusz minden élére szükség lenne: a bal oldali kettő a bázispont fokának biztosításához, a jobb oldali kettő pedig a jobb oldali ibolya csúcs $2 + 1 = 3$ fokához. Ezért az algoritmus nem távolítja el a bázisélt, hanem bejárja azt, ami aztán a bal felső él bejárását is kikényszeríti.

A következő nyolc panel a hátralévő lépéseket mutatja. Minden lépésnél kiemelésre kerül az aktuális él. A szürke görbék segítenek követni a szalagstruktúra ciklikus sorrendjét. A megmaradt élekből álló részgráf – amely a bejárt élekkel megegyező – egy feszítőfát ad, amely a hiperfát realizálja.

Az ábra utolsó panelje ugyanazon hiperfán mutatja a $(ht : V, cut : E)$ Bernardi-folyamat eredményét. Ez szintén a hiperfát realizálja. (Most az első aktuális él nem a bázisélt, hanem a bal felső él, a bázisélt csak a második lépésben vizsgáljuk.)



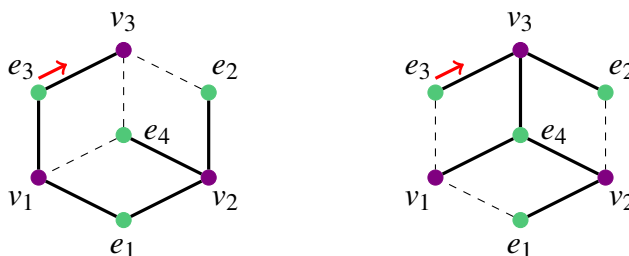
7. ábra. A Bernardi-algoritmus

A 2.20. tételben beláttuk, hogy egy páros gráf Jaeger-fáihoz tartozó szimplexek a gyökpolitóp egy disszekcióját adják. Ez a disszekció azonban nem feltétlenül trianguláció, azaz két szimplex metszete előfordulhat, hogy nem lesz oldala egyik szimplexnek sem.

2.23. Állítás. [4, Proposition 10.5.] Rögzített szalagstruktúra mellett a Jaeger-fák által meghatározott trianguláció létezése függhet a választott bázistól.

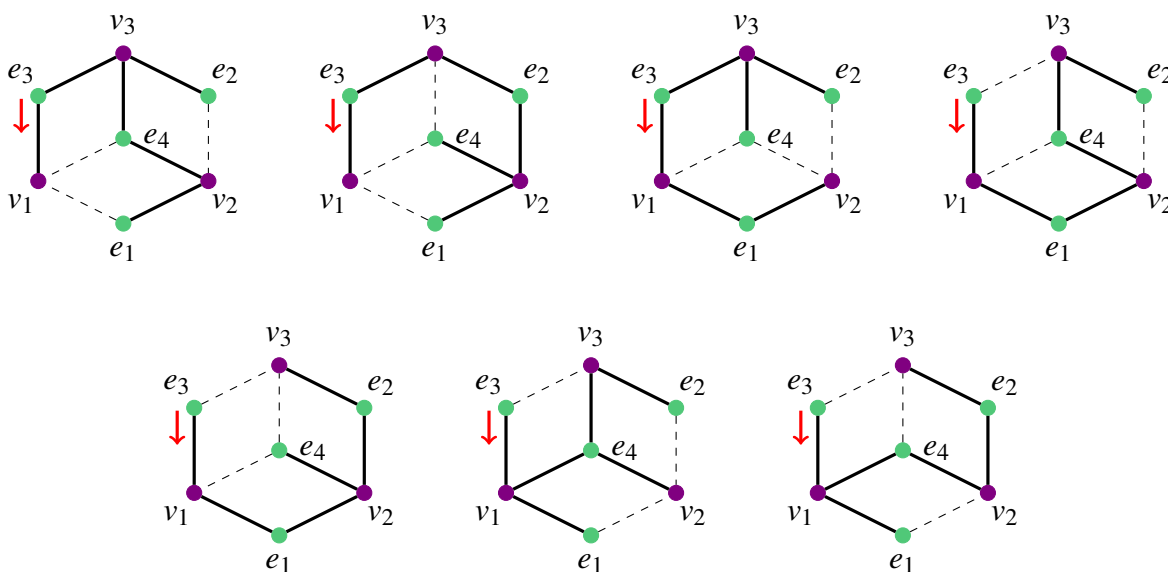
2.24. *Példa.* Tekintsük az alábbi ábrán látható gráfot. Legyen a szalagstruktúra olyan, hogy az óramutató járásával megegyezően halad a v_1 csúcs körül, és minden más csúcs körül ellentétesen.

Ha a bázispont az e_3 , és a bázisél az e_3v_3 , akkor disszekciót kapunk, hiszen mindkettő V-vágású Jaeger-fa lesz, amit a $(ht : V, cut : V)$ Bernardi-folyamat hoz létre a 120 és a 012 hiperfákhoz. Viszont nem kapunk triangulációt, mivel az ábra az 1.11.-es lemma szerint két egymással inkompatibilis fát mutat (a $v_1e_1v_2e_4$ kör megvalósítható a két fa élein alternálva).



8. ábra. Egy disszekció, ami nem trianguláció

Ezzel szemben könnyen ellenőrizhető, hogy ugyanezen szalagstruktúra választása mellett, ha a bázisél a e_3v_1 él, akkor a Jaeger-fák triangulációt adnak.



9. ábra. Egy triangulációt indukáló feszítőfa-halmaz

Mivel 7 különböző fokszámsorozat létezik a V csúcsokon, így 7 fára lesz szükség a bijekcióhoz. Ez a bijekció az alábbi párokat rendeli egymáshoz: 123 - 1122, 132 - 1221, 213 - 2121, 222 - 2112,

231 - 2211, 312 - 1113, 321 - 1212. A fák jelen esetben V -vágású Jaeger-fák, a $(ht : V, cut : V)$ Bernardi-folyamat eredményei, tehát disszekciót alkotnak, ám leellenőrizhető, hogy bármely két fa kompatibilis is, tehát valójában egy triangulációt kaptunk.

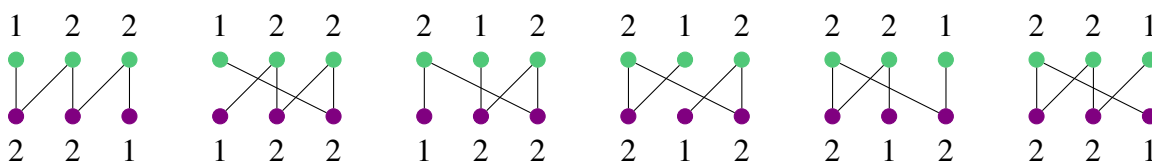
3. További kérdések

3.1. Bijekciók és fák

Egy bijekció feszítőfák által megvalósítható (fákkal realizálható), ha a bijekció által egymáshoz rendelt fokszámsorozat párok mindegyikéhez létezik G -nek olyan feszítőfája, ami épp ezt a két fokszámsorozatot veszi fel a két színosztályon. Ezek után felvetődhet a kérdés, hogy minden bijekció megvalósítható-e fákkal, illetve ha nem, akkor mely bijekciók azok, amik igen.

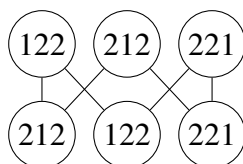
Az első kérdésre a válasz nem, és ritka gráfok esetén egészen könnyű ellenpéldát találni, ahol a fokszámsorozatok egy párba rendelésénél legalább az egyik párhoz nem létezik megfelelő fa.

3.1. *Példa.* A C_6 gráf esetében hat feszítőfa létezik (a hat élből egyet kell elhagyni), ami három-három különböző fokszámsorozatot vesz fel a fenti és a lenti színosztályokon. Jelen esetben ez ugyanaz a három: 122, 212, és 221.



10. ábra. A C_6 gráf feszítőfái

Viszont mindegyik fokszámsorozat csak két másikkal állítható párba fák által az ellenkező színosztályból, így az a bijekció, ami az 122-221, 212-122, 221-212 párokat rendeli egymáshoz, nem valósítható meg fákkal (itt egész speciálisan a párok egyike sem).



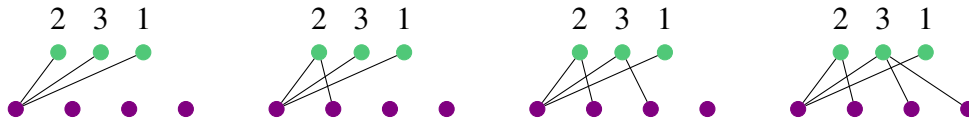
11. ábra. A fák által párba állítható fokszámsorozatok a C_6 gráfban

Általánosan tehát nem igaz, hogy bármely bijekció megvalósítható lenne fákkal, viszont bizonyos speciális gráfokra igaz lesz. Ennek belátásához először szükség lesz az alábbi lemmára.

3.2. Lemma. *Bármely $K_{m,n}$ teljes páros gráf esetén egy színosztályon bármely (feszítőfával realizálható) fokszámsorozathoz létezik olyan őt realizáló fa, amiben a színosztály minden csúcsa össze van kötve az ellenkező színosztály első csúcsával.*

Bizonyítás. Vegyünk egy fenti (m hosszú) fokszámsorozatot, és konstruáljuk hozzá megfelelő fát. A feszítőfának $m + n - 1$ éle lesz. Minden csúcs legalább 1 fokú, kössük tehát össze az összes fenti csúcsot az első lentivel (m él), majd a maradék $n - 1$ éllel a fenti fokszámkat kielégítve kössük be ebbe az összefüggő részbe az $n - 1$ lenti csúcsot, akiből még nem megy ki él. Ez megtehető, mert mivel a fenti fokszámsorozat egy feszítőfához tartozott, így a fokszámkok összege $m + n - 1$, és pont ennyi élt húzunk be. Másrészt a végeredmény összefüggő lesz, hiszen mindenki (legfeljebb 2 hosszú úton) elérhető lesz az első lenti csúcsból. $\square$

3.3. Példa. A $K_{3,4}$ gráf egy fával realizálható fenti fokszámsorozata a 231. Az ehhez konstruálható speciális fa előállításának lépései:



12. ábra. A 231 fokszámsorozathoz tartozó speciális fa konstruálása a $K_{3,4}$ gráfban

3.4. Állítás. Bármely $K_{m,n}$ teljes páros gráf esetén minden fokszámsorozat-bijekció megvalósítható feszítőfák által, azaz tetszőleges fenti és lenti fokszámsorozatot párba rendelve mindig található olyan feszítőfa, ami illeszkedik rájuk.

Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges fenti és lenti fokszámsorozatot, s_f -et és s_l -et. Valamelyikben kell legyen 1-es, ugyanis ha az egyikben nincs (ez legyen most s_f), akkor a másik színosztály bármely fokszámsorozatában kell legyen 1-es. Ez azért igaz, mert az s_f -hez tartozó fában legalább $2m$ él van (hiszen az m db fenti csúcs közt nincs 1 fokú), emiatt a fának legalább $2m + 1$ csúcsa kell legyen, tehát $n \geq m + 1$, azaz lenn több csúcs van, mint fenn. Ha létezne olyan feszítőfa, amiben lenn nincs 1-es, akkor ugyanígy érvelve arra jutnánk, hogy fenn van több csúcs, ami ellentmondás.

Tegyük fel tehát, hogy lenn van az 1-es. Ekkor s_l -hez létezik egy feszítőfa, F_l , ami őt realizálja. Az 1-eshez tartozó csúcs F_l -ben levél, így őt törölve a maradék gráf is fa lesz, ami a $K_{m,n-1}$ gráf egy feszítőfájának lenti fokszámsorozatát $s'_l = s_l - \{1\}$ -et realizálja.

Az s_f -hez is létezik egy őt realizáló fa, F_f , de itt a lemma alapján választhatjuk azt a speciális fajta fát, amiben bármely fenti csúcsból megy él az első lenti csúcsba. Ekkor F_f -ben lesz lenn 1 fokú csúcs, amíg legalább két lenti csúcs van (hiszen az első lenti csúcson kívül mindenki más 1 fokú). Egy lenti 1 fokút törölve a maradék gráf is fa lesz, ami realizálja a $K_{m,n-1}$ gráf egy

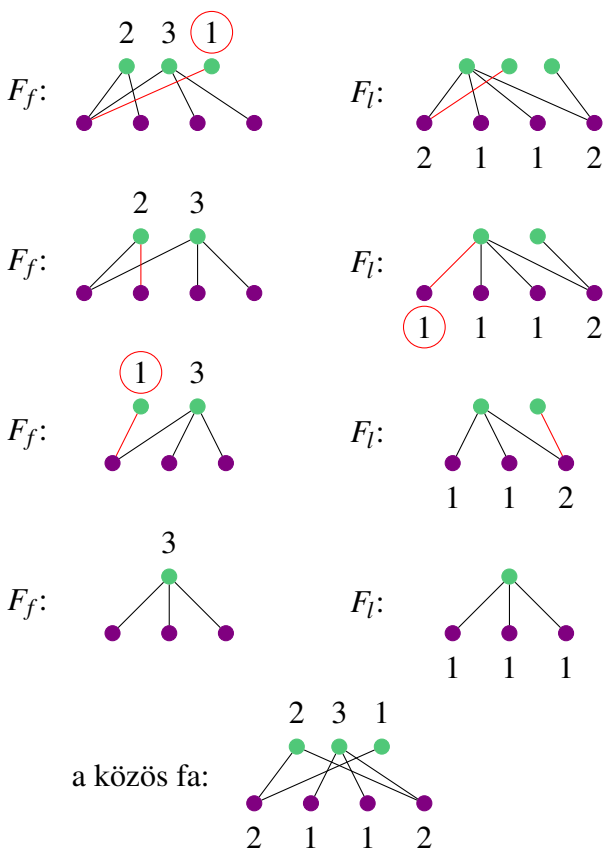
feszítőfájának fenti fokszámsorozatát s'_f -t, ami annyiban tér el s_f -től, hogy 1-gyel csökkent az egyik eleme (annak a csúcshoz megfelelő, aki az 1 fokú szomszédja volt).

Ha az így kapott két új fokszámsorozathoz, s'_l -höz és s'_f -höz létezik mindkettőjüket realizáló fa, akkor a lenn törölt 1 fokút összekötve a fenn 1-gyel csökkentett fokú csúccsal, az eredeti fokszámsorozatainkat, s_l -t és s_f -et realizáló feszítőfát kapunk.

Iteráljuk tehát az algoritmust, és egyesével hagyjuk el a csúcsokat, amíg a színosztályok egyikében (a másikon, mint ahonnan az aktuális 1 fokút kiválasztottuk) már csak egy csúcs marad. Ekkor összekötve őt az ellenkező színosztály minden csúcsával kapunk egy triviális fát, amit az iterációkon visszafele lépkedve kibővíthetünk az eredeti gráf egy megfelelő feszítőfájává. $\square$

3.5. *Példa.* A $K_{3,4}$ gráf egy fával realizálható fenti fokszámsorozata a 231 és egy lenti a 2112. A közös feszítőfa előállításának lépései:

(a fenti csúcsokat nevezzük sorban v_{11}, v_{12}, v_{13} -nak, a lentieket pedig $v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}$ -nek)



s_f -ben van 1-es, F_f -ben töröljük a csúcsát, a speciális alakú F_l -ből pedig egy fenti 1 fokú csúcsot törölünk, és megjegyezzük, hogy $v_{13}v_{21}$ él lesz a közös fában

s_l -ben van 1-es, F_l -ben töröljük a csúcsát, F_f -ben egy lenti 1 fokút $\rightarrow v_{11}v_{21}$ él lesz

s_f -ben van 1-es, F_f -ben töröljük a csúcsát, F_l -ben egy fenti 1 fokút $\rightarrow v_{11}v_{24}$ él lesz

mivel az egyik színosztályon már csak egy csúcs maradt, így egyetlen feszítőfa van

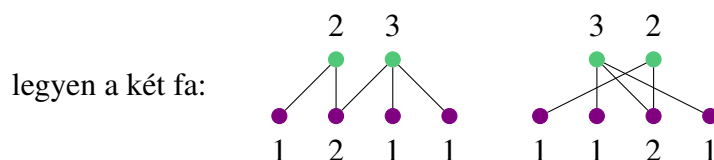
a megjegyzett éleket behúzva megkapjuk a közös feszítőfát

13. ábra. A 231 és a 2112 fokszámsorozatok közös feszítőfájának előállítása

3.2. Fás bijekciók és szimplexek

Az is érdekes kérdés továbbá, hogy egy fákkal megvalósítható bijekció esetén a feszítőfáknak megfelelő szimplexek vajon minden esetben belsőleg diszjunktak lesznek-e. A válasz szintén nemleges.

3.6. *Példa.* A $K_{2,4}$ gráfban (mivel teljes páros gráf) bármely bijekció megvalósítható fákkal. Tehát ha ellenpéldát keresünk, elég találnunk két különböző fenti-lenti fokszámsorozat párt úgy, hogy az őket realizáló fáknak megfelelő szimplexek metsszék egymást, azaz legyen közös belső pontjuk.



14. ábra. Két fa, amelyeknek megfelelő szimplexek belsőleg nem diszjunktak

A két vizsgált szimplex a gyökpolitóp faéleknek megfelelő csúcsainak konvex burka lesz. (A csúcsok koordinátái sorban v_{11} -nek, v_{12} -nek, v_{21} -nek, v_{22} -nek, v_{23} -nak, és v_{24} -nek felelnek meg.) A szimplex egy pontja akkor lesz belső pont, ha a csúcsok konvex kombinációjaként való felírásában minden együttható szigorúan nagyobb, mint 0.

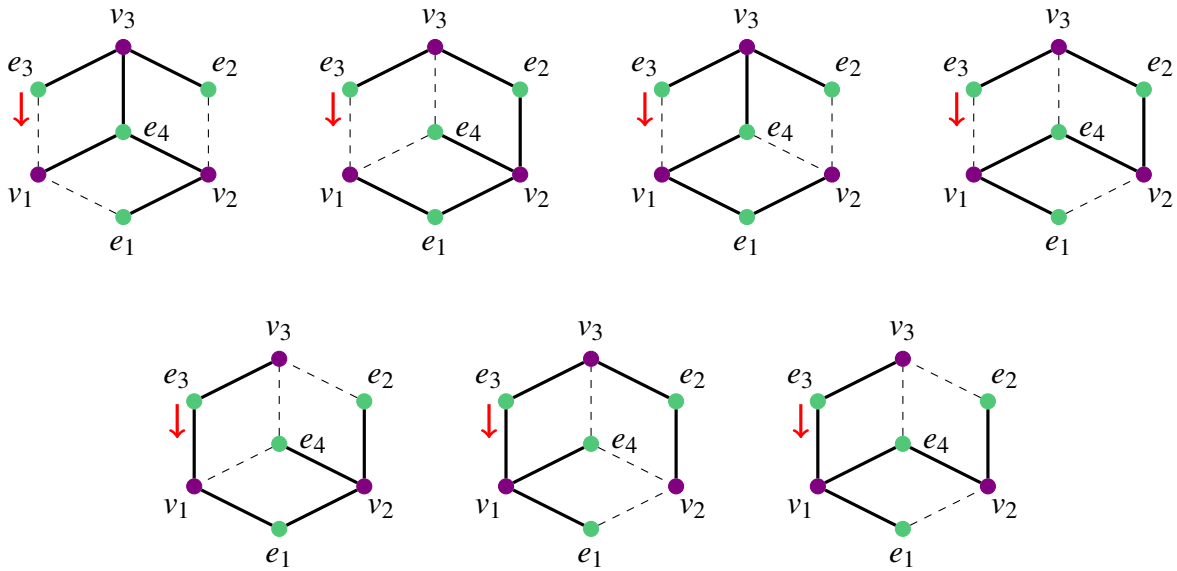
eh.	csúcs (1. fa)	eh.	csúcs (2. fa)
0,4	(1,0,1,0,0,0)	0,2	(1,0,0,0,0,1)
0,1	(1,0,0,1,0,0)	0,2	(1,0,0,1,0,0)
0,1	(0,1,0,1,0,0)	0,1	(1,0,0,0,1,0)
0,2	(0,1,0,0,1,0)	0,1	(0,1,0,0,1,0)
0,2	(0,1,0,0,0,1)	0,4	(0,1,1,0,0,0)

Ha a második és negyedik oszlop pontjainak az első és harmadik oszlop együtthatóival (eh.) vett konvex kombinációját nézzük, az ugyanaz a pont, a $(0.5, 0.5, 0.4, 0.2, 0.2, 0.2)$ pont lesz, ami így mindkét szimplexnek belső pontja lesz, tehát nem lesznek belsőleg diszjunktak.

Noha az előző példa azt mutatja, hogy egy fákkal realizálható bijekció esetében a fáknak megfelelő szimplexek nem szükségszerűen adják a gyökpolitóp egy belsőleg diszjunkt felbontását, mégis, mivel sok esetben ugyanaz a bijekció több feszítőfahalmazból is megkapható, felmerül a kérdés, hogy vajon minden fákkal megvalósítható bijekcióhoz létezik-e trianguláció, amelyből ez a bijekció származtatható. A válasz erre is nemleges: léteznek olyan bijekciók, amelyek semmilyen triangulációból nem származtathatók, jöllehet egy megfelelő, nem trianguláció típusú disszekcióból igen.

3.7. *Példa.* Az alábbi ábra a $(ht : V, cut : E)$ Bernardi-folyamat eredménye, ahol a szalagstruktúra olyan, hogy a v_3 és e_4 csúcsok körül óramutató járásával megegyező, a többi csúcsonál pedig ellentétes irányban halad. Legyen a bázispont az e_3 , és a bázisél az e_3v_1 .

Ez a bijekció az 123 - 1113, 132 - 2211, 213 - 2112, 222 - 1212, 231 - 2121, 312 - 1221, 321 - 1122 párokat rendeli egymáshoz. Mivel a 222 fokszámsorozat kivételével a bijekció által össze-rendelt párok mindegyikéhez egyetlen őket realizáló feszítőfa létezik, így mivel például az első két fa nem kompatibilis (a $v_1e_1v_2e_4$ kör megvalósítható a két fa élein alternálva), triangulációból nem lehet megkapni ezt a bijekciót.



15. ábra. Egy bijekció, ami megkapható disszekcióból, de triangulációból nem

Hivatkozások

- [1] KÁLMÁN, T. A version of Tutte’s polynomial for hypergraphs. *Advances in Mathematics* 244 (2013), 823–873.
- [2] KÁLMÁN, T., AND POSTNIKOV, A. Root polytopes, Tutte polynomials, and a duality theorem for bipartite graphs. *Proceedings of the London Mathematical Society* 114, 3 (2017), 561–588.
- [3] KÁLMÁN, T., AND TÓTHMÉRÉSZ, L. Hypergraph polynomials and the Bernardi process. *Algebraic Combinatorics* 3, 5 (2020), 1099–1139.
- [4] KÁLMÁN, T., AND TÓTHMÉRÉSZ, L. Root polytopes and Jaeger-type dissections for directed graphs. *Mathematika* 68, 4 (2022), 1176–1220.
- [5] POSTNIKOV, A. Permutohedra, associahedra, and beyond. *International Mathematics Research Notices* 2009, 6 (2009), 1026–1106.

MI alapú eszközök használatáról szóló nyilatkozat

Alulírott Gurin Tünde nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
LaTeX szintaktika	GPT-4o	teljes dolgozat	Formázással kapcsolatos parancsok
Nyelvhelyesség ellenőrzése	Writefull	teljes dolgozat	-

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.