

Homológia és leszámlálás

Szakdolgozat

Készítette: Jörg Áron

Matematika BSc 3

Témavezető: Dr. Fehér László

ELTE TTK, Analízis Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

1. Előismeretek	2
2. Homológia	5
3. Kohomológia	32
Irodalomjegyzék	39

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik szakdolgozatom elkészítésében bármilyen módon segítségemre voltak.

Mindenekelőtt hálával tartozom témavezetőmnek, Fehér László tanárúrnak, aki a kezdetekben előadásaival felkeltette érdeklődésem a terület iránt, majd szakértelmével, útmutatásával és türelmével végigkíserte munkámat. Értékes tanácsai és építő jellegű visszajelzései nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre ilyen formában.

Szeretném megköszönni Györgypál Gergőnek is, akivel ennek a témának a nagyrészét együtt dolgoztuk fel.

Végezetül köszönöm Bán-Szabó Áronnak, aki végigkíserte velem az alapszak minden nehézségét, és örömet.

1. fejezet

Előismeretek

Kategória elmélet

Kategória

Egy *kategória* $\mathcal{C}$ két adatból áll:

- *Objektumok* halmaza, amit $\text{Ob}(\mathcal{C})$ -vel jelölünk.
- Valamint minden objektum-párhoz $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ hozzárendeljük a közötti morfizmusok halmazát, vagyis $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ -t.

Ezeket a morfizmusokat gyakran $f : A \rightarrow B$ formában írjuk. A kategóriára az alábbi feltételek teljesülnek:

- **Kompozíció:** Ha $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ és $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, akkor létezik az f és g kompozíciója: $g \circ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$.
- **Asszociativitás:** Ha $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$, akkor $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- **Identitás:** Minden objektumhoz A létezik egy identitás morfizmus $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$, amelyre $f \circ \text{id}_A = f$ és $\text{id}_B \circ f = f$ minden $f : A \rightarrow B$ esetén.

A legegyszerűbb példák kategóriákra, ha objektumoknak tetszőleges halmazokat, morfizmusokra pedig a közöttük menő függvényeket vesszük. Az Abel-csoportok is alkotják az objektumok halmazát, ekkor természetesen a morfizmusok a csoporthomomorfizmusok lesznek. Egy K test feletti vektorterek, illetve a közöttük menő lineáris leképezések szintén példa kategóriára. Végezetül pedig a topologikus terek kiegészítve közöttük menő folytonos leképezések halmazával megintcsak egy kategóriát definiál.

Funktorok

Egy *funktor* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ két leképezésből áll:

- Objektumok leképezése: $F(A) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ minden $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ -re.
- Morfizmusok leképezése: $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ minden $f : A \rightarrow B$ -re.

A funktor a kompozíciót és identitást megtartja:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

Funktorok: kovariáns és kontravariáns

Legyenek $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ kategóriák. A közöttük menő leképezéseket két osztályba soroljuk:

- **Kovariáns funktor:** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ leképezés, amely teljesíti, hogy
 - minden $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ objektumhoz hozzárendel egy $F(A) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ objektumot,
 - minden $f : A \rightarrow B$ morfizmushoz hozzárendel egy $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ morfizmust

úgy, hogy az megtartja az identitást, illetve a kompozíciót:

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}, \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

- **Kontravariáns funktor:** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ leképezés, amely teljesíti, hogy:
 - minden $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ objektumhoz hozzárendel egy $F(A) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ objektumot,
 - minden $f : A \rightarrow B$ morfizmushoz hozzárendel egy $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$ morfizmust,

úgy, hogy az megtartja az identitást, illetve a kompozíciót:

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}, \quad F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

A kovariáns funktor „megtartja” a morfizmusok irányát és sorrendjét, míg a kontravariáns „megfordítja” azt. A legtöbb esetben, ha csak „funktor” mondunk, akkor kovariánsat értünk alatta.

Tenzorszorzat Abel-csoportokon

1. Definíció. A, B Abel csoportok $A \otimes B$ tenzorszorzatán az $a \otimes b : a \in A, b \in B$ alakú elemek Abel csoportját értjük, amikre teljesülnek az alábbi "disztributivitásra emléktető" azonosságok:

- $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$
- $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$

Ezekből már következik, hogy a neutrális elem $0 \otimes 0 = a \otimes 0 = 0 \otimes b$, illetve $-(a \otimes b) = -a \otimes b = a \otimes (-b)$.

A definícióból adódó legfontosabb tulajdonságai a tenzorszorzatnak a következők:

1. $A \otimes B = B \otimes A$
2. $(\bigoplus_i A_i) \otimes B = \bigoplus_i (A_i \otimes B)$
3. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$
4. $\mathbb{Z} \otimes A = A$
5. $\mathbb{Z}_n \otimes A = A/nA$
6. Egy $f : A \rightarrow A'$, és $g : B \rightarrow B'$ homomorfizmus-pár indukál egy $f \otimes g : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$ homomorfizmust: $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$
7. Egy $\phi : A \times B \rightarrow C$ bilineáris leképezés indukál egy $\bar{\phi} : A \otimes B \rightarrow C$ homomorfizmust, amire $\phi(a, b) = \bar{\phi}(a \otimes b)$

Mivel tudjuk, hogy bármilyen végesen generált Abel-csoport, G előáll, mint

$$G = \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/q_m\mathbb{Z},$$

ahol n a csoport rendje, q_i -k pedig nem feltétlenül különböző, prím-hatványok, ezért az 1., 2., 4., 5. tulajdonságokat felhasználva bármilyen végesen generált Abel-csoportok tenzorszorzata szisztematikusan kiszámítható.

2. fejezet

Homológia

Szimpleciális homológia

2. Definíció. Legyen $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ a "csúcsok halmaza", és $\Lambda \subset \mathcal{P}(V)$. Ekkor a (V, Λ) párt szimpleciális komplexusnak nevezzük, amennyiben Λ teljesíti:

$$A \in \Lambda, B \subset A \setminus \emptyset \rightarrow A \in \Lambda,$$

és $V = \bigcup \Lambda$

Λ azon elemeit, melyek $n + 1$ csúcsot tartalmaznak (hiszen ezek valójában a V részhalmazai) n -lapoknak nevezzük. Fontos, hogy egy n -lap bármely csúcsának elhagyása indukál egy $n - 1$ -lapot (ez mindig igaz Λ leszálló tulajdonsága miatt). A halmazelméleti szemlélet után azonban szeretnénk ezeket a szimpleciális komplexusokat topológikus terekként kezelni.

3. Definíció. *Standard n -szimplex-nek* nevezzük az $\mathbb{R}^{n+1}$ -beli konvex burkát azon $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ pontoknak, melyekre

$$v_i \geq 0, \sum_{i=0}^n v_i = 1$$

.

A standard n -szimplexeket a konvenciónak megfelelően Δ^n -nel jelöljük.

4. Definíció. Legyen adott V csúcshalmaz mellett $\lambda \in \Lambda$, ekkor

$$\Delta_\lambda := \left\{ \sum_{v \in \lambda} t_i v_i : 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{v \in \lambda} t_i = 1 \right\}$$

egy a csúcsok által generált (valós) vektortér részhalmaza; és Δ realizációjának hívjuk az altértopológiával ellátott

$$R(\Delta) := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Delta_\lambda$$

$\mathbb{R}^{|V|-1}$ részhalmazt.

Ha az $R(\Lambda) \simeq X$, ahol X egy tetszőleges topológikus tér, akkor magát a homeomorfizmust az X tér triangulációjának hívjuk.

Most miután a halmazelméleti definíciónak topológiai szemléletet adtunk, a következő lépésként szeretnénk algebrát csinálni a szimpliciális komplexusok halmazán.

5. Definíció. Λ n -láncainak nevezzük az n -lapok formális összegeit, és n -lánccsoportnak a

$$C_n(\Lambda) := \left\{ \sum_{f \in \Lambda_n} n_f f : n_f \in \mathbb{Z} \right\}$$

generált, szabad Abel-csoportot.

Ha fel szeretnénk tüntetni a szimpliciális komplexus csúcsait, akkor a $[v_0, \dots, v_n]$ jelölés használatos. A csúcsok indexelése eleve indukál egy rendezést rajtuk. Amikor egy adott $n-1$ -szimplexre egy n -szimplex lapjaként gondolunk, akkor erre a "származtatásra" az úgynevezett kalap operátorral hivatkozunk: $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, vagyis hogy a $[v_0, \dots, v_n]$ n -szimplex v_i pontjának elhagyásával keletkezett lap. Nyilván ekkor a csúcsok rendezése is öröklődik, azokat nagyság szerint újraindexeljük.

6. Definíció. Határleképezésnek hívjuk a lapokon definiált

$$\partial_n[v_0, \dots, v_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

leképezés $\partial_n : C_n(\Lambda) \rightarrow C_{n-1}(\Lambda)$ lineáris kiterjesztését.

1. Lemma. A határ határa üres: $\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

Bizonyítás. Egyszerűen kibontva definíció szerint egy tetszőleges $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ n -lapra:

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n], \quad \text{és így}$$

$$\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] + \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n].$$

□

Homológia-csoportok

7. Definíció. A $C = (C_n, \partial_n)$ sorozat lánckomplexus, ha félig egzakt, vagyis teljesül a $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ azonosság. A C sorozat azonosítható a $\bigoplus C_n$ gradált Abel-csoporttal, C_i -k a grádicsok tehát.

Ezen a C gradált Abel-csoporton szintenként faktorizálva jutunk el a homológia-csoport definíciójához.

8. Definíció. A $H_n(C) := \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$ faktorcsoporthoz a C lánckomplexus n -edik homológia-csoportja.

A határleképezés magjának elemeit *ciklusoknak*, képeit pedig *határoknak* nevezzük. Minden határ elem előáll tehát $\partial_{n+1}z$ alakban (megfelelő n -re), 1 miatt pedig $\partial_n\partial_{n+1}z = 0$, vagyis $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\partial_n)$, tehát a homológiacsoporthoz jól definiáltak.

Igazak tehát az alábbi összefüggések:

$$\text{rank}(C_n) = \text{rank}(\text{Ker}(\partial_n)) + \text{rank}(\text{Im}(\partial_n))$$

$$\text{rank}(H_n) = \text{rank}(\text{Ker}(\partial_n)) - \text{rank}(\text{Im}(\partial_{n+1})),$$

$$\text{amiből } \sum (-1)^n \text{rank}(C_n) = \sum (-1)^n \text{rank}(H_n)$$

9. Definíció. Legyen adva egy X topológikus tér. Erre definiálható egy Δ -komplexus struktúra, ami $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ folytonos leképezések családja, melyek kielégítik az alábbi feltételeket:

- $\sigma_\alpha|_{\text{int}\Delta^n}$ megszorítás injektív, és együtt lefedik X -et.
- σ_α megszorítása Δ^n bármely lapjára egy $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \rightarrow X$ leképezés.
- $A \subset X$ nyílt részhalmaz, akkor és csak akkor ha minden $\sigma_\alpha^{-1}(A) \subset \Delta^n$ ősképp nyílt részhalmaz.

Ezután definiálhatóak bármely X topológikus térhez a $\Delta_n(X)$ szabad Abel-csoportok

Szinguláris homológia

Egy újabb absztrakciót jelenthet az a megközelítés, ha a szimpliciális komplexusok helyett a standard n -szimplex egy adott X topológikus térbe menő folytonos leképezéseinek halmazán akarunk homológia elméletet készíteni.

10. Definíció. *Bármely folytonos leképezését Δ^n -nek egy topológikus M térbe az X tér egy szinguláris n -szimplexének nevezzük.*

Itt is definiáljuk tetszőleges X topológikus térhez tartozó $C_n(X)$ láncsoportokat (jelölés ugyanaz, mint a szimpliciális esetben) úgy, mint a szinguláris n -szimplexek által generált szabad Abel-csoportot.

Adva van Δ^{n-1} -nek egy lineáris beágyazása Δ^n -be a

$$\phi_i(v_0, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}) = (v_0, \dots, v_i, 0, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

formában. Ezzel, ha van már egy $\sigma : \Delta^n \rightarrow M$ szinguláris szimplex, akkor az automatikusan indukálja a $\sigma \circ \phi_i : \Delta^{n-1} \rightarrow M$ leképezést, amit a σ i -edik lapjának hívunk.

Határleképezésen most is a szinguláris szimplexeken a

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\sigma \circ \phi_i]$$

képlettel definiált, majd lineárisan kiterjesztett $\partial : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ homomorfizmust értünk.

Ekkor is természetesen teljesül a 1h lemma, "határ határa üres" állítása. Ezért az előzőekhez hasonlóan most is fel tudunk írni egy félig egzakt sorozatot a szinguláris láncok

csoportjain:

$$\dots \rightarrow C_n(M; R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(M; R) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(M; R) \rightarrow 0;$$

A félig egzaktság miatt $\text{Ker}(\partial_{n-1})$ faktorizálható $\text{Im}(\partial_n)$ -nel. Így most is eljutottunk a homológia csoportokig, mint a $H_n(X) := \text{Ker}(\partial_{n-1}) / \text{Im}(\partial_n)$ faktorcsoporthoz.

1. Tétel. *Ha X topológikus tér triangulálható, akkor rajta (az azonos szintű) szimpliciális, illetve szinguláris homológia megegyeznek.*

Homológia alaptulajdonságai

Nézzük mi történik egy X topológikus téren definiált homológiacsoporthoz, ha azokat "keresztülhúzzuk" egy $f : X \rightarrow Y$ folytonos leképezésen. Vehetjük minden $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ szinguláris n -szimplex f szerinti $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$ képet, ami már a $C_n(Y)$ láncsoport egy eleme.

$$\dots @>\partial_{n+1}^L>> L_n @>\partial_n^L>> L_{n-1} @>\partial_{n-1}^L>> \dots @. @V\alpha_n VV @V\alpha_{n-1} VV \dots @>\partial_{n+1}^M>> M_n @>\dots>>$$

Természetesen merül fel a kérdés, hogy mivan, ha az X , f szerinti képét visszahúzzuk Y -ről egy $g : Y \rightarrow X$ folytonos leképezés mentén. A legszebb eset nyilván az, ha X és Y homotóp ekvivalensek. Igaz a következő tétel:

2. Tétel. *Homotóp ekvivalens terek megfelelő homológia csoportjai izomorfak.*

Bizonyítás. Bevezetőben tárgyalt módon indukál tetszőleges $f : X \rightarrow Y$ leképezés a két tér homológia csoportjai közötti homomorfizmust, $f^* : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$, ahol

$$f^*(\sigma) = f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y.$$

Minden probléma nélkül f^* lineárisan kiterjeszthető:

$$f^*\left(\sum_i n_i \sigma_i\right) = \sum_i n_i f(\sigma_i) = \sum_i n_i f^*(\sigma_i).$$

A linearitás miatt az alábbi diagram kommutál minden n -re:

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \rightarrow & C_n(X, R) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X, R) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\ \dots & \rightarrow & C_n(Y, R) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(Y, R) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Vagyis az indukált homomorfizmus határt határba, és ciklust ciklusba visz. Definiálható tehát $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, a következő hozzárendeléssel:

$$f_*([\sum_i n_i \sigma_i]) := \sum_i n_i f^*(\sigma_i) / \text{Ker}(\partial_n(f^*)) = f^*(\sum_i n_i \sigma_i) / f^*(\text{Ker}(\partial_n))$$

Triviális, hogy az identitás leképezés által indukált homomorfizmus identitás marad a szinguláris láncsoportokon és a homológia csoportokon. Az is nyilvánvaló, hogy $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ esetén

$$(f \circ g)^*(\sigma_X) = f \circ g \circ \sigma_X(\Delta^n) = f \circ g^*(\sigma_X) = f^* \circ g^*(\sigma_X)$$

igaz minden $\sigma_X \in C_n(X)$ szinguláris szimplexre, és a lineáris kiterjesztés is kompatibilis a kompozícióval, ezért $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$.

Ha igaz lenne, hogy homotóp leképezések ugyanazt a homomorfizmust indukálják a homológia csoportokon, akkor készen lennénk a bizonyítással, hiszen feltéve, hogy X és Y homotóp ekvivalensek:

$$\text{Id}_X \cong f \circ g : X \rightarrow X, \text{Id}_Y \cong g \circ f : Y \rightarrow Y,$$

akkor $(f \circ g)_*$ izomorfizmus a $H_n(X)$ homológiacsoportokon, lévén homotópak az identitással, de ekkor szükségképpen az $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ homomorfizmus is, hiszen az előbbi keresztülhúzható rajta:

$$\begin{array}{ccc} & H_n(Y, R) & \\ f^* \nearrow & & \searrow g^* \\ H_n(X, R) & \xrightarrow{(f \circ g)^*} & H_n(X, R) \end{array}$$

3. Tétel. Legyenek $f, g : X \rightarrow Y$ homotópok, ekkor $f_* = g_* : H_n(X, R) \rightarrow H_n(Y, R)$.

Bizonyítás. (vázlatos) Először is definiáljuk a $\Delta^n \times I$ egy felosztását, ahol az alsó lap,

vagyis $\Delta^n \times 0 = [v_0, \dots, v_n]$, és a felső lap, $\Delta^n \times 1 = [w_0, \dots, w_n]$, ahol a $\pi : \Delta^n \times I \rightarrow \Delta$ vetítésnél $w_i \in \pi^{-1}(\pi(v_i))$.

A felosztást egy algoritmussal definiáljuk, ahol a $[v_0, \dots, v_n]$ lapból eljutunk a $[w_0, \dots, w_n]$ lapig úgy, hogy n -től haladva egyesével átcseréljük a v_i "koordinátát" w_i -re, tehát:

$$[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n] \rightarrow [v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n].$$

Ez azért nagyon hatásos algoritmus, mert az egymás után következő $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$, illetve $[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n]$ n -szimplexek a $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ $n+1$ -szimplex határában vannak. Továbbá

$$\Delta^n \times I = \bigcup_{i=1}^{n-1} [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \cup [v_0, w_0, \dots, w_n] \cup [v_0, \dots, v_n, w_n],$$

ahol ezen $n+1$ -szimplexek a $[v_0, \dots, v_{i-1}, w_i, \dots, w_n]$ alakú szimplexek mentén "ragadnak össze".

Feltéve tehát, hogy $f, g : X \rightarrow Y$ leképezések között létezik egy $F : X \times I \rightarrow Y$ homotópia, minden $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ szinguláris n -szimplex továbbhúzható Y egy szinguláris $n+1$ -szimplexére az $F(\sigma \times I) : \Delta^n \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$ kompozícióon definiált

$$P(\sigma) := \sum_i (-1)^i F \circ \sigma|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$$

prizmaoperátor segítségével.

Ezen a prizmaoperátoron nézzük a határleképezést:

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) &= \sum_{i \geq j} (-1)^j (-1)^i F \circ \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} + \\ &\quad \sum_{i \leq j} (-1)^{j+1} (-1)^i F \circ \sigma|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]}, \end{aligned}$$

a két szummában $i = j$ esetén ugyanazok a tagok szerepelnek ellentétes előjellel, kivéve a $[\hat{v}_0, w_0, \dots, w_n]$, és a $[v_0, \dots, v_n, \hat{w}_n]$ tagokat, amik pontosan $g \circ \sigma = g^*$, illetve $-f \circ \sigma = -f^*$. Amikor pedig $i \neq j$, akkor $-P\partial(\sigma)$ -t kapunk, hiszen:

$$P\partial(\sigma) = \sum_{i>j} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ \sigma [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n + \\ \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j F \circ \sigma [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]$$

Vagyis azt kaptuk, hogy

$$\partial P = g^* - f^* - P\partial.$$

És ezzel készen is vagyunk, hiszen választva adott $\alpha \in C_n(X)$ -re szeretnénk belátni, hogy abban az esetben, ha ez az α egy ciklus, akkor $f^*(\alpha)$, illetve $g^*(\alpha)$ csak határban tér el, ugyanis pontosan ekkor reprezentálja α ugyanazt a homológia osztályt f_* -ban, és g_* -ban is. De ez teljesül is, hiszen $g^*(\alpha) - f^*(\alpha) = \partial P(\alpha) - P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha) + 0$, tehát tényleg a különbség csak egy határbeli elem. $\square$

Relatív homológia

Legyen X és A térpár, vagyis topológikus terek úgy, hogy X tartalmazza A -t. Létezik tehát egy $A \xrightarrow{i} M$ inklúzió. Komponálva $\sigma_A : \Delta^n \rightarrow A$ szinguláris szimplex-szel $i^* := i \circ \sigma_A$ indukál egy $C_n(A) \xrightarrow{i^*} C_n(M)$ inklúziót.

11. Definíció. A $C_n(X; A) := C_n(X)/C_n(A)$ faktort az (X, A) térpár relatív lánccsoportjának hívjuk.

Ezzel természetesen indukálódnak a relatív lánccsoportok közötti relatív határleképezések, illetve relatív homológia csoportok.

Nyilvánvalóan a $C_n(X)/C_n(A)$ relatív lánccsoport $C_n(X)$ részcsoportja, azonban azért nem szerencsés erre így gondolni, mert a határleképezés nem feltétlen viszi egy-másba ezeket a részcsoportokat.

Erre egy triviális példa $X = S^1 \cong I/0 \sim 1$, illetve $A = 0 \in S^1$. Ekkor nyilván $C_1(X) = C_1(X)/C_1(A)$, hiszen $C_1(A) = 0$. Tekintsük most azokat a $\Delta \in C_1(X)$ szinguláris 1-szimplexeket, amelyek $[0, 1]$ -et nem szürjektíven képezik S^1 -re, de $\Delta(0) = 0$. Ezekre $\partial\Delta = \Delta(1) - 0$, ami a $C_0(X)/C_0(A)$ faktorcsoporthban $\Delta(1)$.

4. Tétel. Minden (X, A) térpár relatív homológia csoportja beilleszthető az alábbi alakú homológia csoportok közti egzakt sorba:

$$\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Bizonyítás. Legyen $j : C_n(X) \rightarrow C_n(X, A)$ a faktorleképezés. Ezzel a

$$0 \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{i^*} C_n(X) \xrightarrow{j} 0$$

sorozat rövid egzakt. Minden szinten hattatva a határleképezést egzakt sorozatok kommutatív diagramját kapjuk:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i} & C_n(X) & \xrightarrow{j} & C_n(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \xrightarrow{i} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{j} & C_{n-1}(X, A) \longrightarrow 0 \end{array} .$$

Ez "elforgatva" beágyazódik egzakt sorozatok még nagyobb kommutatív diagramjába:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & A_n & \xrightarrow{\partial} & A_{n-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\ \dots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\ \dots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Elhagytuk a $C_n(X)$, $C_n(A)$, $C_n(X, A)$ jelöléseket, mert igaz az általános állítás is, hogy a fenti kommutatív diagram indukál a homológia csoportokon is egy hosszú egzakt sorozatot:

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i^*} H_n(B) \xrightarrow{j^*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots ,$$

ahol a $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ leképezés még definiálásra vár.

Vegyük először is észre, hogy minden $c \in C_n$ ciklusnak van j szerinti ősképe B_n -ben, jelöljük ezt b -vel. A diagram kommutativitása miatt $j \circ \partial(b) = \partial \circ j(b) = \partial(c) = 0$, tehát

$\partial(b) \in B_{n-1}$ benne van $\text{Ker}(j)$ -ben.

A (vertikális) egzaktság miatt pedig $\partial(b) \in \text{Im}(i)$, vagyis egyértelműen létezik $a \in A_{n-1}$, amire $i(a) = \partial(b)$. Egyfelől megint jobbra tolva $\partial(a) = 0$, mert a kommutativitása miatt $i \circ \partial(a) = \partial \circ i(a) = \partial \circ \partial(b) = 0$, és i injektív. Legyen tehát $\partial[c] = [a]$. Nem nehéz a jóldefiniáltságot ellenőrizni, de mi ettől most eltekintünk.

A $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ leképezés a homológiacsoporthoz valóban homomorfizmus, hiszen $\partial[c_1] = [a_1]$ és $\partial[c_2] = [a_2]$ választással, ahol legyenek továbbá b_1 , illetve b_2 a ∂ leképezés definíciójában szereplő B -beli elemek a_1, c_1 , illetve a_2, c_2 "között"; akkor $j(b_1 + b_2) = j(b_1) + j(b_2) = c_1 + c_2$, és $i(a_1 + a_2) = i(a_1) + i(a_2) = \partial b_1 + \partial b_2 = \partial(b_1 + b_2)$ miatt $\partial([c_1] + [c_2]) = [a_1] + [a_2]$

Mostmár direktben rátérhetünk annak bizonyítására, hogy a

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i^*} H_n(B) \xrightarrow{j^*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i^*} H_{n-1}(B) \rightarrow \cdots$$

homológiacsoporthoz sora egzakt.

Először is a

$$\text{Im } i^* \subset \text{Ker } j^*$$

$$\text{Im } j^* \subset \text{Ker } \partial$$

$$\text{Im } \partial \subset \text{Ker } i^*$$

tartalmazások triviálisak.

A $\text{Ker } j^* \subset \text{Im } i^*$ tartalmazáshoz vegyünk egy $\text{Ker } j^*$ -beli homológia osztály reprezentánsát, $b \in B_n$ -t, ami ugye ciklus $j(b)$ határral. Legyen $\hat{c} \in C_{n+1}$, amire $\partial \hat{c} = j(b)$. j szürjektivitása miatt $\exists \hat{b} \in B_{n+1} : \partial \hat{b} = \hat{c}$. Ekkor

$$j(b - \partial \hat{b}) = j(b) - j(\partial \hat{b}) = j(b) - \partial(j(\hat{b})) = j(b) - \partial \hat{c} = j(b) - j(b) = 0.$$

Emiatt $\exists a \in A_n$, hogy $b - \partial \hat{b} = i(a)$. Az $i(\partial a) = \partial(i(a)) = \partial(b - \partial \hat{b}) = \partial b = 0$ összefüggés mutatja, hogy a ciklus, hiszen i injektív. De akkor

$$i^*[a] = [b - \partial \hat{b}] = [b],$$

és ezt akartuk megmutatni.

A $\text{Ker } \partial \subset \text{Im } j^*$ tartalmazáshoz, ha c reprezentál egy $\text{Ker } \partial$ -beli homológia osztályt, akkor $a = \partial \hat{a}$ valamely $\hat{a} \in A_n$ -re. Ugyanakkor

$$\partial(b - i(\hat{a})) = \partial b - \partial i(\hat{a}) = \partial b - i(\partial \hat{a}) = \partial(b) - i(a) = 0$$

vagyis $b - i(\hat{a})$ ciklus. Továbbá $j(b - i(\hat{a})) = j(b) - j(i(\hat{a})) = j(b) = c$, és mi pontosan ezt akartuk belátni, hiszen így $j^*[b - i(\hat{a})] = [c]$.

Végül a $\text{Ker } i^* \subset \text{Im } \partial$ tartalmazáshoz véve egy $a \in A_{n+1}$ ciklust, amire $i(a) = \partial b$ valamilyen $b \in B_n$ -re, azt látjuk, hogy $j(b)$ is ciklus, hiszen $\partial j(b) = j(\partial b) = j(i(a)) = 0$, szóval $\partial[j(b)] = [a]$.

Ezzel be is fejeződött a teljes bizonyítás. □

12. Definíció. Legyen (X, x_0) pontozott tér. Ekkor $\tilde{H}_n(X)$ -el jelöljük, és redukált homológia-csoportoknak hívjuk, a $H_n(X, x_0)$ relatív homológia-csoportokat.

Az előbbi tétel szerint minden $n > 0$ -ra $H_n(X) = H_n(X, x_0)$, és értelemszerűen $C_0(x_0) \cong \mathbb{Z}$, amiből adódik a

$$C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\rho} C_0(x_0) \rightarrow 0$$

egzakt sor. De innen következik, hogy a $\rho : C_0(X) \rightarrow C_0(x_0) \cong \mathbb{Z}$ leképezést $\rho(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$ együtttható összegzés definiálja. Tehát $H_0(X, x_0)$ egy komponenssel kevesebb $\mathbb{Z}$ direkt összege, mint $H_0(X)$.

Egy alkalmazásként most belátjuk a Brouwer fixponttételt redukált homológia segítségével. Ehhez először is ki kell mondanunk a 4 tétel egy fontos következményét:

2.1. Következmény. Legyen A egy X tér (nemüres) zárt altere, mely deformációs retraktuma valamilyen X -beli környezetének. Ekkor a homológia csoportok alábbi sorozata egzakt:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X/A) \longrightarrow 0$$

Ez nyilván onnen jön, hogy $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$, hiszen $n > 0$ esetén a $\hat{j} : C_n(X)/C_n(A) \rightarrow C_n(X/A)$ leképezés szürjektív; másrészt injektív is, mert a $\hat{j}^{-1}(\sigma)$

ösképek csak A -beli láncban térhetnek el. Tehát $C_n(X)/C_n(A) \cong C_n(X/A)$ (az $n = 0$ esetben triviálisan teljesül az izomorfizmus). Így a megfelelő homológia csoportok is izomorfak.

Rátérhetünk tehát a Brouwer fixponttétel bizonyítására. Egy önmagában is fontos állítással kezdünk:

2. Lemma. $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, és $\tilde{H}_i(S^n) \cong 0$, $i \neq n$ esetén.

Bizonyítás. A bizonyítás alapötlete a

$$D^n/S^{n-1} \cong S^n$$

összefüggés és a tény, hogy D^n pontrahúzható, vagyis $\tilde{H}_i(D^n) \cong 0$. Tehát van egy

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_i(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_i(D^n) \cong 0 \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_i(S^n) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

egzakt sorozatunk. Az egzaktság miatt ∂ izomorfizmus $\tilde{H}_i(S^n)$ és $\tilde{H}_i(S^{n-1})$ között.

$$\tilde{H}_0(S^n) = 0, \text{ ha } n \neq 0,$$

$$\tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}$$

értékekből indukcióval adódik az állítás tetszőleges (i, n) természetes számpárra. □

5. Tétel. (Brouwer): ∂D^n nem deformációs retraktuma D^n -nek.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy az, vagyis létezik egy $r : D^n \rightarrow \partial D^n$, hogy

$$i : \partial D^n \rightarrow D^n$$

inklúzióval komponálva $r \circ i$ az identitás ∂D^n -en. Ekkor ez a homológiacsoporthoz is egy

$$\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n)$$

identikus kompozíciót eredményezne, ami lehetetlen abból kifolyólag, hogy

$$\tilde{H}_{n-1}(D^n) \cong 0$$

, vagyis $i^* \equiv 0$. □

13. Definíció. Legyen $U = \{U_\alpha\}$ egy olyan nyílt fedése az X topologikus térnek, amelyre teljesül: $X = \bigcup_\alpha \text{int}(U_\alpha)$. Ekkor a

$$C^U(X) := \text{Im} \left(\bigoplus_\alpha C(U_\alpha) \rightarrow C(X) \right),$$

csoportot az U -kis láncok csoportjának nevezzük.

6. Tétel. Az $i : C^U(X) \hookrightarrow C(X)$ inklúzió izomorfizmust indukál a homológiák között:

$$H_n(i) : H_n(C^U(X)) \longrightarrow H_n(X).$$

A bizonyítás kifejezetten hosszú. Azon az elképzelésen alapul, hogy minden szinguláris szimplex helyettesíthető annak baricentrikus finomításával úgy, hogy a homológia osztály nem változik. Elegendő számú iterált baricentrikus finomítás után a szimplexek képei olyan kis halmazokba esnek, amelyek illeszkednek valamely U_α -ba - ezért elengedhetetlen feltétel a kis láncok definíciójában, hogy már a fedőhalmazok belsejének uniója is tartalmazza X -et - így kis láncokat kapunk.

14. Definíció. (Baricentrikus finomítás): A standard n -szimplex Δ^n baricentrikus felosztása $(n+1)!$ kis n -szimplexre osztja tovább azt. A felosztás indukcióval történik:

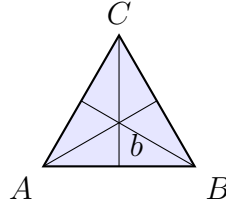
- $n = 0$ esetén a szimplex nem oszlik tovább.
- Ha az $(n-1)$ -dimenziós lapok már fel vannak bontva, akkor Δ^n finomított n -szimplexei az alábbi formájúak:

$$[b, w_0, \dots, w_{n-1}],$$

ahol $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ valamely $(n-1)$ -lap egy finomított szimplexe, b pedig a Δ^n baricentruma.

Bizonyítás. (Vázlatosan): Legyen $\alpha \in C_n(X)$ egy ciklus, azaz $\partial\alpha = 0$. Jelöljük $\mathcal{B}(\alpha)$ -val az α baricentrikus finomítását. Ekkor igaz, hogy:

$$\alpha - \mathcal{B}(\alpha) = \partial\beta,$$



2.1. ábra. Δ^2 baricentrikus finomítása: b a baricentrum

valamely $\beta \in C_{n+1}(X)$ -ra, vagyis α és $\mathcal{B}(\alpha)$ homológok.

Ez lényegében onnan jön, hogy a Δ^n standard szimplex és az I egységintervallum szorzatán, $\Delta^n \times I$ -n baricentrikus finomítást végzünk úgy, hogy a b baricentrum a $\Delta^n \times \{0\}$ "fedőlapon" legyen. Majd a baricentrikus finomításait visszavetítjük a fedőlapra. Ez a leképezés egy lánchomotópiát indukál az identitás és a baricentrikus finomítás között, ami azt jelenti, hogy létezik egy $T : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ leképezés, amire:

$$\partial T + T\partial = id - \mathcal{B}.$$

Ha $\partial\alpha = 0$, akkor $\partial T(\alpha) = \alpha - \mathcal{B}(\alpha)$, tehát $\alpha - \mathcal{B}(\alpha)$ valóban határ.

Értelemszerűen az iterált baricentrikus finomításban szereplő szimplexek átmérője $\lim_{N \rightarrow \infty} (\frac{n}{n+1})^N = 0$ -hoz tart. Erre alkalmazva a Lebesgue-lemmát, azt kapjuk, hogy bármely σ szinguláris szimplexhez létezik olyan N -edik iteráció, amire $\mathcal{B}^N(\sigma) \in C_n^U(X)$, vagyis minden szimplexhez van olyan fedőhalmaz, aminek belseje tartalmazza.

kis-láncok tételének bizonyítása: Legyen $\alpha \in C_n(X)$ tetszőleges lánc. Ekkor mint azt az előbb megállapítottuk létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy az N -szeres baricentrikus finomítás, $\mathcal{B}^N(\alpha)$, már *kis lánc*. Ha α ciklus, akkor tudjuk, hogy homológ $\mathcal{B}^N(\alpha)$ -val, azaz

$$H_n(i)[\mathcal{B}^N(\alpha)] = [\alpha],$$

ami bizonyítja $H_n(i)$ szürjektivitását.

Most mutassuk meg, hogy $H_n(i)$ injektív. Legyen $\beta \in C_n^U(X)$ ciklus, azaz $\partial\beta = 0$, és tegyük fel, hogy β képe $C_n(X)$ -ben határ:

$$i(\beta) = \partial\alpha \quad \text{valamilyen } \alpha \in C_{n+1}(X) \text{ mellett.}$$

Ekkor ismét létezik N , hogy $\mathcal{B}^N(\beta)$ kis lánc, vagyis $\mathcal{B}^N(\beta) \in C^U(X)$. Ráadásul mivel $\mathcal{B}$ egy lánc-leképezés, azaz $\partial \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \partial$, ezért:

$$i(\mathcal{B}^N(\beta)) = \mathcal{B}^N(i(\beta)) = \mathcal{B}^N(\partial\alpha) = \partial\mathcal{B}^N(\alpha),$$

tehát $\mathcal{B}^N(\beta)$ is határ, mármint $C^U(X)$ -beli határ.

Mivel $\mathcal{B}^N(\beta)$ homológ β -val, azaz $\beta - \mathcal{B}^N(\beta) = \partial\gamma$ valamilyen $\gamma \in C_{n+1}(X)$ -re, ez azt jelenti, hogy β is határ $C^U(X)$ -ben.

Így $[\beta] = 0 \in H_n(C^U(X))$, tehát $H_n(i)$ injektív is, vagyis

$$H_n(i) : H_n(C^U(X)) \rightarrow H_n(X)$$

izomorfizmus.

□

7. Tétel. (Kivágás) Legyen X topologikus tér. Az alábbi állítások igazak:

1. Legyen $U \subseteq A \subseteq X$. Ha $U \subseteq \text{int}(A)$, akkor az $(X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ inklúzió indukál egy izomorfizmust a homológiák között:

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_n(X, A).$$

2. Tegyük fel, hogy $X = A \cup B$, és teljesül, hogy $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Ekkor az $(B, A \cap B) \hookrightarrow (A \cup B, A)$ inklúzió szintén izomorfizmust indukál:

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(A \cup B, A).$$

A két állítás ekvivalens, ha $B := X \setminus U$ -t választunk, vagyis az első eset a második egy speciális esete.

A relatív homológia "metodikáját" alkalmazva a kis láncok koncepciójára, definiálhatjuk a *relatív kis láncokat*.

15. Definíció. Legyen $U = \{U_\alpha\}$ nyílt fedése az X térnek, olyan módon, hogy:

$$X = \bigcup_{\alpha} \text{int}(U_\alpha),$$

és legyen $A \subseteq X$. A

$$C^U(X, A) := C^U(X) / C^{U \cap A}(A),$$

ahol $U \cap A = \{U_\alpha \cap A\}$, csoportot hívjuk relatív U -kis láncok csoportjának.

8. Tétel. (Relatív kis láncok) A természetes leképezések $C^U(X) \rightarrow C(X)$ és $C^{U \cap A}(A) \rightarrow C(A)$ indukálnak egy láncleképezést:

$$j : C^U(X, A) \rightarrow C(X, A),$$

amely a homológiák között izomorfizmust indukál:

$$H_n^U(X, A) := H_n(C^U(X, A)) \cong H_n(X, A).$$

Bizonyítás. A j láncleképezés "illeszkedik" a következő kommutatív diagramra:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^{U \cap A}(A) & \longrightarrow & C^U(X) & \longrightarrow & C^U(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow j \\ 0 & \longrightarrow & C(A) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

A két vízszintes sor egzakt, így a homológiacsoporthoz hosszú egzakt sorozatokat, illetve közöttük menő leképezést indukálnak. Ez a struktúra lényegében egy "végtelen létrára" hasonlít.

Tehát a j által indukált leképezés a homológia csoportok között is izomorfizmus:

$$H_n(C_U(X, A)) \cong H_n(X, A).$$

A kivágási tétel bizonyítása a relatív kis láncok tételével: Válasszuk az

$U = \{A, B\}$ fedést. Ekkor a relatív U -kis láncok:

$$C^U(X, A) = (C(A) + C(B)) / C(A)$$

$$C(B, A \cap B) = C(B) / C(A \cap B)$$

A relatív kis láncok tételéből tudjuk, hogy

$$H_n^U(X, A) \cong H_n(X, A).$$

Másrészt mivel a $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ inklúzió által indukált $C(B, A \cap B) \rightarrow C^U(X, A)$ leképezés izomorfizmus a második izomorfizmus tétel miatt, ezzel pedig:

$$H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A),$$

vagyis megkapjuk a második kivágási izomorfizmust.

Az első kivágási tétel ennek speciális esete: ha $X = A \cup B$ és $B = X \setminus U$, akkor

$A \cap B = A \setminus U$, és így visszkapjuk a

$$H_n(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_n(X, A)$$

állítást. □

16. Definíció. (X, A) párt jó párnak hívjuk, amennyiben A (nemüres) zárt altere az X topológikus térnek, valamint deformációs retraktuma valamely X -beli környezetének.

1. Állítás. Legyen (X, A) egy jó pár. Ekkor a hányados-leképezés

$$q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$$

izomorfizmust indukál a homológiák között minden $n \in \mathbb{N}$ -re:

$$q^* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A).$$

Bizonyítás. Legyen $V \subseteq X$ egy olyan nyílt környezete A -nak, amelyre létezik deformációs retrakció $r : V \rightarrow A$. Ez azt jelenti, hogy a párok homotóp ekvivalensek:

$$(V, A) \cong (A, A),$$

melyből következik, hogy minden n -re:

$$H_n(V, A) \cong H_n(A, A) = 0.$$

Alkalmazzuk a relatív homológia hosszú egzakt sorozatát a (X, V, A) tér-hármasra:

$$\cdots \rightarrow H_n(V, A) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\phi} H_n(X, V) \rightarrow H_{n-1}(V, A) \rightarrow \cdots$$

Mivel $H_n(V, A) = 0$ minden n -re, az egzaktság miatt $\phi : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, V)$ izomorfizmus.

Hasonlóan, a deformációs retrakció $r : V \rightarrow A$ indukál egy retrakciót a faktortereken is, amiből teljesen nyilvánvalóan $(X/A, V/A)$ pár homotóp ekvivalens az $(X/A, A/A)$ párral.

Illetve ismét nyilvánvaló egy triviális homológia csoport:

$$H_n(V/A, A/A) = 0.$$

Megint alkalmazva a hosszú egzakt sort most az $(X/A, V/A, A/A)$ térhármasra:

$$\cdots \rightarrow H_n(V/A, A/A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \xrightarrow{\psi} H_n(X/A, V/A) \rightarrow H_{n-1}(V/A, A/A) \rightarrow \cdots,$$

ahol az egzaktság miatt megint csak:

$$H_n(X/A, A/A) \xrightarrow{\psi} H_n(X/A, V/A)$$

izomorfizmus.

Továbbá, mivel a $q : X \rightarrow X/A$ hányados-leképezés az $X \setminus A$ -ra megszorítva homeomorfizmus, a *kivágási tétel* alapján

$$H_n(X, V) \cong H_n(X/A, V/A)$$

Így a következő kommutatív diagramot kapjuk:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X, V) \\ \downarrow q^* & & \downarrow \cong \\ \tilde{H}_n(X/A) \cong H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{\cong} & H_n(X/A, V/A) \end{array}$$

A vízszintes, és a jobb oldali függőleges leképezésekről beláttuk, hogy mind izomorfizmusok, vagyis a kommutativitás miatt a bal oldali függőleges

$$q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$$

leképezés is izomorfizmus. □

Most példaként minden n -re explicit megadunk egy konkrét ciklust, amely generálja a $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ csoportot, amely izomorf $\mathbb{Z}$ -vel.

Mivel D^n és Δ^n topológiailag ekvivalensek, a $(D^n, \partial D^n)$ pár helyett vehetjük a $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ párt.

A konstrukció indukcióval történik. Legyen $i_n : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ az identitás-leképezés, amelyet tekinthetünk egy szinguláris n -szimplexnek is. Azt állítjuk, hogy i_n relatív ciklus, és generátora $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ -nek.

Az $n = 0$ alapeset triviális. Ekkor ugyanis Δ^0 egy pont, $\partial\Delta^0 = \emptyset$, így

$$H_0(\Delta^0, \emptyset) \cong \mathbb{Z},$$

és az i_0 identitás természetesen reprezentálja ennek generátorát.

Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy az állítás igaz $n - 1$ -re. Jelölje $\Lambda \subset \partial\Delta^n$ azt a részt, amely egy kivételével az összes $n - 1$ -dimenziós lap uniója.

Ekkor az alábbi izomorfizmusokat állítjuk:

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \xleftarrow{\cong} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}).$$

Első izomorfizmus: A hosszú egzakt sor a $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ térhármasra tartalmazza a

$$\cdots \rightarrow H_n(\partial\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_n(\Delta^n, \Lambda) \rightarrow H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \rightarrow \cdots$$

részt. Mivel pedig Δ^n deformációs retraktuma Λ -nak (hiszen Λ egy $n - 1$ dimenziós szimplex, amelyből hiányzik egy lap), ezért

$$H_k(\Delta^n, \Lambda) = 0 \quad \text{minden } k\text{-ra,}$$

így az egzaktság miatt

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda).$$

Második izomorfizmus: A $\Delta^{n-1} \hookrightarrow \partial\Delta^n$ leképezés (a hiányzó lap beillesztése) beágyazza Δ^{n-1} -et $\partial\Delta^n$ -be úgy, hogy a kép diszjunkt Λ -tól. Ezt felhasználva látható, hogy:

$$\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \cong \partial\Delta^n/\Lambda,$$

ami indukálja a

$$H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda),$$

izomorfizmust.

A két izomorfizmust komponálva pedig

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}),$$

ami alatt az i_n identitás határa éppen az i_{n-1} identitás előjeles képe, tehát az indukció teljesül.

Most ugyanígy megadjuk az $\tilde{H}_n(S^n)$ generátorát. Tekintsük az S^n gömböt két n -szimplex egyesítéseként:

Legyen Δ_1^n és Δ_2^n n -szimplexek a határaiknál összeragasztva: $\partial\Delta_1^n = \partial\Delta_2^n$.

Ekkor a különbségük

$$\Delta_1^n - \Delta_2^n \in C_n(S^n)$$

egy ciklus, és azt állítjuk, hogy ez a generátor.

Vizsgáljuk ehhez az alábbi izomorfizmusokat:

$$\tilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n, \Delta_2^n) \xleftarrow{\cong} H_n(\Delta_1^n, \partial\Delta_1^n).$$

Első izomorfizmus : az (S^n, Δ_2^n) pár hosszú egzakt sora

$$\cdots \rightarrow H_n(\Delta_2^n) \rightarrow H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n, \Delta_2^n) \rightarrow H_{n-1}(\Delta_2^n) \rightarrow \cdots,$$

ahol Δ_2^n pontrahúzható, amiből az egzaktság miatt

$$H_n(S^n) \xrightarrow{\cong} H_n(S^n, \Delta_2^n).$$

Második izomorfizmus : ez $n > 0$ esetben érvényes, ekkor ugyanis a S^n/Δ_2^n és $\Delta_1^n/\partial\Delta_1^n$ jól láthatóan homotópok.

Ezen izomorfizmusok alatt a

$$\Delta_1^n - \Delta_2^n \in C_n(S^n)$$

ciklus azonosítható Δ_1^n -nel $H_n(\Delta_1^n, \partial\Delta_1^n)$ -ben, amelyről már beláttuk, hogy ott valóban generátor. Így $\Delta_1^n - \Delta_2^n$ tényleg generálja $\tilde{H}_n(S^n)$ -t.

Homológia együtthatókkal

Felmerülhet a kérdés, hogyan változik a homológia, ha az alapul szolgáló $\mathbb{Z}$ együttható-csoportját tetszőleges Abel-csoportra cseréljük ki. Erre ad kissé elkésztő választ az *Univerzális Együttható Tétel*, miszerint az egész-együtthatós homológia teljesen meghatározza a többi. Ezt ennek a résznek a végén bizonyítjuk be, addig előkészítjük az algebrai háttért.

Sokszor azonban ettől függetlenül tényleg érdekesebb lecserélni $\mathbb{Z}$ csoportot, például $\mathbb{RP}^n$ homológia csoportjai jóval elegánsabb formát vesznek fel $\mathbb{Z}_2$ felett.

Ismert ugyanis $\mathbb{RP}^n$ cellafelbontása, ami minden $k \leq n$ -re tartalmaz egyetlen k dimenziós cellát. Az n -dimenziós cella, e^n határát az $(n-1)$ -dimenziós vázba beragasztó leképezés a

$$f_n : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{RP}^{n-1},$$

hányados-leképezés, aminek képét ugye az S^{n-1} gömb kétrétűen fedi.

17. Definíció. Az $f : S^n \rightarrow S^n$ leképezés homologikus foka k , ha az indukált $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$ leképezés $\alpha \rightarrow k\alpha$ alakú.

Az f_n faktor-leképezés által meghatározott kételemű ekvivalencia-osztályok az antipodikus párokból állnak, a leképezés fokszáma tehát az identitás, illetve az antipodális leképezés összege:

$$\deg(f_n) = 1 + (-1)^n,$$

ami értelemszerűen páros n esetén 0, páratlan n esetén 2. Így a lánckomplexus felírható

$$\cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

alakban, amiből számolva a homológia csoportokat ($\mathbb{Z}$ felett):

$$H_k(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{ha } 1 \leq k \leq n \text{ és } k \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ellenben $\mathbb{Z}_2$ felett

$$H_k(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

18. Definíció. Legyen $C = (C_n, \partial_n)$ egy lánckomplexus, ahol minden C_n egy $\mathbb{Z}$ -modulus. Továbbá legyen G tetszőleges Abel-csoport. Ekkor az $L \otimes G$ lánckomplexus definíciója:

- Az n -edik grádicsot $C_n \otimes G$ -ként definiáljuk,
- A határleképezés $\partial_n \otimes \text{id}_G$,
- A lánckomplexus: $\cdots \rightarrow C_{n+1} \otimes G \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes \text{id}_G} C_n \otimes G \rightarrow \cdots$

Célunk annak megértése, hogyan viszonyul egymáshoz $H_n(C)$ és $H_n(C \otimes G)$. Gondoljuk meg, hogy ha egy lánckomplexus minden grádicsa végesen generált, szabad $\mathbb{Z}$ -modulus, akkor a határleképezések $\mathbb{Z}$ feletti mátrixok. A Smith-normálformára hozva

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0), \quad \text{ahol } d_i \mid d_{i+1}.$$

diagonális mátrixot kapunk, aminek megfelelően szétbontható direkt összegre: r darab $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_i} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ típusú rész-lánckomplexusra, és néhány $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ típusú triviális lánckomplexusra. Vegyük azonban észre azt is, hogy ez a felbontás nem egyértelmű, mert a lánckomplexusok nem feltétlenül irreducibilisek. Például $m = 6$ választással a $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{6} \mathbb{Z}$ komplexusnak $0 \rightarrow 3\mathbb{Z} \xrightarrow{6} 6\mathbb{Z}$ rész-lánckomplexusa.

A fentiek alapján minden végesen generált lánckomplexus visszavezethető két alapesetre. Vizsgáljuk ezek homológiáját, ha tenzorszorozzuk egy G Abel-csoporttal:

(a) Triviális komplexus:

$$(0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0) \otimes G = 0 \rightarrow G \rightarrow 0,$$

$$\text{amelynek homológiája: } H_n = \begin{cases} G, & n = 0 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b) Nemtriviális komplexus:

$$(0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \rightarrow 0) \otimes G = 0 \rightarrow G \xrightarrow{m} G \rightarrow 0.$$

Ennek homológiája:

$$H_1 = \ker(m : G \rightarrow G) = \{g \in G : mg = 0\} =: \text{Tor}_m(G),$$

$$H_0 = \text{coker}(m : G \rightarrow G) = G/mG.$$

Ezek alapján:

$$H_*(0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \rightarrow 0) = (0, 0, \mathbb{Z}_m, 0),$$

$$H_*(0 \rightarrow G \xrightarrow{m} G \rightarrow 0) = (0, \text{Tor}_m(G), G/mG, 0).$$

Homologikus algebra

A fentebb pedzegetett koncepcióknak már van egy kidolgozott matematikai nyelve, most ezt ismertetjük. Ehhez vegyünk egy R kommutatív gyűrűt, és jelölje $R\text{-Mod}$ az R -modulusok kategóriáját. Itt most elsősorban az $R = \mathbb{Z}$ esetet vizsgáljuk, tehát az Abel-csoportok kategóriája lesz a fókuszban.

Tegyük fel, hogy $F : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ egy additív funktor, azaz a leképezések összegét összegbe viszi. Ekkor F indukál egy funktort az R -modulusok lánckomplexusainak kategóriáján is. Az ilyen funktor megőrzi a lánckomplexus-struktúrát és a félig egzaktságot, de az egzaktságot általában nem. Ezért a

$$H(F(L)) \cong F(H(L))$$

azonosság nem mindig teljesül. Erre példaként szolgál az előbbi $\otimes G$ tenzorszorzása a

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

sornak, amely $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}$ -nél, mint láttuk, "elvesztette" egzaktságát a tenzorszorzás után.

19. Definíció. Legyen $A \in R\text{-Mod}$. Egy

$$\cdots \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

egzakt sorozatot A szabad feloldásának nevezzük, ha minden F_i szabad R -modulus.

Például Abel-csoportok esetén mindig van 2-hosszú szabad feloldás. Legyen ugyanis G az Abel-csoportunk, és I a generátorainak halmaza. Definiáljunk egy F_0 szabad Abel-

csoportot, aminek bázisa egy f bijekcióban áll I -vel. Ekkor nyilván

$$\cdots 0 \rightarrow \text{Ker}(f) \rightarrow F_0 \rightarrow G \rightarrow 0$$

egzakt.

Az is belátható, hogy minden R -modulusnak van szabad feloldása. Jelöljük M -mel ezt a tetszőleges R -modulust. Az

$$\cdots \rightarrow F_{n+1} \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

egzakt sor F_n szabad modulusait induktívan konstruáljuk.

Válasszunk ehhez M egy generátorrendszerét $S \subseteq M$, és vegyük az $F_0 := R^{(S)}$ szabad modulust. Majd definiáljuk közöttük az $\varepsilon : F_0 \rightarrow M$ leképezést a bázisvektorok képeinek segítségével (majd lineárisan kiterjesztjük):

$$\varepsilon((r_s)_{s \in S}) := \sum r_s s$$

A mag szintén R -modulus, jelöljük K_1 -gyel. Most válasszuk K_1 egy generátorrendszerét S_1 -et, és vegyük a hozzá tartozó $F_1 := R^{(S_1)}$ szabad modulust. Építhető így az

$$F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

sor, ahol $d_1(r_{s_1}) := s_1$

Indukcióval haladunk tovább:

$$K_2 := (d_1), \quad F_2 := R^{(S_2)},$$

ahol S_2 generálja K_2 -t, és d_1 -hez hasonló módon definiáljuk $d_2 : F_2 \rightarrow F_1$ -et.

Így kapjuk a következő egzakt sort:

$$\cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0,$$

mely szabad modulusokból áll.

Legyen $\mathcal{F} : R\text{-Mod} \rightarrow R\text{-Mod}$ additív funktor, és

$$F_\bullet \rightarrow A \rightarrow 0 := \cdots \rightarrow F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

sor pedig A szabad feloldása. Ekkor $\mathcal{F}(F_\bullet)$ is félig egzakt, és a $H_i(\mathcal{F}(F_\bullet))$ csoportok mérik az eredeti funktor mennyire nem-egzakt.

2. Állítás. *A $H_i(\mathcal{F}(F_\bullet))$ nem függ a választott szabad feloldástól, csak F -től és A -tól.*

Bizonyítás. Belátunk hozzá egy általánosabb eredményt:

3. Lemma. *Legyen $\alpha : A \rightarrow B$ R -modulus homomorfizmus és $F_\bullet \rightarrow A \rightarrow 0$, illetve $G_\bullet \rightarrow B \rightarrow 0$ szabad feloldások. Ekkor α indukál egy $\tilde{\alpha} : F_\bullet \rightarrow G_\bullet$ láncleképezést, lánchomotópia erejéig egyértelműen.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 & \xrightarrow{f_0} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha \\ \cdots & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{g_1} & G_0 & \xrightarrow{g_0} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

diagram kommutatívvá tehető.

Ehhez sorban az α_i leképezéseket definiáljuk. Mivel F_0 szabad, és g_0 szürjektív, definiálható α_0 a bázison, majd onnan lineárisan kiterjed. α_1 -hez is az kell, hogy $\text{Im}(g_1)$ tartalmazza az $\alpha_0 \circ f_1$ kompozíció képét. A diagram kommutatív részéből viszont tudjuk, hogy α_0 -val visszahúзва $\text{Ker}(g_0)$ -t, az adott F_0 beli részhalmaznak tartalmaznia kell $\text{Ker}(f_0)$ -t, ami az egzaktság miatt $\text{Im}(f_1)$. Tehát úgyis gondolkodhattunk volna, hogy $\alpha(\text{Im}(f_1)) \subset \text{Ker}(g_0) = \text{Im}(g_1)$. Induktíve kész vagyunk.

Visszatérve az eredeti állítás bizonyítására az a $B = A$, illetve $\alpha = \text{Id}_A$ választásokkal, az előző lemma speciális esete. □

□

20. Definíció. *Az $\mathcal{F}$, R -modulusok közti additív funktor i -edik deriváltját a következőképpen definiáljuk:*

$$\text{Der}^i(\mathcal{F})(A) := H_i(\mathcal{F}(F_\bullet))$$

ahol $F_\bullet \rightarrow A \rightarrow 0$ az A R -modulus egy szabad feloldása.

Például, ha G egy abel-csoport, akkor a vele való $\otimes G : A \mapsto A \otimes G$ tenzorszorzás egy ilyen additív funktor, és annak első derivált funktorát

$$\mathrm{Tor}_1(A, G) := \mathrm{Der}^1(\otimes G)(A)$$

jelöli. Mivel beláttuk, hogy Abel-csoportoknak mindig van kettő hosszú feloldása a 2 állítás miatt, minden magasabb homológia, így a derivált funktorok is nullák.

9. Tétel. (*Univerzális Együttható Tétel*) Minden C lánckomplexusra az alábbi sorozat egzakt:

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes G \rightarrow H_n(C; G) \rightarrow \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C), G) \rightarrow 0$$

Ez a tétel a derivált funktorok és a homológia közötti kapcsolat egyik kulcsfontosságú állítása, viszont bizonyításától eltekintünk.

3. fejezet

Kohomológia

A kohomológia a homológia egy algebrai variánsa, amely a definíciók dualizálásával keletkezik. Bár a kohomológia-csoportok, $H^i(X)$, sok tekintetben hasonló axiómákat elégítenek ki, mint a homológia-csoportok, a dualizálás miatt az indukált homomorfizmusok ellentétes irányban hatnak. Ezt kategóriaelméleti nyelven úgy is mondhatjuk, hogy a kohomológia egy kontravariáns funktor, míg a homológia kovariáns.

Bár a két elmélet sok esetben ekvivalens információt hordoz, a kohomológia kontravariáns természete ad egy extra szorzás-struktúrát, a *csésze-szorzáttal*, amellyel a kohomológia-csoportok gyűrűkké válnak.

A homológiában is természetesen létezik a kohomológia szorzás műveletének megfelelője, a keresztszorzat. Lényegi különbség azonban, hogy amikor nézzük a

$$H_i(X) \times H_j(X) \rightarrow H_{i+j}(X \times X) \rightarrow H_{i+j}(X)$$

"leképezés-sorozatot", akkor a második leképezés definiálásakor problémába ütközünk. Ugyanis azt egy $X \times X \rightarrow X$ leképezés indukálná, amiből a vetítés csak triviális homológiát eredményezne, lévén az egyik faktort egyetlen pontba képezi. A kohomológia a kontravarianciája miatt viszont a

$$H^i(X) \times H^j(X) \rightarrow H^{i+j}(X \times X) \rightarrow H^{i+j}(X)$$

sorozat második leképezésének definiálásakor fordítva, azt egy $X \times X \rightarrow X$ leképezés indukálná. Eerre pedig megfelelő jelölt a $\Delta(x) = (x, x)$ diagonális beágyazás.

Kohomológia csoportok

A homológia csoportokat az adott $\cdots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \rightarrow \cdots$ lánckomplexusból származtattuk, a $\text{Ker}(\partial)/\text{Im}(\partial)$ faktorizálással.

Hasonlóan kapjuk a $H^n(X; G)$ kohomológia csoportokat: a C_n lánccsoportokat lecseréljük $\text{Hom}(C_n; G)$ duálisukra, vagyis a C_n lánccsoportból a G csoportba képező függvények csoportjára. Ugyanígy járunk el a ∂ határleképezésekkel, amik duálisát δ -val fogunk jelölni. Majd megint vesszük a $\text{Ker}(\delta)/\text{Im}(\delta)$ faktorokat.

Csésze-szorzat

Ebben a szakaszban ismertetjük a bevezetőben már előrevetített, kohomológia csoportokon értelmezett szorzás műveletet. Ezt is, a homológia elméletben ismert receptet követve, a kolánccsoportokon (ott lánccsoportok) definiáljuk először, majd rajtuk keresztül vezetjük be a kohomológia csoportokra.

21. Definíció. Legyen $\varphi \in C^k(X; R)$, illetve $\psi \in C^l(X; R)$, ahol R gyűrű, általában $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Q}$. Ekkor kettejük $\varphi \smile \psi \in C^{k+l}(X; R)$ csésze-szorzata az a kolánc, ami a $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$ szinguláris szimplexen

$$\varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_n])\psi(\sigma[v_{k+1}, \dots, v_{k+l}])$$

értéket veszi fel. Vagyis a σ leképezést "kettévágjuk", és a kiértékeléseket R felett össze-szorozzuk.

Ahhoz, hogy ezt a definíciót valamiképp kiterjesszük a kohomológia csoportokra is, természetesen meg kell adni egy formulát, hogyan kapcsolódik a koláncon értelmezett csésze-szorzat, a kohatár leképezésekkel.

Vegyük először is észre, hogy $\sigma : \Delta^{k+1} \rightarrow X$ szinguláris szimplexre (a határleképezés miatt veszünk eggyel nagyobb dimenziós szimplexet):

$$(\delta\varphi \smile \psi)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}])\psi(\sigma|[v_{k+1}, \dots, v_{k+l+1}]),$$

$$(-1)^k (\varphi \smile \delta\psi)(\sigma) = \sum_{i=k}^{k+l+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_k])\psi(\sigma|[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+l+1}])$$

A két egyenletet összeadva az első egyenlet utolsó tagja kiesik a második egyenlet első tagjával, és így jutunk az alábbi összefüggéshez:

$$\begin{aligned}\delta\varphi \smile \psi + (-1)^k \varphi \smile \delta\psi &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}]) \psi(\sigma|[v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell+1}]) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{k+\ell+1} (-1)^i \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_k]) \psi(\sigma|[v_k, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+\ell+1}]) \\ &= \delta(\varphi \smile \psi)\end{aligned}$$

Ebből adódóan kociklusok szorzata kociklus, illetve kociklus és kohatár szorzata kohatár, így ez a szorzás valóban kiterjed a kohomológia csoportokra, természetesen megörökölve a kociklus szinten triviálisan teljesülő asszociativitást és disztributivitást

Kohomológia gyűrű

22. Definíció. Legyen $H^*(X; R) := \bigoplus_n H^n(X; R)$, aminek elemei a $\sum_i \alpha_i : \alpha_i \in H^i(X; R)$ véges tagú összegek. Bármely két tag szorzata pedig:

$$\left(\sum_i \alpha_i\right) \left(\sum_j \beta_j\right) := \sum_{i,j} \alpha_i \smile \beta_j.$$

$H^*(X; R)$ egységes, amennyiben R az R elemeivel való skalár-szorzás a $H^*(X; R)$ gyűrűt R -algebrává teszi. Minden különösebb diszkusszió nélkül definiálhatóak a $H^*(X, A; R)$ relatív kohomológia gyűrűk, a relatív csésze-szorzaton keresztül.

A csésze-szorzat kompatibilis, az f^* indukált leképezésekkel is, ahogy ezt az alábbi lemma mutatja.

4. Lemma. Tekintsük az $f : X \rightarrow Y$ leképezés indukálta $f^* : H^n(Y; R) \rightarrow H^n(X; R)$ leképezéseket. Ekkor a $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$, ugyanígy a relatív esetben.

Bizonyítás. Definíció szerint kibontva a képleteket:

$$\begin{aligned}(f^\# \varphi \smile f^\# \psi)(\sigma) &= f^\# \varphi(\sigma|[v_0, \dots, v_k]) f^\# \psi(\sigma|[v_k, \dots, v_{k+\ell}]) \\ &= \varphi(f\sigma|[v_0, \dots, v_k]) \psi(f\sigma|[v_k, \dots, v_{k+\ell}]) \\ &= (\varphi \smile \psi)(f\sigma) = f^\#(\varphi \smile \psi)(\sigma)\end{aligned}$$

a kolánccsoportokra, ami implikálja a lemma állítását. $\square$

Mint ahogy azt az előző fejezet végén megmutattuk, a kommutativitás nem teljesül ugyan a csésze-szorzatra, de nem sok híja van:

3. Állítás. $\alpha \smile \beta = (-1)^{lk} \beta \smile \alpha$, ahol $\alpha \in H^k(X; R)$ és $\beta \in H^l(X; R)$.

Künneth formula

Most azt vizsgáljuk milyen kapcsolat van a csésze-szorzat és szorzatterek között.

23. Definíció. A $H^*(X; R) \times H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X \times Y; R)$ leképezést kereszt-szorzatnak nevezzük, és $a \times b := p_1^*(a) \smile p_2^*(b)$ azonossággal definiáljuk, ahol p_1, p_2 az $X \times Y$ szorzattér X , illetve Y -ra való vetítései.

Felhasználva a csésze-szorzat disztributivitását

$$\begin{aligned} (a + a') \times (b + b') &= p_1^*(a + a') \smile p_2^*(b + b') \\ &= p_1^*(a) \smile p_2^*(b) + p_1^*(a) \smile p_2^*(b') + p_1^*(a') \smile p_2^*(b) + p_1^*(a') \smile p_2^*(b') \\ &= a \times b + a \times b' + a' \times b + a' \times b', \end{aligned}$$

vagyis a kereszt-szorzat bilineáris.

Első reményünk az lenne, hogy a kereszt-szorzat izomorfizmus, azonban lévén bilineáris, ez elég ritka. Viszont pont a bilinearitás megkerülésére vehetjük $H^*(X; R) \times H^*(Y; R)$ helyett a $H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R)$ tenzorszorzatot. Az *univerzális tulajdonsága* alapján ugyanis minden $f : A \times B \rightarrow C$ bilineáris leképezés "keresztülhúzzható" az $A \otimes B$ tenzorszorzaton, vagyis egyértelműen létezik egy $\bar{f} : A \otimes B \rightarrow C$ lineáris leképezés, hogy $\bar{f}q(a, b) = f(a, b)$, ahol $q : A \times B \rightarrow A \otimes B$ a hányadosleképezés.

$$\begin{array}{ccc} & A \otimes B & \\ q \nearrow & & \searrow \exists! \bar{f} \\ A \times B & \xrightarrow{f} & C \\ & \text{lineáris} & \end{array}$$

Ezzel kapunk egy $\mu : H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R) \rightarrow H^*(X \times Y; R)$ kohomológia gyűrűk közötti homomorfizmust, amit szintén kereszt-szorzatnak fogunk hívni.

24. Definíció. Az $(a \otimes b)(c \otimes d) = (-1)^{|b||c|}ac \otimes bd$ "szorzatot" gradált tenzorszorzatnak nevezzük, ahol $|a|$ jelzi az a elem "dimenzióját", vagyis hogy az elem hányadik grádicsból származik.

A kereszt-szorzat és a gradált tenzorszorzat együtt a következőképpen viselkedik:

$$\begin{aligned}
\mu((a \otimes b)(c \otimes d)) &= (-1)^{|b||c|}\mu(ac \otimes bd) \\
&= (-1)^{|b||c|}(a \smile c) \times (b \smile d) \\
&= (-1)^{|b||c|}p_1^*(a \smile c) \smile p_2^*(b \smile d) \\
&= (-1)^{|b||c|}p_1^*(a) \smile p_1^*(c) \smile p_2^*(b) \smile p_2^*(d) \\
&= p_1^*(a) \smile p_2^*(b) \smile p_1^*(c) \smile p_2^*(d) \\
&= (a \times b)(c \times d) = \mu(a \otimes b)\mu(c \otimes d)
\end{aligned}$$

Bizonyítás nélkül kimondjuk a kereszt-szorzatra vonatkozó fontosabb tételt CW-komplexusok esetén:

10. Tétel. Legyen X és Y CW-komplexusok, továbbá $H^k(Y; R)$ végesen generált szabad R -modulus minden k -ra. Ekkor a kereszt-szorzat izomorfizmus $H^*(X; R) \otimes_R H^*(Y; R)$ és $H^*(X \times Y; R)$ kohomológia gyűrűk között.

Alkalmazás

Végezetül mutatunk egy alkalmazását a kohomológia gyűrű-struktúrájának topologikus terek megkülönböztetésére. A fő állítás, amit bizonyítani fogunk:

4. Állítás. $\mathbb{CP}^2 \not\cong S^2 \vee S^4$.

Ehhez először meg kell fejtenünk, hogyan is néz ki a $\mathbb{CP}^2$ kohomológia gyűrűje $\mathbb{Z}$ felett.

5. Állítás. A komplex-, illetve valós projektív terek kohomológia gyűrűjei:

$$H^*(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha] \text{ és } H^*(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1}), \text{ ahol } |\alpha| = 2$$

$$H^*(\mathbb{R}^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha] \text{ és } H^*(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1}), \text{ ahol } |\alpha| = 2$$

Bizonyítás. $\mathbb{RP}^n$ -el kezdünk. Mivel az $\mathbb{RP}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{RP}^n$ inklúzió az n -nél kisebb szintű kohomológia csoportokon izomorfizmust indukál, ezért induktíve elég megmutatni, hogy $H^{n-1}(\mathbb{RP}^n)$ generátorának és $H^1(\mathbb{RP}^n)$ generátorának csésze-szorzata egy generátora

$H^n(\mathbb{RP}^n)$ -nek. Ez 1 és $n - 1$ helyett általában is igaz bármely i, j természetes számpárra, amire $i + j = n$.

Azonosítsuk $\mathbb{RP}^n$ -ben $\mathbb{RP}^i$ -t az $(v_0 : \dots : v_i : 0 : \dots : 0)$ alakú vektorokkal, $\mathbb{RP}^j$ -t pedig az $(0 : \dots : 0 : v_i : \dots : v_n)$ alakúakkal. Ekkor tehát $\mathbb{RP}^i \cap \mathbb{RP}^j$ egyetlen pont, jelöljük ezt p -vel, aminek egyetlen nem nulla koordinátája az i -edik.

Jelöljük U -val azt az alteret, amit azok a vektorok alkotnak, melyek i -edik koordinátája nem nulla (a többi pedig tetszőleges). Ez az U altér tehát homeomorf $\mathbb{R}^n$ -el; ezen homeomorfizmus alatt p képe 0.

Vegyük $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^j$ alakú direkt felbontását, és vizsgáljuk az alábbi diagramot:

$$\begin{array}{ccc}
H^i(\mathbb{RP}^n) \times H^j(\mathbb{RP}^n) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(\mathbb{RP}^n) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H^i(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n - \mathbb{RP}^i) \times H^j(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n - \mathbb{RP}^i) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n - \{p\}) \\
\downarrow & & \\
H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^i) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})
\end{array}$$

Ez, minthogy láttuk a kereszt-szorzat és a csésze-szorzat kapcsolatát, kommutál.

Vegyük észre, hogy a kivágási tétel szerint a jobb alsó horizontális leképezés izomorfizmus. Szintúgy a fölötte levő, hiszen $\mathbb{RP}^n - \{p\}$ deformációs reaktuma $\mathbb{RP}^{n-1}$ -nek. A projektív tér cella felbontásából látszik a $H^n(\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{RP}^{n-1})$ izomorfizmus is.

Ahhoz, hogy belássuk a bal oldali horizontális leképezések is mind izomorfizmusok felhasználjuk a

$$\begin{array}{ccccccc}
H^i(\mathbb{RP}^n) & \leftarrow & H^i(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{i-1}) & \leftarrow & H^i(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n - \mathbb{RP}^j) & \rightarrow & H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^j) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
H^i(\mathbb{RP}^i) & \leftarrow & H^i(\mathbb{RP}^i, \mathbb{RP}^{i-1}) & \leftarrow & H^i(\mathbb{RP}^i, \mathbb{RP}^i - \{p\}) & \rightarrow & H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i - \{0\})
\end{array}$$

kommutatív diagramot, amin könnyen igazolhatóan minden leképezés izomorfizmus. i és j szerepe szimmetrikus a diagramon, ezért ez igazolja a kívánt horizontális izomorfizmusokat az eredeti diagramon.

Ekkor készen is vagyunk, mert az eredeti diagram alsó sora ekvivalens a

$$H^i(I^i, \partial I^i) \times H^j(I^j, \partial I^j) \rightarrow H^n(I^n, \partial I^n)$$

kereszt-szorozattal, amiről tudjuk, hogy generátorokat generátorba visz a 10 tétel szerint.

Innen már minden további eset bizonyítása egyszerű. $\mathbb{RP}^\infty$ következik abból, hogy az $\mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{RP}^\infty$ inklúzió izomorfizmust indukál $H^i(-; \mathbb{Z}_2)$ homológia csoportokon $i \leq n$ esetben.

Komplex esethez pedig csak cseréljük le a H^k homológia csoportokat H^{2k} -ra, $\mathbb{R}$ -t pedig $\mathbb{R}$ -re. □

$\mathbb{CP}^2 \not\cong S^2 \vee S^4$ **bizonyítása:** Mint gyűrűk $\tilde{H}^*(S^2 \vee S^4) \cong \tilde{H}^*(S^2) \oplus \tilde{H}^*(S^4)$, így előbbi állítás alapján viszont $\tilde{H}^*(\mathbb{CP}^2) \not\cong \tilde{H}^*(S^2 \vee S^4)$.

Irodalomjegyzék

Bredon, G. E. (1993). *Topology and Geometry*. Springer-Verlag.

Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press.

Rotman, J. J. (1988). *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag.

Massey, W. S. (1991). *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer-Verlag.

May, J. P. (1999). *A Concise Course in Algebraic Topology*. University of Chicago Press.

Mesterséges intelligencia alapú eszközök használatáról szóló nyilatkozat

Alulírott Jörg Máté Áron nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

cccc			
Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Nyelvhelyesség ellenőrzése	Writefull	Teljes dolgozat	—
Diagram készítése	ChatGPT	Teljes dolgozat	—

A felsoroltakon túl más mesterséges intelligencia alapú eszközt nem használtam.