

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Móricz Márk
Matematika BSc

Véges étale algebrák

Szakdolgozat

Témavezető: Zábrádi Gergely
Algebra és Számelmélet Tanszék



Budapest, 2025

Tartalomjegyzék

1. Algebrai és Szeparábilis lezártak	4
2. Topologikus Csoportok	6
3. Végtelen Galois Bővítések	10
4. Kategória elmélet	14
5. Véges Étale Algebrák	18
6. Galois-fedések	23

Bevezetés

A véges étale algebrák a Grothendieck nevéhez fűződő étale morfizmusok nulldimenziós esete. Az érdeklődő olvasó ezekről itt olvashat többet: [1] [2] [4] [Tag 025F]. A szakdolgozatom fő témája a Galois-elmélet főtételének Grothendieck féle átfogalmazásának a bemutatása. Az első két fejezet [3] alapján készült, a többi pedig [5] alapján.

Az első fejezetben bemutatom, hogy minden testnek létezik algebrai és szeparábilis lezártja, és ezek a lezártak egyértelműek izomorfia erejéig.

A harmadik fejezetben a topologikus csoportok alapvető definícióiról és tulajdonságairól lesz szó. Bevezetjük a Krull-topológiát, és az abszolút Galois-csoportot. Ezzel felkészülve végtelen Galois-bővítések vizsgálatára.

A negyedik fejezetben rátérek a végtelen Galois-bővítésekre. Bemutatom a provéges csoportok fogalmát és az inverz limesz konstrukcióját, valamint a Galois-csoportok szerkezetét végtelen bővítések esetén. A Krull-tétel alapján kitérek a zárt részcsoporthoz és a közbülső testek kapcsolatára, és általánosítom a véges esetben ismert eredményeket.

Az ötödik fejezetben a kategóriaelmélet alapfogalmait mutatom be, például a funktorokat, természetes transzformációkat és az ekvivalens kategóriákat. Különös hangsúlyt fektetve a Yoneda-lemmára és a reprezentálható funktorokra, amelyek kulcsfontosságúak lesznek a későbbi fejezetekben.

A hatodik fejezet a Grothendieck-féle Galois-elméletet mutatja be, ezáltal feltárva a véges étale algebrák és a véges $\text{Gal}(K)$ -halmazok közti kapcsolatot. Végül megadom az étale algebrák egy karakterizációját.

Az utolsó fejezetben a véges étale algebrák egy alkalmazásaként a topologikus terek Galois-fedéseit vizsgálom. Ennek célja a Galois-elmélet topologikus analogonjának bemutatása az univerzális fedésen és a monodrómia hatáson keresztül.

1. Algebrai és Szeparábilis lezártak

1.1. Állítás. Legyen $L|K$ egy testbővítés. Ha L algebrai K felett és minden nem konstans $K[x]$ -beli polinomnak van gyöke L -ben, akkor L algebrailag zárt, tehát K egy algebrai lezártja.

Bizonyítás. Ha K tökéletes, akkor elég megmutatni, hogy minden normált $K[x]$ -beli f irreducibilis polinom felbomlik $L[x]$ -ben. Tegyük fel először, hogy f szeparábilis, és legyen M az f felbontási teste. Ekkor $M = K[\alpha]$ valamely $\alpha \in M$ -re. Legyen $g(x)$ az α minimálpolinomja K felett. Ekkor $g(x)$ együtt-hatói K -ban vannak, így van gyöke L -ben, legyen ez β . Mind a $K[\alpha]$, mind a $K[\beta]$ g felbontási teste, így létezik egy $K[\alpha] \rightarrow K[\beta] \subset L$ K -izomorfizmus. Mivel f felbomlik $K[\alpha]$ -ban, felbomlik L -ben is.

Ha K nem tökéletes, akkor a karakterisztikája $p \neq 0$, és legyen K' azon L -beli elemek halmaza, amelyekre $x^{p^m} \in K$ valamely $m \geq 1$ -re. Láthatóan K' test. Az állítás bizonyításához meg kell még mutatnunk, hogy K' tökéletes, valamint, hogy minden $K'[x]$ -beli polinomnak van gyöke L -ben.

Legyen $a \in K'$ olyan, hogy $b \stackrel{\text{def}}{=} a^{p^m} \in K$ valamely m -re. A $x^{p^{m+1}} - b$ polinom együtt-hatói K -ban vannak, így van gyöke L -ben, nevezetesen γ , ami automatikusan K' -be esik. Most $\gamma^{p^{m+1}} = a^{p^m}$, ami azt jelenti, hogy $\gamma^p = a$, mivel a p -edik hatványozás injektív p karakterisztikájú testeken. Ezzel beláttuk, hogy K' tökéletes.

A második részhez pedig először megmutatjuk, hogy L tökéletes. Tegyük fel, hogy $a \in L$ nem p -hatvány, és tekintsük $L[\alpha]$ -t, ahol $\alpha^p = a$. Tekintsük $K'[\alpha] \supset K'[\alpha] \supset K'$ -t. Ha $g(x)$ az a minimálpolinomja K' felett, akkor $g(x^p)$ lesz α minimálpolinomja K' felett, mert ez a legkisebb fokú normált polinom, amelynek α gyöke. Ez irreducibilis, de nem szeparábilis, ami ellentmond K' tökéletességének.

Legyen $f(x) \in K'[x]$, például $f(x) = \sum_i a_i x^i$, ahol $a_i \in K'$. Valamely m -re a $\sum_i a_i^{p^m} x^i$ polinom együtt-hatói K -ban lesznek, és így van gyöke L -ben, nevezetesen α . Mivel L tökéletes, írhatjuk $\alpha = \beta^{p^m}$ valamely $\beta \in L$ -re. Most

$$(f(\beta))^{p^m} = \left(\sum_i a_i \beta^i \right)^{p^m} = \sum_i a_i^{p^m} \alpha^i = 0,$$

tehát β gyöke f -nek. □

1.2. Tétel. Minden K testnek van algebrai lezártja.

Bizonyítás. Tekintsük a $K[\dots, x_f, \dots]$ polinomgyűrűt, ahol x_f szimbólumok egy családját indexeljük a $K[x]$ -beli normált irreducibilis f polinomokkal.

Legyen I az $f(x_f)$ polinomok által generált ideálja $K[\dots, x_f, \dots]$ -nek. Ha $1 \in I$, akkor

$$g_1 f_1(X_{f_1}) + \dots + g_n f_n(X_{f_n}) = 1 \quad (K[\dots, x_f, \dots]\text{-ben})$$

valamely $g_i \in K[\dots, x_f, \dots]$ és normált irreducibilis $f_i \in K[X]$ polinomokra. Legyen $L|K$ egy bővítés úgy, hogy minden f_i -nek legyen gyöke L -ben, nevezetesen α_i . Az $K[\dots, x_f, \dots] \rightarrow L$ K -algebra homomorfizmus alatt, amelyre

$$\begin{cases} x_{f_i} \mapsto \alpha_i, & i = 1, \dots, n, \\ x_f \mapsto 0, & f \notin \{f_1, \dots, f_n\} \end{cases}$$

a fenti reláció $0 = 1$ -gyé alakul. Ebből az ellentmondásból arra következtünk, hogy $1 \notin I$. Legyen $\Omega = K[\dots, x_f, \dots]/P$, ahol P egy prímeál, amely tartalmazza I -t (amelynek létezését az ultrafilter-elv biztosítja). Ekkor Ω egy integritási tartomány, amely K -algebra generátorai algebraiak K felett, tehát test. Minden normált, irreducibilis $f \in K[x]$ polinomnak van gyöke Ω -ban, így Ω algebrai lezártja K -nak az előző tétel alapján. $\square$

1.3. Tétel. *Legyen $\Omega|K$ algebrai lezártja és $L|K$ algebrai bővítése. Ekkor létezik $L \rightarrow \Omega$ K -homomorfizmus, és ha L szintén algebrai lezártja K -nek, akkor minden ilyen homomorfizmus izomorfizmus.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $|L : K|$ megszámlálható, azaz $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$. Ekkor kiterjeszthetjük a $K \rightarrow \Omega$ beágyazást $K(\alpha_1)$ -re (α_1 képe legyen a minimálpolinomjának egy gyöke Ω -ban), majd $K(\alpha_1, \alpha_2)$ -re, és így tovább.

A nem megszámlálható esetben a Zorn-lemmát használjuk. Legyen A azon (M, φ_M) párok halmaza, ahol M egy $K \subset M \subset L$ test és φ_M egy $M \rightarrow \Omega$ K -homomorfizmus. Rendezzük A -t úgy, hogy $(M, \varphi_M) \leq (N, \varphi_N)$, ha $M \subset N$ és $\varphi_N|_M = \varphi_M$. Ez A -n egy részbenrendezés. Legyen B egy teljesen rendezett részhalmaza A -nak. Ekkor $M' = \bigcup_{M \in B} M$ résztest L -nek, és definiálhatunk egy $\varphi' : M' \rightarrow \Omega$ homomorfizmust úgy, hogy $\varphi'(x) = \varphi_M(x)$, ha $x \in M$. A (M', φ') pár felső korlátja B -nek A -ban. Így a Zorn-lemma alapján A -nak van egy (M, φ) maximális eleme. Tegyük fel, hogy $M \neq L$. Ekkor létezik egy $\alpha \in L, \alpha \notin M$. Mivel α algebrai M felett, φ -t kiterjeszthetjük $M(\alpha)$ -ra, ami ellentmond M maximalitásának. Tehát $M = L$, és az első állítás bizonyítása kész.

Ha L algebrailag zárt, akkor minden $f \in K[x]$ polinom felbomlik $L[x]$ -ben, és így $\varphi(L)[x]$ -ben is. Legyen $\alpha \in \Omega$, és $f(x)$ az α minimálpolinomja. Ekkor $x - \alpha$ osztója $f(x)$ -nek $\Omega[x]$ -ben, de amint láttuk, $f(x)$ felbomlik $\varphi(L)[x]$ -ben. Az egyértelmű felbontás miatt ez azt jelenti, hogy $\alpha \in \varphi(L)$. $\square$

1.4. Állítás. Legyen $L|K$ testbővítés és legyen $\mathcal{M}$ közbülső testek egy halmaza, a következő tulajdonságokkal: Minden $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ esetén létezik $M \in \mathcal{M}$ úgy, hogy $M_1, M_2 \subset M$. Ekkor $M(\mathcal{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ részteste L -nek

Bizonyítás. A feltétel miatt $M(\mathcal{M})$ elemeinek minden véges részhalmaza benne van egy közös $M \in \mathcal{M}$ testben, így szorzatuk, összegük stb. is $M(\mathcal{M})$ -ben van. $\square$

1.1. Definíció. Az előző állításban szereplő $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ -t irányított uniónak nevezzük

Ezt alkalmazzuk L azon E résztesteinek halmazára, amelyek végesek és szeparábilisek F felett. Mivel bármely két ilyen résztest kompozituma is véges és szeparábilis K felett, így az összes ilyen M uniója, S , részteste L -nek. Ekkor S szeparábilis K felett, és minden L -beli, K felett szeparábilis elem benne van S -ben. Továbbá, mivel egy szeparábilis bővítés szeparábilis bővítése is szeparábilis, így L tisztán inszeparábilis S felett.

1.2. Definíció. Egy L test szeparábilisen zárt, ha minden $L[X]$ -beli nem konstans szeparábilis polinom felbomlik L -ben.

1.3. Definíció. Egy L test szeparábilis lezártja egy K résztestnek, ha szeparábilis és algebrai K felett, valamint szeparábilisen zárt.

1.5. Tétel. Minden testnek van szeparábilis lezártja.

1.6. Tétel. Legyen $M|K$ szeparábilis algebrai bővítése, és $L|K$ szeparábilis algebrai lezártja. Ekkor létezik $M \rightarrow L$ K -homomorfizmus, és ha M szintén szeparábilis lezártja K -nak, akkor minden ilyen homomorfizmus izomorfizmus.

Bizonyítás. Ha lecseréljük a "polinom" kifejezést "szeparábilis polinom"-ra az algebrai lezártakra vonatkozó megfelelő tételek bizonyításaiban, akkor kapunk egy bizonyítást. $\square$

2. Topologikus Csoportok

2.1. Definíció. Egy G halmaz csoport struktúrával és egy topológiával ellátva topologikus csoport, ha a

$$G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto gh$$

$$G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}$$

leképezések folytonosak

Megjegyzés. Legyen x egy topologikus csoport egy eleme. Ekkor az $x_L : G \xrightarrow{g \mapsto xg} G$ leképezés folytonos, mert ez a

$$G \xrightarrow{g \mapsto (a, g)} G \times G \xrightarrow{(g, h) \mapsto gh} G$$

leképezések kompozíciója. Valójában homeomorfizmus, melynek inverze x_L^{-1} . Hasonlóan, $x_R : g \mapsto gx$ és $g \mapsto g^{-1}$ is homeomorfizmusok. Bármely H részcsoportra az xH mellékosztály nyílt vagy zárt attól függően, hogy H nyílt vagy zárt. Mivel H komplementere G -ben az ilyen mellékosztályok uniója, ez azt mutatja, hogy H zárt, ha G nyílt, és nyílt, ha G zárt és véges indexű.

2.2. Definíció. Egy x pont környezetbázisa egy X topologikus térben olyan $\mathcal{N}$ környezetek halmaza, ahol minden x -et tartalmazó nyílt U részhalmaz tartalmaz egy $\mathcal{N}$ -beli N halmazt.

2.1. Állítás. Legyen G egy topologikus csoport, és legyen $\mathcal{N}$ az e egységelem környezetbázisa G -ben. Ekkor

1. minden $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ -hez létezik olyan $N' \in \mathcal{N}$, hogy $e \in N' \subset N_1 \cap N_2$;
2. minden $N \in \mathcal{N}$ -hez létezik olyan $N' \in \mathcal{N}$, hogy $N'N' \subset N$;
3. minden $N \in \mathcal{N}$ -hez létezik olyan $N' \in \mathcal{N}$, hogy $N' \subset N^{-1}$;
4. minden $N \in \mathcal{N}$ és minden $g \in G$ -hez létezik olyan $N' \in \mathcal{N}$, hogy $N' \subset gNg^{-1}$;
5. minden $g \in G$ -hez $\{gN \mid N \in \mathcal{N}\}$ a g környezetbázisa.

Fordítva, ha G egy csoport és $\mathcal{N}$ egy nem üres részhalmazrendszer G -nek, amely teljesíti az első négy feltételt, akkor létezik egy egyértelmű topológia G -n, amelyre az ötödik is teljesül.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{N}$ egy környezetbázis e -ben egy G topologikus csoportban, akkor (2), (3), és (4) rendre a $(g, h) \mapsto gh$, $g \mapsto g^{-1}$, és $h \mapsto ghg^{-1}$ folytonosságának következményei. (1) a definíciókból következik, és (5) abból fakad, hogy g_L homeomorfizmus.

Fordítva, legyen $\mathcal{N}$ egy nem üres részhalmazrendszer egy G csoportnak, amely teljesíti az (1)-(4) feltételeket. Vegyük észre, hogy (1) azt jelenti, hogy e benne van minden $\mathcal{N}$ -beli N -ben. Defináljuk $\mathcal{U}$ -t mint azon U részhalmazok gyűjteményét G -ben, amelyekre minden $g \in U$ -ra létezik egy $N \in \mathcal{N}$, hogy $gN \subset U$. Nyilvánvaló, hogy az üres halmaz és G benne van $\mathcal{U}$ -ban, és az $\mathcal{U}$ -beli halmazok uniója is $\mathcal{U}$ -ban van. Legyen $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, és $g \in U_1 \cap U_2$.

Definíció szerint létezik $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, hogy $gN_1, gN_2 \subset U$. (1) alkalmazásával kapunk egy $N' \in \mathcal{N}$ -t, hogy $gN' \subset U_1 \cap U_2$, ami azt mutatja, hogy $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$. Ebből következik, hogy $\mathcal{U}$ elemei a G nyílt halmazai egy topológiában. Valójában ez az egyetlen topológia, amelyre (5) teljesül.

Most (2) és (4) segítségével megmutatjuk, hogy $(g, g') \mapsto gg'$ folytonos. Láthatóan a $g_1N_1 \times g_2N_2$ halmazok alkotják (g_1, g_2) környezetbázisát $G \times G$ -ben. Ezért adott egy $U \subset G$ nyílt halmaz és egy (g_1, g_2) pár, ahol $g_1g_2 \in U$, meg kell találnunk $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ -t úgy, hogy $g_1N_1g_2N_2 \subset U$. Mivel U nyílt, létezik $N \in \mathcal{N}$, hogy $g_1g_2N \subset U$. Alkalmazzuk (2)-t, hogy kapjunk egy N' -t, amelyre $N'N' \subset N$ ekkor $g_1g_2N'N' \subset U$. De $g_1g_2N'N' = g_1(g_2N'g_2^{-1})g_2N'$, és (4) alkalmazásával kapunk egy $N_1 \in \mathcal{N}$ -t, hogy $N_1 \subset g_2N'g_2^{-1}$.

Végül pedig, (3) és (4) segítségével megmutatjuk, hogy $g \mapsto g^{-1}$ folytonos. Legyen adott egy $U \subset G$ nyílt halmaz és egy $g \in G$, ahol $g^{-1} \in U$, találunk kell egy $N \in \mathcal{N}$ -t, hogy $gN \subset U^{-1}$. Definíció szerint létezik $N \in \mathcal{N}$, hogy $g^{-1}N \subset U$. Most $N^{-1}g \subset U^{-1}$, és (3) alkalmazásával kapunk egy $N' \in \mathcal{N}$ -t, hogy $N'g \subset U^{-1}$, majd (4) felhasználásával kapunk egy $N'' \in \mathcal{N}$ -t, hogy $gN'' \subset g(g^{-1}N'g) \subset U^{-1}$. $\square$

2.2. Állítás. *Legyen $L|K$ Galois-bővítés, ekkor $L|M$ is Galois minden M közbülső testre.*

Bizonyítás. Legyen $f(x)$ egy irreducibilis polinom $M[x]$ -ben, amelynek a gyöke L -ben. Az a $g(x)$ minimál polinomja K felett különböző elsőfokú tényezőkre bomlik $L[x]$ -ben. Mivel f osztja g -t $M[x]$ -ben, szintén különböző elsőfokú tényezőkre kell bomlania $L[x]$ -ben. $\square$

2.3. Állítás. *Legyen $L|K$ Galois-bővítés, és legyen M egy közbülső test. Ekkor minden $M \rightarrow L$ K -homomorfizmus kiterjeszthető egy $L \rightarrow L$ K -izomorfizmussá.*

Bizonyítás. Ugyanaz a Zorn-lemmás érvelés, mint a (1.3) tétel bizonyításában, mutatja, hogy minden $M \rightarrow L$ K -homomorfizmus kiterjeszthető egy $\psi : L \rightarrow L$ K -homomorfizmussá. Legyen $a \in L$, és legyen f a K feletti minimál polinomja. Ekkor L pontosan $\deg(f)$ gyökét tartalmazza f -nek, és így $\psi(L)$ is. Ezért $a \in \psi(L)$, ami azt mutatja, hogy ψ szürjektív. $\square$

2.3.1. Következmény. *Legyen $L|K$ Galois-bővítés, és legyen M egy közbülső test. Ha M invariáns $\text{Aut}(L|K)$ alatt, akkor $M|K$ Galois.*

Bizonyítás. Legyen $f(x)$ egy irreducibilis polinom $F[x]$ -ben, amelynek a gyöke M -ben. Mivel L Galois K felett, $f(x)$ -nek $n = \deg(f)$ különböző gyöke van L -ben, $a_1, \dots, a_n$. Van egy $K(a) \rightarrow K(a_i) \subset L$ K -izomorfizmus, amely a -t a_i -be képezi (mindketten f felbontási testei), és ez kiterjeszthető egy $L \rightarrow L$

K -izomorfizmus. Mivel M invariáns $\text{Aut}(L|K)$ alatt, ez azt mutatja, hogy a_i M -ben van. $\square$

2.4. Állítás. Legyen $L|K$ Galois-bővítés, és legyen $G = \text{Aut}(L|K)$. Bármely H véges részhalmazára L -nek, legyen

$$G(H) = \{g \in G \mid gh = h \text{ minden } h \in H\text{-ra}\}.$$

Létezik egy egyedi topologikus csoport struktúra G -n, amelyre a $G(H)$ halmazok e nyílt környezetbázisát alkotják. Ehhez a topológiához a G -invariáns H halmazokra a $G(H)$ halmazok az e környezetbázisát alkotják nyílt normális részcsoportokkal.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a $G(H)$ halmazok családjára teljesül (1,2,3,4) a (2.1.) állításból. (1) teljesül, mert $G(H_1) \cap G(H_2) = G(H_1 \cup H_2)$. Teljesül (2) és (3), mert minden $G(H)$ halmaz egy csoport. Legyen H egy véges részhalmaza L -nek. Ekkor $K(H)$ véges bővítése K -nak, és így csak véges sok $K(H) \rightarrow L$ K -homomorfizmusa van. Mivel $g_1H = g_2H$, ha $g_1|_{K(H)} = g_2|_{K(H)}$, ez azt mutatja, hogy $\bar{H} = \bigcup_{g \in G} gH$ véges. Most $g\bar{H} = \bar{H}$ minden $g \in G$ -re, és ebből következik, hogy $G(\bar{H})$ normális G -ben. Ezért, $gG(\bar{H})g^{-1} = G(\bar{H}) \subset G(H)$, amiből következik (4). Ez a második állítást is bizonyítja. $\square$

2.3. Definíció. Az előző állításban $\text{Aut}(L|K)$ -en definiált topológiát Krull-topológiának nevezzük és $\text{Aut}(L|K)$ -t ezzel ellátva $L|K$ $\text{Gal}(L|K)$ Galois-csoportjának nevezzük.

2.4. Definíció. A K_s Galois-csoportját K felett K abszolút Galois-csoportjának nevezzük.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy K abszolút Galois-csoportja csak egy belső automorfizmus erejéig van definiálva: legyen K' egy másik szeparábilis algebrai lezártja K -nak; egy $K' \rightarrow K_s$ izomorfizmus választása meghatároz egy $\text{Gal}(K'|K) \rightarrow \text{Gal}(K_s|K)$ izomorfizmust, egy második $K' \rightarrow K_s$ izomorfizmus az elsőtől egy $\sigma \in \text{Gal}(K_s|K)$ elemmel tér el, és az általa definiált $\text{Gal}(K'|K) \rightarrow \text{Gal}(K_s|K)$ izomorfizmus az elsőtől $\text{inn}(\sigma)$ -val különbözik.

Megjegyzés. Ha S egy véges G -invariáns halmaz, akkor $K(S)$ véges bővítése K -nak, ami invariáns G alatt, és így Galois K felett. Ezért,

$$\{\text{Gal}(L|M) \mid M \text{ véges és Galois } K \text{ felett}\}$$

nyílt normális részcsoportokból álló környezetbázisát alkotja 1 -nek.

2.5. Állítás. Legyen L Galois K felett. Minden M közbülső testre, amely véges és Galois K felett, a

$$\sigma \mapsto \sigma|_M : \text{Gal}(L|K) \rightarrow \text{Gal}(M|K)$$

leképezés egy folytonos szűrjekció (diszkrét topológia $\text{Gal}(M|K)$ -en).

Bizonyítás. Legyen $\sigma \in \text{Gal}(M|K)$, és tekintsük egy $M \rightarrow L$ K -homomorfizmusként. Ekkor σ kiterjeszthető egy $L \rightarrow L$ K -izomorfizmussá, ami azt mutatja, hogy a leképezés szűrjektív. M minden véges S generátorrendszerére K felett, $\text{Gal}(L|M) = G(S)$, ami azt mutatja, hogy $1_{\text{Gal}(M|K)}$ ősképe nyílt G -ben. Ugyanez igaz $\text{Gal}(M|K)$ minden elemére. $\square$

3. Végtelen Galois Bővítések

3.1. Lemma. Legyen $L | K$ egy akár végtelen Galois bővítés. Ekkor minden véges $M | K$ közbülső test beágyazható egy Galois közbülső testbe.

Bizonyítás. Legyen M egy ilyen közbülső test. Mivel minden véges, szeparábilis bővítés egyszerű, így $M = K(\alpha)$ alakú egy megfelelő α elemre. $K(\alpha)$ -t pedig beágyazhatjuk α minimálpolinomjának felbontási testébe, ami K felett egy Galois bővítés $\square$

3.1. Definíció. $(G_\alpha, \phi_{\alpha\beta})$ Csoportok egy (filtrált) rendszere, ha

- áll egy részben rendezett $(A, \leq)$ halmazból, amely irányított abban az értelemben, hogy minden $(\alpha, \beta) \in A$ -hoz létezik valamilyen $\gamma \in A$, hogy $\alpha \leq \gamma$ és $\beta \leq \gamma$;
- minden $\alpha \in A$ -hoz tartozik egy G_α csoport;
- minden $\alpha \leq \beta$ -hoz tartozik egy $\phi_{\alpha\beta} : G_\alpha \rightarrow G_\beta$ homomorfizmus úgy, hogy $\phi_{\alpha\gamma} = \phi_{\alpha\beta} \circ \phi_{\beta\gamma}$, ha $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

3.2. Definíció. A rendszer inverz limesze azon részcsoportha a $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ direkt szorzatnak, amely azokból a (g_α) sorozatokból állnak, amelyekre $\phi_{\alpha\beta}(g_\alpha) = g_\beta$ teljesül minden $\alpha \leq \beta$ -ra. $\varprojlim G_\alpha$ -val jelöljük.

3.3. Definíció. Provéges csoportnak hívjuk véges csoportok egy rendszerének az inverz limesét, egy p prímre egy pro- p csoport p -csoportok rendszerének inverz limesze.

Példák. 1. Egy véges csoport provéges. Bármely irányított indexhalmazra és bármely $G_\alpha = G$, $\phi_{\alpha\beta} = \text{id}_G$ választással az inverz limesz G lesz.

2. Legyen G egy csoport, és legyen A a véges indexű normálosztók indexhalmaza, részbenrendezve a következő relációval: $H_\alpha \leq H_\beta \Leftrightarrow H_\alpha \supset H_\beta$. Minden $H_\alpha \leq H_\beta$ normális részcsoport párra van egy $\phi_{\alpha\beta} : G/H_\beta \rightarrow G/H_\alpha$ faktorcsoporthoz leképezés. Ennek a rendszernek az inverz limesét G provéges telítésének nevezzük, és $\hat{G}$ -vel jelöljük. Létezik egy kanonikus $G \rightarrow \hat{G}$ homomorfizmus.
3. Legyen $G = \mathbb{Z}$ az előző példában. Ekkor A éppen a pozitív egészek halmaza, mivel minden véges indexű részcsoport generálható valamilyen pozitív egész számmal. A részbenrendezés az oszthatósági reláció által létesített: $m|n$ akkor és csak akkor, ha $m\mathbb{Z} \supset n\mathbb{Z}$. A provéges telítés legyen $\hat{\mathbb{Z}}$. $\hat{\mathbb{Z}}$ egyben gyűrű is, a szorzást a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -k szorzásával képezzük.
4. Az előző példában, ha csak valamilyen p prím hatványait vesszük m helyett, akkor az előzőleg vizsgált inverz rendszer egy részrendszerét kapjuk. Ezt kényelmesebb a p kitevőjével indexelni. Ezzel a konvencióval a részbenrendezés a szokásos (teljes) rendezés lesz $\mathbb{Z}_{>0}$ -n. Az inverz limes $\mathbb{Z}_p$, a p -adikus egészek additív csoportja. Ez egy kommutatív pro- p -csoport. A kínai maradéktétel alapján a $\mathbb{Z}_p$ csoportok direkt szorzata minden p prímre izomorf lesz $\hat{\mathbb{Z}}$ -al. A $\mathbb{Z}_p$ csoportok természetes gyűrűszerkezettel is rendelkeznek, és ez az izomorfizmus valójában gyűrűizomorfizmus.

3.2. Állítás. Legyen $L|K$ egy Galois bővítés. $L|K$ véges Galois közbülső testeinek Galois csoportjai a $\phi_{MN} : \text{Gal}(M|K) \rightarrow \text{Gal}(N|K)$ homomorfizmusokkal egy inverz rendszert alkot, amelynek az inverz limesze izomorf $\text{Gal}(L|K)$ -val. Speciálisan $\text{Gal}(L|K)$ egy provéges csoport.

Bizonyítás. Az állítás első részéhez csak a definíciót kell ellenőrizni. Az izomorfizmusról szóló állításhoz definiáljuk a $\phi : \text{Gal}(L|K) \rightarrow \prod_M \text{Gal}(M|K)$ (M véges Galois közbülső test) izomorfizmust úgy, hogy L egy σ K -automorfizmusának a képe a megfelelő közbülső testekre való megszorításainak a direktszorzata legyen. Az, hogy $\sigma(M) \subset M$ abból következik, hogy σ a K abszolút Galois csoportjának az eleme. ϕ injektív hiszen, ha egy σ automorfizmus nem fixálna egy K_s belüli α elemet, akkor egy $K(\alpha)$ -t tartalmazó véges Galois bővítésre való megszorítása nem az identitás. Másrészt a Galois elmélet főtétele szerint ϕ képe $\varprojlim \text{Gal}(M|K)$ -ban van. Valójában az egész $\varprojlim \text{Gal}(M|K)$, hiszen vegyünk belőle egy (σ_M) elemet és definiáljunk egy σ K -automorfizmusát M -nek úgy, hogy $\sigma(\alpha) = \sigma_M(\alpha)$ valamely $K(\alpha)$ -t tartalmazó M véges Galois bővítésre. Hogy σ jól definiált, az abból következik, hogy a σ_M automorfizmusok kompatibilis rendszerét alkotják, végül σ képe (σ_M) lesz $\varprojlim \text{Gal}(M|K)$ -ban. $\square$

3.2.1. Következmény. Az előző állításban szereplő inverz határérték komponenseire való projekció $\text{Gal}(L|K) \rightarrow \text{Gal}(M|K)$ szürjekciókat ad minden véges $M|K$ Galois közbülső testre.

Példák. 1. Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test, és $\mathbb{F}_s$ egy szeparábilis lezártja $\mathbb{F}$ -nek. Jól ismert, hogy minden $n > 0$ egészre a $\mathbb{F}_s|\mathbb{F}$ bővítésnek van egy egyértelmű $\mathbb{F}_n|\mathbb{F}$ közbülső teste, amelyre $|\mathbb{F}_n : \mathbb{F}| = n$. Továbbá $\mathbb{F}_n|\mathbb{F}$ Galois bővítés, és $\text{Gal}(\mathbb{F}_n|\mathbb{F}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ahol egy generátort a $\alpha \mapsto \alpha^p$ Frobenius-automorfizmus által kapunk. Ezen az izomorfizmuson keresztül a $\text{Gal}(\mathbb{F}_{mn}|\mathbb{F}) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{F}_n|\mathbb{F})$ projekciók megfelelnek a $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ projekciónak. Ebből következik, hogy $\text{Gal}(\mathbb{F}_s|\mathbb{F}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$, ahol a jobb oldali egység elem a Frobenius-automorfizmusnak felel meg a bal oldalon.

2. Tekintsük most a $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$ végtelen bővítést, amelyet úgy kapunk, hogy $\mathbb{Q}$ -hoz hozzávesszük minden p -edik egységgyököt egy rögzített p prímre. Tudjuk, hogy ez egy Galois-bővítés. Ez a $\mathbb{Q}(\mu_p) \subset \mathbb{Q}(\mu_{p^2}) \subset \mathbb{Q}(\mu_{p^3}) \subset \dots$ véges közbülsőtestek uniója, ahol μ_{p^r} a p^r -edik egységgyökök csoportja. Mivel $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^r})|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$, így $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})|\mathbb{Q})$ a $\varprojlim (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}_p^\times$, a $\mathbb{Z}_p$ gyűrű egységeinek csoportja. Ismeretes, hogy ez a csoport izomorf $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ -vel, ha $p > 2$, és $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ -vel, ha $p = 2$.

3.3. Lemma. Legyen $(G_\alpha, \phi_{\alpha\beta})$ véges csoportok egy inverz rendszere, a diszkrét topológiával ellátva. Az inverz limesz $\varprojlim G_\alpha$ egy zárt topologikus részcsoportha a $\prod G_\alpha$ szorzatnak.

Bizonyítás. Vegyünk egy $g = (g_\alpha) \in \prod G_\alpha$ elemet. Ha $g \notin \varprojlim G_\alpha$, akkor meg kell mutatnunk, hogy van egy $\varprojlim G_\alpha$ -tól diszjunkt nyílt környezete. A feltétel szerint valamilyen α és β esetén $\phi_{\alpha\beta}(g_\beta) \neq g_\alpha$. Most vegyük a $\prod G_\alpha$ azon részalmazát, amely az összes olyan elemből áll, amelynek α -adik komponense g_α és β -adik komponense g_β . Ez egy megfelelő választás, mivel nyílt (a G_α diszkrétisége és a topológiai szorzat definíciója miatt) és tartalmazza g -t, de nem metszi $\varprojlim G_\alpha$ -t. $\square$

3.4. Definíció. Egy topologikus tér teljesen széteső, ha összefüggő komponensei az egy pontú halmazok.

3.3.1. Következmény. Egy provéges csoport kompakt és teljesen széteső. Továbbá, a nyílt részcsoporthai pontosan a véges indexű zárt részcsoporthok.

Bizonyítás. A véges diszkrét csoportok kompaktak, és kompakt csoportok szorzata is az. Így az inverz limesz kompaktsága következik a lemmából,

hiszen kompakt terek zárt alterei kompaktak. A teljes szétesés a konstrukcióból következik. A második állításhoz vegyünk észre, hogy minden U nyílt részcsoport zárt, mivel a komplementere az U mellékosztályainak diszjunkt uniója, amelyek maguk is nyíltak (a $U \mapsto gU$ leképezés homeomorfizmus egy topológiai csoportban). A G kompaktsága miatt ezekből véges sok van. Megfordítva, egy véges indexű zárt részcsoport nyílt, mivel a komplementere a véges sok diszjunkt mellékosztály uniója, amelyek szintén zártak. $\square$

3.4. Tétel (Krull). *Legyen M a $L|K$ Galois-bővítés egy közbülső teste. Ekkor $\text{Gal}(L|M)$ egy zárt részcsoportja $\text{Gal}(L|K)$ -nak. Továbbá, a $M \mapsto H := \text{Gal}(L|M)$ és $H \mapsto M := L^H$ leképezések egy tartalmazás fordító bijekciót adnak a $L \supset M \supset K$ résztestek és a $H \subset G$ zárt részcsoportok között. Egy $M|K$ résztest akkor és csak akkor Galois K felett, ha $\text{Gal}(L|M)$ normális részcsoportja $\text{Gal}(L|K)$ -nak. Ebben az esetben van egy természetes $\text{Gal}(M|K) \cong \text{Gal}(L|K)/\text{Gal}(L|M)$ izomorfizmus.*

Bizonyítás. Vegyünk egy L -ben lévő véges szeparábilis $M|K$ bővítést. A (3.1) lemma szerint ez beágyazható egy L -ben lévő véges Galois $N|K$ bővítésbe. Ekkor $\text{Gal}(N|K)$ a $\text{Gal}(L|K)$ standard véges faktorai közül való, és $\text{Gal}(N|M)$ -t részcsoportként tartalmazza. Legyen U_M a $\text{Gal}(N|M)$ inverz képe a $\text{Gal}(L|K) \rightarrow \text{Gal}(N|K)$ természetes projekciónál. Mivel a projekció folytonos és $\text{Gal}(N|K)$ diszkrét topológiával van ellátva, U_M nyílt. Azt állítjuk, hogy $U_M = \text{Gal}(L|M)$. Valóban, $U_M \subset \text{Gal}(L|M)$, mivel U_M minden eleme rögzíti M -t. Másrészt, $\text{Gal}(L|M)$ képe a projekciónál benne van $\text{Gal}(N|M)$ -ben, így a fordított tartalmazás is igaz. Most ha $M|K$ tetszőleges részteste $L|K$ -nak, akkor írjuk fel véges $M_\alpha|K$ résztestek uniójaként. Az előbb bizonyítottak szerint minden $\text{Gal}(L|M_\alpha)$ nyílt részcsoportja $\text{Gal}(L|K)$ -nak zárt is a (3.3.1) következmény miatt. Metszetük éppen $\text{Gal}(L|M)$, ami így zárt részcsoport, az általa helyben hagyott test pontosan M , mivel L Galois M felett.

Fordítva, adott egy $H \subset G$ zárt részcsoport, az fixál valamilyen $M|K$ bővítést, és így benne van $\text{Gal}(L|M)$ -ben. Az egyenlőség igazolásához legyen σ egy $\text{Gal}(L|M)$ -beli elem, és vegyünk egy nyílt U_N környezet bázisát az egységelemnek $\text{Gal}(L|M)$ -ben, ami egy $N|M$ Galois-bővítésnek felel meg. Most $H \subset \text{Gal}(L|M)$ szűrjektíven képződik $\text{Gal}(N|M)$ -re a természetes projekciónál, különben képe $\text{Gal}(N|M)$ -ben egy M -nél szigorúan nagyobb résztestet fixálna a véges Galois-elmélet szerint, ami ellentmondana annak, hogy H minden $N \setminus M$ -beli elemet mozgat. Speciálisan, H -nak van olyan eleme, aminek ugyan az a képe $\text{Gal}(N|M)$ -ben, mint σ . Tehát H tartalmaz egy elemet a σU_N mellékosztályból, és mivel U_N tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy σ benne van H lezártjában $\text{Gal}(L|M)$ -ben. De H feltétel szerint zárt,

így az állítást beláttuk. A véges bővítésekre vonatkozó állítás a fentiekből adódik a 3.3.1 következmény fényében.

Végül, a Galois-résztestek és normális részcsoporthoz közti kapcsolat ugyanúgy bizonyítható, mint a véges esetben. $\square$

4. Kategória elmélet

Ebben a fejezetben átvesszük a kategória elmélet néhány alapfogalmát és alapvető állítását.

4.1. Definíció. *Egy kategória objektumokból és a köztük lévő morfizmusokból áll, adott két A, B objektum a $\mathcal{C}$ kategóriában, az A -ból B -be menő morfizmusok egy halmazt alkotnak, amit $\text{Hom}(A, B)$ -vel jelölünk. Ezekre a következő feltételek vonatkoznak.*

1. Minden A objektumra a $\text{Hom}(A, A)$ halmaz tartalmaz egy kitüntetett id_A elemet, az A identitás morfizmusát.

2. Adott két morfizmushoz $\phi \in \text{Hom}(B, C)$ és $\psi \in \text{Hom}(A, B)$, létezik egy $\phi \circ \psi \in \text{Hom}(A, C)$ morfizmus, a ϕ és ψ kompozíciója. A morfizmusok kompozíciójára két axióma vonatkozik:

- Adott $\phi \in \text{Hom}(A, B)$ esetén $\phi \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ \phi = \phi$.
- (Asszociativitás) $\lambda \in \text{Hom}(A, B)$, $\psi \in \text{Hom}(B, C)$, $\phi \in \text{Hom}(C, D)$ esetén $(\phi \circ \psi) \circ \lambda = \phi \circ (\psi \circ \lambda)$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy azt nem követeljük meg, hogy a kategória objektumai halmazt alkossanak.

4.2. Definíció. *Egy $\phi \in \text{Hom}(A, B)$ morfizmus izomorfizmus, ha létezik $\psi \in \text{Hom}(B, A)$, amelyre $\psi \circ \phi = \text{id}_A$ és $\phi \circ \psi = \text{id}_B$; az A és B közötti izomorfizmusok halmazát $\text{Isom}(A, B)$ -vel jelöljük.*

4.3. Definíció. *Egy $\mathcal{C}$ kategória $\mathcal{C}^{\text{op}}$ oppozit kategóriáját úgy képezzük, hogy a $\mathcal{C}$ objektumai között lévő morfizmusokat megfordítjuk. Tehát minden $\mathcal{C}$ -beli (A, B) objektumpárra létezik egy bijekció a $\mathcal{C}$ -beli $\text{Hom}(A, B)$ és a $\mathcal{C}^{\text{op}}$ -beli $\text{Hom}(B, A)$ halmazok között, amely megőrzi az identitás morfizmusokat és a kompozíciót.*

Ha az objektumok maguk is halmazt alkotnak, a kategóriához hozzárendelhetünk egy irányított gráfot, ahol az objektumok a csúcsok, és minden morfizmusnak megfelel egy irányított él két objektum között. Így könnyű elképzelni, mi egy kategória $\mathcal{C}^{\text{op}}$ oppozit kategóriája: ez "egy kategória, amiben ugyan azok az objektumok, de a nyilak megfordulnak".

4.4. Definíció. Két kategória, $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ szorzata a $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ kategória, amelynek objektumai (C, D) párok, ahol $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$, és morfizmusai a $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ -beli morfizmusokból képzett (ϕ_C, ϕ_D) párok. Véges számú kategória szorzatát hasonlóan definiáljuk.

4.5. Definíció. Egy kategória részkategóriája egy olyan $\mathcal{D}$ kategória, amely a $\mathcal{C}$ néhány objektumából és morfizmusából áll. Teljes részkategória, ha bármely két $\mathcal{D}$ -beli objektumra $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, azaz minden $\mathcal{C}$ -beli morfizmus A és B között $\mathcal{D}$ -beli morfizmus.

Példák. 1. A halmazok *Sets* kategóriája (a halmazelméleti leképezésekkel).

2. Az Abel-csoportok *Ab* kategóriája (csoporthomomorfizmusokkal).

3. A topologikus terek *Top* kategóriája (folytonos leképezésekkel).

Mind az *Ab*, mind a *Top* természetes részkategóriái a *Sets*-nek, de nem teljes részkategóriák. Az *Ab* viszont teljes részkategóriája az összes csoport kategóriájának.

4.6. Definíció. Egy F (kovariáns) funktor két kategória, $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ között egy $A \mapsto F(A)$ szabályt jelent az objektumokra, és egy $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ leképezést a morfizmusok halmazain, amely az identitás morfizmusokat identitás morfizmusokba képezi és megőrzi a kompozíciót. Egy kontravariáns funktor $\mathcal{C}$ -ből $\mathcal{D}$ -be egy funktor $\mathcal{C}$ -ből $\mathcal{D}^{\text{op}}$ -ba.

Példák. 1. Az identitás funktor az $\text{id}_{\mathcal{C}}$ funktor bármely $\mathcal{C}$ kategóriára, amely minden objektumot és morfizmust fixen hagy.

2. A funktorok további alapvető példáit úgy kapjuk, hogy rögzítünk egy A objektumot egy $\mathcal{C}$ kategóriában, és tekintjük a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, _)$ kovariáns funktort (ill. a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(_, A)$ kontravariáns funktort) $\mathcal{C}$ -ből a *Sets* kategóriába, amely egy B objektumot a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ($\text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$) halmazba képezi, és egy $\phi : B \rightarrow C$ morfizmust a $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ ($\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$) halmazelméleti leképezésbe, amelyet a ϕ -vel való kompozíció indukál.

3. A *Top* kategórián értelmezett halmazértékű funktor, amely egy topológiai teret annak összefüggőségi komponenseinek a halmazába képezi. Mivel egy folytonos leképezés topológiai terek között az összefüggőségi komponenseket összefüggőségi komponensekbe képezi ez láthatóan tényleg egy funktor.

4.7. Definíció. Ha F és G két funktor $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ között, egy Φ természetes transzformáció F és G között egy $\Phi_A : F(A) \rightarrow G(A)$ morfizmusok gyűjteménye $\mathcal{D}$ -ben minden $A \in \mathcal{C}$ objektumra úgy, hogy minden $\phi : A \rightarrow B$ morfizmusra $\mathcal{C}$ -ben a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\Phi_A} & G(A) \\ F(\phi) \downarrow & & \downarrow G(\phi) \\ F(B) & \xrightarrow{\Phi_B} & G(B) \end{array}$$

1. ábra.

4.8. Definíció. A Φ természetes izomorfizmus, ha minden Φ_A izomorfizmus. Ebben az esetben $F \cong G$ -t írunk.

4.9. Definíció. Két kategória, $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ ekvivalens, ha létezik két funktor, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ és $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, és két természetes izomorfizmus, $\Phi : F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{D}}$ és $\Psi : G \circ F \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}}$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a G funktor kvázinverze F -nek (és F kvázinverze G -nek).

4.10. Definíció. Ha léteznek olyan F és G funktorok, amelyekre $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$ és $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ izomorfak.

4.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ anti-ekvivalensek (ill. anti-izomorfak), ha $\mathcal{C}$ ekvivalens (izomorf) $\mathcal{D}^{\text{op}}$ -pal.

Könnnyen belátható, hogy a kategóriák ekvivalenciája reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Továbbá, az anti-ekvivalencia látszólag aszimmetrikus definíciója könnyen szimmetrikusnak bizonyul.

4.12. Definíció. Egy $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktor hűséges, ha bármely két A és B objektumra $\mathcal{C}$ -ben az F által indukált $F_{AB} : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(B))$ leképezés injektív. Teljesen hűséges, ha minden F_{AB} leképezés bijektív.

Az F funktor lényegében szűrjektív, ha $\mathcal{D}$ minden objektuma izomorf valamely $F(A)$ alakú objektummal.

4.1. Lemma. $\mathcal{C}$ és $\mathcal{D}$ akkor és csak akkor ekvivalensek, ha létezik egy teljesen hűséges és lényegében szűrjektív $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktor.

Bizonyítás. Az "akkor" rész bizonyításához rögzítsünk minden $\mathcal{C}_2$ -beli V objektumhoz egy $i_V : F(A) \xrightarrow{\sim} V$ izomorfizmust valamely $\mathcal{C}_1$ -beli A objektummal. A második feltétel miatt létezik ilyen izomorfizmus. Tekintsük azt a

$G : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ funktort, amely minden V objektumot $\mathcal{C}_2$ -ben a fent rögzített A -ba képez, és minden $\phi : V \rightarrow W$ morfizmust $G(\phi) = F_{AB}^{-1}(i_W^{-1} \circ \phi \circ i_V)$ -be, ahol $\phi \in \text{Hom}(V, W)$, $B = G(W)$, és F_{AB} a teljes hűségesség definíciójában szereplő bijekció. Az $i_V : F(G(V)) \xrightarrow{\sim} V$ leképezések a konstrukció miatt egy $\Phi : F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}_2}$ izomorfizmust létesítenek. Egy $\Psi : G \circ F \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}_1}$ izomorfizmus megalkotásához először funktoriális $\Psi_A : G(F(A)) \rightarrow A$ leképezésekre van szükségünk minden $\mathcal{C}_1$ -beli A objektumhoz. Az F teljes hűségessége miatt elegendő $F(\Psi_A) : F(G(F(A))) \rightarrow F(A)$ leképezéseket konstruálnunk, és $F(\Psi_A)$ -nak vehetjük $\text{id}_{F(A)} \circ \Phi_{F(A)}$ szerinti egyértelmű ősképét. Hasonló konstrukcióval kapunk egy $A \rightarrow G(F(A))$ leképezést, amely Ψ_A inverze. Mivel a konstrukció funktoriális A -ban, így egy természetes izomorfizmust kapunk.

A "csak akkor" rész bizonyításához tegyük fel, hogy létezik egy $G : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ funktor és $\Phi : F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}_2}$ és $\Psi : G \circ F \xrightarrow{\sim} \text{id}_{\mathcal{C}_1}$ természetes izomorfizmusok. A lényegében szűrjeaktivitás azonnal látható, hiszen egy adott $\mathcal{C}_2$ -beli C objektum, Φ révén izomorf $F(G(C))$ -vel. A teljes hűségesség igazolásához rögzítsünk két tetszőleges A, B objektumot $\mathcal{C}_1$ -ben, és tekintsük a következő leképezéssorozatot:

$$\text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(F(A), F(B)) \rightarrow \text{Hom}(G(F(A)), G(F(B))) \rightarrow \text{Hom}(A, B)$$

amelyet rendre F_{AB} , $G_{F(A), F(B)}$ és Ψ indukál. Ezek kompozíciója az identitás, ami azt jelenti, hogy F_{AB} bijekció. $\square$

Megjegyzés. Hasonló jellemzést adhatunk anti-ekvivalens kategóriákra is teljesen hűséges és lényegében szűrjektív kontravariáns funktorokkal.

Példa. Tekintsünk egy K testet és a Vecf_K kategóriát, amely a K feletti véges dimenziós vektorterekből áll, morfizmusok a lineáris leképezésekkel, mint morfizmusokkal. Megmutatjuk, hogy ez a kategória ekvivalens a következő $\mathcal{C}$ kategóriával. A $\mathcal{C}$ objektumai a nemnegatív egész számok, az $n, m > 0$ egészek közötti morfizmusok halmaza pedig az összes $n \times m$ -es K feletti mátrix. Itt az identitás morfizmusokat az identitásmátrixok adják, a kompozíciót pedig a mátrixszorzás. Minden $n \geq 0$ esetén vannak $0 \rightarrow n$ és $n \rightarrow 0$ közötti kanonikus morfizmusok.

Az kívánt ekvivalencia igazolásához vegyünk egy $\mathcal{C}'$ segéd részkategóriát, és megmutatjuk, hogy ez ekvivalens mindkét kategóriával. Ez a $\mathcal{C}'$ kategória a Vecf_K azon teljes részkategóriája lesz, amelyet a K^n standard vektorterek feszítenek ki. A $\mathcal{C}'$ és Vecf_K ekvivalenciája azonnal következik az előző lemma feltételeit alkalmazva a $\mathcal{C}'$ beágyazására Vecf_K -ba. Az első feltétel azonnali, hiszen $\mathcal{C}'$ -t teljes részkategóriának vettük, a második pedig azért teljesül, mert minden véges dimenziós K feletti vektortér izomorf valamely K^n -nel.

Nézzük $\mathcal{C}'$ és $\mathcal{C}$ ekvivalenciáját. Defináljunk egy $F : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ funktort úgy, hogy K^n -t n -be képezi, és egy $K^n \rightarrow K^m$ morfizmust a mátrixába a standard bázisban. Az, hogy F valóban funktor abból következik, hogy két lineáris leképezés, ϕ és ψ kompozíciójának mátrixa a ϕ és ψ mátrixainak szorzata. Az F^{-1} inverz funktort úgy kapjuk, hogy ezt az eljárást megfordítjuk. Könnyen ellenőrizhető, hogy ebben az esetben $F \circ F^{-1}$ és $F^{-1} \circ F$ tényleg megegyeznek a megfelelő identitás funktorokkal.

4.13. Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ egy kategória. Egy $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$ funktor reprezentálható, ha létezik egy $C \in \mathcal{C}$ objektum és egy $F \cong \text{Hom}(C, _)$ természetes izomorfizmus. A C objektumot reprezentáló objektumnak hívjuk.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha C és D objektumai $\mathcal{C}$ -nek, akkor minden $D \rightarrow C$ morfizmus létesít egy $\text{Hom}(C, _) \rightarrow \text{Hom}(D, _)$ természetes leképezést a kompozíció révén.

4.2. Lemma (Yoneda-Lemma). Ha $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$ funktorok amelyeket a C , illetve D objektumok reprezentálnak, akkor minden $\Phi : F \rightarrow G$ természetes leképezést egy egyedi $D \rightarrow C$ morfizmus létesít az előbb látott módon.

Bizonyítás. A $\Phi_C : F(C) \rightarrow G(C)$ morfizmus a funktorok reprezentálhatósága miatt átírható egy $\text{Hom}(C, C) \rightarrow \text{Hom}(D, C)$ leképezésként. Az $\text{id}_C \in \text{Hom}(C, C)$ identitás morfizmus képe Φ_C szerint egy $\psi : D \rightarrow C$ morfizmussal azonosítható és ez indukálja Φ -t, hiszen egy A objektumra minden $F(A) \cong \text{Hom}(C, A)$ -beli elem azonosítható egy $\phi : C \rightarrow A$ morfizmussal. Vegyük észre, hogy ϕ mint $F(A)$ -beli elem nem más, mint $\text{id}_C \in \text{Hom}(C, C) \cong F(C)$ képe $F(\phi)$ révén. Mivel Φ egy természetes leképezést, azt kapjuk, hogy $\Phi_A(\phi) = G(\phi)(\psi)$, ami a $G(A) \cong \text{Hom}(D, A)$ izomorfizmus mellett pontosan $\phi \circ \psi$ -nak felel meg. $\square$

4.2.1. Következmény. Egy F reprezentálható funktor reprezentáló objektuma izomorfia erejéig egyértelmű.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy C és D is reprezentálja F -et, és alkalmazzuk a Yoneda-lemmát F identitására. $\square$

5. Véges Étale Algebrák

Ebben a fejezetben induljunk ki egy alaptestből, legyen ez K , a szeparábilis és algebrai lezártjai legyenek rendre $K_s \subset \bar{K}$. Az abszolút Galois csoportját jelöljük $\text{Gal}(K)$ -val. Legyen L egy véges szeparábilis bővítése K -nak. Itt L nem feltétlenül a K_s részteste. Tudjuk, hogy L -nek csak véges sok K -algebra

homomorfizmusa van $\overline{K}$ -ban, ezek száma $|L : K|$. Ezeknek a homomorfizmusoknak a képei benne vannak K_s -ben. Így tekinthetjük a $\text{Hom}_K(L, K_s)$ véges halmazt, amelyen a $\text{Gal}(k)$ csoport balról hat a $(g, \phi) \mapsto g \circ \phi$ szabály szerint, ahol $g \in \text{Gal}(K)$ és $\phi \in \text{Hom}_K(L, K_s)$.

5.1. Definíció. Egy G topológiai csoport hatása egy X topológiai téren folytonos, ha az

$$\begin{aligned} f : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

leképezés folytonos.

5.1. Lemma. Az előző baloldali hatása $\text{Gal}(K)$ -nak a $\text{Hom}_K(L, K_s)$ halmazon folytonos és tranzitív, tehát a $\text{Hom}_K(L, K_s)$ mint $\text{Gal}(K)$ -halmaz izomorf valamely nyílt részcsoport szerinti bal mellékosztály terével. Ha L Galois-bővítése K -nak, akkor ez a mellékosztálytér valójában egy nyílt normálosztó szerinti faktor.

Bizonyítás. Egy ϕ elem U stabilizátora a $\text{Gal}(K)$ azon elemeiből áll, amelyek rögzítik $\phi(L)$ -t. Így a (3.4) Tétel szerint U nyílt $\text{Gal}(K)$ -ban, vagyis $\text{Gal}(K)$ folytonosan hat $\text{Hom}_K(L, K_s)$ -en. Ha L -t egy f minimál polinomú α elem generálja, akkor minden $\phi \in \text{Hom}_K(L, K_s)$ az α elemet f egy gyökébe képezi K_s -ben. Mivel a $\text{Gal}(K)$ tranzitívan permutálja ezeket a gyököket, a $\text{Gal}(K)$ -hatás tranzitív a $\text{Hom}_K(L, K_s)$ -en. Ez azt is mutatja, hogy a $g \circ \phi \mapsto gU$ leképezés izomorfizmust létesít a $\text{Hom}_K(L, K_s)$ és a $U \backslash \text{Gal}(K)$ mellékosztálytér között. Ha U normális, akkor a $\text{Gal}(K)/U$ faktort kapjuk. A (3.4) Tétel szerint ez pontosan akkor történik, ha L Galois-bővítése K -nak. $\square$

Egy kontravariáns funktort kaphatunk a véges szeparábilis bővítések kategóriájából a véges, folytonos baloldali $\text{Gal}(K)$ -hatással ellátott halmazok kategóriájába, ha vesszük K egy másik véges szeparábilis M bővítését. Ekkor minden $\phi : L \rightarrow M$ K -homomorfizmus indukál egy $\text{Hom}_K(M, K_s) \rightarrow \text{Hom}_K(L, K_s)$ leképezést a ϕ -vel való kompozícióval. Ez a leképezés $\text{Gal}(K)$ -ekvivariáns így tényleg funktort kapunk.

5.2. Tétel. Legyen K egy test, és rögzítsük egy K_s szeparábilis lezártját. A kontravariáns funktor, amely egy véges szeparábilis $L|K$ bővítést a véges $\text{Hom}_K(L, K_s)$ $\text{Gal}(K)$ -halmazba képez, egy anti-ekvivalenciát ad a véges szeparábilis bővítések kategóriája és a véges, folytonos és tranzitív baloldali $\text{Gal}(K)$ -hatással ellátott halmazok kategóriája között. Itt a Galois-bővítések a $\text{Gal}(K)$ -halmazoknak felelnek meg, amelyek izomorfak a $\text{Gal}(K)$ valamely véges faktorával.

Bizonyítás. Ellenőriznünk kell, hogy a $\text{Hom}_K(-, K_s)$ funktor teljesíti az (4.1) Lemma feltételeit. A lényegében szürjektivitás igazolásához meg kell mutatnunk, hogy minden folytonos tranzitív baloldali $\text{Gal}(K)$ -halmaz S izomorf valamely $\text{Hom}_K(L, K_s)$ -sel. Ehhez vegyünk egy $s \in S$ pontot. Az s stabilizátora egy U_s nyílt részcsoporthoz $\text{Gal}(K)$ -ban, amely egy L véges szeparábilis bővítését fixálja K -nak. Most definiáljuk a $\text{Hom}_K(L, K_s) \rightarrow S$ $\text{Gal}(K)$ -halmaz leképezést a $g \circ i \mapsto gs$ szabály szerint, ahol i a természetes beágyazás $L \rightarrow K_s$ és g a G tetszőleges eleme. Ez a leképezés jól definiált, mivel i stabilizátora pontosan U_s , és könnyen látható, hogy izomorfizmus, valójában mindkét $\text{Gal}(K)$ -halmaz izomorf a $U_s \backslash \text{Gal}(K)$ mellékosztálytérrel az által, hogy i -t (és s -t) U_s -be képzik a leképezések.

A teljes hűségesség igazolásához meg kell mutatnunk, hogy adott L, M véges szeparábilis bővítések esetén a $L \rightarrow M$ K -homomorfizmusok halmaza bijektív módon megfeleltethető a $\text{Hom}_K(M, K_s) \rightarrow \text{Hom}_K(L, K_s)$ $\text{Gal}(K)$ -leképezések halmazával. Mivel mind a $\text{Hom}_K(M, K_s)$, mind a $\text{Hom}_K(L, K_s)$ tranzitív $\text{Gal}(K)$ -halmazok, egy $f \in \text{Gal}(K)$ -leképezést közöttük egy rögzített $\phi \in \text{Hom}_K(M, K_s)$ képe meghatározza. Mivel $f \in \text{Gal}(K)$ -ekvivariáns, a ϕ stabilizátorának elemei rögzítik $f(\phi)$ -t is, így a $U \subset V$ tartalmazás áll fenn, ahol V a $f(\phi)$ stabilizátora. Az imént látottak szerint, ha vesszük az U és V által fixált résztesteit, akkor a K_s résztesteinek egy beágyazását kapjuk, amely nem más, mint a $f(\phi)(L) \subset \phi(M)$ bővítés. Ha $\psi : \phi(M) \rightarrow M$ jelöli a ϕ inverzét, akkor könnyen látható, hogy $\psi \circ f(\phi)$ az egyértelmű f -et indukáló elem $\text{Hom}_K(L, M)$ -ben.

Az állítás utolsó része az előző lemmából következik. $\square$

Ha a nem feltétlenül tranzitív hatással rendelkező $\text{Gal}(k)$ -halmazokra szeretnénk kiterjeszteni az antiekvivalenciát, akkor a véges szeparábilis bővítéseket lecserélhetjük a következőre.

5.2. Definíció. Egy A véges dimenziós K -algebra étale K felett, ha izomorf K véges sok szeparábilis bővítésének direkt szorzatával.

Ahogy korábban, a $\text{Gal}(K)$ -hatása K_s -en indukál egy bal hatást $\text{Hom}_K(A, K_s)$ -en.

5.3. Tétel. [A Galois-elmélet főtétele – Grothendieck-féle változat] Legyen K egy test. Ekkor a funktor, amely egy A véges étale K algebrát a véges $\text{Hom}_K(A, K_s)$ halmazba képez, egy antiekvivalenciát létesít a véges étale K -algebrák kategóriája és a véges, folytonos baloldali $\text{Gal}(K)$ -hatással ellátott halmazok kategóriája között. Itt a szeparábilis testbővítések a tranzitív $\text{Gal}(K)$ -hatással rendelkező halmazoknak felelnek meg, a Galois-bővítések pedig azon $\text{Gal}(K)$ -halmazoknak, amelyek izomorfak $\text{Gal}(K)$ véges faktoraival.

Bizonyítás. Ez az előző tételből következik azzal, hogy A egy adott $A = \prod M_i$ felbontása és egy $\phi \in \text{Hom}_K(A, K_s)$ elem esetén a ϕ leképezés pontosan egy M_i -t képez injektíven K_s -be. Ha $\phi(M_i) \neq 0$, akkor mivel M_i egy test, M_i injektíven képződik K_s -be, másrészt egy $M_i \times M_j$ szorzat nem képezhető injektíven K_s -be, mivel K_s nullosztó mentes. Így $\text{Hom}_K(A, K_s)$ a $\text{Hom}_K(M_i, K_s)$ halmazok diszjunkt uniójává bomlik. Ez valójában a $\text{Gal}(K)$ orbitok általi partíciója. Hasonló okokból, egy másik adott $A' = \prod M'_j$ étale K -algebrára, egy $A \rightarrow A'$ morfizmus azonosítható a $M_i \rightarrow M'_j$ morfizmusok egy gyűjteményével, amelyek viszont bijektív módon megfelelnek a megfelelő $\text{Gal}(K)$ -halmazok morfizmusainak az előző tétel szerint.

□

Megjegyzés. A tétel azonnal általánosítható tetszőleges $L|K$ Galois-bővítésre, ha csak azokra a véges étale K -algebrákat tekintjük, amelyek K résztesteinek szorzatai, ekkor a $A \mapsto \text{Hom}_K(A, K)$ funktor ekvivalenciát létesít a véges folytonos baloldali $\text{Gal}(L|K)$ -halmazok kategóriájával.

5.4. Lemma. Egy véges dimenziós kommutatív algebra egy $\mathbb{F}$ test felett akkor és csak akkor izomorf $\mathbb{F}$ véges bővítéseinek direkt összegével, ha redukált.

Bizonyítás. Az egyik irányú állítás nyilvánvaló, hiszen testek direkt összege redukált.

A másik irány bizonyításához az A véges dimenziós F -algebrát felbonthatjuk felbonthatatlan F -algebrák véges direkt szorzatára, így feltehetjük, hogy A maga is felbonthatatlan. Ekkor A -nak nem lehet más idempotens eleme, mint 0 és 1, hiszen ha $e \neq 0, 1$ idempotens lenne, akkor $A \cong Ae \times A(1-e)$ egy nemtriviális direkt szorzatfelbontás lenne, mivel $e(1-e) = e - e^2 = 0$ a feltétel miatt. A lemma belátásához elég, ha megmutatjuk, hogy minden nem nulla $a \in A$ elem invertálható, és így A egy test. Mivel A véges dimenziós F felett, az $(a) \supset (a^2) \supset \dots (a^n) \supset \dots$ ideálok csökkenő sorozatának stabilizálnia kell, és így valamely m -re $a^m = a^{m+1}b$ teljesül egy megfelelő b elemre. Ezt a formulát iterálva $a^n = a^{n+i}b^i$ minden pozitív egész i -re, speciálisan $a^n = a^{2n}b^n$. Így $a^n b^n = (a^n b^n)^2$, azaz $a^n b^n$ idempotens. Az előzőek alapján két eset lehetséges. Ha $a^n b^n = 0$, akkor $a^n = (a^n)(a^n b^n) = 0$, ami ellentmondás, mivel $a \neq 0$ a feltétel szerint és A redukált. Ellenkező esetben $a^n b^n = 1$, és így a invertálható.

□

5.5. Állítás. Legyen A egy véges dimenziós kommutatív K -algebra. Ekkor a következők ekvivalensek:

1. A étale.
2. $A \otimes_K \overline{K}$ izomorf véges sok $\overline{K}$ direkt összegével.

3. $A \otimes_K \bar{K}$ redukált.

Bizonyítás. Ha az előző lemmát alkalmazzuk $A \otimes_K \bar{K}$ -ra láthatjuk, hogy a második és harmadik állítás ekvivalens. Ezért elég csak az első két feltétel ekvivalenciáját bizonyítanunk. (1. $\implies$ 2.) megmutatásához, elég a véges szeparábilis L bővítéseit tekinteni K -nak. Ekkor $L = K[x]/(f)$ valamely f polinommal, amely a $\bar{K}$ -ban $(x - \alpha_i)$ tényezőkre bomlik. Így a következő izomorfizmus-láncot kapjuk:

$$L \otimes_K \bar{K} \cong \bar{K}[x]/(f) = \bar{K}[x]/(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n) \cong \prod_{i=1}^n \bar{K}[x]/(x - \alpha_i) \cong \prod_{i=1}^n \bar{K},$$

ahol a középső izomorfizmus a Kínai maradéktétel következménye.

Most (1 $\implies$ 2) megmutatásához legyen A' a nilpotens elemek által generált ideál szerinti faktora A -nak. A lemma szerint A' véges testbővítések direkt összege K felett. Mivel $\bar{K}$ redukált, minden $A \rightarrow \bar{K}$ K -algebra homomorfizmus faktorizál A' -n keresztül, és így annak egy L felbontási tényezőjén keresztül. Az $L \rightarrow \bar{K}$ K -algebra homomorfizmusok száma legfeljebb $|L : K|$, egyenlőség pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha $L|K$ szeparábilis, tehát $\text{Hom}_K(A, \bar{K})$ legfeljebb $\dim_K(A)$ elemet tartalmaz, egyenlőség pedig akkor és csak akkor áll fenn, ha $A = A'$ és A étale. Annak igazolásához, hogy egyenlőség valóban fennáll vegyük észre, hogy van egy bijekció a

$$\text{Hom}_K(A, \bar{K}) \cong \text{Hom}_{\bar{K}}(A \otimes_K \bar{K}, \bar{K}).$$

véges halmazok között.

Ennek igazolásához vegyük észre, hogy egy adott $A \rightarrow \bar{K}$ K -algebra homomorfizmus esetén, $\bar{K}$ -val tenzor szorozva és a szorzás leképezéssel komponálva kapunk egy $A \otimes_K \bar{K} \rightarrow \bar{K} \otimes_K \bar{K} \rightarrow \bar{K}$ $\bar{K}$ -homomorfizmust. Másrészt a $K \rightarrow \bar{K}$ beágyazás indukál egy $A \cong A \otimes_K K \rightarrow A \otimes_K \bar{K}$ K -homomorfizmust, amely a $A \otimes_K \bar{K} \rightarrow \bar{K}$ homomorfizmusokkal komponálva egy leképezést ad a jobb oldali halmazról a bal oldalra, amely nyilvánvalóan inverze az előző konstrukciónak. A feltétel most azt jelenti, hogy a jobb oldali halmaznak $\dim_{\bar{K}}(A \otimes_K \bar{K})$ eleme van. De $\dim_{\bar{K}}(A \otimes_K \bar{K}) = \dim_K A$, így az állítást beláttuk. $\square$

5.3. Definíció. A harmadik feltételt teljesítő véges dimenziós K -algebrákat szeparábilis K -algebráknak nevezzük.

6. Galois-fedések

Most rögzítsünk egy X teret, amelyről feltesszük, hogy *lokálisan összefüggő* (azaz minden pontnak van összefüggő nyílt környezetekből álló bázisa).

6.1. Definíció. Legyen X egy topologikus tér. Egy X feletti tér egy Y topologikus tér, egy $p : Y \rightarrow X$ folytonos leképezéssel.

6.2. Definíció. Egy adott $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedés automorfizmusai $\tilde{X}$, mint X feletti térnek az automorfizmusai, azaz a p vetítéssel kompatibilis topologikus automorfizmusok.

Ezek a kompozícióra nézve csoportot alkotnak, amelyet $\text{Aut}(Y|X)$ -szel jelölünk. Vegyük észre, hogy minden $x \in X$ pontra $\text{Aut}(Y|X)$ a $p^{-1}(x)$ rostot önmagára képezi, így $p^{-1}(x)$ -en van egy természetes $\text{Aut}(Y|X)$ hatás.

6.1. Állítás. Legyen $p : \tilde{X} \rightarrow X$ egy fedés, Z egy összefüggő topologikus tér, $f, g : Z \rightarrow \tilde{X}$ folytonos leképezések, amelyekre $p \circ f = p \circ g$. Ha van olyan $z \in Z$ pont, amelyre $f(z) = g(z)$, akkor $f = g$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $z \in Z$ rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, $\tilde{x} = f(z) = g(z)$. Vegyük egy V összefüggő nyílt környezetét $p(\tilde{x})$ -nek, amely teljesíti a fedés definíciójának feltételét, ilyen V létezik, mert X lokálisan összefüggő, és legyen $U_i \cong V$ a $p^{-1}(V)$ $\tilde{x}$ -t tartalmazó komponense. A folytonosság miatt f -nek és g -nek z valamilyen W nyílt környezetét U_i -be kell képeznie. Mivel $p \circ f = p \circ g$ és p homeomorfizmus U_i és V között, f -nek és g -nek meg kell egyeznie W -n. Hasonló érveléssel belátható, hogy ha $f(z') \neq g(z')$ valamilyen $z' \in Z$ pontra, akkor f és g z' egy egész nyílt környezetét különböző $p^{-1}(V)$ komponensekre képi. Így a $\{z \in Z : f(z) = g(z)\}$ halmaz nem üres, nyílt és zárt Z -ben, tehát Z összefüggősége miatt ez az egész Z . $\square$

Egy fontos speciális eset a következő.

6.2. Lemma. Egy összefüggő $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedés ϕ automorfizmusa, amelynek van fix pontja, triviális.

Bizonyítás. A lemma az előző tételből adódik $Z = \tilde{X}$, $f = \text{id}$ és $g = \phi$ választással. $\square$

6.3. Állítás. Ha $p : \tilde{X} \rightarrow X$ egy összefüggő fedés, akkor $\text{Aut}(\tilde{X}|X)$ fedőhatás $\tilde{X}$ -n.

Bizonyítás. Legyen $\tilde{x} \in \tilde{X}$, és legyen $x = p(\tilde{x})$. Legyen V x összefüggő nyílt környezete úgy, hogy $p^{-1}(V)$ olyan diszjunkt nyílt halmazok uniója, mint ami

fedés definíciójában szerepel. Az egyik ilyen, mondjuk U_i , tartalmazza $\tilde{x}$ -t. Ekkor U_i teljesíti a fedőhatás definíciójának feltételét, hiszen egy nemtriviális $\phi \in \text{Aut}(\tilde{X}|X)$ U_i -t izomorfán képezi valamilyen U_j -re a fedés automorfizmusának definíciója szerint. Mivel $\tilde{X}$ összefüggő, a 6.2 lemma alkalmazható, és azt mutatja, hogy $\phi \neq \text{id}_{\tilde{X}}$ esetén $i \neq j$. $\square$

6.4. Állítás. *Ha a G csoport fedőhatás egy összefüggő $\tilde{X}$ téren, akkor a $p_G : \tilde{X} \rightarrow G \backslash \tilde{X}$ fedés automorfizmus csoportja pontosan G .*

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy G része $\text{Aut}(\tilde{X}|(G \backslash \tilde{X}))$ -nek. Most tekintsünk egy ϕ elemet az utóbbi csoportban, és nézzük a hatását egy tetszőleges $\tilde{x} \in \tilde{X}$ pontra. Mivel p_G rostjai pontosan G orbitjai, találhatunk egy $g \in G$ elemet úgy, hogy $\phi(\tilde{x}) = g\tilde{x}$. A 6.2 lemmát alkalmazva a $\phi \circ g^{-1}$ automorfizmusra azt kapjuk, hogy $g = \phi$. $\square$

Megjegyzés. *Egy összefüggő $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedés esetén képezhetjük $\tilde{X}$ faktort $\text{Aut}(\tilde{X}|X)$ hatásával. A fedés automorfizmusainak definíciójából azonnal következik, hogy a p projekció felbontható folytonos leképezések kompozíciójaként:*

$$\tilde{X} \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}|X) \backslash \tilde{X} \xrightarrow{\bar{p}} X$$

ahol az első leképezés a természetes leképezés.

6.3. Definíció. *Egy $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedést Galois-fedésnek nevezünk, ha $\tilde{X}$ összefüggő, és a fenti $\bar{p}$ leképezés homeomorfizmus.*

6.5. Állítás. *Egy összefüggő $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedés akkor és csak akkor Galois-fedés, ha $\text{Aut}(\tilde{X}|X)$ hatása tranzitív p minden rostján.*

Bizonyítás. $\text{Aut}(\tilde{X}|X) \backslash \tilde{X}$ alaphalmaza definíció szerint $\tilde{X}$ orbitjainak halmaza az $\text{Aut}(\tilde{X}|X)$ hatásra, így a $\bar{p}$ leképezés akkor és csak akkor bijektív, ha minden ilyen orbit megegyezik p egy teljes rostjával, azaz ha $\text{Aut}(\tilde{X}|X)$ hatása tranzitív minden roston. $\square$

Megjegyzés. *Valójában egy összefüggő $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedés esetén elég, ha $\text{Aut}(\tilde{X}|X)$ hatása tranzitív egy roston. Ebben az esetben $\text{Aut}(\tilde{X}|X) \backslash \tilde{X}$ egy összefüggő fedése X -nek, ahol az egyik rost egyetlen elemből áll; így homeomorf X -szel.*

Példa. *Tekintsük a $X = \mathbb{R}^n / \Lambda$ lineáris tóruszt, ahol $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$ egy rács, és legyen $m > 1$ egész. Az m -mel való szorzás $\mathbb{R}^n$ -en leképezi Λ -t önmagába, és így indukál egy $X \rightarrow X$ leképezést. Ez egy Galois-fedés $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$ csoporttal.*

6.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy adott egy összefüggő $q : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ fedés és egy $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ folytonos leképezés. Ha $q \circ f : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ fedés, akkor $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ is fedés.*

Bizonyítás. Legyen $\tilde{x}$ egy pontja $\tilde{X}_2$ -nek, $x = q(\tilde{x})$, és V x egy összefüggő nyílt környezete, amely teljesíti a fedés definíciójának feltételét mind $p = q \circ f$, mind q esetén, ami a $p^{-1}(V) = \coprod U_i$ és $q^{-1}(V) = \coprod V_j$ felbontásokat eredményezi. Itt $f(U_i)$ minden U_i -re egy összefüggő részhalmaz $\tilde{X}_2$ -ben, amelynek a q általi vetítése V , tehát van olyan j , hogy $f(U_i) \subset V_j$. De ez valójában homeomorfizmus, mivel mindkét oldal homeomorf V -vel q által. Ez azt jelenti, hogy $f(\tilde{X}_1)$ nyílt $\tilde{X}_2$ -ben.

Most a lemma bizonyításához először megmutatjuk, hogy f szürjektív. Ehhez elég belátni $\tilde{X}_2$ összefüggősége és $f(\tilde{X}_1)$ nyíltsága miatt, hogy $\tilde{X}_2 \setminus f(\tilde{X}_1)$ nyílt $\tilde{X}_2$ -ben. Ha $\tilde{x} \in \tilde{X}_2 \setminus f(\tilde{X}_1)$ egy pontja, és V $x = q(\tilde{x})$ egy olyan környezete, mint az előbb, akkor a $q^{-1}(V)$ teljes $\tilde{x}$ -et tartalmazó V_j komponense, diszjunkt kell legyen $f(\tilde{X}_1)$ -től. Valóban, különben az előző érvelés szerint az egész V_j benne lenne $f(\tilde{X}_1)$ -ben, ami ellentmondás. Ez bizonyítja $\tilde{X}_2 \setminus f(\tilde{X}_1)$ nyíltságát, és a lemma bizonyításának befejezéséhez csak annyit kell észrevenni, hogy a fenti V_j ősképe f által diszjunkt U_i halmazok uniója. $\square$

6.7. Tétel. *Legyen $p : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ egy Galois-fedés. Minden $H \leq G = \text{Aut}(\tilde{X}_1|X)$ részcsoportra a p projekció indukál egy $\bar{p}_H : H \backslash \tilde{X}_1 \rightarrow X$ természetes leképezést, amely $H \backslash \tilde{X}_1$ -t X fedésévé teszi.*

Fordítva, ha $\tilde{X}_2 \rightarrow X$ egy összefüggő fedés, amelyre a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{f} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p & \downarrow q \\ & & X \end{array}$$

2. ábra.

akkor $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ egy Galois-fedés, és valójában $\tilde{X}_2 \cong H \backslash \tilde{X}_1$ a $H = \text{Aut}(\tilde{X}_1|\tilde{X}_2)$ részcsoportra G -ben. A $H \mapsto H \backslash \tilde{X}_1$ és $\tilde{X}_2 \mapsto \text{Aut}(\tilde{X}_1|\tilde{X}_2)$ leképezések bijekciót létesítenek G részcsoportjai és a fenti közbülső fedések között. A $q : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ fedés akkor és csak akkor Galois-fedés, ha H normális részcsoportja G -nek, ebben az esetben $\text{Aut}(\tilde{X}_2|X) \cong G/H$.

Bizonyítás. Mivel $H \leq \text{Aut}(\tilde{X}_1|X)$, a p vetítés felbontható $\tilde{X}_1 \xrightarrow{p_H} H \backslash \tilde{X}_1 \xrightarrow{\bar{p}_H} X$ kompozícióként. Itt $\bar{p}_H$ folytonos, mert p folytonos, és lokális homeomorfizmus. Itt elég azt látni, hogy elég kis $V \subset X$ halmazok felett $p^{-1}(V) \cong V \times F$,

ahol F egy diszkrét topologikus tér H -hatással. Az $\bar{p}_H^{-1}(V) \subset H \backslash \tilde{X}_1$ nyílt halmaz ekkor izomorf lesz V és F H -orbitjainak diszkrét halmazának szorzatával, tehát ebből az következik, hogy $\bar{p}_H : H \backslash \tilde{X}_1 \rightarrow X$ fedés.

Fordítva, alkalmazzuk az előző lemmát annak igazolására, hogy $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ fedés. Ekkor $H = \text{Aut}(\tilde{X}_1 | \tilde{X}_2)$ egy részcsoportha G -nek, tehát a fedés Galois voltának igazolásához a (6.5) állítás szerint elég ellenőrizni, hogy H tranzitívan hat f minden rostján. Vegyünk egy $\tilde{x} \in \tilde{X}_2$ pontot, és legyenek $\tilde{x}_1$ és $\tilde{x}_2$ két pontja $f^{-1}(\tilde{x})$ -nek. Mindketten benne vannak a $p^{-1}(q(\tilde{x}))$ rostban, tehát mivel $p : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ Galois-fedés, van olyan $\phi \in G$, hogy $\tilde{x}_1 = \phi(\tilde{x}_2)$. Készen vagyunk, ha megmutatjuk, hogy $\phi \in H$, ami ekvivalens azzal, hogy az $S = \{\tilde{x} \in \tilde{X} : f(\tilde{x}) = f(\phi(\tilde{x}))\}$ részhalmaz megegyezik Y egészével. De ez következik a (6.1) állításból, ha azt $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ f és $g = f \circ \phi$ -re alkalmazzuk.

Nyilvánvaló, hogy a fenti két konstrukció inverze egymásnak, így csak az utolsó állítás marad, amelyet hasonlóan bizonyítunk, mint a testek Galois-elméletében a megfelelő állítást. Az egyik irány egyszerű: ha H normális részcsoportha G -nek, akkor G/H hatása természetes $\tilde{X}_2 = H \backslash \tilde{X}_1$ -on, és ez a hatás megtartja a q vetítést. Így kapunk egy $G/H \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}_2 | X)$ csoporthomomorfizmust, amelyről látható, hogy injektív. De $(G/H) \backslash \tilde{X}_2 \cong G \backslash \tilde{X}_1 \cong X$, tehát $G/H \cong \text{Aut}(\tilde{X}_2 | X)$ és $q : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ Galois-fedés. Fordítva, tegyük fel, hogy $\tilde{X}_2 \rightarrow X$ Galois-fedés. Először megmutatjuk, hogy $G = \text{Aut}(\tilde{X}_1 | X)$ minden ϕ eleme indukál egy $\tilde{X}_2$ automorfizmust X felett. Más szóval, szükségünk van egy $\psi : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_2$ automorfizmusra, amelyre a következő diagram kommutatív:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\phi} & \tilde{X}_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{X}_2 & & \tilde{X}_2 \\ q \downarrow & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{id} & X \end{array}$$

3. ábra.

Ehhez vegyünk egy $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ pontot, aminek $x = (q \circ f)(\tilde{x}_1)$ a képe X -ben. A diagram kommutativitása miatt $f(\tilde{x}_1)$ és $f(\phi(\tilde{x}_1))$ benne vannak q ugyanazon $q^{-1}(x)$ rostjában. Mivel $\text{Aut}(\tilde{X}_2 | X)$ tranzitívan hat q rostja-in, van egy $\psi \in \text{Aut}(\tilde{X}_2 | X)$ automorfizmus, amelyre $\psi(f(\tilde{x}_1)) = f(\phi(\tilde{x}_1))$. Valójában ψ az egyetlen ilyen tulajdonságú elem $\text{Aut}(\tilde{X}_2 | X)$ -ben, mert ha $\lambda \in \text{Aut}(\tilde{X}_2 | X)$ egy másik ilyen elem, akkor a (6.2) lemma szerint $\psi \circ \lambda^{-1}$

az identitás. Azt állítjuk, hogy ψ a keresett leképezés, azaz a $\psi \circ f$ és $f \circ \phi$ leképezések megegyeznek, hiszen mindkettő folytonos leképezés az összefüggő $\tilde{X}_q$ térből $\tilde{X}_2$ -be, amelyek egybeesnek az $\tilde{x}_1$ pontban, és ráadásul a q -val való kompozíciójuk egyenlő, tehát az állítás következik a 6.1 állításból. A $\phi \mapsto \psi$ leképezés valójában egy $G \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}_2|X)$ csoport-homomorfizmus. A magja $H = \text{Aut}(\tilde{X}_1|\tilde{X}_2)$, amely így normális részcsoport G -ben. $\square$

6.4. Definíció. Adott $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ és $\alpha \in \pi_1(X, x)$, melyet egy $f : [0, 1] \rightarrow X$ út reprezentál, ahol $f(0) = f(1) = x$. Defináljuk $\alpha\tilde{x} := \tilde{f}(1)$ -et, ahol $\tilde{f}$ az út-felemelési lemma szerinti egyértelmű emelése f -nek $\tilde{X}$ -be az $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$ feltétel mellett. A Homotópia-felemelési lemma szerint $\alpha\tilde{x}$ nem függ f választásától, és konstrukció szerint $p^{-1}(x)$ -ben van. Ez egy bal oldali hatása a $\pi_1(X, x)$ csoportnak a $p^{-1}(x)$ -re: $(\alpha \cdot \beta)\tilde{x} = \alpha(\beta\tilde{x})$ minden $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x)$ esetén. Ezt nevezzük a monodrómia hatásnak a $p^{-1}(x)$ roston.

6.5. Definíció. Rögzítsünk egy X teret és egy $x \in X$ pontot. Defináljuk a Fib_x funktort a fedések kategóriájából a bal $\pi_1(X, x)$ hatással rendelkező halmazok kategóriájába úgy, hogy egy $p : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ fedéshez a $p^{-1}(x)$ rostot rendeljük.

Ez valóban egy funktor, mivel egy fedések közötti $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ morfizmus definíció szerint megőrzi az x feletti rostokat, és az x -en átmenő zárt utak egyértelmű emelését $\tilde{x} \in \tilde{X}_1$ -ből kiindulva az $f(\tilde{x})$ -ből kiinduló egyértelmű emelésekbe viszi $\tilde{X}_2$ -ben, az emelés egyértelműsége miatt.

6.6. Definíció. X lokálisan egyszeresen összefüggő, ha minden pontnak van egyszeresen összefüggő nyílt környezetekből álló bázisa.

6.8. Tétel. Legyen X összefüggő és lokálisan egyszeresen összefüggő topológikus tér egy $x \in X$ bázisponttal. Ekkor az Fib_x funktor reprezentálható egy $\tilde{X}_x \rightarrow X$ fedéssel.

Bizonyítás. Először konstruáljuk meg az $\tilde{X}_x$ teret. A $\tilde{X}_x$ pontjai az x -ből kiinduló utak homotópiaosztályai. A π projekció definiálásához minden $\tilde{y} \in \tilde{X}_x$ ponthoz választunk egy $f : [0, 1] \rightarrow X$ utat, amire $f(0) = x$, amely reprezentálja $\tilde{y}$ -t, és legyen $\pi(\tilde{X}_x) = f(1) = y$. Ez egy jól definiált leképezés, mivel a homotóp utaknak definíció szerint ugyanaz a végpontjuk. Ezután definiáljuk a $\tilde{X}_x$ topológiáját úgy, hogy egy $\tilde{y}$ pont nyílt környezeteinek bázisát a következő $\tilde{U}$ halmazok alkotják: $\pi(\tilde{y})$ egy egyszeresen összefüggő U környezetéből indulunk ki, ha $f : [0, 1] \rightarrow X$ egy út, amely reprezentálja $\tilde{y}$ -t, akkor $\tilde{U}_{\tilde{x}}$ azon utak homotópiaosztályainak halmaza, amelyeket úgy kapunk, hogy f homotópiaosztályát hozzáfűzzük valamilyen $g : [0, 1] \rightarrow X$ út homotópiaosztályához, ahol $g(0) = y$ és $g([0, 1]) \subset U$. Megjegyezzük, hogy mivel U

egyszeresen összefüggő, két ilyen g azonos végpontok mellett azonos homotópiaosztályba tartozik. Így képletesen szólva $\tilde{U}$ úgy kapható, hogy az y -ba érkező utak homotópiaosztályait "folytatjuk" U más pontjaiba. Ez valóban nyílt környezetek bázisát adja $\tilde{y}$ -nak, mivel adott két $\tilde{U}_{\tilde{y}}$ és $\tilde{V}_{\tilde{y}}$ környezet esetén $\tilde{U}_{\tilde{y}} \cap \tilde{V}_{\tilde{y}}$ tartalmaz egy $\tilde{W}_{\tilde{y}}$ -t valamilyen y -t tartalmazó, $U \cap V$ -ben lévő egyszeresen összefüggő W környezetre. Szintén azonnal látható, hogy π folytonos ezzel a topológiával. Egy y pont egyszeresen összefüggő környezetének π szerinti inverz képe a $\tilde{U}_{\tilde{y}}$ nyílt halmazok diszjunkt uniója lesz minden $\tilde{y}$ inverz képére y -nak. Így megkaptunk X egy fedését. Végül megjegyezzük, hogy van egy "univerzális elem" $\tilde{x}$ a $\pi^{-1}(x)$ rostban, amely a konstans út homotópiaosztályának felel meg.

Most pedig megmutatjuk, hogy a fent konstruált $\tilde{X}_x \rightarrow X$ fedés reprezentálja a Fib_x funktort. Ez azt jelenti, hogy egy $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedés esetén minden $\tilde{x}$ pont a $p^{-1}(x)$ rostban kanonikusan és funktorálisan meg kell feleljen egy $\pi : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}$ morfizmusnak X felett. A $\pi_{\tilde{x}}$ -t a következőképpen definiáljuk: egy adott $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_x$ pontot, amelyet egy $f : [0, 1] \rightarrow X$ út reprezentál, elküldjük $\tilde{f}(1)$ -be, ahol $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ az egyértelmű emelése f -nek X -be $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$ mellett, melynek létezését az Útfelemelési lemma garantálja. A Homotópia-felemelési lemma azt mondja, hogy ez a leképezés jól definiált, és láthatóan egy fedőleképezés. Az $\tilde{x} \mapsto \pi_{\tilde{x}}$ leképezés bijekció $p^{-1}(x)$ és a $\text{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X})$ halmaz között, egy inverzt pedig úgy kapunk, hogy egy ϕ morfizmust elküldünk az $\tilde{x}_0$ univerzális elem $\phi(\tilde{x}_0)$ képére. Végül, a fenti bijekció funktorális. Egy adott $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ fedőleképezésre, amely $\tilde{x}$ -t egy $\tilde{x}' \in \tilde{X}'$ pontba viszi, az indukált $\text{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X}) \rightarrow \text{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X}')$ leképezés $\pi_{\tilde{x}}$ -t $\pi_{\tilde{x}'}$ -be viszi, mivel ezek a leképezések $\tilde{x}_0$ -t rendre $\tilde{x}$ -be és $\tilde{x}'$ -be viszik. $\square$

A $\tilde{X}_x$ fedés függ a bázispont választásától, és egy univerzális elemnek nevezett kanonikus elemmel van ellátva a $\pi^{-1}(x)$ rostban. Definíció szerint a $\pi : \tilde{X}_x \rightarrow X$ -ből egy rögzített $p : \tilde{X} \rightarrow X$ -be menő leképezések bijektíven (és funktorálisan) megfeleltethetők a $p^{-1}(x) \subset \tilde{X}$ rost pontjainak. Speciálisan, mivel $\tilde{X}_x$ maga is egy fedése X -nek π révén, van egy $\text{Fib}_x(\tilde{X}_x) \cong \text{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X}_x)$ kanonikus izomorfizmus, ahol Hom_X az X feletti terek közötti leképezések halmazát jelöli. Ezen izomorfizmuson keresztül az $\tilde{X}_x$ identitása egy $\tilde{x}_0$ kanonikus elemnek felel meg a $\pi^{-1}(x)$ rostban. Ez az univerzális elem. Most egy tetszőleges $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedés és $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ elem esetén a $\pi_{\tilde{x}} : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}$ fedőleképezés, amely $\tilde{x}$ -nek felel meg az $\text{Fib}_x(\tilde{X}) \cong \text{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X})$ izomorfizmuson keresztül, $\tilde{x}_0$ -et $\tilde{x}$ -be viszi a következő diagram kommutativitása miatt.

Vegyük észre, hogy $\tilde{X}_x$ egy adott $\phi : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}_x$ automorfizmus mint X fedése esetén, a ϕ -vel való kompozíció bijekciót létesít a $\text{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X})$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X}_x) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Fib}_x(\tilde{X}_x) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Fib}_x(\tilde{X})
\end{array}$$

4. ábra.

halmazon önmagára minden $\tilde{X}$ fedésre. Így kapunk egy *jobb oldali* hatást a $\mathrm{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X}) \cong \mathrm{Fib}_x(\tilde{X})$ halmazon az $\mathrm{Aut}(\tilde{X}_x|X)$ *bal oldali* hatásából $\tilde{X}_x$ -en. Hogy ezt össze tudjuk hasonlítani a monodromia hatással, ami bal oldali, bevezetjük a következő fogalmat:

6.7. Definíció. Egy G csoport esetén az *oppozit csoport* G^{op} egy csoport ugyanazon az alaphalmazon, mint G , de a szorzást $(g, h) \mapsto hg$ szerint definiáljuk.

Megjegyzés. $(G^{op})^{op} = G$, és G kanonikusan izomorf G^{op} -vel a $g \mapsto g^{-1}$ leképezésen keresztül. Ezzel $\mathrm{Aut}(\tilde{X}_x|X)$ jobb hatása $\tilde{X}_x$ -en $\mathrm{Aut}(\tilde{X}_x|X)^{op}$ bal hatásává válik.

6.8. Definíció. Az X topologikus tér *lokálisan útösszefüggő*, ha minden pontnak van útösszefüggő nyílt környezetekből álló bázisa

6.9. Lemma. Egy egyszeresen összefüggő és lokálisan útösszefüggő tér fedése triviális.

Bizonyítás. Elég azt megmutatni, hogy egy egyszeresen összefüggő X tér összefüggő $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedésénél a p leképezés injektív. Mivel X lokálisan útösszefüggő és p lokális homeomorfizmus, $\tilde{X}$ lefedhető útösszefüggő nyílt részhalmazokkal. Az összefüggőségi feltétel miatt $\tilde{X}$ útösszefüggő is. Tekintsünk az $\tilde{x}_0$ és $\tilde{x}_1$ pontokat $\tilde{X}$ -ben, ahol $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$. $\tilde{X}$ útösszefüggősége miatt van egy $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ út, amire $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ és $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Az $\tilde{f}$ út nem lehet más, mint az $f = p \circ \tilde{f}$ út egyértelmű emelése, ami egy zárt út $x = p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ körül. Mivel X egyszeresen összefüggő, ez az út homotóp a $[0, 1] \rightarrow \{x\}$ konstans úttal, aminek az egyértelmű emelése az $\tilde{x}_0$ -ból induló $[0, 1] \rightarrow \{\tilde{x}_0\}$ konstans út. A Homotópia-felemelési lemma szerint ez csak akkor lehetséges, ha $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_1$. $\square$

6.9.1. Következmény. Legyen X lokálisan egyszeresen összefüggő tér. Ha $p : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ és $q : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ fedései X -nek, akkor a $q \circ p : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ leképezés is fedése X -nek.

Bizonyítás. Vegyünk egy pontot X -ben, és vegyünk egy egyszeresen összefüggő U környezetét. Az állítás szerint a p megszorítása $p^{-1}(U)$ -ra a triviális fedés U -ra. Ezt az érvelést megismételve q -ra a $p^{-1}(U)$ összefüggő komponenseire, amelyek maguk is egyszeresen összefüggők, hiszen izomorfak U -val, azt kapjuk, hogy a $p \circ q$ megszorítása $(p \circ q)^{-1}(U)$ -ra a triviális fedés U -ra. $\square$

6.10. Tétel. *Az $\tilde{X}_x$ fedés összefüggő Galois-fedése X -nek és automorfizmus csoportja izomorf $\pi_1(X, x)$ -szel. Továbbá, minden $\tilde{X} \rightarrow X$ fedés esetén a $\text{Aut}(\tilde{X}_x|X)^{op}$ bal oldali hatása a $\text{Fib}_x(\tilde{X})$ -on az előző konstrukció szerint pontosan $\pi_1(X, x)$ monodrómia hatása.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\tilde{X}_x$ összefüggő. Ehhez elég azt megmutatni, hogy $\tilde{X}_x$ útösszefüggő, amihez azt kell belátnunk, hogy van egy út $\tilde{X}_x$ -ben, amely összeköti az univerzális $\tilde{x}_0$ pontot bármely másik $\tilde{x}'$ ponttal. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow X$ egy út, amely reprezentálja $\tilde{x}'$ -t. Az $m : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $(s, t) \mapsto st$ szorzásleképezés folytonos, így $f \cdot m$ és $f \cdot m$ megszorítása minden $\{s\} \times [0, 1]$ alakú halmazra is az. Egy ilyen megszorítás definiál egy f_s utat $\tilde{x}_0$ -ból $f(s)$ -be, ahol f_0 a konstans $[0, 1] \rightarrow \{x\}$ út és $f_1 = f$. $\tilde{X}_x$ topológiájának definíciója azt jelenti, hogy az $s \in [0, 1]$ -t az f_s homotópiaosztályába küldő leképezés folytonos, és így definiálja a szükséges utat. Valójában ez az f egyértelmű emelése $\tilde{X}_x$ -be $\tilde{x}$ -ből kiindulva.

Most belátjuk, hogy a $\pi : \tilde{X}_x \rightarrow X$ fedés Galois-fedés. A (6) Megjegyzés szerint elég megmutatni, hogy a $\text{Aut}(\tilde{X}_x|X)$ csoport tranzitívan hat a $\pi^{-1}(x)$ roston. Minden $\tilde{x}_1$ pontra a $\pi^{-1}(x)$ rostban a (6.8). tétel szerint van egy $\pi_{\tilde{x}_0} : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}_x$ folytonos leképezés, ami kompatibilis π -vel és az univerzális $\tilde{x}_0$ elemet $\tilde{x}_1$ -be képezi. Megmutatjuk, hogy $\pi_{\tilde{x}_0}$ automorfizmus. Mivel $\tilde{X}_x$ összefüggő, a (6.6) lemma szerint $\pi_{\tilde{x}_1}^{-1}$ fedésstruktúrát ad $\tilde{X}_x$ -nek önmaga felett (szűrjektív). Vegyünk egy $\tilde{x}_2 \in \pi_{\tilde{x}_1}^{-1}(\tilde{x})$ elemet. Mivel a $\pi \circ \pi_{\tilde{x}_0} : \tilde{X}_x \rightarrow X$ szintén fedése X -nek a (6.9.1) következmény szerint, alkalmazhatjuk a (6.8) Tételt erre a fedésre, hogy kapjunk egy folytonos és szűrjektív $\pi_{\tilde{x}_2} : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}_x$ leképezést, ahol $\pi_{\tilde{x}_2}(\tilde{x}) = \tilde{x}_2$ és $\pi \circ \pi_{\tilde{x}_1} \circ \pi_{\tilde{x}_2} = \pi$. De $\pi_{\tilde{x}_1} \circ \pi_{\tilde{x}_2}(\tilde{x}) = \tilde{x}_0$, így a $\pi_{\tilde{x}_1} \circ \pi_{\tilde{x}_2}$ leképezés az identitás a $\tilde{X}_x$ -en a (6.1) lemma szerint. A $\pi_{\tilde{x}_2}$ szűrjektivitása miatt ez azt jelenti, hogy $\pi_{\tilde{x}_1}$ injektív, és így az állítást beláttuk.

Meg azt is meg kell mutatnunk, hogy létezik egy természetes $\text{Aut}(\tilde{X}_x|X)^{op} \cong \pi_1(X, x)$ izomorfizmus. Először is vegyünk észre, hogy $\tilde{X}_x$ -en van egy természetes jobb $\pi_1(X, x)$ hatás, amit úgy definiálunk, hogy adott $\tilde{x}' \in \tilde{X}_x$ pontra és $\gamma \in \pi_1(X, x)$ elemre f és f_γ útreprezentánsokkal vehetjük az $f \cdot f_\gamma$ összefűzést, majd a szorzat homotópiaosztályát. Könnyen ellenőrizhető, hogy az így kapott $\phi_\gamma : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}_x$ leképezés folytonos és kompatibilis π -vel, azaz fedésautomorfizmus. Mivel konvenció szerint a $\text{Aut}(\tilde{X}_x|X)$ balról hat $\tilde{X}_x$ -en,

ez egy $\pi_1(X, x) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}_x|X)^{op}$ csoport-homomorfizmust definiál, ami ráadásul injektív, hiszen bármely nemtriviális γ mozgatja a megkülönböztetett $\tilde{x}_0$ elemet. A homomorfizmus szürjektivitásának bizonyításához vegyünk egy tetszőleges $\phi \in \text{Aut}(\tilde{X}_x|X)$ automorfizmust és egy $\tilde{x}' \in \tilde{X}_x$ pontot, amit egy $f : [0, 1] \rightarrow X$ út reprezentál. A $\phi(\tilde{x}')$ pontot ekkor egy $g : [0, 1] \rightarrow X$ út reprezentálja, ahol $g(1) = f(1)$. Most $f^{-1} \cdot g$ egy zárt út x körül X -ben, amelyre teljesül, hogy $f \cdot (f^{-1} \cdot g) = g$. Jelölje γ az osztályát $\pi_1(X, x)$ -ben. A $\phi \circ \phi_\gamma^{-1}$ automorfizmus helyben hagyja $\tilde{x}'$ -t, így $\tilde{X}_x$ összefüggősége és a (6.2) Lemma miatt ez az identitás. Ez azt mutatja, hogy $\phi_\gamma = \phi$.

Végül lássuk be a monodrómia-hatásról szóló állítást. A (6.8) tétel szerint a rost minden $\tilde{x}$ pontja megfelel egy $\pi_{\tilde{x}} : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}$ fedésmorfizmusnak, és a bizonyítás mutatja, hogy $\pi_{\tilde{x}}$ az $\tilde{X}_x$ f utakkal reprezentált pontjait $\tilde{f}(1)$ alakú pontokba képezi, ahol $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ az f emelése, amire $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$. Speciálisan $\tilde{x}$, mint a $c : [0, 1] \rightarrow \{x\}$ konstans út osztályának képe, megfelel a $[0, 1] \rightarrow \{\tilde{x}\}$ konstans útnak. Az előző lemma bizonyítása szerint egy f_γ úttal reprezentált $\pi_1(X, x)$ -beli elem a c -t az f_γ osztályába viszi. Így az γ hatása $p^{-1}(x)$ -re $\tilde{x}$ -t $\tilde{f}_\gamma(1)$ -be képezi, ahol $\tilde{f}_\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ az f_γ $\tilde{x}$ -ből kiinduló kanonikus emelése. Ez éppen a monodrómia-hatás. $\square$

6.11. Tétel. *Legyen X egy összefüggő és lokálisan egyszeresen összefüggő topologikus tér, és $x \in X$ egy bázispont. A Fib_x funktor ekvivalenciát létesít az X fedéseinek kategóriája és a bal $\pi_1(X, x)$ hatással rendelkező halmazok kategóriája között. Az összefüggő fedések a tranzitív hatással rendelkező $\pi_1(X, x)$ -halmazoknak, a Galois-fedések pedig a normális részcsoportok melékosztálytereinek felelnek meg.*

Bizonyítás. A bizonyítás nagyon hasonló a (5.3). Tétel bizonyításához: ellenőrizzük, hogy a funktor teljesíti az (4.1) Lemma feltételeit. A teljes hűségességhez azt kell megmutatnunk, hogy adott $p : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ és $q : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ fedések esetén minden $\phi : \text{Fib}_x(\tilde{X}_1) \rightarrow \text{Fib}_x(\tilde{X}_2)$ $\pi_1(X, x)$ -halmaz leképezés egy egyértelmű $\tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ leképezésből származik. Ehhez feltehetjük, hogy $\tilde{X}_1$ és $\tilde{X}_2$ összefüggő, és tekintsük a $\pi_{\tilde{x}} : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}_1$ leképezést, amely egy rögzített $\tilde{x}_1 \in \text{Fib}_x(\tilde{X})$ pontnak felel meg. A (6.7) Tétel szerint a $\pi_{\tilde{x}_1}$ leképezés $\tilde{X}$ -t a $\tilde{X}_x$ hányadosaként realizálja az $\tilde{x}_1$ $U_{\tilde{x}_1} = \text{Aut}(\tilde{X}_x|\tilde{X})$ stabilizátora által. Legyen $\psi_{\tilde{x}_1} : \tilde{X} \rightarrow U_{\tilde{x}_1} \backslash \tilde{X}_x$ az inverz leképezés. Mivel $U_{\tilde{x}_1}$ injektíven beágyazható $\phi(\tilde{x}_1)$ stabilizátorába ϕ révén, a $\pi_{\tilde{x}_2} : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}_2$ természetes leképezés, amely $\phi(\tilde{x}_1)$ -nek felel meg, létesít egy $U_{\tilde{x}_1} \backslash \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}_2$ leképezést. Ennek a kompozíciója a $\psi_{\tilde{x}_1}$ -vel lesz a kívánt $\tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ leképezés. A lényegi szürjektivitáshoz azt kell megmutatnunk, hogy minden bal $\pi_1(X, x)$ hatással rendelkező S halmaz izomorf X valamely fedésének rostjával. Tranzitív S esetén vehetjük a $\tilde{X}_x$ hányadosát valamely pont stabilizátora általi hatásra.

Általános esetben S -t felbontjuk $\pi_1(X, x)$ -pályákra, és vesszük a megfelelő fedések diszjunkt unióját. $\square$

Megjegyzés. Ha összehasonlítjuk a fenti tételeket az (5.3) Tétellel, látjuk, hogy a $\tilde{X}_x$ fedés a K_s szeparábilis lezárt szerepét játssza. x választása a szeparábilis lezáras választásának felel meg. A fundamentális csoport az abszolút Galois-csoport megfelelője. Az ekvivalenciát létesítő funktor a testek esetén $A \mapsto \text{Hom}(A, K_s)$, a topologikus esetben pedig $\tilde{X}_1 \mapsto \text{Hom}_X(\tilde{X}_x, \tilde{X}_1) \cong \text{Fib}_x(\tilde{X}_1)$.

6.9. Definíció. Az $\tilde{X} \rightarrow X$ fedést végesnek nevezzük, ha véges sok rosttal rendelkezik. Ha X összefüggő, akkor ezeknek ugyanaz a számosságuk, melyet X fokának hívunk.

6.11.1. Következmény. Legyen X egy összefüggő és lokálisan egyszeresen összefüggő topologikus tér, és $x \in X$ egy bázispont. A Fib_x funktor ekvivalenciát létesít a véges fedések kategóriája és a véges folytonos bal $\pi_1(\tilde{X}, x)$ hatással rendelkező halmazok kategóriája között. Összefüggő fedések a véges, tranzitív hatással rendelkező $\widehat{\pi_1(X, x)}$ -halmazoknak, Galois-fedések pedig a nyílt normális részcsoporthok mellékosztálytereinek felelnek meg. (Itt $\widehat{\pi_1(X, x)}$ a $\pi_1(X, x)$ provéges telítését jelöli.)

Bizonyítás. Egy véges összefüggő $p : \tilde{X} \rightarrow X$ fedés esetén a $\widehat{\pi_1(X, x)}$ hatása $p^{-1}(x)$ -en felbomlik egy véges hányadoson keresztül, így kapjuk $\pi_1(\tilde{X}, x)$ hatását is. Minden $\tilde{x} \in \tilde{X}$ pont stabilizátora véges indexű részcsoporth, és így tartalmaz egy véges indexű normális részcsoporthot. Ezért $\tilde{x}$ stabilizátorra a $\widehat{\pi_1(X, x)}$ hatás mellett nyílt részcsoporth a provéges topológiában, mivel nyílt normális részcsoporth mellékosztályainak uniója. Ami azt jelenti, hogy a hatás folytonos.

Megfordítva, $\widehat{\pi_1(X, x)}$ folytonos hatása egy véges halmazon felbomlik egy véges hányadoson keresztül, amely $\pi_1(X, x)$ -nek is hányadosa, és így egy véges $\tilde{X} \rightarrow X$ fedést eredményez. $\square$

6.12. Állítás. Legyen X egy útösszefüggő és lokálisan egyszeresen összefüggő topologikus tér, $x_1, x_2 \in X$ két bázis pont. Ekkor létezik egy bijekció az x_1 -rt x_2 -el összekötő utak homotópiaosztályai és az X fedéseinek kategóriájában értelmezett $\tilde{X}_{x_2} \xrightarrow{\sim} \tilde{X}_{x_1}$ izomorfizmusok között.

Bizonyítás. Válasszunk egy x_2 -ből x_1 -be vezető f utat. Létezik egy, a homotópiaosztályokon értelmezett $\tilde{X}_{x_2} \rightarrow \tilde{X}_{x_1}$ leképezés, $g \mapsto g \cdot f$ által (itt g egy x_2 -ből kiinduló út, ami $\tilde{X}_{x_2}$ egy pontját reprezentálja). Azt állítjuk, hogy ez csak f homotópiaosztályától függ, és izomorfizmus X feletti

terek között, aminek inverzét az f^{-1} -nel való kompozíció adja. Valóban, egy $\lambda : \tilde{X}_{x_2} \rightarrow \tilde{X}_x$ fedésizomorfizmus a megkülönböztetett $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_{x_2}$ elemet x_2 rostjából a $\lambda(\tilde{x}_2) \in \tilde{X}_x$ elembe viszi. Ennek szintén x_2 felett kell lennie, tehát ez egy x_1 -ből x_2 -be tartó út homotópiaosztálya. Ez indukálja az előbb leírt módon a λ izomorfizmust. $\square$

Megjegyzés. Egy $\lambda : \tilde{X}_{x_2} \rightarrow \tilde{X}_{x_1}$ fedésizomorfizmus egy $\text{Aut}(\tilde{X}_{x_2}|X) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(\tilde{X}_{x_1}|X)$ csoportizomorfizmust létesít a $\phi \mapsto \lambda \circ \phi \circ \lambda^{-1}$ leképezés által. A (6.10) tétel bizonyításában szereplő izomorfizmuson keresztül ez egy $\lambda^{op} : \pi_1(X, x_2) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)$ izomorfizmusnak felel meg. Ha λ -t egy f út homotópiaosztálya indukálja az előző bizonyításban szereplő konstrukcióban, akkor λ^{op} a $g \mapsto f^{-1} \cdot g \cdot f$ leképezésnek felel meg az utak homotópiaosztályain. Így visszkapjuk az alapcsoport ismert függését a bázispont választásától. Ha az f utat f_1 -re cseréljük, akkor λ^{op} az $f_1^{-1} \cdot f$ osztálya által indukált belső automorfizmussal való kompozíciójává változik, tehát λ^{op} csak egy $\pi_1(X, x)$ -beli belső automorfizmus erejéig egyértelmű.

6.13. Lemma. Legyen X egy útösszefüggő és lokálisan egyszeresen összefüggő tér, $x \in X$ egy bázispont és $p : \tilde{X} \rightarrow X$ egy összefüggő fedés. A $\tilde{X}_x \rightarrow X$ fedőleképezés felbomlik $\tilde{X}$ -en keresztül, és $\tilde{X}_x$ reprezentálja a $\text{Fib}_{\tilde{x}}$ funktort minden $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ -re.

Bizonyítás. Mivel $\tilde{X}_x$ reprezentálja Fib_x -et, az $\tilde{x}$ ponthoz tartozik egy kanonikus $\pi_{\tilde{x}} : \tilde{X}_x \rightarrow \tilde{X}$ leképezés, ami a (6.6) Lemma értelmében $\tilde{X}_x$ -et $\tilde{X}$ fedésévé teszi. Azt kell megmutatnunk, hogy ez a fedés reprezentálja a $\text{Fib}_{\tilde{x}}$ funktort. Legyen tehát $q : Z \rightarrow \tilde{X}$ egy fedés és vegyünk egy $z \in q^{-1}(\tilde{x})$ pontot. Mivel a (6.9.1) Következmény szerint $p \circ q$ Z -t X fedésévé teszi $z \in (p \circ q)^{-1}(x)$ mellett, a z pont megfelel egy $\pi_z : \tilde{X}_x \rightarrow Z$ fedésizomorfizmusnak X felett, ami az univerzális $\tilde{x}_0$ elemet z -be képezi. Most elég belátni, hogy π_z szintén fedésizomorfizmus $\tilde{X}$ felett, azaz $\pi_{\tilde{x}} = q \circ \pi_z$. De $p \circ \pi_{\tilde{x}} = p \circ q \circ \pi_z$ a konstrukció miatt, továbbá mind $\pi_{\tilde{x}}$, mind $q \circ \pi_z$ az univerzális $\tilde{x}$ elemet $\tilde{x}$ -ba képezi, így az állítás következik a (6.1) lemmából. $\square$

6.14. Állítás. Legyen X útösszefüggő és lokálisan egyszeresen összefüggő tér. Egy $\tilde{X} \rightarrow X$ fedés akkor és csak akkor univerzális, ha egyszeresen összefüggő.

Bizonyítás. $\square$

A $\tilde{X}_x$ egyszeres összefüggőségének bizonyításához alkalmazzuk a lemmát arra, hogy $\tilde{X}_x$ mint önmaga feletti triviális fedés reprezentálja a $\text{Fib}_{\tilde{x}_0}$ funktort az univerzális $\tilde{x}_0$ elemre. Ekkor a (6.10) tételből következik, hogy $\pi_1(\tilde{X}_x, \tilde{x}_0) \cong \text{Aut}(\tilde{X}_x|\tilde{X}_x)^{op} = \{1\}$.

Megfordítva, ha X' egy egyszeresen összefüggő fedése X -nek, akkor $\tilde{X}' \cong \pi_1(X', x') \backslash \tilde{X}_x \cong \tilde{X}_x$ valamely $x' \in X'$ pontra, az előző lemma és a (6.10) Tétel értelmében.

Példa. Mivel $\mathbb{R}^n$ egyszeresen összefüggő bármely n -re, láthatjuk, hogy a következő két példa:

- Hasson $\mathbb{Z}$ $\mathbb{R}$ -en eltolásokkal (ami azt jelenti, hogy az $n \in \mathbb{Z}$ által definiált automorfizmus az $x \mapsto x + n$ leképezés). Így kapunk egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ fedést, ahol $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ azonnal láthatóan homeomorf a körrel.
- Az előző példa általánosítható tetszőleges dimenzióra: vegyünk egy tetszőleges $\{x_1, \dots, x_n\}$ bázist az $\mathbb{R}^n$ vektortérben, és hasson $\mathbb{Z}^n$ $\mathbb{R}^n$ -en úgy, hogy $\mathbb{Z}^n$ i -edik direkt faktorának hatása x_i szerinti eltolás legyen. Ez a hatás nyilvánvalóan fedőhatás, és $\mathbb{R}^n$ -t az úgynevezett lineáris tórusz fedésévé teszi. $n = 2$ esetén ez a szokásos tórusz. Az x_i által generált H részcsoportot $\mathbb{R}^n$ -ben általában rácsnak nevezzük. Így a lineáris tóruszok $\mathbb{R}^n$ hányadosai rács csoportok szerint.

valójában a kör és a lineáris tóruszok univerzális fedését adja.

- Egy $n > 1$ egész számra jelölje σ_n az n -edik egységgyökök csoportját. A σ_n elemeivel való szorzás egyenletes hatást definiál $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ -n, amiből egy $p_n : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*/\sigma_n$ fedés adódik. Valójában a $z \mapsto z^n$ leképezés természetes homeomorfizmust definiál $\mathbb{C}^*/\sigma_n$ és $\mathbb{C}^*$ között (sőt, topologikus csoportok izomorfizmusát), és ezen homeomorfizmuson keresztül p_n azonosul a $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ fedéssel, amit a $z \mapsto z^n$ leképezés ad. Megjegyezzük, hogy ez a leképezés nem terjeszthető ki egy $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fedésre.

viszont nem ad univerzális fedést, mivel $\mathbb{C}^*$ nem egyszeresen összefüggő. Azonban a $\mathbb{C}$ komplex sík, mint 2-dimenziós $\mathbb{R}$ -vektortér, egyszeresen összefüggő, és az $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \exp(z)$ exponenciális leképezés nyilvánvalóan fedés. Így $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}^*$ univerzális fedése.

Miután meghatároztuk az univerzális fedéseket, kiszámíthatjuk a fundamentális csoportokat is. Az első két példa csoportthasra vett hányados volt, így azt kapjuk, hogy a kör fundamentális csoportja izomorf $\mathbb{Z}$ -vel, az n -dimenziós lineáris tóruszé pedig $\mathbb{Z}^n$ -nel. $\mathbb{C}^*$ esetében a fundamentális csoport ismét $\mathbb{Z}$, mivel az exponenciális leképezés $2\pi i$ szerint periodikus.

Példa. Tekintsünk egy $\mathbb{C}^*$ -hoz hasonló példát. Legyen D^* a lyukas komplex korong $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |z| < 1\}$. Az előző példához hasonlóan, az $z \mapsto \exp(z)$

exponenciális leképezés a $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ bal félsíkra megszorítva univerzális fedéstét adja D^* -nak. A rostok automorfizmus csoportjai izomorfak $\mathbb{Z}$ -vel, ahol $n \in \mathbb{Z}$ hatását a $2n\pi i$ -vel való eltolás adja. Tehát ha $\mathbb{Z}$ hat L -en a $2\pi i$ többszöröseivel való eltolással, akkor L ezen hatás szerinti hányadosa D^* lesz. Ekkor a (6.7) Tétel alapján D^* minden összefüggő fedése izomorf $L/\mathbb{Z}$ valamely részcsoportja szerinti hányadossal. Ezek az részcsoportok a 0 és a $k\mathbb{Z}$ alakú részcsoportok, ahol $k \geq 1$ egész. Az ezeknek megfelelő fedései D^* -nak L és D^* maga a $z \mapsto z^k$ leképezéssel. Ha kiválasztunk egy $x \in D^*$ bázispontot, akkor egy $\pi_1(D^*, x) \cong \mathbb{Z}$ izomorfizmust kapunk. A generátor egy reprezentánsa az x -en átmenő, 0 körüli pozitív irányú kör.

6.10. Definíció. Két $p : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ és $q : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ X feletti tér $\tilde{X}_1 \times_X \tilde{X}_2$ rostsorozata azon $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ pontok altere $\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$ -ben, amelyekre $p(\tilde{x}_1) = q(\tilde{x}_2)$.

Ez el van látva a $q_{\tilde{X}_1} : \tilde{X}_1 \times_X \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ és $p_{\tilde{X}_2} : \tilde{X}_1 \times_X \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_2$ természetes projekciókkal amelyekre a

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 \times_X \tilde{X}_2 & \xrightarrow{\cong} & \tilde{X}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X}_2 & \xrightarrow{\cong} & X \end{array}$$

5. ábra.

diagram kommutatív.

Teljesít egy univerzális tulajdonságot is: reprezentálja azon halmazértékű funktort, amely az X feletti terek kategóriáján értelmezett, és minden $S \rightarrow X$ térhez a $(\phi : S \rightarrow \tilde{X}_1, \psi : S \rightarrow \tilde{X}_2)$ morfizmuspárokat rendeli, ahol $p \circ \phi = q \circ \psi$. Ha $p : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ fedés, akkor $p_{\tilde{X}_2} : \tilde{X}_1 \times_X \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_2$ is az, és ráadásul az $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ feletti $p_{\tilde{X}_2}^{-1}(\tilde{x}_2)$ rost kanonikusan izomorf $p^{-1}(q(\tilde{x}_2))$ -vel. A $p_{\tilde{x}_2} : \tilde{X}_1 \times_X \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_2$ fedést a $p : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ fedés q szerinti visszahúzásának nevezzük, és $q^* \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ -vel is jelöljük.

Példa. Legyen X összefüggő és lokálisan egyszeresen összefüggő tér. Konstruáljunk egy $\tilde{X}$ teret $X \times X$ felett a következőképpen. Minden $(x_1, x_2) \in X \times X$ párhoz vegyük az $\tilde{X}_{x_1, x_2}$ halmazt, amely az x_1 -ből x_2 -be vezető utak homotópiaosztályait tartalmazza, és definiáljuk $\tilde{X}$ -et mint ezen $\tilde{X}_{x_1, x_2}$ halmazok diszjunktió unióját minden (x_1, x_2) párra. A $\tilde{X} \rightarrow X \times X$ projekciót úgy kapjuk, hogy egy utat a végpontjaiba képezünk, és a $\tilde{X}$ topológiáját hasonlóan definiáljuk, mint a (6.8). tétel bizonyításában szereplő konstrukcióban: folytassuk az utak homotópiaosztályait mindkét végpontjuk kis környezetébe. Az, hogy

$\tilde{X}$ fedése $X \times X$ -nek, ugyan úgy ellenőrizhető. Figyeljük meg, hogy a (6.8). tétel bizonyításában konstruált $\tilde{X}_x$ fedés nem más, mint a $\tilde{X} \rightarrow X \times X$ fedés visszahúzása a $\{x_1\} \times X \rightarrow X \times X$ beágyazás szerint. Így $\tilde{X}$ felfogható $\tilde{X}_x$ -ek folytonos családjaként. Ezt út térnek nevezzük.

Megjegyzés. Rögzítsünk egy $(x_1, x_2) \in X \times X$ pontpárt. Az $\tilde{X} \rightarrow X \times X$ fedés $\{(x_1, x_2)\} \rightarrow X \times X$ beágyazás szerinti visszahúzásával visszakapjuk az $\tilde{X}_{x_1, x_2}$ teret, mint az egy pontú tér $\{(x_1, x_2)\}$ fedését. Figyeljük meg, hogy ezen a téren van egy természetes $\pi_1(X, x_2)$ jobb hatás az útösszefűzés révén. Ez a hatás egyszeresen tranzitív. Ha $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ két út, ahol $f(0) = g(0) = x_1$ és $f(1) = g(1) = x_2$, akkor f -et g -be vihetjük az x_2 körüli $g \cdot f^{-1}$ zárt úttal való kompozícióval. Egy topologikus teret, amelyen van egy folytonos egyszeresen tranzitív hatás egy G topologikus csoport által néha G -torzornak nevezzük. Esetünkben így diszkrét $\pi_1(X, x_2)$ -torzorokat kapunk, és $\tilde{X}_x$ felfogható $\pi_1(X, x_2)$ -torzorok folytonos családjaként. A $\tilde{X}$ tér ekkor torzorok kétparaméteres folytonos családjá.

Megjegyzés. X egy érdekes fedését kapjuk, ha a $\tilde{X} \rightarrow X \times X$ fedést a $\Delta : X \rightarrow X \times X$ diagonális leképezés szerint húzzuk vissza, ahol $x \in X$ -et $(x, x) \in X \times X$ -be képezzük. A kapott $\tilde{X}_\Delta$ fedés rostja egy $x \in X$ pont felett éppen $\pi_1(X, x)$. Speciálisan, csoportstruktúrát hordoz. Így $\tilde{X}_\Delta$ kódolja X fundamentális csoportjait változó bázispontokra nézve.

Alulírott Móricz Márk nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI eszközöket alkalmaztam:

1. táblázat.

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Ábra készítés	DeepSeek	1, 2, 3, 4, 5 ábrák	
Szövegvázlat készítés	DeepSeek	Bevezetés	

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközöket nem használtam

Hivatkozások

- [1] L. Fu. *Etale Cohomology Theory*. Nankai tracts in mathematics. World Scientific, 2011.
 - [2] J. S. Milne. Lectures on etale cohomology (v2.21), 2013. Available at www.jmilne.org/math/.
 - [3] J. S. Milne. Fields and galois theory (v5.10), 2022. Available at www.jmilne.org/math/.
 - [4] T. Stacks project authors. The stacks project. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2025.
 - [5] T. Szamuely. *Galois Groups and Fundamental Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2009.
- [3] [2] [4] [Tag 025F](#) [4] [Tag 02GH](#) [5] [1]

NYILATKOZAT

Név: Móricz Márk

ELTE Természettudományi Kar, szak: Matematika

NEPTUN azonosító: FJMCLY

Szakdolgozat címe:
Véges étale algebrák

A **szakdolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2025. 05.29



a hallgató aláírása