

A Birkhoff-spektrum analitikussága

Szakdolgozat

Készítette:

Szepessy Sára
Matematika BSc

Témavezető:

Buczolich Zoltán
*ELTE Matematikai Intézet,
Analízis Tanszék*



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

2025

Köszönetnyilvánítás

Szívből köszönöm a segítséget témavezetőmnek, *Buczolich Zoltánnak*, aki türelmével és precíz szakértelmével támogatott a dolgozat elkészítésében. Hálás vagyok a rengeteg tudásért, amit az évek során átadott, és aminek köszönhetően egy életre megszerettette velem az analízist. Külön szeretném megköszönni, hogy a témevezetésen túl lehetőséget adott, hogy szakmai eseményeken is részt vehessek.

Hálával tartozom *Maga Balázsnak*, amiért megismertetett a témával, amely végül a szakdolgozatom alapjául szolgált. Külön köszönettel tartozom barátaimnak, akik felejthetetlen élménnyé tették számomra az egyetemi éveket, és akik mindig ott voltak, ha segítségre volt szükségem.

Természetesen köszönet illeti a családomat, akik mindig támogatólag álltak mellettem. Külön köszönet illeti nővéremet, *Szepessy Lucát*, akinek bölcs tanácsai átlendítettek a kezdeti nehézségeken, illetve bátyámat, *Szepessy Dávidot*, akire mindig számíthattam, ha fogalmazási nehézségeim adódtak. Szeretném továbbá kiemelni szüleim odaadó támogatását, akikre minden helyzetben számíthattam, és akik szeretetükkel és türelmükkel végigkísérik az utamat.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés a geometriai mértékelméletbe	5
1.1. Hausdorff-dimenzió	5
2. Dinamikai rendszerek	8
2.1. Szimbolikus dinamika	8
2.2. Birkhoff-féle ergodtétel	10
2.3. Termodinamikai bevezető	12
3. Nemlineáris funkcionálanalízis	18
3.1. Analitikus leképezések Banach-tereken	18
3.2. Differenciálás Banach-tereken	21
4. A Birkhoff-spektrum	27
4.1. Kapcsolat a dimenzióspektrummal	29
4.2. A Birkhoff-spektrum tulajdonságai	31

Bevezető

A szakdolgozat célkitűzése a multifraktál analízis néhány alapvető eredményének bemutatása Y. Pesin és H. Weiss [9] cikke alapján. A dolgozat központi témája az ún. Birkhoff-spektrum, amely a dinamikai rendszerek hosszú távú viselkedésének finomabb statisztikai és geometriai mértékelméleti jellemzésére szolgál.

A Birkhoff-ergodtétel klasszikus, időátlagokra vonatkozó állítása után természetes módon felmerül a kérdés, hogy vajon mit mondhatunk a nullmértékű, 'kivételes' halmaz viselkedéséről. A mértékelméletben és a valószínűségszámításban e halmazokat sokáig elhanyagolhatónak tekintették, mivel úgy tartották, hogy nem hordoznak lényegi információt a rendszer globális viselkedéséről. Az elmúlt évtizedekben azonban egyre nagyobb figyelem irányult e kivételes pályák finomszerkezetének vizsgálatára, és bebizonyosodott, hogy jelentős információval szolgálnak a rendszer ergodikus és termodinamikai tulajdonságairól. E nullmértékű halmaz vizsgálatának egyik meghatározó eszköze a Birkhoff-spektrum.

A területen jelentős áttörést ért el Y. Pesin és H. Weiss, akik a termodinamikai formalizmus eszközeivel, Hölder-folytonos függvények esetén kiemelkedő eredményeket értek el a Birkhoff-spektrum vizsgálatában. Jelen dolgozat e kutatási irány egy elegáns eredményének bizonyítását hivatott bemutatni.

A dolgozat első fejezetében bevezetjük a Hausdorff-dimenzió fogalmát, amely elengedhetetlen eszköz a fraktálok vizsgálatához. A második fejezetben rátérünk a dinamikai rendszerek témakörére, külön kitérve a szimbolikus dinamikára, a Birkhoff-ergodtételre, majd ismertetjük a termodinamikai formalizmus alapjait a nekünk szükséges szimbolikus térre szorítkozva. A harmadik fejezetben a nemlineáris funkcionálanalízis témakörének a dolgozathoz szükséges elemeit mutatjuk be. Elsőként az analitikus leképezések fogalmát általánosítjuk Banach-terek között értelmezett leképezésekre, majd bevezetünk két deriváltfogalmat, a Fréchet- és Gâteaux-differenciálhatóságot, és ismertetünk néhány fontos eredményt a témában.

Végül az utolsó fejezetben rátérünk a multifraktál analízis néhány alapvető eredményére Y. Pesin és H. Weiss korábban hivatkozott cikke alapján. A tárgyalás középpontjában két fontos fogalom, a Birkhoff-átlagokra épülő Birkhoff-spektrum, valamint a pontonkénti dimenzió alapuló

dimenzióspektrum áll. Elsőként feltárjuk a két spektrum közötti kapcsolatot, ezzel lehetővé téve az eredmények átültetését az egyik fogalomrendszerből a másikba, majd igazoljuk a Birkhoff-spektrum egy meghökkentően elegáns szerkezeti tulajdonságát.

1. Bevezetés a geometriai mértékelméletbe

1.1. Hausdorff-dimenzió

A Hausdorff-dimenzió a legrégebbi és talán a legfontosabb, a fraktálok jellemzésére megalkotott dimenziófogalom. A szokásos dimenziófogalommal szemben nagy előnye, hogy különbséget tesz bizonyos, topológiai értelemben azonos méretű, mégis különböző szerkezetű halmazok között, míg az "egyszerű" halmazok dimenzióját megőrzi. Ennek köszönhetően alapvető fontosságú fogalom a fraktálok osztályozásában.

Ebben a fejezetben a Hausdorff-dimenzió fogalmát építjük fel a [4] könyv második fejezete alapján. A következő definíciókban feltesszük, hogy (X, d) metrikus tér, és ennek tetszőleges részhalmazain definiáljuk a Hausdorff-dimenziót. Ehhez először a Hausdorff-mértéket fogjuk bevezetni. A Lebesgue-mértékhez hasonlóan ezt a mértéket is fedések segítségével definiáljuk, itt azonban a fedőhalmazok átmérőjére teszünk megkötést.

A fedések bevezetéséhez először emlékeztetünk az átmérő fogalmára:

1.1. Definíció (Átmérő). Legyen (X, d) metrikus tér és $\emptyset \neq U \subseteq X$, ekkor az U halmaz átmérője $|U| = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$.

1.2. Definíció (δ -fedés). Tegyük fel, hogy $\delta > 0$ és $F \subseteq X$, ekkor az $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ halmazrendszer az F halmaz δ -fedése, ha $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ és $0 < |U_i| \leq \delta$, $(i = 1, 2, \dots)$.

Ennek segítségével definiálhatjuk a Hausdorff-előmértéket, amely e fedésekhez rendelt összeg-minimumok segítségével jellemzi a halmazok méretét.

1.3. Definíció (Hausdorff-előmérték). Legyen $F \subseteq X$ és $s \geq 0$, ekkor tetszőleges $\delta > 0$ -ra az F s -dimenziós Hausdorff-előmértéke $\mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ az } F \text{ } \delta\text{-fedése}\}$

1.4. Megjegyzés. Ha a fedéshez csak konvex, nyílt vagy zárt halmazokat engedünk meg, $\mathcal{H}_{\delta}^s$ értéke nem változik.

Vizsgáljuk egy rögzített $F \subseteq X$ halmaz összes δ -fedését. A δ értékének csökkentésével a definícióban megengedett fedések halmaza csökken, így a vizsgált infimum $\mathcal{H}_{\delta}^s(F)$ értéke nő.

Emiatt X minden részhalmazára értelmes (véges vagy végtelen értékkel) a következő definícióban szereplő határérték:

1.5. Definíció (Hausdorff-mérték). Legyen $F \subseteq X$, $s \geq 0$, ekkor az F halmaz s -dimenziós Hausdorff-mértéke $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \mathcal{H}_\delta^s(F)$.

Megmutatható, hogy $\mathcal{H}^s$ külső mérték az X részhalmazain, azaz $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ és $\mathcal{H}^s$ σ -szubadditív. Valójában több is igaz:

1.6. Állítás. $\mathcal{H}^s$ mérték X Borel-halmazain.

Ezt a tulajdonságot - bár az elnevezés szempontjából érdekes megemlíteni - a későbbiekben nem használjuk. Ez egyben azt is jelenti, hogy nem szükséges X Borel-halmazaira szorítkoznunk, a Hausdorff-dimenzió X minden részhalmazán értelmezhető.

A Hausdorff-mérték nem csak felépítésében hasonlít a Lebesgue-mértékre. Belátható, hogy az $\mathbb{R}^n$ Borel-halmazaira az n -dimenziós Hausdorff-mérték mindössze egy konstans szorzóban tér el az n -dimenziós Lebesgue-mértéktől. Pontosabban, ha $F \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel-halmaz, akkor $\mathcal{H}^s(F) = c_n \cdot \lambda^n(F)$, ahol a konstans $c_n = \pi^{\frac{n}{2}} / 2^n (\frac{1}{2}n)!$ az egységnyi átmérőjű n -dimenziós gömb térfogata.

Az alábbiakban ismertetjük a Hausdorff-mérték egy $\mathbb{R}^n$ -beli elemi tulajdonságát, amely további párhuzamot mutat a Lebesgue-mérték jól ismert viselkedésével:

1.7. Állítás (skálázási tulajdonság). Legyen $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$, ekkor $\mathcal{H}^s(\gamma F) = \gamma^s \mathcal{H}^s(F)$, ahol $\gamma F = \{\gamma x : x \in F\}$.

Az állítás közvetlenül következik a definícióból. Hasonló tulajdonság megfogalmazható általánosabb transzformációkra is:

1.8. Állítás. Legyen $F \subseteq \mathbb{R}^n$ és $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$ olyan transzformáció, amire $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ ($\forall x, y \in F$) teljesül valamely $c > 0$ és $0 < \alpha \leq 1$ -vel. Ekkor tetszőleges s -re $\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \mathcal{H}^s(F)$ teljesül.

Az ilyen tulajdonságú transzformációkat Hölder-folytonosnak nevezzük, és ezek halmazát C^α -val jelöljük. Az állítás bizonyítása az előzőhöz hasonlóan nem szorul részletezésre.

1.9. Következmény. Ha f izometria, akkor $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$ teljesül. Speciálisan, a Hausdorff-mérték eltolás- és forgatásinvariáns.

Térjünk most vissza a fogalom általános felépítéséhez. A következő lemma kulcsszerepet játszik a Hausdorff-dimenzió értelmezésében.

1.10. Lemma. Legyen (X, d) metrikus tér, $F \subseteq X$ tetszőleges. Ha $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ és $s < t$, akkor $\mathcal{H}^t(F) = 0$.

1.11. Következmény. Ha $\mathcal{H}^t(F) > 0$, akkor $\mathcal{H}^r(F) = \infty, \forall r < t$.

Ennek segítségével már leírható $\mathcal{H}^s(F)$ viselkedése az s függvényében. A lemma azt állítja, hogy egyértelműen létezik olyan nemnegatív, véges vagy végtelen ún. kritikus s érték, amelynél $\mathcal{H}^s(F)$ értéke végtelenről nullára ugrik. Ezt a kritikus értéket nevezzük az F halmaz Hausdorff-dimenziójának. Formálisan:

1.12. Definíció. Az $F \subseteq X$ halmaz Hausdorff-dimenziója $\dim_H(F) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$, (itt $\sup \emptyset \stackrel{\text{def}}{=} 0$).

1.13. Megjegyzés. Tehát $\mathcal{H}^s(F)$ viselkedése a következőképpen írható le:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } s < \dim_H F, \\ 0, & \text{ha } s > \dim_H F. \end{cases}$$

A kritikus $s = \dim_H F$ esetben $\mathcal{H}^s(F)$ tetszőleges nemnegatív, véges vagy végtelen értéket is felvehet.

Végül bemutatjuk a Hausdorff-dimenzió néhány könnyen bizonyítható alaptulajdonságát:

1.14. Tétel. A Hausdorff-dimenzióra teljesülnek a következő tulajdonságok:

1. **Nyílt halmazok:** Ha $F \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, akkor $\dim_H F = n$.
2. **Monotonitás:** Ha $E \subset F$, akkor $\dim_H E \leq \dim_H F$.
3. **Megszámlálható stabilitás:** Ha $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ halmazok egy (megszámlálható) sorozata, akkor

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i} \{\dim_H F_i\}.$$

4. **Megszámlálható halmazok:** Ha F megszámlálható halmaz, akkor $\dim_H F = 0$.

2. Dinamikai rendszerek

A most következő fejezetben összefoglaljuk azokat a dinamikai rendszerekre vonatkozó alapfogalmakat és eredményeket, amelyek a későbbi fejezetek megértésének alapjául szolgálnak. Külön kitérünk a szimbolikus dinamikára, a Birkhoff-ergodtételekre, valamint ismertetjük a termodinamikai formalizmus alapjait a nekünk szükséges szimbolikus térre szorítkozva.

2.1. Szimbolikus dinamika

A szimbolikus dinamika célja, hogy dinamikai rendszerek viselkedését szimbólumok segítségével kódoljuk. Ez az absztrakt, mégis hatékony modell gyakran átláthatóbbá teszi az összetettebb rendszerek szerkezetét.

Elsőként bevezetjük a végtelen szimbólumsorozatok halmazát:

2.1. Definíció. Legyen $N \geq 2$ rögzített egész szám, ekkor Ω_N^+ jelöli az olyan (jobbra) végtelen szimbólumsorozatok halmazát, melynek elemei az $\{1, 2, \dots, N\}$ véges ábécéből származnak:

$$\Omega_N^+ = \{\underline{s} = (s_1 s_2 \dots) : s_j \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

Az alábbi definícióban egy távolságfüggvényt adunk meg ezen a halmazon. A távolság azt méri, hogy két sorozat hányadik indexeknél és milyen mértékben tér el egymástól. Az index növekedésével egyre kisebb súlyokkal számítjuk be az eltéréseket, így két sorozat akkor lesz közel egymáshoz, ha minél hosszabb kezdeti szegmensük megegyezik. A súlyok exponenciális csökkenése biztosítja, hogy a távolságfüggvény véges értékeket vegyen fel.

2.2. Definíció. Legyenek $\underline{s} = (s_1, s_2, s_3, \dots)$ és $\underline{t} = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ két tetszőleges elem Ω_N^+ -ban. Ekkor az $\underline{s}$ és $\underline{t}$ pontok távolsága $\rho_\lambda(\underline{s}, \underline{t}) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{\lambda^i}$, ahol $\lambda > 1$ tetszőleges.

Könnyen ellenőrizhető, hogy ρ_λ teljesíti a metrika axiómáit, így $(\Omega_N^+, \rho_\lambda)$ metrikus tér. A továbbiakban – ha másképp nem jelezzük – a $\lambda > N$ választással dolgozunk.

A következő tulajdonság egyszerű számolással igazolható, azonban hasznossága miatt érdemes külön állításként megfogalmazni:

2.3. Állítás. Legyenek $\underline{s}, \underline{t} \in \Omega_N^+$ és $\lambda \geq N$, ekkor:

1. ha $s_i = t_i$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re, akkor $\rho_\lambda(\underline{s}, \underline{t}) \leq \frac{1}{\lambda^n}$.
2. ha $\rho_\lambda(\underline{s}, \underline{t}) < \frac{1}{\lambda^n}$, akkor $s_i = t_i$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re.

Az alábbiakban bevezetünk egy alapvető fontosságú transzformációt a szimbólumsorozatok halmazán, amely a sorozatok indexeinek eltolásával modellezi azok időbeli fejlődését. Emiatt kiemelkedő szerepet játszik a dinamikai rendszerek vizsgálatában, hiszen segítségével a rendszer hosszú távú viselkedése is tanulmányozható.

2.4. Definíció. Az egyoldali shiftoperátor $\sigma : \Omega_N^+ \rightarrow \Omega_N^+$, $\sigma(s_1 s_2 \dots) = (s_2 s_3 \dots)$.

A shiftoperátor segítségével természetes módon definiálhatunk egy dinamikai rendszert:

2.5. Definíció. Az (Ω_N^+, σ) párt egyoldali shiftnek nevezzük az $\{1, 2, \dots, N\}$ ábécé felett.

A következőkben ennek egy olyan speciális típusát vezetjük be, ahol nem engedünk meg minden lehetséges szimbólumsorozatot az ábécé felett, hanem előre rögzített megkötésekkel szabályozzuk, hogy mely szimbólumok követhetik egymást. Ezeket a szabályokat egy $N \times N$ -es mátrix elemeivel adjuk meg a következő módon:

2.6. Definíció. Legyen $A \in \{0, 1\}^{N \times N}$, az ehhez asszociált egyoldali véges típusú szubshift:

$$\Sigma_A^+ = \{\underline{s} = (s_1, s_2, \dots) \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \mid A_{s_i, s_{i+1}} = 1, \forall i \geq 1\}.$$

Tehát az A bináris mátrix a_{ij} eleme pontosan akkor 1, ha a szimbólumsorozatokban az i szimbólumot követheti a j . A korábbiakhoz hasonlóan a (Σ_A^+, σ) pár egy dinamikai rendszert alkot, amelyet – a Σ_A^+ halmazhoz hasonlóan – szintén egyoldali véges típusú szubshiftnek nevezünk.

A véges típusú szubshiftnek szerkezete nagyban függ az őket definiáló mátrix tulajdonságaitól. Különösen fontos azon rendszerek szerepe, amelyek lehetővé teszik, hogy bármely szimbólumsorozatból kiindulva eljuthassunk tetszőleges másikba a szomszédsági megkötések figyelembevétele mellett. Az ilyen típusú rendszerek viselkedését hosszú távon kevésbé határozza meg a kezdeti állapotuk, mivel a dinamikájuk biztosítja, hogy idővel bármely megengedett szimbólumsorozat előfordulhasson.

A formális definíció megadása előtt először a megengedett szavak fogalmát vezetjük be:

2.7. Definíció. Az $\{1, 2, \dots, N\}$ ábécé véges szimbólumsorozatait szavaknak nevezzük. Az $A \in \{0, 1\}^{N \times N}$ mátrix által meghatározott szomszédsági szabályoknak eleget tevő szavakat megengedett szavaknak nevezzük:

$$\mathcal{L}(\Sigma_A^+) = \{w = (w_1, w_2, \dots, w_k) \mid A_{w_i, w_{i+1}} = 1, \forall 1 \leq i < k\}.$$

2.8. Definíció. A (Σ_A^+, σ) rendszert – vagy röviden magát a Σ_A^+ teret – topologikusan keverőnek nevezzük, ha bármely két megengedett v, w szó esetén létezik olyan K egész, hogy minden $k \geq K$ esetén található olyan $\underline{s} \in \Sigma_A^+$, amely tartalmazza a v szót, és a v szót a w pontosan k lépés után követi.

2.9. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy ilyenkor a Σ_A^+ halmaz a ρ_λ metrikával ellátva kompakt topologikus teret alkot. Ez a tulajdonság több későbbi eredményben is fontos szerepet játszik.

Végül kimondjuk az egyoldali shiftoperátor egy egyszerűen bizonyítható alaptulajdonságát:

2.10. Állítás. *A σ egyoldali shiftoperátor folytonos a Σ_A^+ halmazon.*

2.2. Birkhoff-féle ergodtétel

A dinamikus rendszerek hosszú távú viselkedését érintő egyik legalapvetőbb eredmény a Birkhoff-féle ergodtételtel. Ez kimondja, hogy ha egy rendszer eleget tesz bizonyos feltételeknek, akkor az időátlag – vagyis egy mennyiség hosszú távú megfigyelése egyetlen pálya mentén – majdnem minden kezdeti állapotból kiindulva megegyezik a rendszer egészére vett térátlaggal. Ez az eredmény szoros kapcsolatot teremt az egyes pályák viselkedése és a rendszer globális statisztikai tulajdonságai között, hiszen a "szokatlan" viselkedésű pontok mindössze egy nullmértékű halmazt alkotnak. A dolgozat későbbi részeiben éppen ezen kivételes pontok viselkedésével foglalkozunk.

A [3] jegyzetet követve most rátérünk azoknak a fogalmaknak az ismertetésére, amelyek elengedhetetlenek a tétel kimondásához. A mértékelmélet alapfogalmait ismertnek tekintjük; ezek megtalálhatók például a [11] jegyzetben. Elsőként az invariáns függvény fogalmát vezetjük be:

2.11. Definíció (invariáns függvény). Legyenek $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, ekkor f invariáns g -re nézve, vagy az f függvény g -invariáns, ha $f \circ g = f$.

A következő fogalom azt biztosítja, hogy a rendszer időben állandó maradjon, vagyis a statisztikai tulajdonságai ne változzanak az idő előrehaladtával.

2.12. Definíció (mértéktartó transzformáció). Legyen $T : X \rightarrow X$ mérhető transzformáció, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ valószínűségi mértéktér. Azt mondjuk, hogy T mértéktartó – vagy másképp fogalmazva: μ invariáns T -re –, ha minden $A \in \mathcal{B}$ -re $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Ekkor $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ -t mértéktartó dinamikus rendszernek nevezzük.

A definíció biztosítja, hogy tetszőleges mérhető $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén az $f, f \circ T, f \circ T^2, \dots$ folyamat állandó maradjon a következő értelemben: tetszőleges $B_1, \dots, B_n$ Borel-halmazok és $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ egészek esetén

$$\mu(\{x : f(T^{r_1}x) \in B_1, \dots, f(T^{r_n}x) \in B_n\}) = \mu(\{x : f(T^{r_1+k}x) \in B_1, \dots, f(T^{r_n+k}x) \in B_n\})$$

teljesüljön tetszőleges $k \geq 1$ egész mellett.

Fontos megjegyezni, hogy a definícióban szereplő ősképképzés nem hagyható el. A következő két állítás ugyanis nem ekvivalens:

$$(1) \quad \forall A \in \mathcal{B} : \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A),$$

$$(2) \quad \forall A \in \mathcal{B} : \mu(A) = \mu(T(A)).$$

Invertálható T leképezés esetén azonban ekvivalens karakterizációt kapunk a (2) feltétellel is.

Végül ismertetjük az ergodicitás fogalmát, amely kizárja a nem triviális, időben invariáns részhalmazok létezését:

2.13. Definíció (ergodikus transzformáció). Legyen $T : X \rightarrow X$ mértéktartó transzformáció az $(X, \mathcal{B}, \mu)$ mértéktéren. Ekkor T ergodikus (vagy ergodikus a μ mértékre), ha minden $A \in \mathcal{B}$ -re, amire $T^{-1}(A) = A$, $\mu(A) = 0$ vagy $\mu(A) = 1$ teljesül.

Ha az $(X, \mathcal{B}, T)$ dinamikai rendszert rögzítettnek tekintjük, az olyan μ valószínűségi mértékeket, melyekre a $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ rendszer mértéktartó és amire minden $A \in \mathcal{B}$ -re, amire $T^{-1}(A) = A$, $\mu(A) = 0$ vagy $\mu(A) = 1$ teljesül, ergodikus mértékeknek nevezzük.

A szükséges fogalmak bevezetése után rátérhetünk a Birkhoff-féle ergodtétellel kimondására:

2.14. Tétel (Birkhoff-féle ergodtétel). Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu)$ egy mértéktartó rendszer, és $f \in L^1(\mu)$.

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \bar{f}(x)$$

létezik μ -majdnem minden $x \in X$ pontra, T -invariáns és $\int_X f d\mu = \int_X \bar{f} d\mu$. Ha továbbá T ergodikus, akkor $\bar{f}$ μ -majdnem minden x -re konstans és értéke $\bar{f}(x) = \int_X f d\mu$.

A tétel bizonyítása megtalálható a [6] hivatkozásban.

2.3. Termodinamikai bevezető

Ebben a fejezetben a termodinamikai formalizmus néhány alapfogalmát és eredményét ismertetjük, kifejezetten a Σ_A^+ topologikusan keverő szimbolikus térre szorítkozva. A továbbiakban a Σ_A^+ tér alatt mindig topologikusan keverő rendszert értünk, ezt a feltételt a későbbiekben nem tüntetjük fel külön. A fejezet alapját a [9] és a [10] mellékleteiben található anyagok képezik. A részletes kifejtés és a bizonyítások megtalálhatók az [1, 7, 8, 12] művekben.

Elsőként a topologikus nyomás fogalmát vezetjük be a Σ_A^+ térre. Ez a mennyiség egy ún. potenciálfüggvényhez rendeli a megengedett szavakhoz tartozó, exponenciális súlyozással kapott összegek aszimptotikus növekedési ütemét.

2.15. Definíció. A $\varphi \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ függvény topologikus nyomása $P : C(\Sigma_A^+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ az alábbi leképezés:

$$P(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{megengedett}}} \inf_{x \in C_{i_1 \dots i_n}} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x)) \right) \right).$$

A definícióból közvetlenül következik a nyomás egy alapvető invarianciája:

2.16. Állítás. A topologikus nyomás σ -invariáns a következő értelemben:

$$P(\varphi) = P(\varphi \circ \sigma),$$

tetszőleges $\varphi \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ potenciálra.

Bizonyítás. A bizonyítás alapgondolata, hogy mivel φ egy kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért korlátos. Emiatt létezik olyan C konstans, amire $|\varphi(x) - \varphi(\sigma^n(x))| < C$ teljesül tetszőleges $x \in \Sigma_A^+$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén. Jelölje

$$S_n(\varphi) = \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{megengedett}}} \inf_{x \in C_{i_1 \dots i_n}} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x)) \right).$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ természetes számot. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra létezik egy $\{x_k : k \in K_\varepsilon\} \subset \Sigma_A^+$ halmaz, ami minden megengedett n -hengerhalmazból pontosan egy elemet tartalmaz, és amire $S_n(\varphi) > \sum_{k \in K_\varepsilon} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x_k)) \right) - \varepsilon$ teljesül.

Mivel K_ε minden megengedett hengerhalmazból pontosan egy elemet választ ki, ezért az infimum definíciójából

$$S_n(\varphi \circ \sigma) = \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{megengedett}}} \inf_{x \in C_{i_1 \dots i_n}} \exp \left(\sum_{j=1}^n \varphi(\sigma^j(x)) \right) \leq \sum_{k \in K_\varepsilon} \exp \left(\sum_{j=1}^n \varphi(\sigma^j(x_k)) \right)$$

teljesül. Így a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \varphi(\sigma^j(x_k)) &= \left(\sum_{j=1}^n \varphi(\sigma^j(x_k)) - \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x_k)) \right) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x_k)) \\ &= (\varphi(\sigma^n(x_k)) - \varphi(x_k)) + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x_k)) \leq C + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x_k)) \end{aligned}$$

összefüggésből, majd a K_ε megválasztásából kapott egyenlőtlenséget behelyettesítve

$$S_n(\varphi \circ \sigma) \leq \sum_{k \in K_\varepsilon} \exp \left(\sum_{j=1}^n \varphi(\sigma^j(x_k)) \right) \leq \sum_{k \in K_\varepsilon} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x_k)) + C \right) < (S_n(\varphi) + \varepsilon) \cdot e^C.$$

Innen $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ határátmenettel $S_n(\varphi \circ \sigma) \leq S_n(\varphi) \cdot e^C$ teljesül, ahonnan

$$P(\varphi \circ \sigma) - P(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{S_n(\varphi \circ \sigma)}{S_n(\varphi)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot C = 0,$$

ha $S_n(\varphi) \neq 0$. Az $S_n(\varphi) = 0$ esetben $S_n(\varphi \circ \sigma) = 0$ adódik, ahonnan $P(\varphi) = P(\varphi \circ \sigma) = 0$, amivel teljesül az állítás.

A másik irányú becsléshez válasszunk egy K'_ε halmazt, amire a $\{x_k : k \in K'_\varepsilon\} \subset \Sigma_A^+$ halmaz minden megengedett n -hengerhalmazból pontosan egy elemet tartalmaz, és amire $S_n(\varphi \circ \sigma) >$

$\sum_{k \in K_\varepsilon} \exp \left(\sum_{j=1}^n \varphi(\sigma^j(x_k)) \right) - \varepsilon$ teljesül. Ekkor analóg módon elvégezve a becsléseket $S_n(\varphi) \leq S_n(\varphi \circ \sigma) \cdot e^C$ adódik, ahonnan $P(\varphi) - P(\varphi \circ \sigma) \leq 0$. Az eredményeket összevetve $P(\varphi) - P(\varphi \circ \sigma) = 0$, amivel beláttuk az állítást. $\square$

Az alábbiakban a topologikus nyomás egy egyszerű, a későbbiekben azonban hasznosnak bizonyuló tulajdonságát mutatjuk be:

2.17. Állítás. *Tetszőleges $\varphi \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ függvény és c konstans esetén teljesül a következő összefüggés:*

$$P(c + \varphi(\cdot)) = c + P(\varphi(\cdot)).$$

Bizonyítás. A nyomás definíciójából:

$$P(c + \varphi(\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{megengedett}}} \inf_{x \in C_{i_1 \dots i_n}} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} (c + \varphi(\sigma^j(x))) \right) \right).$$

A konstans tagot kiemelve:

$$P(c + \varphi(\cdot)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(e^{nc} \cdot \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{megengedett}}} \inf_{x \in C_{i_1 \dots i_n}} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x)) \right) \right).$$

Alkalmazva a logaritmus azonosságait és egyszerűsítve az első tagot:

$$\begin{aligned} P(c + \varphi(\cdot)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\log e^{nc} + \log \sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{megengedett}}} \inf_{x \in C_{i_1 \dots i_n}} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x)) \right) \right) = \\ &= c + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\substack{(i_1 \dots i_n) \\ \text{megengedett}}} \inf_{x \in C_{i_1 \dots i_n}} \exp \left(\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\sigma^j(x)) \right) \right) = c + P(\varphi(\cdot)), \end{aligned}$$

ami éppen a kívánt összefüggés. $\square$

A topologikus nyomás következő fontos tulajdonságának ismertetéséhez szükségünk lesz egy új fogalom, a Kolmogorov–Sinai entrópia bevezetésére. Ez a mennyiség a dinamikai rendszer időbeli fejlődésének kaotikusságát méri, vagyis azt, hogy mennyire érzékenyen függ a kezdeti feltételektől. Előtte azonban szükséges a topologikus entrópia fogalmának tisztázása.

2.18. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ mértéktartó rendszer és $\mathcal{U} = \{C_1, \dots, C_k\}$ az X egy véges partíciója. Ekkor a

$$h(T, \mathcal{U}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i_1, \dots, i_n} -\mu(T^{-1}C_{i_1} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_n}) \log \mu(T^{-1}C_{i_1} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_n})$$

határérték a T topologikus entrópiája az $\mathcal{U}$ partícióra nézve.

2.19. Megjegyzés. Bizonyítható, hogy a fenti kifejezés határértéke létezik.

Az alábbiakban egy szemléletes értelmezést adunk a topologikus entrópia viselkedésére, amely előkészíti a Kolmogorov–Sinai entrópia bevezetését.

Rögzített n esetén a $\mu(T^{-1}C_{i_1} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_n})$ annak a valószínűségnek felel meg, hogy egy $x \in C_{i_n}$ pontból indulva rendszer rendre a $C_{i_1}, \dots, C_{i_n}$ partícióelemekbe lép. Mivel a $-x \log x$ függvény konkáv, folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, és a végpontokban 0-t vesz fel, az egyes pályák hozzájárulása – azaz $\mu(T^{-1}C_{i_1} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_n}) \log \mu(T^{-1}C_{i_1} \cap \dots \cap T^{-n}C_{i_n})$ – akkor lesz jelentős, ha az adott pályához tartozó valószínűség középértéken van. Megmutatható, hogy $h_n(T, \mathcal{U}) \leq \log m^n$, ahol m a felosztás elemeinek száma, és egyelőség pontosan akkor áll fenn, ha az összes m^n pálya előfordulási valószínűsége azonos. Így az n lépésre számolt $h_n(T, \mathcal{U})$ összentrópia növekedése szorosan összefügg a "tipikus" pályák számának növekedésével. Ha ezen tipikus pályák száma körülbelül e^{nh} , akkor

$$\frac{1}{n} h_n(T, \mathcal{U}) \approx \frac{\log e^{nh}}{n} = h,$$

így az entrópia éppen a tipikus pályák számának növekedési ütemét adja. Ez a növekedés éppen annak felel meg, hogy – a partíció megválasztásából eredő – kezdeti mérési hibák hosszú távon mennyire teszik kiszámíthatatlanná a rendszer viselkedését. Másképp, hányféle kimenetel (pálya) lehetséges n lépés után, ha kezdetben az x értékét csak a partíciónak megfelelő pontossággal tudjuk meghatározni.

Mivel a $H(T, \mathcal{U})$ kiszámítása erősen függ a választott partíciótól, a rendszer valódi komplexitásáról csak úgy kaphatunk teljes képet, ha minden lehetséges (véges) partíciót figyelembe veszünk. Ennek megfelelően a Kolmogorov–Sinai entrópiát a következőképpen definiáljuk:

2.20. Definíció. Az $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ mértéktartó rendszer Kolmogorov-Sinai entrópiája

$$h(T) = \sup_{\mathcal{U}} h(T, \mathcal{U}),$$

ahol a szuprémumot az X összes véges $\mathcal{U}$ partíciójára vesszük.

Most, hogy a szükséges fogalmakat bevezettük, rátérhetünk a topologikus nyomás egyik alapvető tulajdonságára, a variációs formulára. A tétel bizonyítással együtt megtalálható a [12] hivatkozásban.

2.21. Tétel (variációs formula). *A $\varphi \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ függvény topologikus nyomása*

$$P(\varphi) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\Sigma_A^+)} \left(h_\mu(\sigma) + \int_{\Sigma_A^+} \varphi d\mu \right),$$

ahol $\mathcal{M}(\Sigma_A^+)$ a Σ_A^+ téren értelmezett, σ -invariáns mértékek halmaza, $h_\mu(\sigma)$ pedig a σ egyoldali shiftoperátor μ mértékre vett Kolmogorov-Sinai entrópiája.

Különösen érdekesek azon mértékek, amelyekre ez a szuprémum felvételik – ez vezet a következő definícióhoz:

2.22. Definíció. Egy Σ_A^+ téren értelmezett $\mu = \mu_\varphi$ Borel valószínűségi mértéket a $\varphi \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ folytonos potenciálhoz tartozó egyensúlyi mértéknek nevezünk, ha teljesül, hogy

$$P(\varphi) = h_\mu(\sigma) + \int_{\Sigma_A^+} \varphi d\mu.$$

Az egyensúlyi mértékek létezése általában nem garantált, Hölder-folytonos potenciál esetén azonban a következő eredmény biztosítja a létezésüket és az egyértelműséget is. Először azonban emlékeztetünk a Hölder-folytonos leképezések fogalmára:

2.23. Definíció. Legyenek (X, d_X) és (Y, d_Y) metrikus terek, ekkor az $f: X \rightarrow Y$ függvény Hölder-folytonos, ha léteznek $C \geq 0$ és $0 < \alpha \leq 1$ konstansok, hogy tetszőleges $x, y \in X$ esetén $d_Y(f(x), f(y)) \leq C \cdot (d_X(x, y))^\alpha$.

2.24. Tétel. *Legyen $\varphi \in C^Y(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ egy Hölder-folytonos potenciál a Σ_A^+ téren. Ekkor φ -hez tartozik egy egyértelműen meghatározott egyensúlyi mérték. Továbbá, egy μ Borel valószínűségi mérték pontosan akkor egyensúlyi mérték a φ potenciálra, ha léteznek $D_1, D_2 > 0$ konstansok, amelyekre*

$$D_1 \leq \frac{\mu(\{y : y_i = x_i, i = 0, 1, \dots, n-1\})}{\exp(-nP(\varphi) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\sigma^k x))} \leq D_2$$

teljesül minden $x = (x_0, x_1, \dots) \in \Sigma_A^+$ és $n \geq 0$ esetén.

Előfordulhat, hogy különböző potenciálokhoz ugyanaz az egyensúlyi mérték tartozik. Hölder-folytonos potenciálok esetén azonban egy különösen szép karakterizáció adható, amely a kohomológia fogalmán alapul:

2.25. Definíció. A $\varphi, \psi \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ folytonos potenciálokat kohomológoknak nevezzük, és ezt $\varphi \sim \psi$ -vel jelöljük, ha létezik egy folytonos $g \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ függvény és egy $c \in \mathbb{R}$ konstans, amelyre $\varphi(x) = g(\sigma x) - g(x) + \psi(x) + c$ teljesül minden $x \in \Sigma_A^+$ -ra.

2.26. Tétel. Legyenek $\varphi, \psi \in C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ Hölder-folytonos potenciálok. Ekkor a hozzájuk tartozó μ_φ és μ_ψ egyensúlyi mértékek pontosan akkor egyeznek meg, ha φ és ψ kohomológ potenciálok.

Ezután definiáljuk az egyensúlyi mértékek egy további altípusát, a maximális entrópiájú mértékeket:

2.27. Definíció. A konstans potenciálhoz tartozó egyensúlyi mértéket maximális entrópiájú mértéknek nevezzük és μ_{max} -szal jelöljük.

2.28. Megjegyzés. Mivel a konstans potenciálok egymással kohomológok, a maximális entrópiájú mérték jóldefiniált.

A megnevezés onnan ered, hogy $\varphi \equiv 0$ választás esetén a 2.21 variációs formula alapján teljesül a

$$P(\varphi) = h_{\mu_{max}}(\sigma)$$

összefüggés, vagyis a nyomás ebben az esetben éppen a μ_{max} mértékre vett entrópiával egyezik meg.

Végül rátérünk az egyensúlyi mértékek egyik alapvető dinamikai tulajdonságára, amely kulcsfontosságú szerepet játszik a későbbiekben.

2.29. Tétel. Legyen $\varphi \in C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ egy Hölder-folytonos potenciál, ekkor a μ_φ egyensúlyi mérték ergodikus a (Σ_A^+, σ) rendszerre nézve.

3. Nemlineáris funkcionálanalízis

Ebben a fejezetben a deriválhatóság és az analiticitás fogalmát vizsgáljuk Banach-terek között értelmezett leképezések esetén. A funkcionálanalízis alapfogalmainak részletes ismertetésére itt nem térünk ki, a szükséges alapismeretek megtalálhatók a [2] könyvben.

3.1. Analitikus leképezések Banach-tereken

Elsőként az analitikus leképezések fogalmát általánosítjuk Banach-terek között értelmezett leképezésekre. Az általános definíció bevezetése előtt azonban emlékeztetünk az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esetre vonatkozó definícióra:

3.1. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (valós) analitikus a $D \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazon, ha tetszőleges $x_0 \in D$ -re létezik $(a_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

teljesül valamely $x_0 \in (a, b) \subseteq D$ intervallumon.

Az analitikus függvény definíciója egyváltozós esetben azt mondja ki, hogy ezen függvények lokálisan meghatározhatók egy konvergens hatványsor segítségével. Ezt a definíciót szeretnénk kiterjeszteni tetszőleges Banach-terek között haladó leképezésekre. Ehhez először bevezetjük a szimmetrikus leképezés fogalmát, amely biztosítja, hogy a leképezések permutált argumentumok mellett is analitikusak maradjanak.

3.2. Definíció. Az $F : X^n \rightarrow Y$ leképezést szimmetrikusnak nevezzük, ha minden n -hosszú π permutáció és minden $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ esetén teljesül, hogy $F(x_1, \dots, x_n) = F(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$.

Az analiticitás definíciójának megfogalmazásához előzetesen be kell vezetnünk a folytonos n -lineáris leképezések és azok operátornormájának fogalmát.

3.3. Definíció. Egy n -lineáris $L : X^n \rightarrow Y$ leképezés pontosan akkor folytonos, ha létezik $M > 0$ konstans, amire

$$\|L(x_1, \dots, x_n)\|_Y \leq M \|x_1\|_X \cdots \|x_n\|_X, \quad \forall x_i \in X.$$

Ilyenkor az L operátornormája

$$\begin{aligned}\|L\| &:= \sup \left\{ \|L(x_1, \dots, x_n)\|_Y : \|x_i\|_X \leq 1, i = 1, \dots, n \right\} \\ &= \inf \left\{ M > 0 : \|L(x_1, \dots, x_n)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_n\|, \forall x_i \in X \right\}.\end{aligned}$$

Ennek segítségével bevezetjük az általánosított definíciót a valós analiticitásra, az [5] forrás 2.2.1 definíciójának megfelelően.

3.4. Definíció. Legyenek X és Y valós Banach-terek, valamint $U \subseteq X$ egy nyílt részhalmaz. Az $F : U \rightarrow Y$ leképezést valós analitikusnak nevezzük az $x_0 \in U$ pontban, ha létezik egy $r > 0$ sugár és egy szimmetrikus, n -lineáris, folytonos leképezésekből álló sorozat

$$L_n : X^n \rightarrow Y, \quad n \geq 1,$$

amelyre $\sum_{n=1}^{\infty} \|L_n\| r^n < \infty$ teljesül, továbbá létezik egy $\delta = \delta(x_0) > 0$ konstans, amelyre minden $h \in X$, $\|h\|_X < \delta$ esetén:

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} L_n(h, \dots, h).$$

3.5. Megjegyzés. A 3.4 definíció valóban kiterjesztése az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények hagyományos analiticitási fogalmának (ld. 3.1). A bizonyítás alapötlete, hogy ha $X = Y = \mathbb{R}$ esetén az L_n leképezéseket az alábbi módon választjuk:

$$L_n(x_1, \dots, x_n) = a_n \prod_{i=1}^n x_i,$$

akkor $L_n(h, \dots, h) = a_n h^n$, így az általános sorfejtés átalakul a klasszikus hatványsor alakjára:

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^n.$$

Fordítva, ha a 3.4 szerinti L_n leképezések adottak, akkor $a_n = L_n(1, \dots, 1)$ választással ugyanezt a hatványsor alakot kapjuk.

3.6. Megjegyzés. A klasszikus esethez hasonlóan az általánosított 3.4 Definíció mellett is igaz, hogy analitikus leképezések kompozíciója analitikus marad.

A következőkben, a [13] forrás alapján, rátérünk egy klasszikus tétel általánosítására, az analitikus implicitfüggvény-tételre. Megjegyezzük, hogy a tételnek létezik egy tetszőleges Banach-terek közötti leképezésekre érvényes, általánosabb változata is (vö. [13]), nekünk azonban a későbbiekhez elegendő az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ esetre szorítkozunk.

3.7. Tétel (Analitikus implicitfüggvény-tétel). *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, és $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ valós analitikus függvény. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in G$ és $F(a, b) = 0$, továbbá, hogy az $F_a(y) = F(a, y)$ függvényre $\det(F'_a(b)) \neq 0$. Ekkor létezik $\delta, \eta > 0$, hogy:*

1. minden $x \in B(a, \delta)$ -ra egyértelműen létezik $g(x) \in B(b, \eta)$, hogy $F(x, g(x)) = 0$,
2. a $g : B(a, \delta) \rightarrow B(b, \eta)$ implicit függvény valós analitikus a $B(a, \delta)$ -n.

Végül kimondunk egy, a későbbiek szempontjából jelentős eredményt, amely szintén az előzőekben bevezetett fogalomrendszeren alapul. A tétel D. Ruelle [12] könyvéből származik:

3.8. Tétel. *A $P : C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés valós analitikus.*

Ahhoz, hogy az analiticitás értelmes legyen, meg kell adnunk a $C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ téren egy olyan normát, amelyre nézve Banach-teret kapunk:

3.9. Definíció. Legyen (X, d) egy metrikus tér, $0 < \gamma \leq 1$, és $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder-folytonos. A γ -Hölder-normát az alábbi módon definiáljuk:

$$\|f\|_\gamma := \|f\|_\infty + |f|_\gamma,$$

ahol

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad \text{és} \quad |f|_\gamma := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\gamma}.$$

Belátható, hogy a $C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ tér a Hölder-normával ($d = \rho_\lambda$ metrikával) valóban Banach-tér. A továbbiakban ezt a normát fogjuk használni.

Érdemes megjegyezni, hogy a 3.8 Tétel eredménye nem feltétlenül marad igaz, ha Σ_A^+ -t tetszőleges szimbolikus térre cseréljük. Emellett fontos kiemelni, hogy az analiticitás kizárólag a Hölder-folytonos leképezések $C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ terén teljesül, nem pedig a P teljes értelmezési tartományán.

3.2. Differenciálás Banach-tereken

Ebben a fejezetben a [13] könyv 4. fejezete alapján bevezetünk két deriváltfogalmat, a Fréchet- és Gâteaux-differenciálhatóságot, majd ismertetünk néhány fontos eredményt a témában. A deriváltfogalmak bevezetéséhez először rögzítjük a szükséges jelöléseket. Legyenek X és Y , $\mathbb{K}$ -feletti Banach-terek, ahol $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, és jelölje $U(0)$ a nullvektor egy környezetét. Ekkor az $r : U(0) \subseteq X \rightarrow Y$ leképezésre azt mondjuk, hogy

$$r(x) = o(\|x\|), \quad x \rightarrow 0$$

ha teljesül, hogy

$$\frac{r(x)}{\|x\|} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

Továbbá jelölje $L(X, Y)$ az $X \rightarrow Y$ folytonos lineáris leképezések halmazát.

Most már bevezethetjük a Fréchet- és Gâteaux-differenciálhatóság fogalmát:

3.10. Definíció. Legyenek X, Y Banach-terek és jelölje $U(x)$ az $x \in X$ pont egy környezetét.

- Az $f : U(x) \subseteq X \rightarrow Y$ leképezés Fréchet-differenciálható az x pontban, ha létezik egy $T \in L(X, Y)$ folytonos lineáris leképezés, amire

$$f(x+h) - f(x) = Th + o(\|h\|), \quad h \rightarrow 0 \tag{1}$$

teljesül. Ilyenkor a T leképezést az f , x -beli Fréchet-deriváltjának (vagy röviden F-deriváltjának) nevezzük és $D_F f(x) = T$ -vel jelöljük. Az x -beli Fréchet-differenciál $df(x; h) = D_F f(x)[h]$, ahol $D_F f(x)[h]$ a $D_F f(x)$ lineáris leképezés értékét jelöli a $h \in X$ pontban.

- Az $f : U(x) \subseteq X \rightarrow Y$ leképezés Gâteaux-differenciálható az x pontban, ha létezik egy $T \in L(X, Y)$ folytonos lineáris leképezés, amire

$$f(x+tk) - f(x) = tTk + o(t), \quad t \rightarrow 0 \tag{2}$$

teljesül minden olyan k -ra, melyre $\|k\| = 1$. Ilyenkor a T leképezést az f , x -beli Gâteaux-deriváltjának (vagy röviden G-deriváltjának) nevezzük és $D_G f(x) = T$ -vel jelöljük. Az x -beli Gâteaux-differenciál $d_G f(x; h) = D_G f(x)[h]$, ahol $D_G f(x)[h]$ a $D_G f(x)$ lineáris leképezés értékét jelöli a $h \in X$ pontban.

- Ha minden $x \in X$ pontban létezik a $D_F f(x)$, F-derivált (ill. a $D_G f(x)$, G-derivált), akkor a

$$D_F f : A \subseteq X \rightarrow L(X, Y), \quad x \mapsto D_F f(x) \quad (3)$$

leképezést az f , F-deriváltjának (ill. G-deriváltjának) nevezzük az A -n.

Az (1) és (2) definíciókból a megfelelő deriváltak – ha léteznek – egyértelműek. A (2)-ből közvetlenül következik a G-deriválhatóság következő ekvivalens definíciója:

$$D_G f(x)k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tk) - f(x)}{t}, \quad (4)$$

tetszőleges k esetén. Ekkor $\varphi(t) = f(x + tk)$ választás mellett a (4) összefüggésből

$$\varphi'(0) = D_G f(x)k \quad (5)$$

teljesül az f G-differenciáljára, ami a későbbiekben hasznos összefüggésnek bizonyul majd.

3.11. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ esetén a Fréchet-differenciálhatóság definíciója egybeesik a klasszikus értelemben vett többváltozós (totális) derivált fogalmával. Továbbá, $n = k = 1$ esetén a Fréchet- és Gâteaux-differenciálhatóság megegyezik, és ekkor $f'(x) = D_F f(x)[1]$ teljesül.

3.12. Megjegyzés. A $D_F f$ leképezés x pontbeli deriváltját, vagyis $D_F^2 f(x)$ -et az alábbi linearizáció alapján definiáljuk:

$$D_F f(x + h) = D_F f(x) + D_F^2 f(x)h + o(\|h\|), \quad h \rightarrow 0.$$

A (3) alapján $D_F^2 f(x)$ egy folytonos lineáris leképezés X -ből $L(X, Y)$ -ba, azaz

$$D_F^2 f(x) \in L(X, L(X, Y)).$$

Ha $h, k \in X$, akkor

$$D_F^2 f(x)k \in L(X, Y) \quad \text{és} \quad (D_F^2 f(x)k)h \in Y,$$

amit a későbbiekben $D_F^2 f(x)[k, h]$ -val jelölünk. A zárójelek átírása nem okoz félreértést, ugyanakkor leegyszerűsíti az írásmódot. Mivel érvényes a következő becslés:

$$\|(D_F^2 f(x)k)h\| \leq \|D_F^2 f(x)k\| \|h\| \leq \|D_F^2 f(x)\| \|k\| \|h\|,$$

a $(k, h) \mapsto D_F^2 f(x)[k, h]$ egy korlátos bilineáris leképezés az $X \times X$ és Y terek között.

A következő tétel kapcsolatot teremt a kétféle deriváltfogalom között:

3.13. Állítás. *a) Ha f , F -differentiálható az x -ben, akkor G -differentiálható is és a kétféle derivált megegyezik.*

b) Ha f , G -deriválható x -ben, és a (4) konvergencia egyenletes minden olyan k -ra, melynek normája $\|k\| = 1$, akkor f , F -deriválható x -ben.

c) Ha f , G -deriválható az x egy környezetében és $D_G f$ folytonos az x -ben, akkor f , F -deriválható az x -ben.

d) Ha a $D_F f(x)$, F -derivált létezik az x -ben, akkor f folytonos az x -ben.

Az *a)* pontnak megfelelően nem okoz félreértést a $Df(x)$ jelölés használata a kétféle deriváltra, hiszen ha a két derivált egyszerre létezik, akkor megegyeznek. A későbbiekben ezt az egyszerűsített jelölésmódot használjuk.

A definíciókból közvetlenül belátható a következő alaptulajdonság:

3.14. Állítás. *Legyenek $f, g : U(x) \subseteq X \rightarrow Y$, F -differentiálható (ill. G -differentiálható) leképezések x -ben, ahol $X, Y, \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ feletti Banach-terek. Ekkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén az $(\alpha f + \beta g)$ F -differentiálható (ill. G -differentiálható) az x -ben és*

$$D(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha Df(x) + \beta Dg(x).$$

Az előző állításban láthattuk, hogy az F - és G -deriváltak megőrzik a klasszikus deriválás egyik elemi tulajdonságát, a linearitást. A következőkben egy másik alapvető tulajdonság, a láncszabály általánosítása következik, amely az összetett függvények deriválhatóságát írja le a Banach-terek közötti leképezések esetén.

3.15. Állítás (láncszabály). Legyen $x \in X$ rögzített és $y = f(x)$, valamint

$$f : U(x) \subseteq X \rightarrow Y \text{ és } g : U(y) \subseteq Y \rightarrow Z, \quad (6)$$

ahol $f(U(x)) \subseteq U(y)$, továbbá X, Y és Z Banach-terek. Tegyük fel, hogy $Df(x)$ és $Dg(f(x))$, F -deriváltak léteznek. Ekkor

- A $g \circ f : U(x) \subseteq X \rightarrow Z$ leképezés F -differentiálható x -ben, és

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x). \quad (7)$$

- Ha f -ről csak azt tesszük fel, hogy G -deriválható az x -ben, akkor $f \circ g$, G -deriválható x -ben és a deriváltjára (7) teljesül.

A fenti két tétel bizonyítással együtt megtalálható a [13] könyv 4. fejezetében. A klasszikus esethez hasonlóan itt is bevezethető a parciális derivált fogalma:

3.16. Definíció. Legyen $D(f) \subseteq X \times Y$ nyílt halmaz és $f : D(f) \rightarrow Z$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, ahol X, Y és Z Banach-terek. Rögzítsük y -t és legyen $g(x) = f(x, y)$. Ha g , F -differentiálható (ill. G -differentiálható) az (x, y) -ban, akkor az f parciális F -deriváltja (ill. parciális G -deriváltja) az (x, y) pontban az x változóra nézve $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = Dg(x)$. Hasonlóan definiálható az f , y -ra vonatkozó parciális deriváltja is, az $x \in X$ rögzítése mellett:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Dh(y), \text{ ahol } h(y) = f(x, y). \quad (8)$$

A következő tétel – amely szintén megtalálható a [13] könyv 4. fejezetében – az F -derivált és a parciális F -deriváltak kapcsolatát írja le.

3.17. Állítás. • Ha f , F -differentiálható (x, y) -ban, akkor léteznek a parciális F -deriváltjai (x, y) -ban és

$$Df(x, y)(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)[h] + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)[k] \quad (9)$$

teljesül minden $h \in X$ és $k \in Y$ esetén.

- Megfordítva, ha léteznek az f parciális F -deriváltjai az (x, y) valamely környezetében és folytonosak, akkor létezik a $Df(x, y)$ F -derivált és teljesül a (9) összefüggés.

- Az f leképezés pontosan akkor F -differentiálható az (x, y) egy környezetében, ha az f parciális F -deriváltjai léteznek és folytonosak az (x, y) egy környezetben.

Hasonló összefüggések fennállnak $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ alakú leképezésekre is.

Végül kimondunk egy, a Fréchet-differentiálhatóságra vonatkozó állítást:

3.18. Állítás. Tegyük fel, hogy az $f : U(x) \subseteq X \rightarrow Y$ leképezés valós analitikus az x pontban. Ekkor f , F -differentiálható az x -ben és deriváltja $Df(x) = L_1$, ahol L_1 a 3.4 Definícióban szereplő folytonos lineáris leképezés.

Bizonyítás. Az eredmény közvetlenül következik az f , 3.4 Definícióban szereplő hatványsor alakjából. Valóban, ha $\|h\| < \min\{r, \delta\}$, akkor

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} L_n(h, \dots, h) = f(x) + L_1(h) + \sum_{n \geq 2} L_n(h, \dots, h).$$

Mivel L_n n -lineáris leképezés, így

$$L_n(h, \dots, h) \leq \|L_n\| \|h\|^n,$$

ahonnan a (Banach-terekre alkalmazott) háromszögegyenlőtlenség alapján

$$\frac{1}{\|h\|} \left\| \sum_{n \geq 2} L_n(h, \dots, h) \right\| \leq \frac{1}{\|h\|} \sum_{n \geq 2} \|L_n(h, \dots, h)\| \leq \sum_{n \geq 2} \|L_n\| \|h\|^{n-1}$$

teljesül a maradéktagra. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \|L_n\| r^n < \infty$, a jobb oldali hatványsor $\|h\| \rightarrow 0$ esetén 0-hoz konvergál:

$$\sum_{n \geq 2} \|L_n\| \|h\|^{n-1} < \frac{\|h\|}{r^2} \cdot \sum_{n \geq 2} \|L_n\| r^n \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Következésképp

$$\sum_{n \geq 2} L_n(h, \dots, h) = o(\|h\|), \quad h \rightarrow 0,$$

így f Fréchet-differentiálható az x -ben és $Df(x) = L_1$. □

3.19. Megjegyzés. Valójában több is igaz: belátható, hogy ha f analitikus leképezés az x pontban, akkor végtelen sokszor F -differentiálható az x -ben.

3.20. Következmény. A $P : C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés tetszőleges $h \in C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ pontban végtelen szer F -differentiálható.

Végül rátérünk két, a termodinamikai nyomás deriváltjára vonatkozó eredményre, amely a későbbiekben kulcsfontosságúnak mutatkozik. A tételek D. Ruelle [12] könyvéből származnak:

3.21. Tétel (Ruelle-formula). Legyenek h_1 és h_2 folytonos függvények Σ_A^+ -on. Ekkor teljesül a következő összefüggés:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} P(h_1 + \varepsilon h_2) \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Sigma_A^+} h_2 d\mu_{h_1},$$

ahol μ_{h_1} a h_1 potenciálhoz tartozó egyensúlyi mértéket, P a σ -hoz tartozó topologikus nyomást jelöli.

3.22. Tétel (Ruelle-formula második deriváltra). Legyenek $h, f_1, f_2 \in C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ Hölder-folytonos függvények. Ekkor a σ shiftoperátorhoz tartozó topologikus nyomás második parciális deriváltja a következőképpen számítható:

$$\left. \frac{\partial^2 P(h + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \right|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = Q_h(f_1, f_2),$$

ahol a Q_h bilineáris forma a $C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ tér elemein a következőképpen van értelmezve:

$$Q_h(f_1, f_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\Sigma_A^+} f_1 \cdot (f_2 \circ \sigma^k) d\mu_h - \int_{\Sigma_A^+} f_1 d\mu_h \int_{\Sigma_A^+} f_2 d\mu_h \right).$$

Itt μ_h a h függvényhez tartozó egyensúlyi mértéket jelöli. Továbbá minden f függvényre teljesül, hogy $Q_h(f, f) \geq 0$, és $Q_h(f, f) > 0$ pontosan akkor, ha f nem kohomológ egy konstans függvénnyel.

3.23. Megjegyzés. A korábbiakban szereplő (5) összefüggés alapján $\left. \frac{d}{d\varepsilon} P(h_1 + \varepsilon h_2) \right|_{\varepsilon=0} = DP(h_1)[h_2]$ teljesül, vagyis a 3.21 Ruelle-formula megadja a termodinamikai nyomás G -differentiálját tetszőleges $h_1 \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ potenciálra. A 3.20 Következmény szerint Hölder-folytonos h_1 potenciál esetén ez egyben F -differentiál is.

Hasonló összefüggés teljesül a második deriváltra is: $\left. \frac{\partial^2 P(h + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \right|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = D^2 P(h)[f_1, f_2]$, és Hölder-folytonos h potenciál esetén ez egyben F -differentiál is.

4. A Birkhoff-spektrum

Ebben a fejezetben a multifraktál analízis néhány alapvető eredményét mutatjuk be a [9] cikk alapján. A tárgyalás középpontjában két fontos fogalom, a Birkhoff-átlagokra épülő ún. Birkhoff-spektrum, valamint a pontonkénti dimenzió alapuló dimenzióspektrum áll. Célunk, hogy feltárjuk a két spektrum közötti kapcsolatot, lehetővé téve az eredmények átültetését az egyik fogalomrendszerből a másikba, majd igazoljuk a Birkhoff-spektrum egy meglehetősen elegáns szerkezeti tulajdonságát. Először azonban rögzítjük a tárgyalás alapjául szolgáló dinamikai rendszert és bevezetjük a szükséges fogalmakat.

Legyen $\sigma : \Sigma_A^+ \rightarrow \Sigma_A^+$ egy topologikusan keverő egyoldali véges típusú szubshiftoperátor és $\phi \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ folytonos függvény. Jelölje $\bar{\phi}(x)$ a ϕ Birkhoff-átlagát az x pályája mentén, vagyis

$$\bar{\phi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\sigma^k x),$$

feltéve, hogy a határérték létezik.

Vegyük észre, hogy ha μ egy ergodikus valószínűségi mérték a Σ_A^+ téren, akkor a Birkhoff-féle ergodtétellel értelmében μ -majdnem minden x -re

$$\bar{\phi}(x) \equiv \hat{\phi} \equiv \int_{\Sigma_A^+} \phi d\mu$$

teljesül. Másképp mondván, a tétel biztosítja, hogy az átlag majdnem minden pont pályáján meg egyezzen, mindössze egy nullmértékű halmazt hagyva a "szokatlan" viselkedésű pontoknak. Mindazonáltal a Birkhoff-tétel semmilyen információval nem szolgál ezen nullmértékű halmaz szerkezetéről.

Természetes módon felmerül a kérdés, hogy $\bar{\phi}$ vajon felvesz-e a $\hat{\phi}$ -től különböző értéket, és ha igen, mi mondható el az értékkészletéről, valamint a szinthalmozainak szerkezetéről. A vizsgálódáshoz érdemes a Σ_A^+ tér alábbi felbontását tekinteni:

$$\Sigma_A^+ = \{x \in \Sigma_A^+ : \bar{\phi}(x) = \hat{\phi}\} \cup \bigcup_{\alpha \neq \hat{\phi}} B_\alpha \cup \{x \in \Sigma_A^+ : \bar{\phi}(x) \text{ nem létezik}\},$$

ahol $B_\alpha = \{x : \bar{\phi}(x) = \alpha\}$ a $\bar{\phi}$, α -hoz tartozó szinthalmozát jelöli. A továbbiakban e felbontás komponenseinek Hausdorff-dimenzióját vizsgáljuk.

A szinthalmazok Hausdorff-dimenziójának vizsgálatában a következő függvény lesz segítségünkre:

4.1. Definíció. A $\phi \in C(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ folytonos függvény Birkhoff-spektruma

$$b_\phi(\alpha) = \dim_H B_\alpha,$$

ahol $\dim_H F$ az F halmaz Hausdorff-dimenzióját jelöli.

Most rátérünk a klasszikus multifraktál analízis egyik központi fogalmára, a dimenzióspektrumra. Ennek felépítése a Birkhoff-spektruméval analóg, azonban Birkhoff-átlag helyett a pontonkénti dimenzió szinthalmazaira épít. A dimenzióspektrum definiálásához ezért a pontonkénti dimenzió fogalmát kell először bevezetnünk:

4.2. Definíció. A Σ_A^+ halmazon értelmezett μ valószínűségi mérték x -beli pontonkénti dimenziója

$$d_\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r},$$

amennyiben a határérték létezik. Itt $B(x, r)$ az x körüli r -sugarú gömböt jelöli a ρ_λ metrikában.

A dimenzióspektrum fogalmát ez alapján a következőképpen adhatjuk meg:

4.3. Definíció. A μ valószínűségi mérték dimenzióspektruma

$$f_\mu(\alpha) = \dim_H K_\alpha,$$

ahol $K_\alpha = \{x \in \Sigma_A^+ : d_\mu(x) = \alpha\}$ a pontonkénti dimenzió α -hoz tartozó szinthalmazát jelöli.

Megfigyelhető, hogy a dimenzióspektrum fogalma – a Birkhoff-spektrummal ellentétben – nem egy adott függvényhez, hanem egy mértékhez kapcsolódik. A két fogalom közötti kapcsolatot az egyensúlyi mértékek biztosítják: ha a dimenzióspektrum definíciójában egy adott ϕ Hölder-folytonos potenciálhoz tartozó μ_ϕ egyensúlyi mértéket választjuk, akkor az alábbi összefüggés teremti meg az átjárhatóságot a két spektrum között:

$$b_\phi(\alpha) = f_{\mu_\phi} \left(\frac{P(\phi) - \alpha}{\log \lambda} \right).$$

Ez az összefüggés a korábban hivatkozott [9] cikk eredménye, és bizonyítással együtt 4.6 Következményként fog szerepelni a dolgozatban.

4.1. Kapcsolat a dimenzióspektrummal

Ebben a fejezetben rátérünk a Birkhoff-spektrum és a dimenzióspektrum közti kapcsolatra. Mielőtt azonban bizonyítanánk a korábban említett eredményt, belátjuk az alábbi egyszerű lemmát:

4.4. Lemma. *Jelölje $C_n(x) = \{y = (y_1 y_2 \dots) : y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n\}$ az x -et tartalmazó n -hengerhal-
mazt, valamint legyen $x' = (x_1, \dots, x_n, 1_\infty)$. Ekkor $C_n(x) = B(x', \frac{1}{\lambda^n})$, ahol a jobb oldalon a ρ_λ
metrika szerinti gömböt tekintjük ($\lambda > N$).*

Bizonyítás. A $B(x', \frac{1}{\lambda^n}) \subseteq C_n(x)$ tartalmazás közvetlenül adódik a 2.3 Állítás 2. pontjából. A fordított tartalmazáshoz vegyünk egy tetszőleges $y \in C_n(x)$ elemet. Kihasználva az első n számjegy egyezését, a távolság a következőképp becsülhető:

$$\rho_\lambda(x', y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x'_i - y_i|}{\lambda^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{N-1}{\lambda^i} = \frac{N-1}{\lambda-1} \cdot \frac{1}{\lambda^n} < \frac{1}{\lambda^n}.$$

Ez pedig éppen azt mutatja, hogy $y \in B(x', \frac{1}{\lambda^n})$, vagyis a kívánt tartalmazás teljesül. $\square$

Most pedig következzen egy olyan állítás, amelynek segítségével később megfogalmazhatjuk a spektrumok közötti kapcsolatot.

4.5. Állítás. *Legyen $\sigma : \Sigma_A^+ \rightarrow \Sigma_A^+$ egy topologikusan keverő egyoldali véges típusú szubshiftoperátor, és legyen $\phi \in C^{\gamma}(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ egy Hölder-folytonos függvény, μ_ϕ az ehhez tartozó egyensúlyi mérték. Ekkor*

$$\bar{\phi}(x) = P(\phi) - \log \lambda \cdot d_{\mu_\phi}(x),$$

ahol $\lambda > N$, és $P(\phi)$ a ϕ -hez tartozó topologikus nyomást jelöli.

Bizonyítás. Mivel μ_ϕ egyensúlyi mérték, a 2.24 Tétel értelmében léteznek $D_1, D_2 > 0$ konstansok, hogy

$$D_1 \leq \frac{\mu(C_n(x))}{\exp(S_n \phi(x) - nP(\phi))} \leq D_2$$

teljesül minden $x \in \Sigma_A^+$ és n esetén, ahol

$$S_n \phi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(\sigma^k x).$$

Logaritmust véve

$$\log D_1 \leq \log \mu(C_n(x)) - (S_n \phi(x) - nP(\phi)) \leq \log D_2,$$

ahonnan

$$\log D_1 + S_n \phi(x) - nP(\phi) \leq \log \mu(C_n(x)) \leq \log D_2 + S_n \phi(x) - nP(\phi). \quad (10)$$

Mivel $\frac{1}{n} \log D_i \rightarrow 0$ és $\frac{1}{n} S_n \phi(x) \rightarrow \bar{\phi}(x)$, a (10) kifejezést leosztva n -nel a határértékre a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu(C_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (S_n \phi(x) - nP(\phi)) = \bar{\phi}(x) - P(\phi) \quad (11)$$

összefüggést kapjuk. Mivel a $C_n(x)$ hengerhalmazok a 4.4 Lemma szerint felírhatóak metrikus gömbként, így az x -beli pontonkénti dimenzió kifejezhető a hengerhalmazok segítségével:

$$d_{\mu_\phi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(C_n(x))}{\log \frac{1}{\lambda^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(C_n(x))}{n} \cdot \frac{n}{\log \frac{1}{\lambda^n}}. \quad (12)$$

A (11) egyenlőséget átrendezve, majd a (12) kifejezést behelyettesítve, megkapjuk a kívánt összefüggést:

$$\bar{\phi}(x) = P(\phi) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu(C_n(x)) = P(\phi) + d_{\mu_\phi}(x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\lambda^n}}{n} = P(\phi) - \log \lambda \cdot d_{\mu_\phi}(x).$$

□

Az állítás ereje abban rejlik, hogy kapcsolatot teremt a dimenzióspektrum és a Birkhoff-spektrum között. Közvetlen következményként egy olyan képletet kapunk, amelynek segítségével a pontonkénti dimenzió szinthalmazaira vonatkozó állítások lefordíthatóak a Birkhoff-átlag szinthalmazaira vonatkozó állításokra:

4.6. Következmény. *A fenti állítás feltételei mellett teljesül a következő összefüggés:*

$$b_\phi(\alpha) = f_{\mu_\phi} \left(\frac{P(\phi) - \alpha}{\log \lambda} \right).$$

4.2. A Birkhoff-spektrum tulajdonságai

Ebben a fejezetben a Birkhoff-spektrum egy igen meglepő tulajdonságát bizonyítjuk: megmutatjuk, hogy ha ϕ egy Hölder-folytonos potenciál, akkor a hozzá tartozó Birkhoff-spektrum analitikus egy nyílt intervallumon. Ez az eredmény jól illusztrálja a sokszor "multifraktál csoda"-ként emlegetett jelenséget – bár a Σ_A^+ szinthalmazokra bontása rendkívül bonyolult és aprólékos, a dimenziófüggvény $b_\phi(\alpha)$ mégis simán, analitikusan viselkedik. Az eredmény Y. Pesin és H. Weiss [9] cikkéből származik, de a bizonyítás egyes lépései egy korábbi cikkünkől lettek átemelve, mely [10] hivatkozásként szerepel.

4.7. Tétel. *Legyen $\sigma : \Sigma_A^+ \rightarrow \Sigma_A^+$ egy topologikusan keverő, egyoldali véges típusú szubshiftoperátor, és legyen $\phi \in C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ egy Hölder-folytonos függvény. Jelölje μ_ϕ a ϕ -hez tartozó egyensúlyi mértéket. Tegyük fel továbbá, hogy $\mu_\phi \neq \mu_{\max}$. Ekkor a $b_\phi(\alpha)$ függvény valós analitikus egy nyílt intervallumon.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz rögzítsünk egy tetszőleges $\phi \in C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ Hölder-folytonos potenciált és legyen $\mu = \mu_\phi$ a hozzá tartozó egyensúlyi mérték. Defináljuk a $\varphi_q : \Sigma_A^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $q \in (-\infty, \infty)$ függvénycsaládot a Σ_A^+ -n a következő képlettel:

$$\varphi_q(x) = -T(q) \log \lambda + q \log \Psi(x),$$

ahol $\log \Psi = \phi - P(\phi)$ és $T(q)$ olyan, hogy

$$P(\varphi_q) = P(-T(q) \log \lambda + q \log \Psi(x)) = 0.$$

Mivel ϕ Hölder-folytonos, a $\log \Psi = \phi - P(\phi)$ is az, ahonnan a φ_q függvény is Hölder-folytonos minden q valósra. Ahhoz, hogy a definíció értelmes legyen, belátjuk a következő lemmát:

4.8. Lemma. *A fenti jelölésekkel a*

$$T(q) = \frac{P(q \log \Psi(\cdot))}{\log \lambda}$$

(az egyetlen) olyan függvény, amely minden $q \in \mathbb{R}$ esetén kielégíti az alábbi egyenlőséget:

$$P(\varphi_q) = P(-T(q) \log \lambda + q \log \Psi(\cdot)) = 0.$$

Bizonyítás. Rögzített $q \in \mathbb{R}$ mellett alkalmazzuk a 2.17 Állítást:

$$0 = P(-T(q) \log \lambda + q \log \Psi(\cdot)) = -T(q) \log \lambda + P(q \log \Psi(\cdot)).$$

Átrendezve, majd leosztva $\log \lambda \neq 0$ -val, éppen a kívánt összefüggést kapjuk. $\square$

A következő állítás bizonyításához szükségünk lesz egy, a funkcionálanalízis klasszikus eredményei közé tartozó tételre. A tétel és annak bizonyítása megtalálható a [2] jegyzetben (3.4-es állítás).

4.9. Tétel. *Legyen E véges dimenziós normált tér, F pedig egy tetszőleges normált tér. Ekkor tetszőleges $A : E \rightarrow F$ lineáris operátor folytonos.*

Most már rátérhetünk a következő állításra, amely az előbbi tétel és az implicitfüggvény tétel segítségével bizonyítja $T(q)$ valós analiticitását:

4.10. Állítás. *A $T(q)$ függvény valós analitikus minden $q \in \mathbb{R}$ -re.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz a 3.7 implicitfüggvény-tétel (IFT) analitikus változatát használjuk. Ehhez először definiáljuk az $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következő képlettel:

$$F(q, r) = P(r \log \lambda + q \log \Psi(\cdot)).$$

Definiáljuk továbbá a $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ leképezést az alábbi módon:

$$c(q, r) = r \log \lambda + q \log \Psi.$$

Ekkor $F = P \circ c$ teljesül. A $\log \Psi = \phi - P(\phi)$ összefüggésből (ahol $\phi \in C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$) a $c(q, r)$ minden q, r esetén Hölder-folytonos. A 3.8 Tétel szerint a P leképezés a $C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ téren valós analitikus, ezért a c értékein értelmezett P valós analitikus.

Megmutatjuk, hogy a c leképezés is valós analitikus. A 3.4 jelöléseit használva legyen $L_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ a következő, $\mathbb{R}^2$ -ben lineáris leképezés:

$$L_1(x, y) = x \log \lambda + y \log \Psi(\cdot),$$

valamint legyen $L_n : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$, $L_n = 0$ minden $n \geq 2$ -re. Ekkor tetszőleges $r > 0$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} \|L_n\| r^n = \|L_1\| r$, így a $\sum_{n=1}^{\infty} \|L_n\| r^n < \infty$ feltétel ekvivalens az L_1 lineáris operátor folytonosságával. Az L_1 folytonossága közvetlenül következik a 4.9 Tételből. Így a c és a P leképezés is valós analitikus, ahonnan a 3.5 és 3.6 Megjegyzések szerint a kompozíciójuk, az F függvény is valós analitikus.

A 4.8 Lemma szerint $F(q, r) = 0 \iff r = -T(q)$, $\forall q \in \mathbb{R}$. Alkalmazzuk az IFT-t az F függvényre, tetszőleges $q_0 \in \mathbb{R}$ mellett a $(q_0, -T(q_0))$ pontban. Az IFT alkalmazhatóságához azt kell megmutatni, hogy

$$\frac{\partial F(q_0, r)}{\partial r} \Big|_{r=-T(q_0)} \neq 0. \quad (13)$$

Ekkor az IFT-ből megkapjuk a T függvény analitikusságát.

A (13) feltétel belátásához a Ruelle-formulát használjuk a következő összefüggés alapján:

$$\frac{\partial F(q_0, r)}{\partial r} \Big|_{r=-T(q_0)} = \frac{\partial P(c(q_0, r))}{\partial r} \Big|_{r=-T(q_0)}.$$

Mivel c analitikus, így F -differentiálható. Továbbá mivel c Hölder-folytonos, és így az értékkészletén P is F -differentiálható, ezért a 3.15 láncszabály alapján $P \circ c$ is F -differentiálható (és így a klasszikus értelemben is differentiálható). Ekkor a 3.17 Állítás szerint valóban létezik a $\frac{\partial P(c(q_0, r))}{\partial r}$ parciális derivált.

Tekintsük a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(r) = P(c(q_0, r))$ függvényt. Definíció szerint

$$\frac{\partial P(c(q_0, r))}{\partial r} \Big|_{r=-T(q_0)} = g'(r) \Big|_{r=-T(q_0)}. \quad (14)$$

Az $\varepsilon = r + T(q_0)$ helyettesítéssel legyen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(\varepsilon) = g(-T(q_0) + \varepsilon) = P(c(q_0, -T(q_0) + \varepsilon))$, ekkor

$$g'(r) \Big|_{r=-T(q_0)} = h'(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (15)$$

A 3.21 Állítás jelöléseit használva válasszuk a függvényeket a következő módon:

$$h_1 = c(q_0, -T(q_0)) = \varphi_{q_0},$$

$$h_2 = \log \lambda.$$

A $c(q_0, -T(q_0) + \varepsilon) = c(q_0, -T(q_0)) + \varepsilon \cdot h_2$ összefüggésből

$$h(\varepsilon) = P(h_1 + \varepsilon \cdot h_2),$$

ahonnan (14) és (15) alapján a

$$\left. \frac{\partial P(c(q_0, r))}{\partial r} \right|_{r=-T(q_0)} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} P(h_1 + \varepsilon h_2) \right|_{\varepsilon=0}$$

egyenlőséghez jutunk.

Alkalmazva a Ruelle-formulát

$$\left. \frac{\partial F(q_0, r)}{\partial r} \right|_{r=-T(q_0)} = \left. \frac{dP(h_1 + \varepsilon h_2)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Sigma_A^+} \log \lambda \, d\mu_{\varphi_{q_0}}.$$

Kihasználva, hogy $\log \lambda > 0$ konstans és $\mu_{\varphi_{q_0}}$ valószínűségi mérték a Σ_A^+ -on, a kapott integrál nem nulla, ahonnan teljesül a (13) feltétel.

□

Valójában az állítás a 4.8 Lemmában kapott egyértelműség felhasználása nélkül is teljesül. Sőt, a T függvény egyértelműsége következik az imént alkalmazott implicitfüggvény-tételből. A T létezése viszont – még ha nem is minden pontban, de legalább egy olyan halmazon, amelyre a tételből kapott nyílt környezetek lefedik az egész $\mathbb{R}$ -et – elengedhetetlen az IFT alkalmazhatóságához, mivel a tétel alkalmazásához szükség van olyan kiindulási pontra, ahol az F függvény értéke nulla.

A következő lépésben a T segédfüggvény deriváltjával foglalkozunk:

4.11. Lemma. *A T függvény deriváltja nempozitív: $T'(q) \leq 0$.*

Bizonyítás. A T deriválhatósága következik a 4.8 Lemmában kapott összefüggésből. A bizonyítás analóg az F deriválhatóságának bizonyításával.

A T függvényt definiáló egyenlőség mindkét oldalát q szerint deriválva az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{dP(-T(q) \log \lambda + q \log \Psi)}{dq} = 0. \quad (16)$$

Megjegyezzük, hogy a $P(c(q, r))$ (ld. előző bizonyítás) és a $\zeta : q \mapsto (q, -T(q))$ függvények is differenciálhatóak a klasszikus értelemben, így a kompozíciójuk g is deriválható. Tekintsük a következő segédfüggvényt:

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R}), \quad \varphi(q) = -T(q) \log \lambda + q \log \Psi(\cdot) = c \circ \zeta,$$

akkor

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(q) = P(\varphi(q)). \quad (17)$$

A φ , F-differenciálható függvények kompozíciója, így a 3.15 láncszabály alapján F-differenciálható. A láncszabály ismételt alkalmazásával

$$g'(q) = Dg(q)[1] = DP(\varphi(q)) \circ D\varphi(q)[1].$$

Vegyük észre, hogy (5) alapján ez éppen a $\frac{d}{d\varepsilon} \big|_{\varepsilon=0} P(\varphi(q) + \varepsilon DP(\varphi)[1])$ deriválttal egyezik meg:

$$g'(q) = \frac{d}{d\varepsilon} \big|_{\varepsilon=0} P(\varphi(q) + \varepsilon D\varphi(q)[1]). \quad (18)$$

Megmutatjuk, hogy φ , F-differenciálja

$$D\varphi(q)[\delta] = (-T'(q) \log \lambda + \log \Psi(\cdot)) \delta \in C^\gamma(\Sigma_A^+, \mathbb{R}). \quad (19)$$

Ehhez az (1) alapján azt kell megmutatni, hogy

$$\varphi(q + \delta) - \varphi(q) = (-T'(q) \log \lambda + \log \Psi(\cdot)) \delta + o(\delta), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Behelyettesítve a φ definíciója alapján, és az egyenlőséget $o(\delta)$ -ra rendezve, az alábbi ekvivalens feltételt kapjuk:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-\log \lambda (T(q + \delta) - T(q)) + \delta \log \Psi(\cdot)}{\delta} - (-T'(q) \log \lambda + \log \Psi(\cdot)) = 0.$$

Mivel T deriválható, a határértékre

$$-\log \lambda T'(q) - \log \Psi(\cdot) - (-T'(q) \log \lambda + \log \Psi(\cdot)) = 0$$

adódik, és éppen ez kellett.

A Ruelle-formula alkalmazásához válasszuk az alábbi $C^1(\Sigma_A^+, \mathbb{R})$ -beli függvényeket:

$$h_1 = \varphi(q) = -T(q) \log \lambda + q \log \Psi,$$

$$h_2 = D\varphi(q)[1] = -T'(q) \log \lambda + \log \Psi(\cdot).$$

Alkalmazva a 3.21 Ruelle-formulát, a (18) összefüggésből, a (16) és (17) összefüggések felhasználásával

$$0 = g'(q) = \frac{dP(-T(q) \log \lambda + q \log \Psi)}{dq} = \int_{\Sigma_A^+} -T'(q) \log \lambda + \log \Psi(x) d\mu_{\varphi(q)}(x)$$

adódik.

Kihasználva, hogy $\mu_{\varphi(q)}$ valószínűségi mérték a Σ_A^+ -on:

$$0 = -T'(q) \log \lambda + \int_{\Sigma_A^+} \log \Psi d\mu_{\varphi(q)},$$

ahonnan

$$T'(q) = \frac{\int_{\Sigma_A^+} \log \Psi d\mu_{\varphi(q)}}{\log \lambda}.$$

Mivel $\log \lambda > 0$, így $T'(q) \leq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\int_{\Sigma_A^+} \log \Psi d\mu_{\varphi(q)} \leq 0$. Kihasználva, hogy $\mu_{\varphi(q)}$ egyensúlyi mérték:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_A^+} \log \Psi d\mu_{\varphi(q)} &= \int_{\Sigma_A^+} \phi - P(\phi) d\mu_{\varphi(q)} = \int_{\Sigma_A^+} \phi d\mu_{\varphi(q)} - P(\phi) = \\ &= \int_{\Sigma_A^+} \phi d\mu_{\varphi(q)} - \left(h_{\mu_{\varphi(q)}}(\sigma) + \int_{\Sigma_A^+} \phi d\mu_{\varphi(q)} \right) = -h_{\mu_{\varphi(q)}}(\sigma). \end{aligned}$$

Mivel $h_{\mu_{\varphi(q)}}(\sigma) \geq 0$, ezért a lemma állítása teljesül.

□

Végül rátérünk a T második deriváltjára, és a Ruelle-formulák, illetve a Fréchet-láncszabály megfelelő alkalmazásával megmutatjuk, hogy az mindenütt nemnegatív:

4.12. Lemma. *A T függvény konvex: $T''(q) \geq 0$. A T pontosan akkor szigorúan konvex, ha $\mu_\phi \neq \mu_{\max}$.*

Bizonyítás. Az előző lemmához hasonlóan induljunk ki a

$$P(\varphi(q)) = P(c(q, -T(q))) = (P \circ c)(q, -T(q)) = 0$$

összefüggésből. A láncszabályt alkalmazva a $P(c(q, r)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és a $q \mapsto (q, -T(q))$ függvények kompozíciójára, a következő összefüggés adódik a $P \circ c$ függvény deriváltjára az $r = -T(q)$ helyettesítés mellett:

$$\frac{dP(c(q, -T(q)))}{dq} = \frac{\partial(P \circ c)}{\partial q}(q, -T(q)) - T'(q) \cdot \frac{\partial(P \circ c)}{\partial r}(q, -T(q)) = 0.$$

Itt a $P(c(q, r))$ függvény esetén az első változó szerinti parciális deriváltat $\frac{\partial(P \circ c)}{\partial q}$, a második változó szerinti parciális deriváltat $\frac{\partial(P \circ c)}{\partial r}$ jelöli, valamint $\frac{\partial(P \circ c)}{\partial x_i}(q, -T(q))$ a megfelelő parciális derivált értékét jelöli a $(q, -T(q))$ pontban ($x_i \in \{q, r\}$).

A kapott egyenlőséget mégegyszer deriválva:

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{\partial(P \circ c)}{\partial q}(q, -T(q)) \right) - \frac{d}{dq} \left(T'(q) \cdot \frac{\partial(P \circ c)}{\partial r}(q, -T(q)) \right) = 0.$$

Az első tagot kiszámolva a láncszabály szerint:

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{\partial(P \circ c)}{\partial q}(q, -T(q)) \right) = \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial q^2}(q, -T(q)) - T'(q) \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial r \partial q}(q, -T(q)).$$

A második tagra alkalmazva a láncszabályt:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dq} \left(T'(q) \cdot \frac{\partial(P \circ c)}{\partial r}(q, -T(q)) \right) \\ &= T''(q) \cdot \frac{\partial(P \circ c)}{\partial r}(q, -T(q)) + T'(q) \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial q \partial r}(q, -T(q)) - T'(q)^2 \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial r^2}(q, -T(q)). \end{aligned}$$

Behelyettesítve a kiszámolt deriváltakat:

$$\begin{aligned} & -T''(q) \cdot \frac{\partial(P \circ c)}{\partial r}(q, -T(q)) + T'(q)^2 \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial r^2}(q, -T(q)) \\ & - T'(q) \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial r \partial q}(q, -T(q)) - T'(q) \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial r \partial q}(q, -T(q)) + \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial q^2}(q, -T(q)) = 0, \end{aligned}$$

ahonnan $T''(q)$ -t kifejezve:

$$T''(q) = \left(T'(q)^2 \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial r^2}(q, -T(q)) - T'(q) \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial r \partial q}(q, -T(q)) \right. \\ \left. - T'(q) \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial q \partial r}(q, -T(q)) + \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial q^2}(q, -T(q)) \right) \cdot \left(\frac{\partial(P \circ c)}{\partial r}(q, -T(q)) \right)^{-1}.$$

A T'' kiszámításához a megfelelő Ruelle-formulákat alkalmazzuk. Először a $\frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial q \partial r}$ tagot számoljuk ki. Ehhez válasszuk az alábbi függvényeket:

$$h = c(q, r)$$

$$f_1 = \frac{\partial c}{\partial r} = -\log \lambda$$

$$f_2 = \frac{\partial c}{\partial q} = \log \Psi.$$

Ekkor

$$\frac{\partial^2 P(c(q, r))}{\partial q \partial r} = \frac{\partial^2 P(r \log \lambda + q \log \Psi(\cdot))}{\partial q \partial r} \\ = \frac{\partial^2 P((r + \varepsilon_1) \log \lambda + (q + \varepsilon_2) \log \Psi(\cdot))}{\partial \varepsilon_2 \partial \varepsilon_1} \Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0} = \frac{\partial^2 P(h + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2)}{\partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_2} \Big|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0},$$

ahonnan a 3.22 Ruelle-formula alkalmazásával

$$\frac{\partial^2 P(c(q, r))}{\partial q \partial r} = Q_h(-\log \lambda, \log \Psi).$$

A többi tagot analóg módon számolva a következő eredményeket kapjuk:

$$\frac{\partial^2 P(c(q, r))}{\partial r \partial q} = Q_h(\log \Psi, -\log \lambda)$$

$$\frac{\partial^2 P(c(q, r))}{\partial r^2} = Q_h(-\log \lambda, -\log \lambda)$$

$$\frac{\partial^2 P(c(q, r))}{\partial q^2} = Q_h(\log \Psi, \log \Psi).$$

Mivel $h(q, -T(q)) = \varphi(q)$, visszahelyettesítve a T'' -re kapott összefüggés első tényezőjébe, majd kihasználva, hogy $Q_{\varphi(q)}$ bilineáris forma:

$$\begin{aligned}
& T'(q)^2 \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial r^2}(q, -T(q)) - T'(q) \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial r \partial q}(q, -T(q)) \\
& - T'(q) \cdot \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial q \partial r}(q, -T(q)) + \frac{\partial^2(P \circ c)}{\partial q^2}(q, -T(q)) \\
& = (T'(q)^2 \cdot Q_{\varphi(q)}(-\log \lambda, -\log \lambda) - T'(q) \cdot Q_{\varphi(q)}(\log \Psi, -\log \lambda)) \\
& + (-T'(q) \cdot Q_{\varphi(q)}(-\log \lambda, \log \Psi) + Q_{\varphi(q)}(\log \Psi, \log \Psi)) \\
& = Q_{\varphi(q)}(\log \Psi + T'(q) \log \lambda, T'(q) \log \lambda) + Q_{\varphi(q)}(\log \Psi + T'(q) \log \lambda, \log \Psi) \\
& = Q_{\varphi(q)}(\log \Psi + T'(q) \log \lambda, \log \Psi + T'(q) \log \lambda).
\end{aligned}$$

Végül a 3.21 Ruelle-formula alapján kiszámítjuk a második tényezőt is:

$$\frac{\partial P(c(q, r))}{\partial r} = \frac{\partial P((r + \varepsilon) \log \lambda + q \log \Psi(\cdot))}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial P(c(q, r) + \varepsilon \log \lambda)}{\partial \varepsilon} = \int_{\Sigma_A^+} \log \lambda \, d\mu_{c(q, r)}.$$

Összerakva a kapott eredményeket:

$$T''(q) = Q_{\varphi(q)}(\log \Psi - T'(q) \log \lambda, \log \Psi - T'(q) \log \lambda) \cdot \left(\int_{\Sigma_A^+} \log \lambda \, d\mu_{\varphi(q)} \right)^{-1}.$$

A 4.10 Állítás bizonyításában szerepelt, hogy $\int_{\Sigma_A^+} \log \lambda \, d\mu_{\varphi(q)} > 0$ tetszőleges $q \in \mathbb{R}$ mellett, így T'' előjelét a bilineáris tag határozza meg. Innen a 3.22 Tétel szerint $T'' \geq 0$ és $T'' > 0$ pontosan akkor, ha a $\log \Psi - T'(q) \log \lambda$ függvény nem kohomológ egy konstans függvénnyel. A $\log \Psi = \phi - P(\phi)$ átírásból ez pontosan akkor teljesül, ha a ϕ nem kohomológ egy konstans függvénnyel, ami definíció szerint a $\mu_\phi \neq \mu_{\max}$ feltétellel egyezik meg. $\square$

A bizonyítás következő lépésében felhasználnk egy, a dimenzióspektrumra vonatkozó eredményt, amely a [10] cikkből származik. A 4.6 Következmény révén az eredmény a Birkhoff-spektrumra is alkalmazható, így felhasználható a bizonyításban.

4.13. Lemma. *Legyen $\alpha(q) = -T'(q)$, ekkor teljesül a következő összefüggés:*

$$f_{\mu_\phi}(\alpha(q)) = T(q) + q \cdot \alpha(q).$$

Most már rátérhetünk a b_ϕ analiticitásának bizonyítására:

A 4.7 Tétel bizonyítása. Legyen $\alpha(q) = -T'(q)$, ekkor $f_{\mu_\phi}(\alpha(q)) = T(q) + q \cdot \alpha(q)$. Mivel $T(q)$ analitikus minden $q \in \mathbb{R}$ -re, ezért létezik a deriváltja és az is analitikus marad az $\mathbb{R}$ -en, ahonnan $\alpha(q)$ is analitikus $\mathbb{R}$ -en. Innen az $f_{\mu_\phi}(\alpha(q))$ függvény analitikus minden $q \in \mathbb{R}$ -re.

Mivel az $\alpha(q)$ függvény analitikus, ezért folytonos, így értékkészlete egy intervallum:

$$R(\alpha) = I_{\alpha_1, \alpha_2}$$

valamely $\alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ értékekre, ahol I_{α_1, α_2} egy $\alpha_1 \leq \alpha_2$ végpontú intervallum.

Mivel $\alpha(q) = -T'(q) \geq 0$ minden $q \in \mathbb{R}$ esetén, ezért $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. A $\mu_\phi \neq \mu_{\max}$ feltételből $T''(q) > 0$, így $\alpha'(q) = -T''(q) < 0$, tehát az $\alpha(q)$ függvény szigorúan monoton csökken, ahonnan:

$$\alpha_1 = \lim_{q \rightarrow \infty} \alpha(q) \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \lim_{q \rightarrow -\infty} \alpha(q),$$

valamint $\alpha_1 \neq \alpha_2$ teljesül. Emellett a szigorú monotonitásból az α értékkészlete $I_{\alpha_1, \alpha_2} = (\alpha_1, \alpha_2)$ nyílt intervallum és így $\alpha(q) > 0$ minden q valósra.

Megmutatjuk, hogy f_{μ_ϕ} analitikus az (α_1, α_2) intervallumon. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy létezik α^{-1} és analitikus az értelmezési tartományán, hiszen ilyenkor $f_{\mu_\phi} \circ \alpha \circ \alpha^{-1} = f_{\mu_\phi}$ analitikus az (α_1, α_2) nyílt intervallumon. Az α^{-1} létezése következik az α függvény szigorú monotonitásából. Mivel az α analitikus függvény deriváltja sehol sem 0, így az inverze analitikus, amivel beláttuk f_{μ_ϕ} analiticitását az (α_1, α_2) intervallumon.

Tekintsük a $\beta_\phi : y \mapsto \frac{P(\phi) - y}{\log \lambda}$ lineáris függvényt, ekkor a 4.6 Következmény szerint

$$b_\phi = f_{\mu_\phi} \circ \beta_\phi.$$

Mivel a β függvény monoton csökken, ezért:

$$\beta_\phi(y) \in (\alpha_1, \alpha_2) \iff y \in (-\alpha_2 \cdot \log \lambda + P(\phi), -\alpha_1 \cdot \log \lambda + P(\phi)) = I.$$

Innen a β_ϕ analiticitásából a b_ϕ függvény valós analitikus az I nem degenerált, nyílt intervallumon.

□

Hivatkozások

- [1] R. Bowen (1975), *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 470, Springer-Verlag.
- [2] J. B. Conway (1990), *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 96, Springer-Verlag.
- [3] K. Dajani és S. Dirksin (2008), *A Simple Introduction to Ergodic Theory*
<https://webpace.science.uu.nl/~kraai101/lecturenotes2009.pdf>
- [4] K. Falconer (1990), *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons.
- [5] Paul M. N. Feehan (2020), *On the Morse-Bott property of analytic functions on Banach spaces with Lojasiewicz exponent one half*, megjelent:
Calculus of Variations and Partial Differential Equations **59** (2020) 87. cikk, 50 old.
Elérhető: <https://arxiv.org/pdf/1803.11319.pdf>
- [6] T. Kamae és M. Keane (1997), *A simple proof of the ratio ergodic theorem*, Osaka J. Math. 34, no. 3, 653–657.
- [7] G. Keller (1998), *Equilibrium States in Ergodic Theory*, Cambridge University Press.
- [8] W. Parry és M. Pollicott (1990), *Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics*, Astérisque, No. 187–188.
Elérhető: https://www.numdam.org/item/AST_1990__187-188__1_0.pdf
- [9] Y. Pesin és H. Weiss (2001), *The multifractal analysis of Birkhoff averages and large deviations*, megjelent:
Global Analysis of Dynamical Systems, szerk.: H.W. Broer, B. Krauskopf és G. Vegter, Institute of Physics Publishing, 419–431.
- [10] Y. Pesin és H. Weiss (1997), *A Multifractal Analysis of Equilibrium Measures for Conformal Expanding Maps and Markov Moran Geometric Constructions*, Journal of Statistical Physics, **86**(1–2), 233–275.
Elérhető: <https://yakovpesin.com/papers/PW-multifractal-analysis.pdf>
- [11] Gy. Petruska (1999), *Analízis II. Egyetemi jegyzet*, ELTE Eötvös Kiadó
- [12] D. Ruelle (1978), *Thermodynamic Formalism*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- [13] E. Zeidler (1993), *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Volume I: Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag.

Alulírott Szepessy Sára nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Nyelvhelyesség ellenőrzése, fogalmazás gördülékenyebbé tétele	GPT-4o	Teljes dolgozatban	Nyelvhelyességi kérdés esetén
LaTeX kód írása	GPT-4o	MI függelék	Táblázat készítése

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.