BIFURKÁCIÓK ELMÉLETI ÉS SZÁMÍTÓGÉPES VIZSGÁLATA

Szakdolgozat

Balás Kata Vanda
Matematika alapszak

Témavezető:

Dr. Csomós Petra
egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

2025

Tartalomjegyzék

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet a témavezetőmnek, Dr. Csomós Petrának a dolgozatom elkészítéséhez nyújtott értékes segítségért, iránymutatásért, építő észrevételeiért és támogatásáért. Köszönettel tartozom Tass Benedeknek is, aki nemcsak a dolgozat során, hanem az egész képzés alatt szakmai és lelki támogatásával segítette munkámat. Végül, de nem utolsósorban szeretném megköszönni a családomnak és a barátaimnak a folyamatos biztatást és motivációt, amely végigkísért tanulmányaim során.

Bevezetés

Ebben a dolgozatban a bifurkációkat vizsgáljuk eméleti, majd számítógépes módszerrel. A számítógépes implementációhoz a motivációt az [5] cikk adta, amelyben a szerző egy olyan módszert mutat be, amellyel automatikusan készíthetők bifurkációs diagramok. Célunk ennek az eljárásnak a megvalósítása egyszerűbb, de szemléletes példákon keresztül. A bifurkációk olyan differenciálegyenletekhez vagy differenciálegyenletrendszerekhez kapcsolódnak, amelyek valamilyen paramétertől függenek. A paraméter változtatásával a rendszer viselkedése sok esetben gyökeresen megváltozik – ezeknek az eseteknek a feltárására koncentrálunk a dolgozat során.

Elsőként ismertetjük a legfontosabb alapfogalmakat és a bifurkációk általános elméleti hátterét, majd bemutatjuk a legjellemzőbb bifurkációtípusokat. Ezt követően részletesen leírjuk az általunk készített algoritmust egydimenziós, majd kétdimenziós esetben is. Mindkét változatot konkrét példák segítségével szemléltetjük, analitikus és numerikus megoldásokkal kiegészítve. Végül hibaanalízist végzünk, amely során megvizsgáljuk az algoritmusok pontosságát.

1. fejezet

Alapfogalmak

Ebben a fejezetben a dolgozatban előforduló matematikai alapfogalmakat definiáljuk. A fejezethez a [3] Differenciálegyenletek 1 előadás anyagát, a [6] Numerikus módszerek 1 előadás anyagát, illetve a [9] irodalmat használjuk fel.
Tekintsük először a közönséges differenciálegyenletek általános alakjának definícióját:

1.1. Definíció. *Közönséges differenciálegyenlet*
Legyen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adott függvény. Ekkor az

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

alakú egyenletet az $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ismeretlen függvényre vonatkozó n-edrendű közönséges differenciálegyenletnek nevezzük. Amennyiben a legmagasabb derivált kifejezhető, explicit lesz a differenciálegyenlet, különben implicit.

1.2. Definíció. *Közönséges differenciálegyenlet-rendszer*
Adottak: $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Keressük az $x_1, x_2, \ldots, x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldásokat. Ekkor az elsőrendű explicit közönöséges differenciálegyenlet-rendszer alakja:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ekkor legyen:

$$\begin{aligned} f &:= (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x &:= (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Így az (1.1) felírható az alábbi alakban:

$$x'(t) = f(t, x(t)). \tag{1.2}$$

1.3. Tétel. *Átviteli-elv*
Minden n-ed rendű explicit közönséges differenciálegyenlet visszavezethető egy n darab egyenletből álló elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszerre.

Az 1.3. Tétel kimondja, hogy egy magasabbrendű közönséges differenciálegyenlet előáll elsőrendű differenciálegyenletekből álló rendszerként. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ez hogyan írható fel.

Bizonyítás. Tekintsük a $y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{n-1}(t))$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n-ed rendű explicit közönséges differenciálegyenletet.
Vezessük be az alábbi új függvényeket:

$$\begin{aligned}
&x_1 := y \quad \to \quad x_1' = y' = x_2 \\
&x_2 := y' \quad \to \quad x_2' = y'' = x_3 \\
&x_3 := y'' \quad \to \quad x_3' = y''' = x_4 \\
&\vdots \\
&x_{n-1} := y^{n-2} \quad \to \quad x_{n-1}' = y^{n-1} = x_n \\
&x_n := y^{n-1} \quad \to \quad x_n' = y^n = F(t, y, y', \ldots, y^{n-1}) = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Tehát:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ F(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{pmatrix} = f(t, x(t)), \quad x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n.$$

□

1.4. Definíció. *Autonóm közönséges differenciálegyenlet*
Legyen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ az ismeretlen függvény, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ekkor

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1.3}$$

differenciálegyenletet autonómnak nevezzük.

A dolgozatban a közönséges differenciálegyenletek kvalitatív vizsgáltát fogjuk elvégezni, azaz a differenciálegyenletek tulajdonságaival foglalkozunk. Ehhez definiáljuk a szükséges alapfogalmakat.

1.5. Definíció. *Dinamikai rendszer*
Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő nyílt halmaz és $I \subset \mathbb{R}$. Ekkor a $\Phi : I \times M \to M$ függvényt dinamikai rendszernek nevezzük, ha

- $\Phi(0, p) = p \quad \forall p \in M$
- $\Phi(t + s, p) = \Phi(t, \Phi(s, p)) \quad \forall t, s \in I \quad \forall p \in M.$

1.6. Definíció. *A dinamikai rendszer fázistere, trajektóriája, egyensúlyi pontja*
Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi : I \times M \to M$ dinamikai rendszer, $p \in M$.

(a) M elnevezése fázistér.

(b) A $p \in M$ pont Φ dinamikai rendszer általi pályája/trajektóriája: $\{\Phi(t,p) : t \in I\} \subset M$.

(c) A $p \in M$ pontot a Φ dinamikai rendszer egyensúlyi pontjának nevezzük, ha $\Phi(t,p) = p$ minden $t \in I$ esetén.

1.7. Definíció. *Stabilitás*
Legyen $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ dinamikai rendszer. Azt mondjuk, hogy a $p \in M$ pont pályája

a) *stabil*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $q \in M$ és $t > 0$ esetén, ha $|p - q| < \delta$, akkor $|\Phi(t,p) - \Phi(t,q)| < \varepsilon$.

b) *instabil*, ha nem stabil.

c) *aszimptotikusan stabil*, ha stabil és $|p-q| < \delta$ esetén $\lim_{t\to\infty} |\Phi(t,p) - \Phi(t,q)| = 0$.

Mivel minden autonóm differenciálegyenlethez létezik egy dinamikai rendszer, amelynek ugyanazok a pályái, mint a differenciálegyenletnek, és minden megfelelő tulajdonságú dinamikai rendszerhez létezik egy közönséges differenciálegyenlet, így tudjuk alkalmazni az 1.7. Definíciót az alábbiakban.

1.8. Definíció. *Egyensúlyi pont*
Az (1.3) autonóm differenciálegyenlet időben állandó megoldását az (1.3) egyensúlyi pontjának, vagy egyensúlyi helyzetének nevezzük.

Legyen $\overline{x}$ az (1.3) feladatnak egy megoldása, azaz $\overline{x}'(t) = f(\overline{x}(t))$. Tudjuk, hogy az $\overline{x}$ időben állandó, így teljesül, hogy $\overline{x}'(t) = 0$. Az egyensúlyi pontot az $\overline{x}$ jelöléssel használjuk a dolgozat további részében. Az egyensúlyi helyzetet úgy határozhatjuk meg, hogy kiszámítjuk az $f(\overline{x}) = 0$ megoldásait, azaz megkeressük f zérushelyeit.

1.9. Definíció. *Egyensúlyi pont stabilitása*
Jelölje $x_p(t)$ az (1.3) feladat $p \in \mathbb{R}^n$ pontból indított megoldását, azaz $x_p(0) = p$. Ekkor azt mondjuk, hogy az (1.3) feladat $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi pontja ...

(a) *stabil*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $\delta > 0$, hogy minden $p \in \mathbb{R}^n$-re teljesül, hogy $|p - \overline{x}| < \delta$ esetén $|x_p(t) - \overline{x}| < \varepsilon$ minden $t \geq 0$ esetén.

(b) *instabil*, ha nem stabil.

(c) *aszimptotikusan stabil*, ha stabil és $|p - \overline{x}| < \delta$ esetén $\lim_{t\to\infty} |x_p(t) - \overline{x}| = 0$.

1.1. Lineáris rendszerek

Az autonóm differenciálegyenletek, illetve a dinamikai rendszerek alapfogalmainak felelevenítése után térjünk rá a lineáris, illetve a nemlineáris rendszerek témakörében felmerülő definíciókra, tételekre.

1.10. Definíció. *Lineáris rendszer*
Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és $f(x) = Ax$ az (1.2) egyenletben. Ekkor

$$x'(t) = Ax(t) \tag{1.4}$$

differenciálegyenlet-rendszert lineárisnak nevezzük.

1.11. Tétel. *Valamely $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mellett tekintsük az $x'(t) = Ax(t)$, lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszert. Tegyük fel, hogy $\det A \neq 0$. Jelölje $\sigma(A)$ az A sajátértékeinek halmazát (spektrumát). Ekkor az $x^* = 0 \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi pont ...*

a) stabil, ha minden $\lambda \in \sigma(A)$ esetén $\operatorname{Re}\lambda \le 0$; és ha $\operatorname{Re}\lambda = 0$, akkor λ egyszeres sajátérték.

b) instabil, ha létezik olyan $\lambda \in \sigma(A)$, melyre $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

c) aszimptatikusan stabil, ha minden $\lambda \in \sigma(A)$ esetén $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

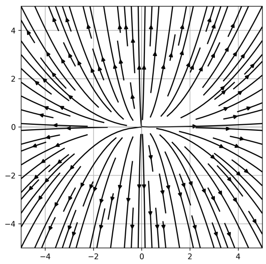
Kétdimenzióban a fázisképeket az alábbiak szerint osztályozzuk.
Tekintsük az $x'(t) = Ax(t)$ differenciálegyenletet, ahol $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ az ismeretlen függvény, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Jelölje $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ az A mátrix két (esetleg egybeeső) sajátértékét. Ekkor az egyenlet $\overline{x} = 0$ (egyetlen) egyensúlyi pontjára az alábbi esetek fordulhatnak elő:

1. Két különböző valós sajátérték: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$
   (a) Ha $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, akkor az $\overline{x} = 0$ instabil csomó.
   (b) Ha $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, akkor az $\overline{x} = 0$ stabil csomó.
   (c) Ha $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, akkor az $\overline{x} = 0$ nyereg.
2. Két konjugált komplex sajátérték: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   (a) Ha $\alpha > 0$, akkor az $\overline{x} = 0$ instabil fókusz.
   (b) Ha $\alpha < 0$, akkor az $\overline{x} = 0$ stabil fókusz.
   (c) Ha $\alpha = 0$, akkor az $\overline{x} = 0$ centrum.
3. Kétszeres valós sajátértékek: $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda \in \mathbb{R}$
   (a) Ha $\lambda > 0$, akkor az $\overline{x} = 0$ instabil elfajult csomó.
   (b) Ha $\lambda < 0$, akkor az $\overline{x} = 0$ stabil elfajult csomó.

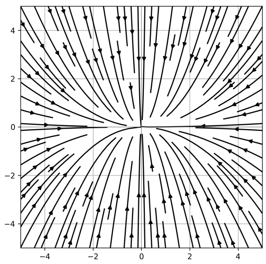
Az 1. ábrát az 1. táblázatban szereplő A mátrixok segítségével készítettük. Megjegyezzük, hogy az 1.11. Tétel nem foglalkozik a $\lambda = 0$ sajátérték esetével. Később látni fogjuk, hogy ezek az esetek számunkra nagyon érdekesek lesznek a bifurkációk vizsgálata során.

Instabil csomó	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Stabil csomó	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
Nyereg	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Centrum	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Instabil fókusz	$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Stabil fókusz	$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
Instabil elfajult csomó	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Stabil efajult csomó	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

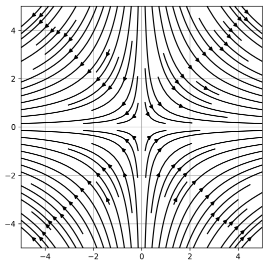
1. táblázat. Az 1. ábrához tartozó mátrixok.



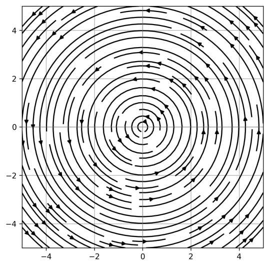
Instabil csomó



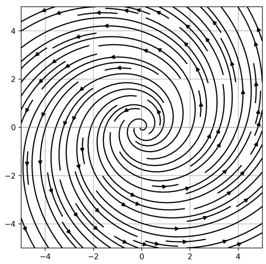
Stabil csomó



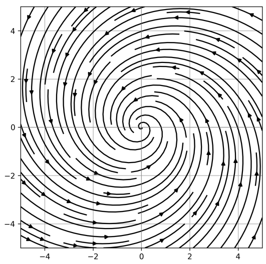
Nyereg



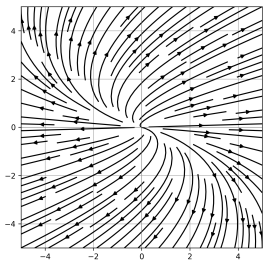
Centrum



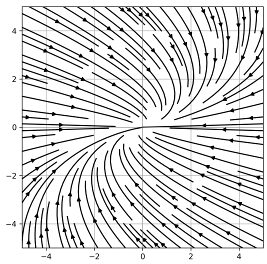
Instabil fókusz



Stabil fókusz



Instabil elfajult csomó



Stabil elfajult csomó

1. ábra. A kétdimenziós fázisképek osztályozása a sajátértékek szerint.

1.2. Nemlineáris rendszerek

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tartomány $f : M \to \mathbb{R}^n$ és $x : \mathbb{R} \to M$ az ismeretlen, folytonosan differenciálható függvény. Tekintsük most a nemlineáris autonóm egyenletet:

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1.5}$$

Legyen $\overline{x} \in M$ az (1.5) egy egyensúlyi pontja, $x(t)$ pedig megoldása. Tekintsük az $y(t) := x(t) - \overline{x}$ függvényt, azaz a megoldás eltérését az egyensúlyi ponttól.
Ekkor

$$y'(t) = x'(t) - \overline{x}' = x'(t) = f(x(t)) = f(\overline{x} + y(t)) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x}) \cdot y(t) + a(y(t)),$$

$$\text{ahol } \lim_{|q| \to 0} \frac{|a(q)|}{|q|} = 0.$$

Az $f'(\overline{x}) := A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, azaz az f függvény $\overline{x}$ pontbeli Jacobi-mátrixa. Ezt a módszer linearizálásnak nevezzük.

1.12. Következmény. *Nemlineáris esetben az egyensúlyi pont környezetében alkalmazható az 1.1. fejezet szerinti osztályozás.*

Megmutatható, emellett illusztráltuk 1. ábrán, hogy a lineáris rendszereknél minden pálya stabilitása megegyezik, míg a nemlineáris esetben ez nem fog teljesülni, de linearizálás segítségével az egyensúlyi pontok környezetében megvizsgálhatjuk, hogy az adott környezetben milyen lesz a fáziskép. A dolgozatban nemlineáris rendszerekkel és differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni.

1.3. Newton-módszer vagy értintő módszer

Az előzőekben láthattuk, hogy a nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerek vagy differenciálegyenletek megoldásánál fontos szerepet játszik az egyensúlyi pont, ami az egyenlet jobb oldalán szereplő függvény zérushelye. Sok esetben nem tudjuk meghatározni analitikusan a pontos megoldást, erre a célra szolgálnak a különböző közelítő numerikus módszerek. A bifurkációs diagramok kirajzolása egy általunk készített algoritmus segítségével jön létre, melynek az egyik legfontosabb eleme a Newton-módszer.
Először vizsgáljuk geometiai szempontból az algoritmust. Tekintsük az $f(x) = 0$ egyenletet, keressük az x^* zérushelyét. Tegyük fel, hogy f differenciálható és vegyünk egy $x_0 \in D(f)$ kezdőértéket, majd húzzuk be x_0-nál f érintőjét, ennek az x-tengellyel vett metszéspontja legyen x_1. Húzzuk be x_1-nél az f függvény érintőjét, majd vegyük az x-tengellyel való metszépontját, ami legyen x_2, és így tovább.
Tekintsük most algebrai szempontból a numerikus módszert. Az f függvény x_k-beli érintőjének egyenlete $y = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)$. A x_k-beli érintő x-tengellyel vett

metszéspontja megkapható:

$$
\begin{aligned}
&0 = f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k)\\
&f'(x_k)(x - x_k) = -f(x_k)\\
&x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1}.
\end{aligned}
$$

1.13. Állítás. *A Newton-módszer konvergenciája*
Tegyük fel, hogy az $f(x) = 0$ egyenlet x^* gyökét és az (x_k) egész sorozatot tartalmazó valamely I intervallumban $f \in C^2(I)$, továbbá léteznek $m_1, M_1, m_2, M_2 > 0$ konstansok, amelyekkel

$$m_1 \le |f'(x)| \le M_1 \quad \textit{és} \quad m_2 \le |f''(x)| \le M_2 \quad \textit{minden } x \in I \textit{ pontban.}$$

Ekkor

$$\frac{M_2}{2m_1}|x_0 - x^*| < 1$$

esetén a Newton-módszer másodrendben konvergens, azaz

$$|x_{k+1} - x^*| \le const \cdot |x_k - x^*|^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

2. fejezet

Bifurkációk

Tanulmányaink során a differenciálegyenletek kvalitatív vizsgálatakor megismerkedtünk az egyensúlyi helyzetekkel, stabilitási fogalmakkal, illetve a különböző fázisképekkel. Azonban, akárcsak egy algebrai egyenlet, egy differenciálegyenlet is függhet paraméterektől. A következő fejezetben a dolgozat legfontosabb definíciójáról, a bifurkációról írunk. Bemutatjuk a dolgozatban felmerülő bifurkáció-típusokat, illetve azok fontos tulajdonságait. Ebben a fejezetben a [2] könyv 2. fejezetét, a [10] könyv 2. fejezetét és a [8] jegyzet 6. fejezetét használjuk fel.

2.1. Motiváció

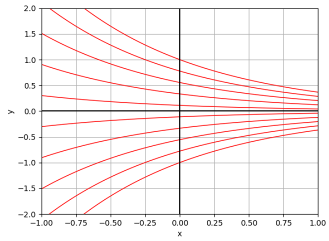
Tekintsük az alábbi differenciálegyenletet, ahol $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény és $c \in \mathbb{R}$ egy paraméter:

$$x'(t) = cx(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

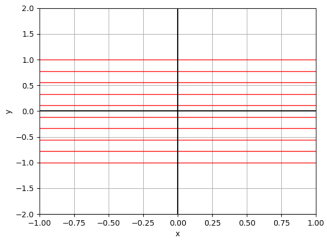
A (2.1) egyenlet egy jól ismert szeparábilis differenciálegyenlet, melynek megoldása:

$$x(t) = Ce^{ct}, \quad \text{ahol } C \in \mathbb{R}.$$

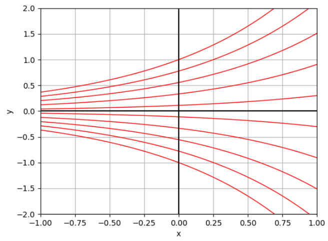
Láthatjuk, hogy a megoldás függ az c paraméter értékétől, azaz a fáziskép is függ a paramétertől. Tekintsük az alábbi ábrákat, hogy megfigyeljük, miként változik a megoldás a paraméter függvényében. Ezek az ábrák a `python` programozási nyelv segítségével készültek, azon belül a `mathplotlib` csomaggal. A 2a. ábrán, illetve a 2c. ábrán különböző kezdeti értékekhez tartozó, szigorúan csökkenő, illetve növekvő megoldások grafikonját láthatjuk. A 2b. ábra esetében egész más viselkedést tapasztalhatunk a megoldások grafikonját tekintve: az $c = 0$ esetben a megoldásgörbék konstans függvények. Az ábrák szemléltetik ennél az egyszerű differenciálegyenletnél, hogy a paraméter változásával a megoldások egy-egy határponttól kezdve teljesen más fázisképet mutathatnak. Hogy mélyebben megértsük a bifurkációk alapelvét, bevezetjük a szükséges definíciókat, fogalmakat.



(a) $c = -1$



(b) $c = 0$



(c) $c = 1$

2. ábra. Az $x'(t) = cx(t)$ megoldása három különböző paraméterérték mellett.

2.2. Ekvivalenciák

Az alábbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy a paraméter változásával, milyen viselkedésbeli különbségek alakulnak ki a fázisképek között. Két fáziskép viszonyának meghatározásához szükségünk lesz olyan fogalmakra, amelyek segítenek megállapítani, hogy két fázisképet mikor tekinthetünk ekvivalensnek.
Először elevenítsük fel az ekvivalencia definícióját.

2.1. Definíció. *Ekvivalencia reláció*
A $\sim$ relációt ekvivalencia relációnak nevezzük, ha teljesülnek rá az alábbiak:

- szimmetrikus, azaz ha $a \sim b$, akkor $b \sim a$,
- reflexív, azaz $a \sim a$,
- tranzitív, azaz ha $a \sim b$ és $b \sim c$, akkor $a \sim c$.

A további ekvivalencia fogalmakhoz szükségünk lesz a homeomorfizmus és a C^k-diffeomorfizmus definíciójára. Az alábbi definíciókhoz a [8] jegyzet 2. fejezetét használjuk.

2.2. Definíció. *Homeomorfizmus*
Legyenek $M, N \subset \mathbb{R}$ halmazok. Egy $h : M \to N$ leképezést homeomorfizmusnak nevezünk, ha folytonos, bijekció, és az inverze is folytonos.

2.3. Definíció. *C^k-diffeomorfizmus*
Egy leképezés C^k-diffeomorfizmus, ha k-szor differenciálható, bijekció, és az inverze is k-szor differenciálható.

2.4. Definíció. *C^k-ekvivalens, topologikusan ekvivalens*
Legyenek $M, N \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő, nyílt halmazok, azaz tartományok. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ és $\psi : \mathbb{R} \times N \to N$ dinamikai rendszerek C^k- ekvivalensek (speciális eset: a C^0-ekvivalens, azaz topologikusan ekvivalens), ha létezik egy $h : M \to N$ típusú C^k-diffeomorfizmus (speciális eset: C^0-diffeomorfizmus, azaz homeomorfizmus), mely a pályákat egymásba viszi az idő irányításának megtartásával. Azaz ha létezik olyan $a :$

$\mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $t \to a(t,p)$ szigorúan növő bijekció, és minden $t \in \mathbb{R}$ és $p \in M$ esetén:

$$h(\varphi(t,p)) = \psi(a(t,p), h(p)).$$

2.5. Definíció. *C^k-folyam-ekvivalens*
Azt mondjuk, hogy a φ és ψ dinamikai rendszerek C^k-folyam-ekvivalensek, ha van olyan szigorúan növő $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijekció, melyre az $a(t,p) = b(t)$ minden $p \in M$ esetén, tehát a nem függ a p megválasztásától.

2.6. Definíció. *C^k-konjugált*
Azt mondjuk, hogy a φ és ψ dinamikai rendszerek C^k-konjugáltak, ha a 2.4. Definícióban az $a(t,p) = t$ minden $t \in \mathbb{R}$ és minden $p \in M$ esetén, azaz:

$$h(\varphi(t,p)) = \psi(t, h(p)).$$

2.7. Definíció. *Orbitálisan ekvivalens*
Azt mondjuk, hogy a φ és ψ dinamikai rendszerek orbitálisan ekvivalensek, ha a 2.4. Definícióban $M = N$ és $h = id$.

Az ekvivalencia fogalmak teljes megértéséhez tekintsünk egy példát a [10] könyvből, amelyben a konkrét számítások, levezetések nem szerepeltek. Az alábbi példában a rendszerek ekvivalenciáját vizsgáljuk.

2.8. Példa. Tekintsük az (1.4) alakú differenciálegyenlet-rendszereket az alábbi mátrixokkal:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -y \end{cases} \tag{2.2}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x' &= -x - y \\ y' &= x - y \end{cases} \tag{2.3}$$

Mivel mindkét rendszer lineáris, és $\det A_1 \neq 0$, $\det A_2 \neq 0$, így mindkét esetben $\overline{x} = (0,0)$. Ezt követően határozzuk meg a sajátértékeket, majd az egyensúlyi helyzetek stabilitását, hogy lássuk, hogyan alakulnak a fázisképek.
Kezdjük a (2.2) rendszerrel:
Vizsgáljuk meg az $\overline{x} = 0 \in \mathbb{R}^2$ egyensúlyi pont stabilitását. A sajátértékeket a $\det(A_1 - \lambda I) = 0$ segítségével tudjuk meghatározni, de az A_1 mátrix diagonális, tehát a sajátértékek a főátlóban vannak:

$$\lambda_{1,2} = -1.$$

Mindkét sajátérték valós és negatív, így $\overline{x} = 0$ *stabil csomó.*
A (2.3) rendszernél határozzuk meg a sajátértékeket:

$$\det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

melynek megoldásai:

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i.$$

Eszerint két konjugált komplex sajátértéke van a (2.3) rendszernek, azaz az origó *stabil fókusz.*

Az ekvivalencia meghatározásánál nem csak az egyensúlyi pont környezetében szeretnénk vizsgálódni, hanem az egész síkon, így írjuk át a rendszereket polárkoordináták segítségével. Most mindkét rendszer lineáris volt, így erre nem lenne szükség, mert egy lineáris rendszernek minden pályája megegyezik. De mivel a dolgozat második fele nemlineáris rendszerekkel foglalkozik, így tekintsük a polárkoordinátás módszert. Ismeretes, hogy $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$. Egy olyan rendszert szeretnénk kapni, ahol a két rendszert (r, φ) függvényekkel írjuk fel. Nézzük először a (2.2) rendszer átírását:

$$\begin{aligned} x'(t) &= (r(t)(\cos(\varphi(t)))' = r'(t)\cos(\varphi(t)) - r(t)\sin(\varphi(t))\varphi'(t) \\ y'(t) &= (r(t)(\sin(\varphi(t)))' = r'(t)\sin(\varphi(t)) + r(t)\cos(\varphi(t))\varphi'(t) \end{aligned}$$

De tudjuk, hogy:

$$\begin{aligned} x' &= -x \quad \Rightarrow \quad x' = -r\cos\varphi \\ y' &= -y \quad \Rightarrow \quad y' = -r\sin\varphi \end{aligned}$$

Tehát:

$$\begin{aligned} -r(t)(\cos\varphi(t)) &= r'(t)\cos(\varphi(t)) - r(t)\sin(\varphi(t))\varphi'(t) \\ -r(t)(\sin\varphi(t)) &= r'(t)\sin(\varphi(t)) + r(t)\cos(\varphi(t))\varphi'(t) \end{aligned}$$

Ezentúl a függvények t argumentumát az egyszerűség kedvéért elhagyjuk. Azaz az alábbi rendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} -r(\cos\varphi) &= r'\cos(\varphi) - r\sin(\varphi)\varphi' \qquad \text{I.} \\ -r(\sin\varphi) &= r'\sin(\varphi) + r\cos(\varphi)\varphi' \qquad \text{II.} \end{aligned}$$

Ötlet: Szorozzuk meg (I.)-t $\cos(\varphi)$-vel, (II.)-t $\sin(\varphi)$-vel, majd adjuk össze őket. (Ezzel kifejezzük a φ'-t):

$$-r\cos^2\varphi - r\sin^2\varphi = r'\cos^2\varphi + r'\sin^2\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi\varphi' + r\sin\varphi\cos\varphi\varphi'.$$

Láthatjuk, hogy kiesnek a $r\sin\varphi\cos\varphi\varphi'$ tagok, így azt kapjuk, hogy:

$$-r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r'(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi).$$

Tudjuk, hogy a trigonometrikus függvényekre vonatkozó Pitagorasz-azonosság miatt $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, így azt kapjuk, hogy:

$$r' = -r.$$

Meg kell oldanunk úgy is a rendszert, hogy az r'-t fejezzük ki.

Ötlet: Szorozzuk meg (I.)-t $\sin(\varphi)$-vel, (II.)-t $\cos(\varphi)$-vel, majd vonjuk ki (I.)-ből (II.)-t.

$$-r\sin\varphi\cos\varphi = r'\cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi\varphi' \qquad \text{I.}$$
$$-r\sin\varphi\cos\varphi = r'\cos\varphi\sin\varphi + r\cos^2\varphi\varphi' \qquad \text{II.}$$

(I.)-(II.) bal oldal:

$$-r\sin\varphi\cos\varphi + r\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

(I.)-(II.) jobb oldal:

$$r'\cos\varphi\sin\varphi - r'\cos\varphi\sin\varphi - r\sin^2\varphi\varphi' - r\cos^2\varphi\varphi' = -r\varphi'(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = -r\varphi'.$$

Egyesítve a bal és jobb oldalt:

$$-r\varphi' = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi' = 0, \text{ amennyiben } r \neq 0.$$

Tehát a (2.2) rendszer a következő lesz a polárkoordinátás átírás után:

$$\begin{cases} r' &= -r \\ \varphi' &= 0 \end{cases}$$

A (2.3) rendszer polárkoordinátás átírása hasonló ötletekkel megtehető, ennek az eredménye a következő:

$$\begin{cases} r' &= -r \\ \varphi' &= 1 \end{cases}$$

Tekintsük a két rendszer megoldásait, ismét kezdjük a (2.2) feladattal, melynek $r' = -r$ része egy szeparábilis differenciálegyenlet, melyet a megszokott módon oldhatunk meg:

$$\begin{aligned} r' &= -r \\ \int \frac{1}{r}\,dr &= \int -1\,dt \\ \log|r| &= -t + c \\ |r(t)| &= e^{-t+c} \\ r(t) &= Ce^{-t}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tekintsük az $r(0) = r_0$ kezdeti feltételt. Ekkor $r(0) = C \cdot e^{-0} = C$ miatt a $C = r_0$, azaz $r(t) = r_0 \cdot e^{-t}$. Emellett $\varphi' = 0$, azaz állandó, így $\varphi(t) = \varphi_0$. A (2.3) rendszer megoldásai nagyon hasonlóan megkaphatók, tehát a megoldások a következőképpen alakulnak:

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t} \\ \varphi(t) = \varphi_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t} \\ \varphi(t) = \varphi_0 + t \end{cases} \tag{2.5}$$

Azt kaptuk, hogy az origó mindkét rendszernek stabil egyensúlyi helyzete, mivel a (2.4) és a (2.5) megoldásokat tekintve $r(t) \to 0$, ha $t \to \infty$, tehát a (0,0) ponthoz közeledni fognak a pályák. (Az origótól vett távolság csökken, ez mind a két rendszernél így van.) Azt is tudjuk, hogy a (2.2) fázisképe egyenesekből fog állni, mivel $\varphi(t) = \varphi_0$, azaz állandó, tehát mindig ugyanabban az irányban halad az origó felé. Áttérve a (2.3)-re a $\varphi(t) = \varphi_0 + t$ miatt a szög ebben az esetben folyamatosan nőni fog, az-az a pályák nem egyenesen befutnak az origóba, hanem spirálosan fognak beérkezni oda.

A számítások után rátérhetünk az ekvivalenciák vizsgálatára. Orbitálisan nem lehet ekvivalens a két rendszer, mivel akkor a pályáiknak meg kellene egyezniük, csak az időben térhetnek el egymástól. A példánkban egy stabil csomót és egy stabil fókuszt kaptunk, így nyilvánvaló, hogy a két fáziskép pályái nem egyeznek meg. A folyam-ekvivalencia sem fog teljesülni a két rendszerre, hiszen ez az ekvivalencia megköveteli a 2.5. Definíció értelmében az időátparaméterezés egységességét, azaz az időátparaméterezésnek mindkét rendszerben minden pályán ugyanannak kell lennie. Ez nem teljesül, mivel a egyensúlyi ponthoz tartozó sajátértékek különböznek (az első rendszernél: $\lambda_{1,2} = -1$, míg a másodiknál: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$). Az első rendszernél a pályák egyenesen tartanak az origó felé, míg a második rendszerben spirálozva tartanak oda. Így láthatjuk, hogy nincs olyan egységes időátparaméterezés, amely mindkét pálya esetében jól meghatározható, és amely a két rendszer dinamikáját ekvivalenssé teszi.

Az alábbiakban be fogjuk látni, hogy topologikusan ekvivalens lesz a két rendszer. Ezt úgy tesszük meg, hogy felépítünk explicit módon egy homeomorfizmust.

Tekintsük az $U = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(r,\varphi) : r \leq 1\}$ halmazt, tehát az origó középpontú, zárt, egységsugarú kört. Ezt az U-t felhasználva építjük fel a $h : U \to U$ homeomorfizmust. Legyen $x = (r_0, \varphi_0) \neq 0$ és $x \in U$. A (2.2) rendszert vizsgáljuk először. Azt szeretnénk meghatározni, hogy az $(1, \varphi_0)$ határpontból az x-be mennyi idő alatt jut el a fázispont, jelöljük ezt τ-val. A (2.4)-be helyettesítsük be a következőket: $t = \tau$ idő alatt, $r(t) = 1$-ből, $r(t) = r_0$-ba:

$$r_0 = 1 \cdot e^{-\tau} \Rightarrow \quad \tau(r_0) = -\log r_0. \tag{2.6}$$

Tekintsük a (2.3) rendszert. Most azt vizsgáljuk, hogy az $(1, \varphi_0)$ pontból $\tau(r_0)$ idő alatt hova jutunk a (2.3) pályáján. Legyen az $y = (r_1, \varphi_1)$. Így kapunk egy olyan $h(x) = y$ leképezést, amely az $x = (r_0, \varphi_0) \neq 0$ pontot transzformálja az $y = (r_1, \varphi_1)$ pontba. Azt tudjuk, hogy az $r_1 = r_0$, mivel az $r(t)$ a (2.4), illetve a (2.5)-nál megegyezik, azaz a sugárérték megegyezik. A φ_1 meghatározásához az alábbi helyettesítést kell elvégeznünk:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + t.$$

Tudjuk, hogy a $t = \tau$, azaz a (2.6)-ból következik, hogy:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \log r_0.$$

A h homeomorfizmus a következő:

$$h : \begin{cases} r_1 = r_0 \\ \varphi_1 = \varphi_0 - \log r_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Az $x = 0$-nál legyen az $y = 0$, tehát a $h(0) = 0$ ezzel biztosítva, hogy a h homeomorfizmus az egyensúlyi pontot megtartja. Az így felépített h az U-t önmagába transzformálja, minden $r_0 = const$ kört egy r_0-tól függő szöggel forgat el. (Mivel $\varphi_1 = \varphi_0 - \log r_0$.) Vizsgáljuk meg a szög változását, tekintsük azt az esetet, ha a határon vagyunk, azaz ha $r_0 = 1$. Ekkor a logaritmusos tagot kell vizsgálni, hiszen az írja le a forgatást. Ekkor $\log r_0 = \log 1 = 0$, tehát a határon nincs forgatás. Ahogy az r_0 csökken, azaz egyre közelebb kerülünk az origóhoz, a forgatás mértéke nő, tehát ha $r_0 \to 0$, akkor egyre növekszik a φ_1 elforgatási szög. A h homeomorfizmus folytonos és invertálható. Folytonos, mivel nincs szakadási helye, illetve ugrása sem.
Invertálhatóságot az alábbiakban bizonyítjuk.
Először azt kell belátnunk, hogy a h leképezés kölcsönösen egyértelmű. Ehhez tekintsük a [7] jegyzetben definiált fogalmakat:

2.9. Definíció. *Kölcsönösen egyértelmű*
Az $f : A \to B$ függvény kölcsönösen egyértelműnek nevezzük, ha különböző $x_1, x_2 \in A$ elemeknek különböző B-beli elemeket feleltet meg, azaz bármely $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.10. Tétel. *Legyen $f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű. Ekkor az f inverze $f^{-1} : B \to A$ olyan függvény, amely bármely $s \in B$ ponthoz azt a $t \in A$ pontot rendeli, amelyre $f(t) = s$.*

Tegyük fel, hogy a (2.7) leképezés az (r_0, φ_0) és a (r'_0, φ'_0) pontokhoz ugyanazon (r_1, φ_1) értéket felelteti meg. Tekintsük az alábbiakat:

$$r_1 = r_0 = r'_0$$
$$\varphi_1 = \varphi_0 - \log r_0 = \varphi'_0 - \log r'_0$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\varphi_0 = \varphi'_0.$$

A (2.7) homeomorfizmus kölcsönösen egyértelmű, így a 2.10. Tétel értelmében létezik az inverz. Emellett a (2.2) pályáit a (2.3) pályáiba viszi, tehát a két rendszer *topologikusan ekvivalens.*

2.3. Bifurkációs fogalmak

Az ekvivalencia definícióra támaszkodva most már tudjuk definiálni közvetlenül a bifurkációkhoz tartozó fogalmakat.

2.11. Definíció. *Bifurkáció*
Bifurkációnak nevezzük, ha a paraméter értékének változtatásakor egy, az eddigiekkel nem topologikusan ekvivalens fázikép jelenik meg.

2.12. Definíció. *Bifurkációs diagram*
Egy dinamikai rendszer bifurkációs diagramjának a paramétertér topologikus ekvivalenciái szerinti felosztást nevezzük, akár az egyes esetekre jellemző fázisképekkel együtt.

2.13. Definíció. *Bifurkációs paraméter*
Tekintsük az $x'(t) = f(x(t), c)$ differenciálegyenletet, ahol az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható függvény, és a $c \in \mathbb{R}^k$ vektor a paraméter. A $c_0 \in \mathbb{R}^k$ paraméterérték *reguláris*, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|c - c_0| < \delta$ esetén az $f(x(t), c)$ és az $f(x(t), c_0)$ topologikusan ekvivalensek. Amennyiben a c_0 paraméter nem reguláris, azaz a két dinamikai rendszer nem topologikusan ekvivalens, abban az esetben a $c_0 \in \mathbb{R}^k$ értéket *bifurkációs pontnak* nevezzük.

2.14. Példa. A (2.1) példánál az $a = 0$ érték a bifurkációs pont.

A dolgozat további részében a következő elnevezést használjuk:
A dinamikai rendszereknek megfelelő közönséges differenciálegyenletek fázistereit is topologikusan ekvivalensnek nevezzük.

2.4. Elemi bifurkációk

Az alapfogalmak ismertetése során rátérhetünk azokra a bifurkációkra, amikkel a dolgozat a későbbi fejezetekben foglalkozik. Ebben a fejezetben a bifurkációk normálformáját mutatjuk be, tehát azokat a legegyszerűbb differenciálegyenleteket, amelyekben az alábbi bifurkációk előfordulnak.

2.4.1. Vasvilla-bifurkáció

Legyen $x'(t) = cx(t) - x^3(t)$, ahol $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény és $c \in \mathbb{R}$ paraméter. Az $f(x) = cx - x^3$ függvény zérushelyei:

$$\overline{x}_1 = 0 \quad \text{és} \quad \overline{x}_{2,3} = \pm\sqrt{c}.$$

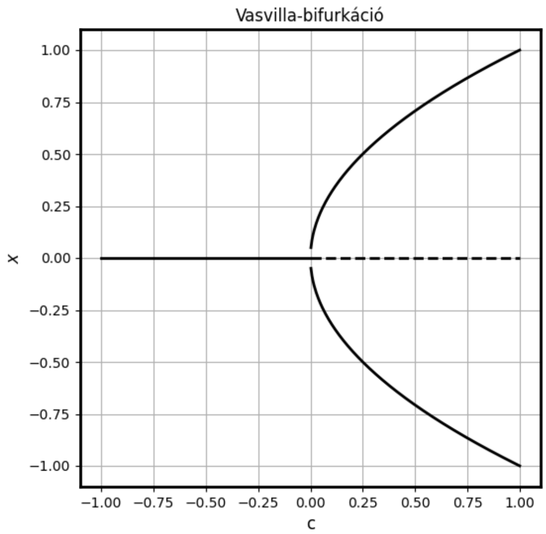
Azt láthatjuk, hogy az $\overline{x}_1 = 0$ egyensúlyi helyzet minden c érték esetén egyensúlyi helyzet, azaz nem függ c-től. Az $\overline{x}_{2,3} = \pm\sqrt{c}$ esetén csak akkor van egyensúlyi helyzet, amennyiben a $c > 0$, különben $\overline{x}_{2,3}$ komplex szám, ami nem megoldása a feladatnak. Emellett ebben az esetben az egyensúlyi helyzet függ a paramétertől. Tehát azt kapjuk, hogy $c > 0$ esetén három egyensúlyi helyzet van, $c < 0$ esetén pedig egy egyensúlyi helyzet van. Ebből látszik, hogy a $c = 0$-nál bifurkáció van, mivel a fáziskép eltérő a két esetben. Azaz a $c = 0$ lesz a bifurkációs pont. A (2.13) értelmében a $c > 0$ és a $c < 0$ értékek regulárisak, mivel a negatív és a pozitív értékeknél nem változik a fáziskép. A c értéket elegendően kicsit változtatva egy topologikusan ekvivalens fázisképet kapunk. A stabilitás a következőképpen alakul. Először tekintsük a derivált függvényt:

$$f'(x) = c - 3x^2$$

$$f'(\overline{x}_1) = f'(0) = c \quad \begin{cases} c < 0 \text{ esetén :} & \overline{x}_1 \text{ stabil} \\ c = 0 \text{ esetén :} & \text{bifurkációs pont} \\ c > 0 \text{ esetén :} & \overline{x}_1 \text{ instabil} \end{cases}$$

$$f'(\overline{x}_{2,3}) = f'(\pm\sqrt{c}) = c - 3c = -2c < 0,$$

tehát stabil, mivel tudjuk, hogy $c > 0$.



3. ábra. Vasvilla-bifurkáció normálformájának bifurkációs diagramja, a szaggatott vonallal az instabil helyzetet, a folytonos vonallal a stabil helyzetet jelöltük.

A 3. ábrán a vasvilla-bifurkáció normálformájának bifurkációs diagramját láthatjuk, amelyet az előbbiekben leírt módon tudunk meghatározni. Ez a diagram a `python mathlotlib` csomagjával készült a számított eredmények alapján. Láthatjuk, hogy amennyiben a c paraméter negatív, abban az esetben egy darab egyensúlyi helyzet lesz, amely stabil. Ez az ábrán a második és harmadik síknegyed határán látható folytonos vonal. Az első és negyedik síknegyedben azt az esetet láthatjuk, amikor a c paraméter pozitív. Ahogy már meghatároztuk, itt három darab egyensúlyi helyzet lesz, amit az ábráról is könnyedén leolvashatunk. Az x-tengelyen futó szaggatott vonal adja meg az instabil egyensúlyi helyzetet, emellett a gyökfüggvény írja le a két darab stabil egyensúlyi helyzet értékét.

2.4.2. Transzkritikus bifurkáció

Tekintsük az $x'(t) = cx(t) - x^2(t)$ egyenletet, ahol $c \in \mathbb{R}$ paraméter. Vizsgáljuk az $f(x) = cx - x^2$ függvény zérushelyeit:

$$f(x) = cx - x^2 = x(c - x) = 0$$
$$\overline{x}_1 = 0, \quad \overline{x}_2 = c$$

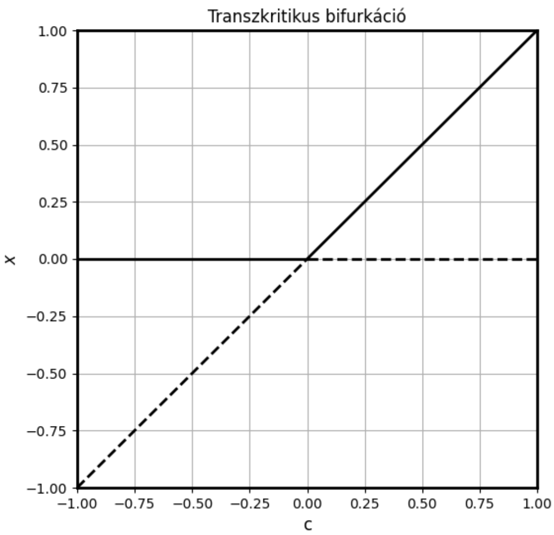
Látható, hogy az $\overline{x}_1 = 0$ esetén minden $c \in \mathbb{R}$ esetén egyensúlyi pontot kapunk, illetve az $\overline{x}_2 = c$ esetén is. Tehát, ha a $c \neq 0$, akkor két, amennyiben viszont $c = 0$, akkor csupán egy egyensúlyi helyzet van. Ezzel azt is láthatjuk, hogy $c = 0$ a bifurkációs pont,

azonban a $c \neq 0$ értékek a (2.13) értelmében regulárisak, hiszen a pozitív és negatív c értékek környékén nem változik a fáziskép. A c értéket elegendően kicsit változtatva topologikusan ekvivalens fázisképet kapunk.
A stabilitás vizsgálatával folytatjuk:

$$f'(x) = c - 2x$$

$$f'(\overline{x}_1) = f'(0) = c - 2 \cdot 0 = c \quad \begin{cases} c < 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_1 \text{ stabil} \\ c = 0 \text{ esetén}: & \text{bifurkációs pont} \\ c > 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_1 \text{ instabil} \end{cases}$$

$$f'(\overline{x}_2) = f'(c) = c - 2c = -c \quad \begin{cases} c < 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_2 \text{ instabil} \\ c = 0 \text{ esetén}: & \text{bifurkációs pont} \\ c > 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_2 \text{ stabil} \end{cases}$$



4. ábra. Transzkritikus-bifurkáció normálformájának bifurkációs diagramja, a szaggatott vonallal az instabil helyzetet, a folytonos vonallal a stabil helyzetet jelöltük.

A 4. ábrán a transzkritikus bifurkáció normálformáját láthatjuk. Ez az ábra az előzőhez hasonlóan a `python` programozási nyelvnek a `mathplotlib` csomagjával készült. Az ábráról is leolvashatók a már előzőekben kiszámoltak. Tehát amennyiben $c < 0$, láthatunk egy folytonos vonallal jelölt stabil megoldást az x-tengely mentén, illetve egy instabil megoldást a harmadik síknegyedben szaggatott vonallal. Ha $c > 0$, akkor kapunk egy stabil megoldást az első síknegyedben folytonos vonallal, és az x-tengely mentén pedig egy instabil megoldást. Ezzel megkapjuk azt, hogy a c változásával mik a lehetséges megoldások, illetve azok stabilitásait.

2.4.3. Nyereg-csomó bifurkáció

Tekintsük az $x'(t) = c - x^2(t)$ differenciálegyenletet, ahol $c \in \mathbb{R}$ ismét paraméter. Az $f(x) = c - x^2$ zérushelyei a következők:

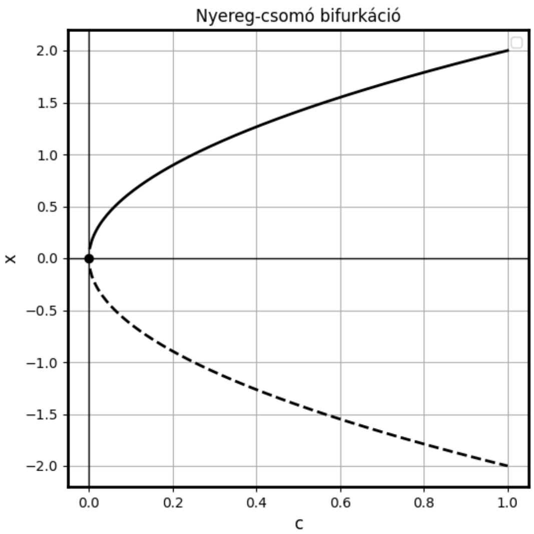
$$f(x) = c - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}^2 = c$$

Az egyensúlyi helyzetek ebben az esetben is függnek a c paramétertől. Az alábbi három eset lehetséges:

$$\begin{array}{lll} c < 0 \text{ esetén}: & & \text{Nincs egyensúlyi helyzet} \\ c = 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_1 = 0 & \text{1 darab egyensúlyi helyzet} \\ c > 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_{2,3} = \pm\sqrt{c} & \text{2 darab egyensúlyi helyzet} \end{array}$$

A $c = 0$ ismételten egy bifurkációs pont, mivel a két oldalán különbözőek a fázisképek, a $c \neq 0$ értékek regulárisak lesznek, mivel negatív és pozitív értékek körül nem változik a fáziskép. A c értéket elegendően kicsit változtatva topologikusan ekvivalens fázisképet kapunk. Tekintsük az egyensúlyi helyzetek stabilitását. Ehhez határozzuk meg a derivált függvényt: $f'(x) = 2x$.

$$\begin{array}{llll} f'(\overline{x}_1) = f'(0) = 2(0) = 0 & & & \\ f'(\overline{x}_2) = f'(-\sqrt{c}) = 2(-\sqrt{c}) & \Rightarrow & c > 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_2 \text{ stabil} \\ f'(\overline{x}_3) = f'(\sqrt{c}) = 2(\sqrt{c}) & \Rightarrow & c > 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_3 \text{ instabil} \end{array}$$



5. ábra. Nyereg-csomó-bifurkáció, vagy másnéven fold-bifurkáció normálformájának bifurkációs diagramja, a szaggatott vonallal az instabil helyzetet, a folytonos vonallal a stabil helyzetet jelöltük.

Az 5. ábrán a Nyereg-csomó bifurkáció normálformáját láthatjuk, hasonlóan az előző ábrákhoz ez is `python`nal készült. Amint az ábrára tekintünk, látható, hogy csak a $c > 0$ értékek esetén kapunk egyensúlyi helyzetet. Azonban a stabilitás vonatkozásában az első síknegyedben egy folytonos vonallal jelölt stabil egyensúlyi helyzetet kapunk, a negyedik síknegyedben pedig egy szaggatott vonallal jelölt instabilt.

3. fejezet

Egydimenziós modellek

Ebben a fejezetben az egydimenziós modellek bifurkációival foglalkozunk. Bemutatunk egy általános algoritmust, mellyel meg tudjuk határozni különböző egydimenziós differenciálegyenletnek bifurkációs diagramját. Az algoritmus ismertetése után három konkrét példán szemléltetjük a számítógépes módszer lépéseit. A fejezetben felhasználjuk az [5] cikket.

3.1. A számítógépes módszer lépései

Az algoritmus bemenetként megkapja a paraméteres differenciálegyenletet, illetve az abban szereplő függvény deriváltját. Célunk megvizsgálni, hogyan függnek a paramétertől az egyensúlyi helyzetek bizonyos tulajdonságai, mint a számuk, értékük és stabilitásuk. Az algoritmus lépéseit az alábbiakban ismertetjük.
Mindenekelőtt bevezetünk egy általunk meghatározott definíciót:

3.1. Definíció. *Konvergenciavektor*
Konvergenciavektornak nevezzük azt a Newton-módszer indítás- és végpontjából képzett vektort, mely az előbbiből az utóbbiba mutat.

Vegyünk egy tetszőleges intervallumot, melyet osszunk fel N darab egyenlő részre, ezeket a részeket az alábbiakban kosárnak fogjuk nevezni. A felosztott részek végpontjaira meghívjuk az 1.3. fejezetben már definiált Newton-módszert. Ekkor megkapjuk, hogy melyik végpontból hova konvergál az adott iteráció eredménye. Ezen a ponton elég, ha a Newton-módszert alacsony iterációszámra hívjuk meg, mivel ezekben a lépésekben nem a megoldás keresése lesz a cél, hanem a megoldástartomány lecsökkentése. Ez az iterációszám az algoritmus esetében három. Célunk azt vizsgálni, hogy vannak-e olyan kosarak, melyeket eldobhatunk. Az alapgondolat az, hogy csak azokat a kosarakat tartsuk meg, amelyekbe mutat konvergenciavektor. A kosarak megtartása vagy eldobása esetén az alábbi szempontok szerint járunk el:

1. Amennyiben egy kosárba nem konvergál egyetlen végpontból indított Newton-iteráció sem, de legalább egy konvergenciavektor áthalad rajta, ebben az esetben a kosár eldobható.

2. Amennyiben egy kosárba nem konvergál egyetlen végpontból indított Newton-iteráció sem, és a kosáron pontosan nulla konvergenciavektor halad át, ekkor a kosarat megtartjuk.

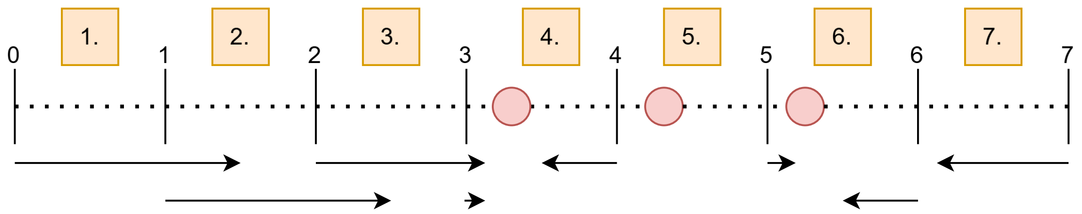
3. Tegyük fel, hogy egy adott kosárba mutató konvergenciavektorra teljesülnek az alábbi feltételek:

   (a) A kosár azon végpontjából indított konvergenciavektor, melyen a kosárba mutató konvergenciavektor áthalad ugyanabba az irányba mutat, mint a kosárba mutató konvergenciavektor.

   (b) A kosár végpontjából indított konvergenciavektor nem az adott kosarába mutat.

   (c) A kosár végpontjából indított konvergenciavektor végpontjában a függvényérték abszolútértéke kisebb, mint a kosárba érkező konvergenciavektor végpontjában felvett függvényérték abszolútértéke.

   Ekkor ez a kosár eldobható.



6. ábra. 3.3. Példa

3.2. Példa. Ezen a példán szemléltetjük az algoritmus első lépéseit.

- Tekintsük az első kosarat, ebben az esetben az 1 szerint a kosár elhagyható.
- A második, harmadik kosárnál a 3 miatt a második, illetve harmadik kosár is elhagyható.
- Az alapötlet miatt, miszerint megtartjuk azokat a kosarakat, melyekbe konvergenciavektor mutat, megtartjuk a negyedik, hatodik és hetedik kosarat.
- Az ötödik kosarat a a 2 miatt tartjuk meg.

Így a megtartandó kosarak a következők: 4-5-6-7.

Az algoritmust a zérushelykereséssel folytatjuk, amit felező módszerrel hajtunk végre, az alábbi lépések szerint:

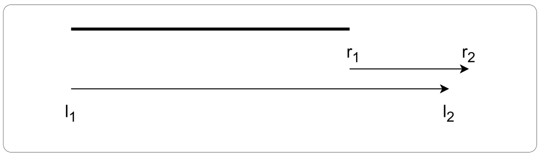
- A gyökkereső algoritmus kiindul egy intervallumból.

- Elindítjuk a Newton-módszert az intervallum két végpontjából. A két konvergenciavektor két-két végpontjára ℓ_1, ℓ_2, r_1 és r_2-ként fogunk hivatkozni, mint a bal oldali végpontból indított konvergenciavektor két végpontja (ℓ_1, ℓ_2), illetve a jobb oldali végpontból indított konvergenciavektor két végpontja (r_1, r_2). ℓ_1, ℓ_2, r_1 és $r_2 \in \mathbb{R}$. Egyes indexszel a kiindulópontot, kettessel a végpontot jelöljük.

- Amennyiben ℓ_2, vagy r_2 megoldás, azaz benne van annak ε sugarú környeztében hozzávesszük a megoldáshalmazhoz.

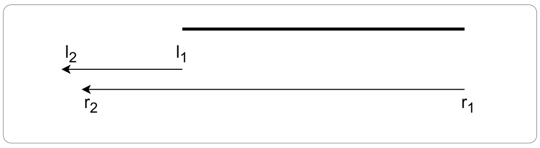
- Először zárjuk ki az összes olyan lehetséges esetet, mely esetén nem szükséges új intervallumokat létrehozni:

1.



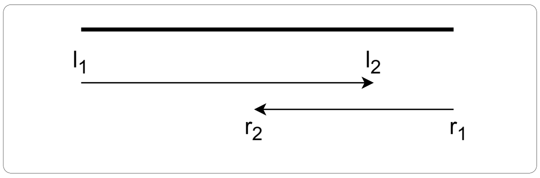
7. ábra. $\ell_2 > r_1$ és $r_2 > r_1$ eset

2.



8. ábra. $\ell_2 < r_1$ és $r_2 < r_1$ eset

3.



9. ábra. $\ell_2 > r_2$ eset

- A következő lépésben új határokat definiálunk a alábbiak szerint:

$$\ell_1^* = \begin{cases} \ell_2, & \text{amennyiben } \ell_1 < \ell_2 < r_1 \\ \ell_1, & \text{különben} \end{cases}$$

$$r_1^* = \begin{cases} r_2, & \text{amennyiben } \ell_1 < r_2 < r_1 \\ r_1, & \text{különben} \end{cases}$$

- Mivel ℓ_1^* és r_1^* vagy Newton-iteráció végpontja, vagy az előző intervallum végpontja, így ezekből a pontokból nem szükséges újabb Newton-iterációt indítani. Az intervallum méretét csökkentsük le mindkét oldalt ε-nal.

$$\ell_1^{**} = \ell_1^* + \varepsilon$$

$$r_1^{**} = r_1^* - \varepsilon$$

- Határozzuk meg ℓ_1^{**} és r_1^{**} számtani közepét, ezt jelöljük $\overline{m}$-mel:

$$\overline{m} = \frac{\ell_1^{**} + r_1^{**}}{2}$$

- Amennyiben a $|\ell_1^{**} - \overline{m}| < \varepsilon$ vagy az $|r_1^{**} - \overline{m}| < \varepsilon$, szintén nem készítünk új intervallumot. Ha ez a feltétel nem teljesül, abban az esetben az $[\ell_1^{**}, \overline{m}]$, valamint az $[\overline{m}, r_1^{**}]$-ban folyatatjuk a gyökkeresést.

- Ha nem marad több feldolgozandó intervallum, leállítjuk a keresést.

- A keresés kimenetele egy olyan megoldáshalmaz, amely potenciálisan redundáns eredményeket tartalmaz. Az egymástól maximum két ε távolságra lévő pontokat összevonjuk, és az átlagukkal helyettesítjük. Az így kapott eredményhalmaz az algoritmus végeredménye.

A megoldások megtalálása után a következő lépés a stabilitás vizsgálata, melyet a szokásos módon tehetünk meg.

- A deriváltfüggvénybe behelyettesítjük a kiszámított egyesúlyi pontokat. A stabilitásvizsgálatot az 1. fejezetben leírt módon tehetjük meg. Legyen $\overline{x}$ egyensúlyi pont. Ekkor

    1. ha $f'(\overline{x}) > 0$, akkor instabil,
    2. ha $f'(\overline{x}) < 0$, akkor stabil egyensúlyi helyzetről beszélünk.

- Utolsó lépésként kirajzoljuk a bifurkációs diagramot. Világos, hogy ehhez meg kell adnunk a paraméter egy konkrét értékét, hogy a különböző függvényekre meghatározhassuk a diagramot.

Megjegyzés: Az algoritmus tesztelése során felmerült a kosarak elhagyásával történő algoritmus futtatása. Az alábbi táblázatokban egy bifurkációs diagram kiplottolásához szükséges kétszáz (darab) c paraméter értékre meghatározott (lefuttatott) eredményeket láthatjuk. Ezeket a számításokat a 3.2.1. Példán határoztuk meg. Az alábbi kódolást használjuk a táblázat elkészítése során:
Gyökkereső algoritmus a felező módszerrel = GY.
Kosaras algoritmus = K.
A gyökkereső algoritmus a kosaras algoritmus inputját használva = GYK.
A teljes algoritmus a kosarakkal = K + GYK.
Az egyszerűség kedvéért az algoritmus paramétereit a következők szerint hívjuk:
ε,
kosarak száma = bucket_cnt,
Newton-iterációk száma a gyökeresésnél = N_it,
Newton iterációk száma a kosaras algoritmussal = N_bucket_it,
Az intervallum minimum értéke = range_min,
Az intervallum maximum értéke = range_max.
Három különböző esetben nézzük meg az algoritmus futási idejét, valamint az iterációk számát. A három esetben a **kosarak számát**, illetve az **intervallum hosszát** fogjuk módosítani. Tehát tekintsük az első esetet, amikor a paraméterek a következők:

1. $\varepsilon = 10^{-4}$, bucket_cnt $= 100$, N_it $= 10$, N_bucket_it $= 3$, range_min $= -1000$, range_max $= 1000$

	Iterációszám	Idő
GY	10632	0.14263867900012883
K	20200	0.2701757990000715
GYK	30392	0.5566766459999144
K +GYK	50592	0.8268524449999859

2. Nézzük most kisebb intervallumon és kisebb kosár számon, azaz: $\varepsilon = 10^{-4}$, bucket_cnt $= 10$, N_it $= 10$, N_bucket_it $= 3$, range_min $= -10$, range_max $= 10$

	Iterációszám	Idő
GY	10104	0.2598254370000177
K	2200	0.047088482000016291
GYK	12284	0.35135068099998534
K +GYK	14484	0.39843916300014826

3. És végül tekintsük jóval nagyobb intervallumon: $\varepsilon = 10^{-4}$, bucket_cnt $= 1000$, N_it $= 10$, N_bucket_it $= 3$, range_min $= -1000000$, range_max $= 1000000$

	Iterációszám	Idő
GY	13256	0.19258948799961217
K	200200	5.361473214999933
GYK	211104	5.666620227000294
K +GYK	411304	11.028093442000227

Láthatjuk, hogy mind a három esetben kevesebb iterációmszámmal és kevesebb futási idővel fut az az algoritmus, amely csak a felezős gyökkeresést használja. Azt is megállapíthatjuk, hogy minél kisebb az intervallum hossza és a kosár számok aránya, annál közelebb lesz a kosaras algoritmus futási ideje a felezős algoritmuséhoz. A gyorsabb futás miatt az alábbi példákat a felezős gyökkeresős algoritmussal konstruáltuk. Tekintve, hogy a dolgozat nem vizsgál nem „szép” függvényeket, elképzelhető olyan eset, amikor szükségünk lehet a kosaras megvalósításra.

3.2. Példák

Az alábbiakban bemutatunk három példát, melyeken az algoritmus lépéseit szemléltetjük. Minden példa esetében megtekinthetjük az analitikus megoldás bifurkációs diagramját, illetve a numerikus módszer által készített bifurkációs diagramot. Ez a fejezet használja a [4] szakirodalmat.

3.2.1. Vasvilla-bifurkáció

Legyen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény, $c \in \mathbb{R}$ paraméter. Tekintsük a következő differenciálegyenletet:

$$x'(t) = cx(t) - 4x^3(t), \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Az egyenletet átírhatjuk a következő alakra:

$$x'(t) = f(x(t)), \quad \text{ahol } f(x) = cx - 4x^3 = x(c - 4x^2). \tag{3.2}$$

Az egyszerű átalakítást követően határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket, tehát f zérushelyeit:

$$f(x) = x(c - 4x^2) = 0 \tag{3.3}$$

$$\overline{x}_1 = 0 \quad \text{és} \quad \overline{x}_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{c}}{2} \tag{3.4}$$

A paraméter függvényében az egyensúlyi helyzetek száma és értéke a következőképpen alakul:

$$\begin{array}{llll} c \leq 0 \text{ esetén :} & \overline{x}_1 = 0, & & 1 \text{ darab egyensúlyi helyzet} \\ c > 0 \text{ esetén :} & \overline{x}_1 = 0, \quad \overline{x}_2 = \frac{\sqrt{c}}{2}, & \overline{x}_3 = -\frac{\sqrt{c}}{2}, & 3 \text{ darab egyensúlyi helyzet} \end{array}$$

Tekintsük a (3.2) egyenletben szereplő f függvény deriváltját:

$$f'(x) = c - 12x^2$$

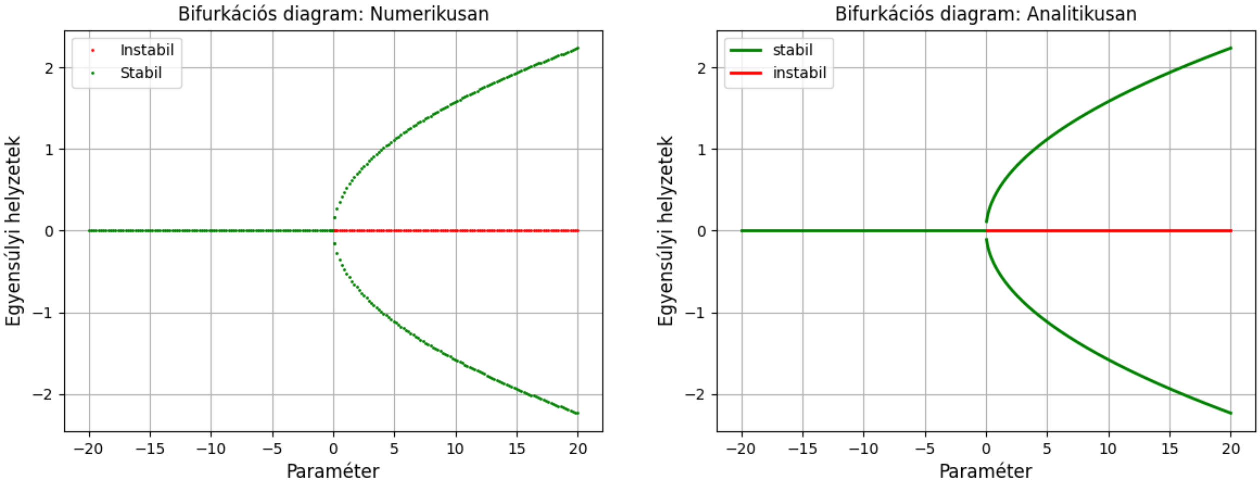
Ezek után helyettesítsük be az egyensúlyi helyzeteket a deriváltfüggvénybe:

$$f'(\overline{x}_1) = f'(0) = c \quad \begin{cases} c < 0 \text{ esetén :} & \overline{x}_1 \text{ stabil} \\ c = 0 \text{ esetén :} & \text{bifurkációs pont} \\ c > 0 \text{ esetén :} & \overline{x}_1 \text{ instabil} \end{cases}$$

Az $\overline{x}_{2,3}$ egyensúlyi pontok a következőképpen alakulnak:

$$f'(\overline{x}_{2,3}) = f'\Big(\pm\frac{\sqrt{c}}{2}\Big) = c - 12\Big(\pm\frac{\sqrt{c}}{2}\Big)^2 = c - 3c = -2c \leq 0,$$

tehát stabil, mivel tudjuk, hogy $c \geq 0$ a (3.4) és $\overline{x}_{2,3} \in \mathbb{R}$ miatt.



(a) (b)

10. ábra. A vasvilla-bifurkáció bifurkációs diagramja az algoritmussal, illetve az analitikus megoldás bifurkációs diagramja.

A 10b. ábrán a (3.1) differenciálegyenlet analitikus megoldásait, míg a 10a. ábrán a numerikus módszer által meghatározott megoldásokat láthatjuk. Egységesen zöld színnel jelöltük a stabil egyensúlyi helyzeteket, pirossal az instabil egyensúlyi helyzeteket. Láthatjuk, hogy a jobb oldali ábrát folytonos vonallal van meghatározva a diagram, ennek az az oka, hogy ott a kiszámított pontos megoldás szerint készítettük az ábrát a `python` programozási nyelv segítségével. Ezzel szemben, ahogy már említettük, a bal oldali ábra az általunk készített numerikus módszer segítségével készítettük, így ezen az ábrán pontokkal ábrázoltuk a megoldásokat. Látható, hogy a módszerrel megkapott diagram szabad szemmel nagyon szépen illeszkedik az analitikusan számított diagrammal, de a módszer pontos hibaanalíziséről a dolgozat 5. fejezetében olvashatunk.

3.2.2. Transzkritikus bifurkáció

Legyen az előző egyenlethez hasonlóan $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény, a $c \in \mathbb{R}$ paraméter. Vizsgáljuk az alábbi egyenletet:

$$\begin{aligned} &x'(t) = x(t)(x(t) - 1 + c) \\ &\text{azaz } x'(t) = f(x(t)), \text{ ahol:} \\ &f(x) = x(x - 1 + c) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Az egyensúlyi helyzetek a következők:

$$\overline{x}_1 = 0 \quad \text{és} \quad \overline{x}_2 = 1 - c.$$

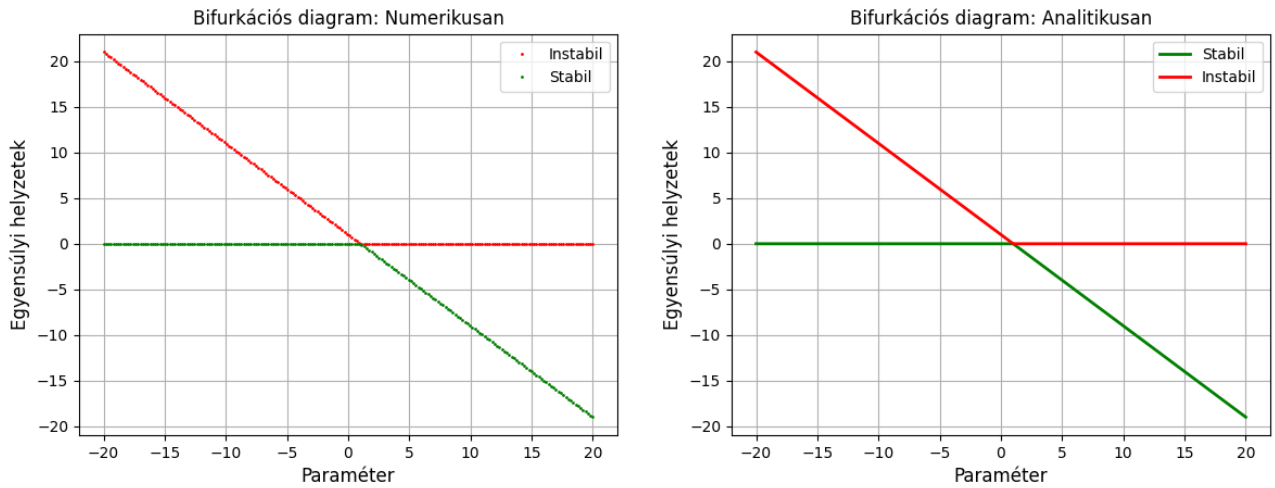
A derivált függvény:

$$f'(x) = 2x - 1 + c.$$

Az egyensúlyi pontok behelyettesítése a derivált függvénybe:

$$f'(\overline{x}_1) = f'(0) = 2 \cdot 0 - 1 + c = -1 + c$$
$$\begin{cases} c < 1: & \overline{x}_1 \text{ stabil} \\ c = 1: & \text{bifurkációs pont} \\ c > 1: & \overline{x}_1 \text{ instabil} \end{cases}$$

$$f'(\overline{x}_2) = f'(1-c) = 2(1-c) - 1 + c = 1 - c$$
$$\begin{cases} c > 1: & \overline{x}_2 \text{ stabil} \\ c = 1: & \text{bifurkációs pont} \\ c < 1: & \overline{x}_2 \text{ instabil} \end{cases}$$



(a) (b)

11. ábra. A transzkritikus-bifurkáció bifurkációs diagramja az algoritmussal, illetve az analitikus megoldás bifurkációs diagramja.

A 11. ábrán a (3.5) differenciálegyenlet numerikus, illetve analitikus „speciális megoldásait” láthatjuk, azaz az egyensúlyi pontok értékeit a c paraméter függvényében. Az előzőekhez hasonlóan zölddel a stabil egyensúlyi helyzeteket, pirossal az instabil egyensúlyi helyzeteket jelöltük. Mint ahogy már említettük a 11a. ábrán az algoritmus segítségével meghatározott, pontokkal ábrázolt bifurkációs diagramot láthatjuk.

3.2.3. Nyereg-csomó bifurkáció

Eddig olyan példákat mutattunk be, melyek az algoritmus szemléltetése céljából hasznosnak bizonyultak, de nem egy ismert modellt írtak le. Ebben a példában egy populációs modellt fogunk vizsgálni, melynek elemzésében a [11] dolgozatot használtuk fel. A populációt most biológiai vonatkozásban értjük, azaz egy adott faj azon egyedei, amelyek egy adott helyen és adott időben együtt élnek. Ebben a modellben populáció számát a következő tényezők fogják befolyásolni:

- szaporodás,
- vadászat,
- környezeti kapacitás.

Látható, hogy ennek az egyenletnek van olyan paramétere, mely változásával a megoldások is változhatnak, így érdemes megvizsgálni, hogyan alakul a bifurkációs diagramja. Tekintsük az alábbi biológiai modellt az ún. Verhulst-féle populációs modellt, amely tekintettel van arra, hogy a populáció véges erőforrással rendelkezik (pl. táplálék), tehát véges lesz az környezeti kapacitás.
Legyen $N : [0, \infty) \to [0, \infty)$ az ismeretlen függvény, ahol $N(t)$ jelölje egy populáció méretét a $t \geq 0$ időpontban.
A $K \geq 0$ legyen a környezeti kapacitás, $b > 0$ a szaporodási ráta, $V \geq 0$ a vadászati ráta.
Ekkor a véges eltartóképességet leíró differenciálegyenlet a következőképpen írható fel:

$$N'(t) = b \cdot N(t)(K - N(t)) - V = f(N(t))$$

A következő lépésként a szokásos módon kiszámítjuk az $\overline{N}$ egyensúlyi helyzeteket figyelembe véve, hogy $\overline{N} \geq 0$, mivel a populáció mérete nem lehet negatív. Keressük az alábbi egyenlet megoldásait:

$$\begin{aligned}
&f(\overline{N}) = 0 \\
&f(\overline{N}) = b \cdot \overline{N} \cdot (K - \overline{N}) - V = 0 \\
&bK\overline{N} - b\overline{N}^2 - V = 0 \\
&b\overline{N}^2 - bK\overline{N} + V = 0.
\end{aligned}$$

Megoldjuk a másodfokú egyenletet a megoldóképlet segítségével:

$$\overline{N}_{1,2} = \frac{bK \pm \sqrt{b^2K^2 - 4bV}}{2b} = \frac{K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{V}{b}} \tag{3.6}$$

Legyen $V = 0$, azaz tekintsük a modellt abban az esetben, amikor nincs vadászat. Ekkor az egyenletet csak a b születési ráta és a K környezti kapacitás határozza meg. Tehát

$$\begin{aligned}
&\overline{N}_1 = \frac{K}{2} - \frac{K}{2} = 0 \text{ és} \\
&\overline{N}_2 = \frac{K}{2} + \frac{K}{2} = K.
\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy $\overline{N}_{1,2}$ valós szám, tehát a (3.6)-ban a gyök alatt nemnegatívnak számnak kell lennie, azaz:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{V}{b} \geq 0 \\
&V \leq \frac{bK^2}{4} =: V_{\text{krit}}.
\end{aligned}$$

Meghatároztuk azt az értéket, amely egy határpontot fog képezni a populációs modellben. Látható, hogy a V_{krit}, a vadászati ráta kritikus értéke, két paramétertől fog függeni, a b születési rátától, illetve a K környezeti kapacitástól. A V_{krit} tehát a vadászati ráta azon értéke, amelynél a populáció még túlél, de ennél nagyobb érték esetén a populáció kihal. Az egyensúlyi helyzetek stabilitásához tekintsük a deriváltfüggvényt:

$$f'(N) = bK - 2bN$$

Tekintsük az $N = \overline{N}_1$ pontban a derivált a sajátértékeinek valós részének előjelét a $V \neq V_{\text{krit}}$ esetén:

$$f'(\overline{N}_1) = 2b\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{V}{b}} > 0.$$

Ebben az esetben az egyensúlyi helyzet *instabil* lesz.
Tekintsük az $N = \overline{N}_2$ pontban a derivált a sajátértékeinek valós részének előjelét a $V \neq V_{\text{krit}}$ esetén:

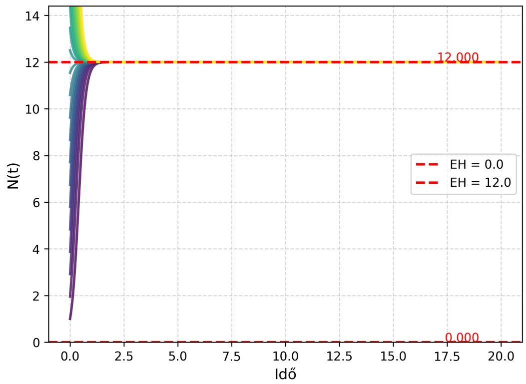
$$f'(\overline{N}_2) = -2b\sqrt{\left(\frac{K}{2}\right)^2 - \frac{V}{b}} < 0.$$

Ebben az esetben az egyensúlyi helyzet *aszimptotikusan stabil* lesz. A 12. ábrán az egyensúlyi helyzetek értékét látjuk az időben a vadászati ráta négy értéke esetén. Ebben a négy esetben megvizsgáljuk az egyensúlyi helyzetek számát, illetve az egyensúlyi helyzetek értékét. Ezek az ábrák szintén a `python` programozási nyelvvel készültek. Matematikai szempontból ábrázolhatnánk az egész síkon a megoldásokat, de mivel most egy valós biológiai modellel dolgozunk, így, mint ahogy már említettük, csak a nemnegatív $N(t)$ értékeket veszünk figyelembe. Meghatároztuk a differenciálegyenlet egyensúlyi helyzetetit, majd a numerikus módszerrel kiszámítottuk különböző kezdeti értékkel a különböző megoldásokat, ezt követően megfigyeltük az eredményeket. Az ábrákon azokat az eredménységeket kaptuk, amit vártunk.

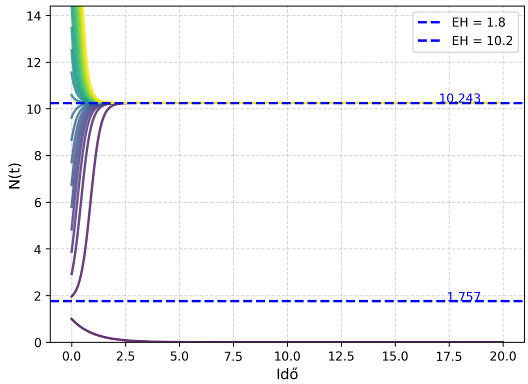
1. A 12a. ábrán láthatjuk az első esetet, amelyben fentiekben is kiszámoltak szerint a $V_1 = 0$ esetet vizsgáljuk. A számítások után nem meglepő, hogy ebben az esetben két egyensúlyi helyzet jelenik meg, és azt láthatjuk, hogy a K környezeti kapacitás egy aszimptotikus értéket ad a megoldásoknak.

2. A 12b. ábrán a második eset látható, amikor a $0 < V_2 < V_{\text{krit}}$, ebben az esetben is két egyensúlyi helyzet van. Amennyiben a populáció kezdeti mérete kellően nagy, a különböző értékekről indított megoldások a felső egyensúlyi ponthoz konvergálnak. Túl kicsi kezdeti populációméret esetén azonban a populáció kihal.

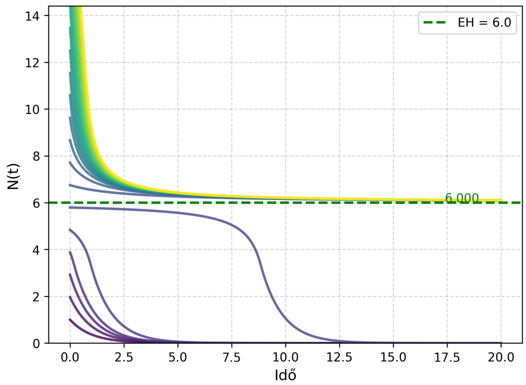
3. A 12c. ábrán a $V_3 = V_{\text{krit}}$ esetben azt láthatjuk, hogy a populáció egy része kihal, amennyiben kezdetben a populáció mérete nem volt elég nagy, azaz túl kevesen



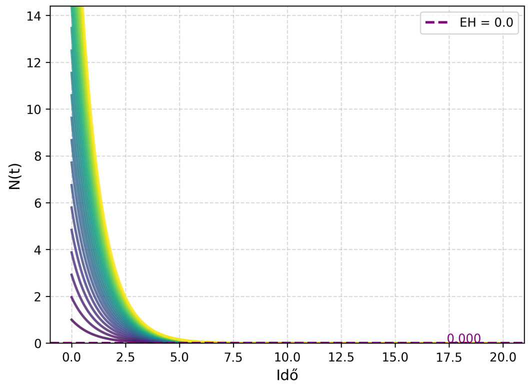
(a) $V_1 = 0$



(b) $0 < V_2 < V_{\text{krit}}$



(c) $V_3 = V_{\text{krit}}$



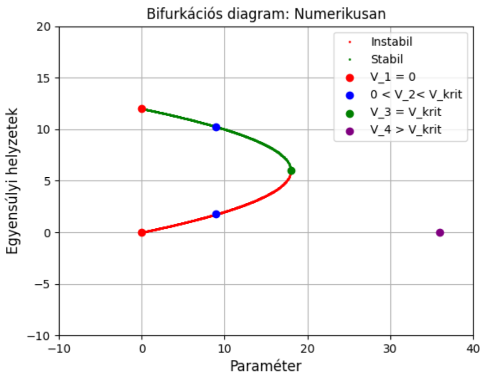
(d) $V_4 > V_{\text{krit}}$

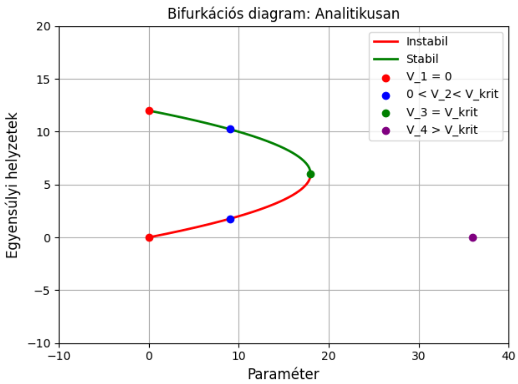
12. ábra. Az egyensúlyi helyzetek változása a vadászati ráta függvényében.

voltak az egyedek. Ám amennyiben a populáció kezdeti mérete elég nagy volt, tehát elég sokan voltak az egyedek, abban az esetben a megoldások konvergálnak az egyensúlyi ponthoz, amiből ebben az esetben egy van és éppen $K/2$-vel egyenlő.

4. Tekintsük a 12d. ábrán az utolsó esetet, amikor a V_4 vadászati ráta nagyobb lesz, mint a kritikus érték. Ekkor a populáció bármely kezdeti méret esetén kipusztul.

A 13. ábrán az előző példákhoz hasonlóan a numerikus módszerrel készített, pontokkal ábrázolt bifurkációs diagramot láthatjuk, mellette az analitikus megoldással meghatározott bifurkációs diagram látható. Ezen a két ábrán a bifurkációs diagramon túl láthatjuk az egyensúlyi helyzetek változását a V vadászati ráta függvényében. Ezeket az eseteket vizsgáltuk az előzőekben, a 12. ábrák elemzésekor. Ugyanazzal a színnel láthatjuk a 13. ábrán ezeket az egyensúlyi helyzeteket, mint a 12. ábrán, ezzel is segítve az átláthatóságot. A 13. ábrán még áttekinthetőbb, hogy a V paraméter változásával a populáció hogyan változik.





13. ábra. Az egydimenziós algoritmussal meghatározott bifurkációs diagram, valamint az analitikus megoldás bifurkációs diagramja a populációs modell esetén. Ábrázoltuk a diagramokon a V vadászati ráta négy kitüntetett esetét is, ezzel is szemléltetve a V paraméter viselkedését.

4. fejezet

Kétdimenziós modellek

Ebben a részben a 3. fejezethez hasonlóan járunk el. Bemutatjuk az általunk készített algoritmust a kétdimenziós modellek bifurkációs diagramjainak készítésére, majd három példán szemléltetjük a numerikus módszer lépéseit, illetve annak eredményét ábrák segítségével.

4.1. Az algoritmus lépései kétdimenzióban

Az algoritmus az egydimenziós esethez hasonlóan bemenetként kapja a kétdimenziós differenciálegyenletet és az abban szereplő függvények deriváltját, azaz a Jacobi-mátrixot. Az előzőekhez hasonlóan itt is azt fogjuk vizsgálni, hogy a paraméterek változásával hogyan változnak az egyensúlyi helyzetek, azok száma és stabilitása.
Tekintsük az algoritmus lépéseit:

1. *Tartomány szűkítése, gyökkeresés*

   - Első lépésként a kosaras algoritmus egy egyszerűsített változatát implementáljuk. Felosztjuk a síkot minimum és maximum értékek meghatározásával kosarakra. A kosarakra most tekinthetünk úgy, mint egy négyzetrácsra. A négyzetrács minden pontjából elindítunk egy-egy Newton-iterációt. Ezt úgy tesszük meg, mint ahogy az egydimenziós esetben, tehát csak alacsony iterációszámmal. Ez az algoritmusban ismételten három.
   - Az egydimenziós algoritmushoz képest a kosarak elhagyásával sokkal óvatosabbnak kell lennünk, nem tudunk olyan egyszerű logika mentén kosarakat elhagyni. Akkor hagyunk el egy kosarat, amennyiben az adott kosárba nem mutat konvergenciavektor, tehát a négy sarkából indított konvergenciavektorok kimutatnak belőle. Csak ezeket a kosarakat fogjuk ebben az esetben elhagyni. (Az algoritmus ezen szakasza még nem az explicit megoldáskeresés céljából szükséges, hanem a keresési intervallum csökkentése végett. Ezért tehetjük meg, hogy alacsony iterációszámmal hívjuk meg a Newton-módszert.)
   - A lehetséges kosarak elhagyása után egy szűkebb tartományban keressük a megoldásokat. A leszűkített tartományok azok a tartományok, amelyeket a

nem eldobott kosarak határoznak meg. Ezt a tartományt felosztjuk négyzetrácsokra, majd ezek minden pontjából indítunk egy-egy Newton-iterációt, de már tíz iterációszámmal. Ezzel megkapjuk a zérushelyeket, azaz az egyensúlyi helyzeteket.

2. *Stabilitás meghatározása*

   - Először a megkapott egyensúlyi helyzetekben kiértékeljük, az algoritmusnak már megadott Jacob-mátrixban, majd a behelyettesítés után meghatározzuk a kapott mátrix sajátértékeit. Ezt a számítógépes megoldásban (numerikus) beépített sajátérték függvénnyel végeztük el, az analitikus megoldásban általában determináns számolással.
   - Kétdimenzióban az 1.1. fejezetben ismertettük a sajátértékektől függő stabilitási fogalmakat, itt ennek segítségével járunk el. Látható, hogy ez is jóval összetettebb probléma, mint az egydimenziós volt.
   - Utolsó lépésként kirajzoljuk a bifurkációs diagramot.

4.2. Példák

Az alábbiakban három nemlineáris kétdimenziós példával szemléltetjük az algoritmus lépéseit. Ezt követően láthatunk majd ábrákat az adott rendszerek fázisportréjairól, illetve a bifurkációs diagramokról.

4.2.1. Transzkritikus bifurkáció

Legyen az $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény, a $c \in \mathbb{R}$ paraméter. Tekintsük az alábbi másodrendű nemlineáris differenciálegyenletet:

$$x''(t) + cx'(t) + x(t)[1 - x(t)] = 0. \tag{4.1}$$

Az 1. fejezetben bemutatott 1.3. Tétel, azaz az átviteli elv értelmében írjuk át a másodrendű egyenletet két elsőrendű differenciálegyenletre. Ehhez jelölje $y = x'$, tehát $y' = x''$. Ekkor a másodrendű egyenletből kapunk egy differenciálegyenlet-rendszert, amely a következőképpen alakul:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -cy - x(1 - x) \end{cases}$$

A következő lépés az egyensúlyi helyzetek meghatározása:

$$x' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{y} = 0 \tag{4.2}$$

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -cy - x(1 - x) = 0$$

Tudjuk, hogy $\overline{y} = 0$. Tehát $-x(1 - x) = 0$. Azaz

$$\overline{x}_1 = 0, \quad \overline{x}_2 = 1.$$

Eszerint az egyensúlyi helyzetek a következők lesznek:

$$(\overline{x}_1, \overline{y}) = (0,0) \quad \text{és} \quad (\overline{x}_2, \overline{y}) = (1,0).$$

A stabilitás vizsgálatához meg kell határoznunk a differenciálegyenlet-rendszerben szereplő függvény Jacobi-mátrixát:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+2x & -c \end{pmatrix}.$$

Helyettesítsük be a kiszámolt egyensúlyi pontokat az imént meghatározott Jacobi-mátrixba:

$$J_1 = J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad J_2 = J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}.$$

Először a J_1 mátrix sajátértékeit számítjuk ki:

$$\det(J_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -c-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-c-\lambda) - (-1) = \lambda^2 + c\lambda + 1 = 0.$$

Egy másodfokú egyenletet kapunk, amit a megoldóképlet segítségével oldunk meg:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4}}{2}.$$

Vizsgáljuk meg a diszkriminánst.

- Ha $c^2 - 4 > 0$, akkor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor $c_1 > 2$, vagy $c_2 < -2$ ezt a két esetet külön kell vizsgálnunk.
  - Tekintsük a $c_1 > 2$ esetet. Ekkor látható, hogy a $\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2} < 0$, mivel $-c_1 < 0$ és tudjuk, hogy $c^2 - 4 > 0$. Ekkor

    $$\frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2-4}}{2} < 0.$$

    Emellett

    $$\frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2-4}}{2} < 0, \text{ mivel } c_1 > \sqrt{c_1 - 4}.$$

    így a $c_1 > 2$ esetben $\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2} < 0$, tehát a $(0,0)$ pontban *stabil csomót* kapunk.
  - Tekintsük a $c_2 < -2$ esetet. Ekkor látható, hogy a $\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2} > 0$, mivel $-(-c_2) > 0$ és tudjuk, hogy $c^2 - 4 > 0$. Ekkor

    $$\frac{-c_2 + \sqrt{c_2^2-4}}{2} > 0,$$

Emellett, mivel két pozitív számot hasonlítunk össze, így az alábbi négyzetreemelés elvégezhető:

$$c_2 > \sqrt{c_2^2 - 4} \quad \Rightarrow \quad c_2^2 > c_2^2 - 4$$

$$\frac{-c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4}}{2} > 0.$$

így a $c_2 < -2$ esetben $\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2} > 0$, tehát a $(0,0)$ pontban *instabil csomót* kapunk.

- Ha $c^2 - 4 < 0$, akkor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Ekkor $c_3 \in (-2,0)$, $c_4 \in (0,2)$, ha a $-2 < c_3 < 0$, akkor a $\operatorname{Re}\lambda_{3,1}, \operatorname{Re}\lambda_{3,2} > 0$, tehát *instabil fókuszt* kapunk. Amennyiben a $0 < c_4 < 2$, akkor a $\operatorname{Re}\lambda_{4,1}, \operatorname{Re}\lambda_{4,2} < 0$, tehát *stabil fókuszt* kapunk.
- Ha a $c^2 - 4 = 0$, akkor $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, tehát a $c_5 = -2$-höz tartozó sajátérték $\lambda_{5,1} = 1$ és a $c_6 = 2$-höz tartozó sajátérték $\lambda_{6,1} = -1$. Mivel mindkét esetben kétszeres sajátérték van, így az előjelek meghatározása után láthatjuk, hogy a $\lambda_{5,1} = 1$ sajátérték miatt $c_5 = -2$-nél *elfajult instabil csomót* kapunk, a $\lambda_{6,1} = -1$ sajátérték miatt $c_6 = 2$-nél *elfajult stabil csomót* kapunk.
- Egy esetet hagytunk csupán ki, amikor a $c = 0$, ekkor azt kapjuk, hogy a $\operatorname{Re}\lambda = 0$, tehát *centrumot* kapunk.

Tehát látható, hogy a $c = -2; 0; 2$ esetén bifurkációs pontokat kapunk. Az átláthatóság kedvéért tekintsük az alábbi táblázatot:

$c < -2$	$c = -2$	$-2 < c < 0$	$c = 0$	$0 < c < 2$	$c = 2$	$c > 2$
Instabil csomó	Elfajult instabil csomó	Instabil fókusz	Centrum	Stabil fókusz	Elfajult stabil csomó	Stabil csomó

2. táblázat. Stabilitási típusok c paraméter szerint a $(0,0)$ egyensúlyi helyzetben.

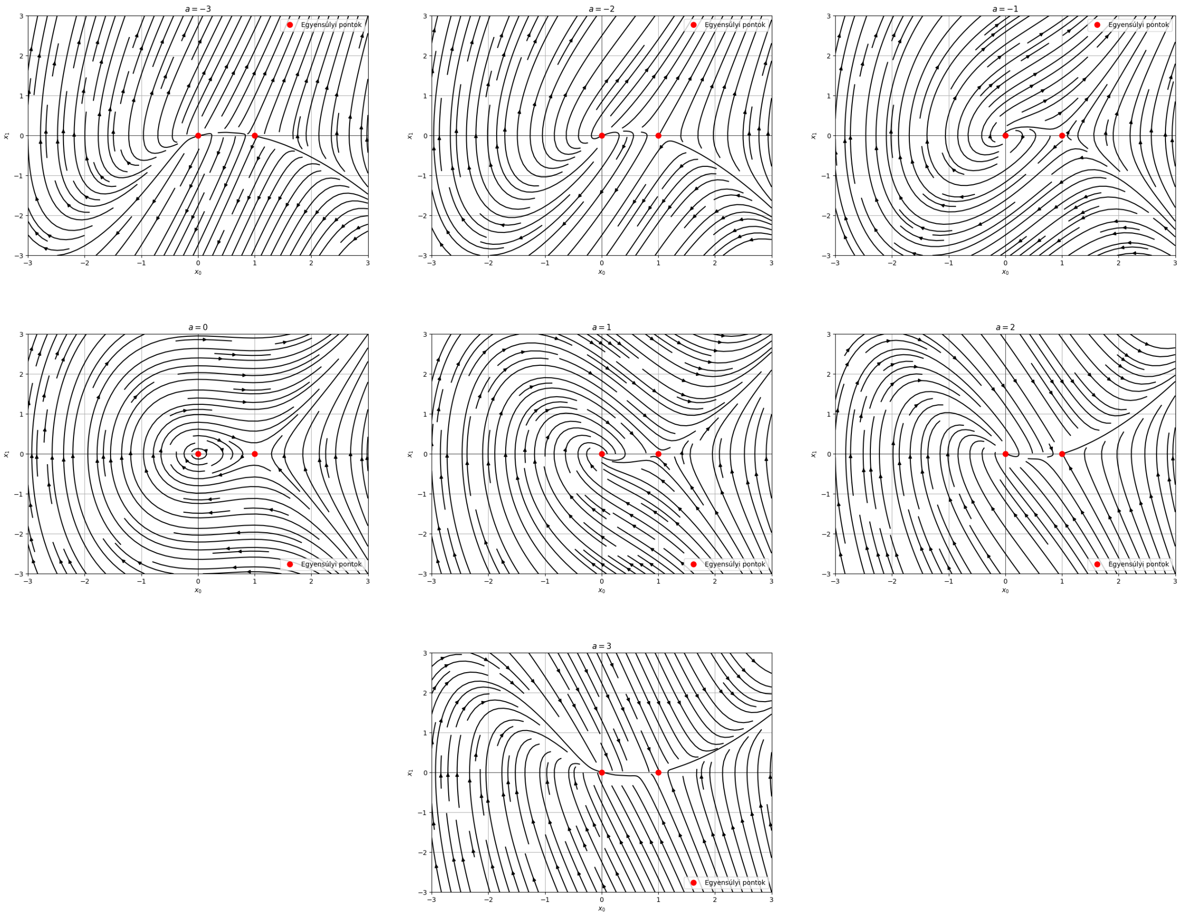
Tekintsük a J_2 mátrixot. Az előző lépésekhez hasonlóan határozzuk meg a sajátértékeket:

$$\det(J_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -c-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-c-\lambda) - 1 = \lambda^2 + c\lambda - 1 = 0.$$

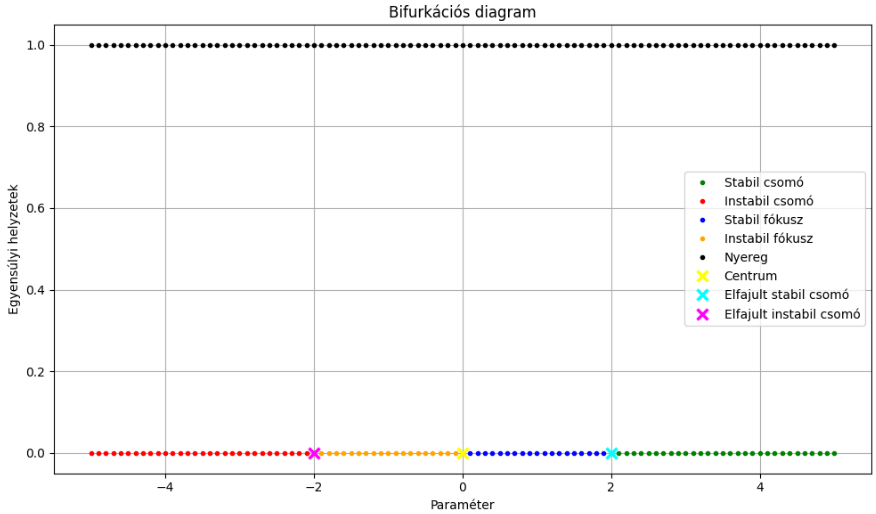
A másodfokú egyenlet megoldóképletéből:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+4}}{2}.$$

Ebben az esetben tudjuk, hogy $c^2 + 4 > 0$ minden esetben, így $\lambda_1 < 0$ és $\lambda_2 > 0$, mivel a $\sqrt{c^2+4} > |c|$. Tehát az $(1,0)$ pont *nyereg*.
A 14. ábrán a (4.1) másodrendű differenciálegyenlet fázisképeit láthatjuk a $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ esetben. A paraméterértékeket úgy határoztuk meg, hogy a (4.1)



14. ábra. A (4.1). feladathoz tartozó fázisportrék $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ paraméterek mellett.



15. ábra. Transzkritikus bifurkáció bifurkációs diagramja.

feldatban minden előforduló fázisképet láthassunk. Az ábrákon piros pontokkal jelöltük az egyensúlyi pontokat, amik nem függnek a paramétertől, ahogy ezt a számítás is alátámasztja. (A két későbbi példában olyan eseteket fogunk vizsgálni, amikor már az egyensúlyi pontok is függnek a paramétertől.) Láthatjuk, hogy az $(1, 0)$ pontban mindig nyereg fázisképk van, de a $(0, 0)$ pontban a paraméter változásával folyamatosan változik a fázisképp. Ennek az értelmezésében a 2. táblázat segít.

A 15. ábrán a (4.1) feladat a bifukációs diagramját láthatjuk. A $(0, 0)$ pontban láthatjuk a hét megjelenő fázisképet, emellett az $(1, 0)$ pontban láthatjuk, hogy végig nyereg fázisképet kapunk. Ez konzisztens a számításainkkal és a 14. ábrával is. Az is látható a $(0, 0)$ pontnál, hogy a negatív oldalon minden stabilitás instabil, míg a pozitív oldalon stabil. Az ábra a kétdimenziós algoritmus megoldásait használja, és ementén készíti el a bifurkációs diagramot. Az ábrák – ahogyan eddig is – a `python` programozási nyelvvel készültek.

4.2.2. Vasvilla-bifurkáció

Ez a példa szamítások nélkül a [12] szakirodalom 29. oldalán található.
Valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ mellett tekintsük a $c \in \mathbb{R}$ paramétert tartalmazó differenciálegyenletrendszert:

$$\begin{cases} x' = y - \alpha x \\ y' = cx - x^3 \end{cases} \tag{4.3}$$

Ezt követően határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket:

$$\begin{aligned} &x' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - \alpha x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \alpha x \\ &y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad cx - x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(c - x^2) = 0, \\ &\text{azaz: } x_1 = 0 \text{ vagy } c - x_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{c} \end{aligned}$$

Az egyensúlyi pontok tehát a c < 0 esetén az $\overline{x}_1 = 0, \overline{y}_1 = \alpha\overline{x}_1$, ekkor az origó lesz az egyetlen egyensúlyi helyzet. Amennyiben a $c = 0$, az $\overline{x}_{2,3} = 0 = \overline{x}_1$, így ebben az esetben is az origó lesz az egyensúlyi helyzet, emellettt bifurkációs pont lesz. Amennyiben a $c > 0$, ekkor az $\overline{x}$ lehetséges értékei az $\overline{x}_1 = 0$, az $\overline{x}_2 = \sqrt{c}$, és az $\overline{x}_3 = -\sqrt{c}$. Az $\overline{y}_1 = \alpha\overline{x}_{1,2,3}$ változatlan marad. Így három egyensúlyi helyzet lesz a $c > 0$ esetén: $(0,0); (\sqrt{c}, \alpha\sqrt{c}); (-\sqrt{c}, -\alpha\sqrt{c})$.
Az egyensúlyi helyzetek meghatározása után a következő lépés a Jacobi-mátrix meghatározása:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ c - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A szokásos módon behelyettesítjük a J mátrixba a meghatározott egyensúlyi pontokat. Tekintsük a $(0,0)$-ban a J-t:

$$J_1 = J(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(J_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\alpha - \lambda & 1 \\ c & -\lambda \end{vmatrix} = (-\alpha - \lambda)(-\lambda) - c = \lambda^2 + \alpha\lambda - c.$$

Ekkor:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4c}}{2}.$$

Legyen például $\alpha = 0{,}3$. Vizsgáljuk a diszkriminánst.

- Tekintsük a $D = 0$ esetet, ekkor $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ egyszeres sajátérték:

  $$0{,}3^2 + 4c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}09 = -4c \quad \Leftrightarrow \quad c = -0{,}0225.$$

  Ekkor $\lambda_{1,2} < 0$, így *elfajult stabil csomót* kapunk a $(0,0)$ pontban $c = -0{,}0225$ esetén.

- Tekintsük a $D < 0$ esetet, ekkor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

  $$0{,}3^2 + 4c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}09 < -4c \quad \Leftrightarrow \quad c < -0{,}0225.$$

  A $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, tehát csak a sajátértékek valós részét kell vizsgálnunk, így $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$. Az origó $c < -0{,}0225$ esetén *stabil fókusz.*

- Tekintsük a $D > 0$ esetet, ekkor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

  $$0{,}3^2 + 4c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}09 > -4c \quad \Leftrightarrow \quad c > -0{,}0225.$$

  1. Először tekintsük a

     $$\lambda_1 = \frac{-0,3 - \sqrt{0,3^2 + 4c}}{2}$$

     sajátértékeket. Ekkor láthatjuk, hogy $\lambda_1 < 0$.

2. A másik sajátérték:

$$\lambda_2 = \frac{-0{,}3 + \sqrt{0{,}3^2 + 4c}}{2}.$$

Amennyiben $c \in (-0{,}0225, 0)$, akkor $\lambda_2 < 0$. Amennyiben $c > 0$, akkor $\lambda_2 > 0$.

Így ha $c \in (-0{,}0225, 0)$, akkor $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, tehát *stabil csomót* kapunk. Ha $c > 0$, akkor $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, tehát *nyerget* kapunk a $(0, 0)$ pontban. Ha $c = 0$, akkor $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$. Ez *bifurkációs pont*.

A $c = 0$ bifurkációs pont mellett a $c = -0{,}0225$ érték is bifurkációs pont lesz.

$c < -0{,}0225$	$c = -0{,}0225$	$-0{,}0225 < c < 0$	$c = 0$	$c > 0$
Stabil fókusz	Elfajult stabil csomó	Stabil csomó	Bifurkációs pont	Nyereg

3. táblázat. Stabilitási típusok a c paraméter szerint a $(0, 0)$ egyensúlyi pontban.

Térjünk át a másik két egyensúlyi helyzetre. Vegyük észre, hogy a Jacobi-mátrixba való behelyettesítés után ugyanazt a mátrixot kapjuk:

$$J(\sqrt{c}, 0{,}3\sqrt{c}) = J(-\sqrt{c}, -0, 3\sqrt{c}) =: J_2$$

Mivel:

$$\begin{pmatrix} -0{,}3 & 1 \\ c - 3(\sqrt{c})^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}3 & 1 \\ c - 3(-\sqrt{c})^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}3 & 1 \\ -2c & 0 \end{pmatrix},$$

ekkor

$$\det(J_2 - I\lambda) = \begin{vmatrix} -0{,}3 - \lambda & 1 \\ -2c & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0{,}3\lambda + 2c = 0,$$

tehát

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0{,}3 \pm \sqrt{0{,}3^2 - 8c}}{2}. \tag{4.4}$$

Vizsgáljuk a kifejezés diszkriminánsát.

- Amennyiben $D > 0$, akkor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

  $$0{,}3^2 - 8c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}3^2 > 8c \quad \Leftrightarrow \quad c < 0{,}01125.$$

  Ebben az esetben látható, hogy $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, így *stabil csomót* kapunk.
  Tudjuk, hogy ez a két egyensúlyi helyzet csak a $c > 0$ esetben létezik, így vizsgáljuk meg azt a legkisebb értéket, amit még felvehet, azaz a $c = 0$ kitüntetett esetet. Ekkor a $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0{,}3$, így $c = 0$ esetén *bifurkációs pontot* kapunk.

- Amennyiben a $D < 0$, akkor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

  $$0{,}3^2 - 8c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}3^2 < 8c \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}01125 < c.$$

  Ekkor mivel csak a $\operatorname{Re}\lambda$ értékét kell vizsgálnunk, így megkapjuk, hogy a $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 2$, tehát *stabil fókuszt* kapunk.

- Amennyiben a $D = 0$, akkor $\lambda \in \mathbb{R}$ egyszeres sajátérték lesz:

  $$0{,}3^2 - 8c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}3^2 = 8c \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}01125 = c.$$

  Tehát a $\lambda_{1,2} = -0{,}15 < 0$, így *elfajult stabil csomót* kapunk.

A $c = 0$ bifurkációs pont mellett a $c = 0{,}01125$ érték is bifurkációs pont lesz.

$c = 0$	$0 < c < 0{,}01125$	$c = 0{,}01125$	$c > 0{,}01125$
Bifurkációs pont	Stabil csomó	Elfajult stabil csomó	Stabil fókusz

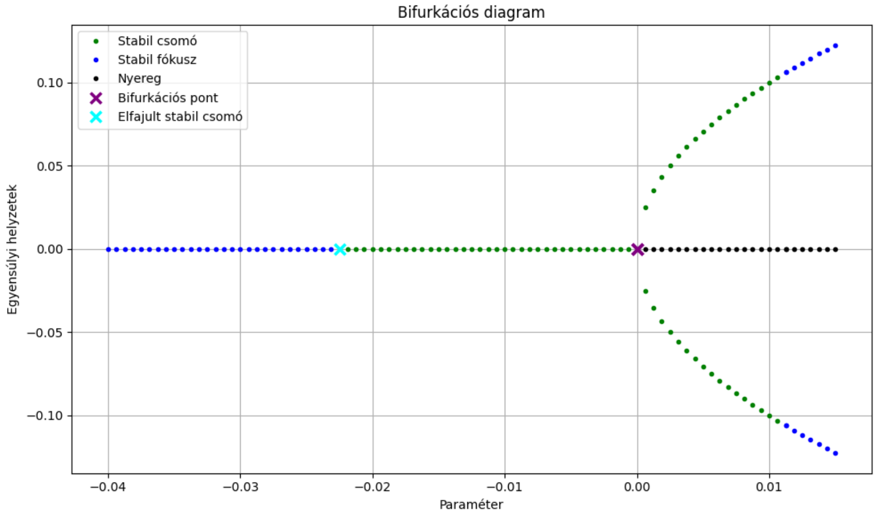
4. táblázat. Stabilitási típusok a c paraméter szerint a $(\sqrt{c}, 0{,}3\sqrt{c})$ és $(-\sqrt{c}, -0{,}3\sqrt{c})$ egyensúlyi helyzetekben.

A 17. ábrán a kétdimenziós vasvilla-bifurkációt leíró (4.3) differenciálegyenlet fázisképeinek változásait láthatjuk. Mint ahogyan a transzkritikus bifurkáció esetében is, most is a (4.3) feladatban előforduló összes fázisképet láthatjuk. Ahogyan már korábban is említettük, ebben a példában az egyensúlyi helyzetek függnek a paramétertől, így megfigyelhetjük, hogy amikor $c < 0$ vagy a $c = 0$, akkor csak egy egyensúlyi pont van, de a $c > 0$ esetén már három egyensúlyi pont lesz. Ezt az ábrákon is könnyen felismerhetjük. A 17. ábra tíz alesetet szemléltet a $c = -0{,}03; -0{,}0225; -0{,}01; 0; 0{,}01; 0{,}01125; 0{,}02; 0{,}1; 0,5; 1$ értékekkel. A 3. és a 4. táblázatok segítségével határoztuk meg ezeket az értékeket.
A 16. ábrán a bifurkációs diagramot láthatjuk. A paraméterértékeket le kellett szorítanunk $-0{,}04$ és $0{,}02$ közé ahhoz, hogy látszódjon a (4.3) rendszerben megjelenő összes különböző fáziskép. Ez az oka annak, hogy a másik két kétdimenziós bifurkációs diagramnál sokkal tágabb felbontásban látható az ábra. Ezt az ábrát a numerikus módszer megoldásaival készítettük a `python` programozási nyelvvel. Látható, hogy a $c = 0{,}01125$ paraméternél a bifurkációs diagramon nem jelenik meg az elfajult stabil csomó fáziskép, azonban az analitikus számításunk helyes. A numerikus kerekítés miatt a D nem lesz pontosan 0, csak nagyon közel hozzá, így a sajátértékek nem pontosan azok lesznek, mint amit kiszámítottunk, hanem $\lambda_{1,2} = -0{,}15 \pm 2 \cdot 10^{-9} i$ (`[-0.15+2e-9j, -0.15-2e-9j]`). Így láthatjuk, hogy a számítógép kettő komplex sajátértéket számol, aminek a $\operatorname{Re}\lambda < 0$, így a $c = 0{,}01125$ paraméterértéknél a numerikus megoldó *stabil fókusz* fázisképet számít.

4.2.3. Nyereg-csomó-bifurkáció

Tekintsük az alábbi differenciálegyenlet-rendszert a $c \in \mathbb{R}$ paraméter mellett:

$$\begin{cases} x' = c + x^2 \\ y' = -y \end{cases} \tag{4.5}$$



16. ábra. A vasvilla-bifurkáció bifurkációs diagramja a (4.3) feladat esetén.

Számítsuk ki az egyensúlyi helyzeteket:

$$y' = -y = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{y} = 0$$

$$x' = c + x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -c \quad \Rightarrow \quad \overline{x}_{1,2} = \pm\sqrt{-c}$$

$$\begin{cases} c < 0 \text{ esetén}: & (\overline{x}_{1,2}, \overline{y}) = (\pm\sqrt{-c}, 0), \quad (\overline{x_3}, \overline{y}) = (0,0) & \text{3 db egyensúlyi helyzet} \\ c = 0 \text{ esetén}: & (\overline{x_3}, \overline{y}) = (0,0) & \text{1 db egyensúlyi helyzet} \\ c > 0 \text{ esetén}: & & \text{Nincs egyensúlyi helyzet} \end{cases}$$

Tekintsük a Jacobi-mátrixot:

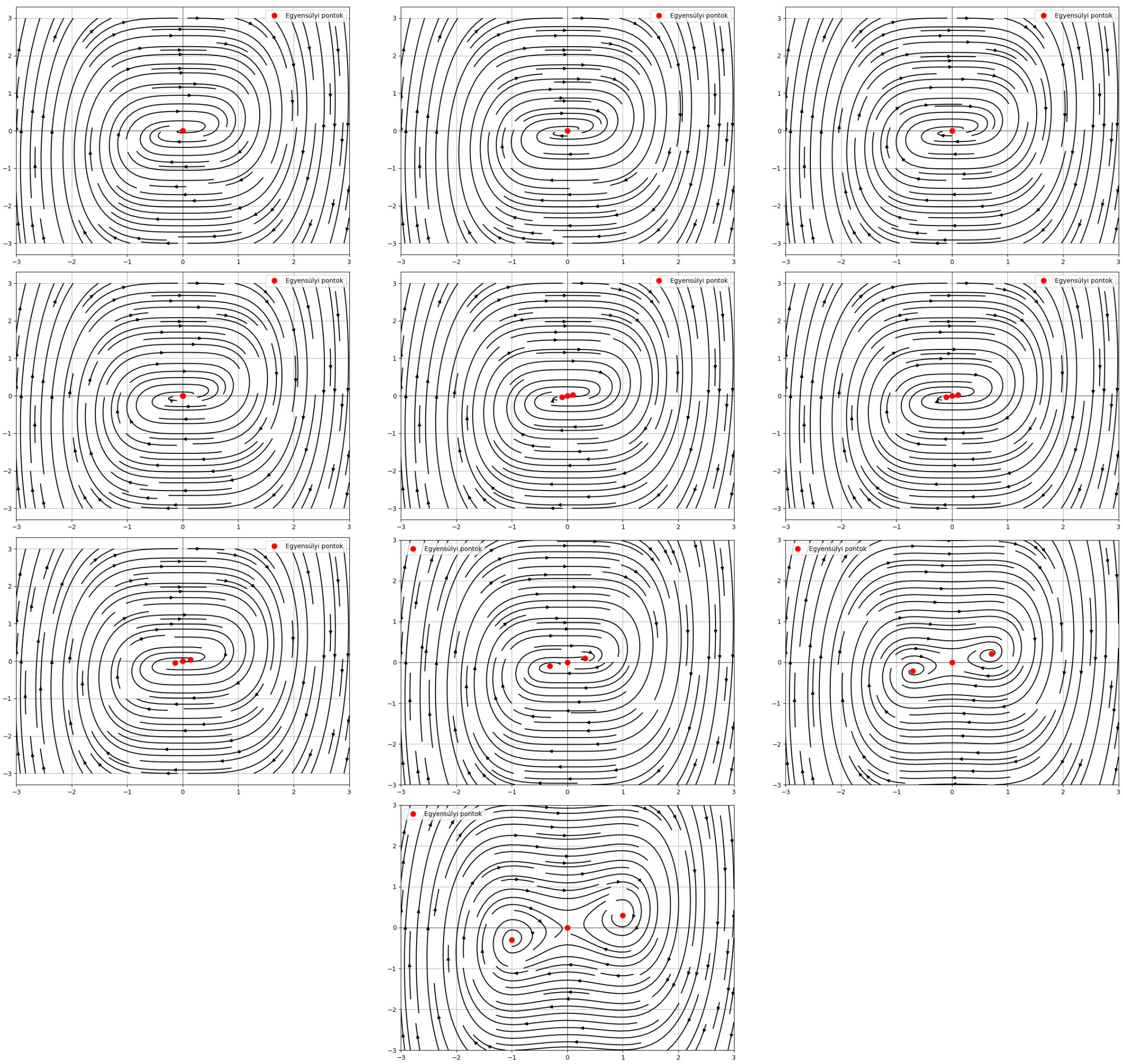
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\det(J - I\lambda) = \begin{pmatrix} 2x - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (2x - \lambda)(-1 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2x, \lambda_2 = -1.$$

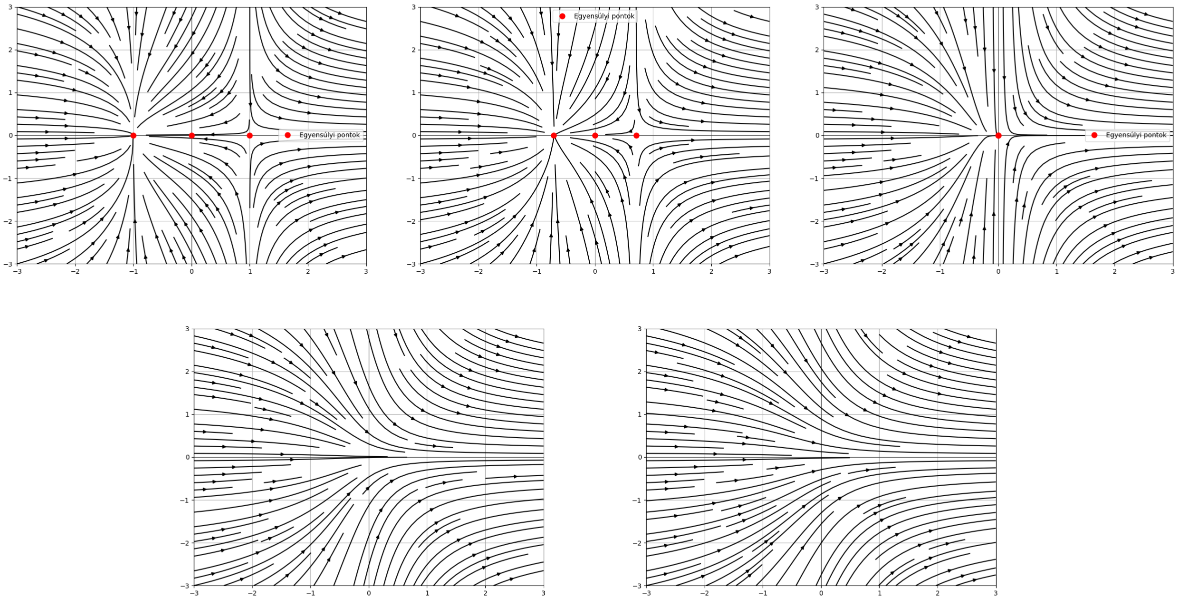
Ezt követően nézzük meg, hogy a c paraméter változásával milyen fázisképeket kapunk.

1. eset: $c = 0$ esetén a $(0,0)$ az egyetlen egyensúlyi helyzet. Behelyettesítve a sajátértékekbe az kapjuk, hogy: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$. A $(0,0)$ egyensúlyi helyzet esetén a $c = 0$ *bifurkációs pont.*

2. eset: $c < 0$, akkor három egyensúlyi helyzet van, ezek a következők: $(\pm\sqrt{-c}, 0)$, $(0,0)$.
Amennyiben $(-\sqrt{-c}, 0)$, akkor $\lambda_3 = -2\sqrt{-c}$, $\lambda_4 = -1$. Ekkor egy *stabil csomót* kapunk.
Amennyiben $(\sqrt{-c}, 0)$, akkor $\lambda_3 = 2\sqrt{-c}$, $\lambda_4 = -1$. Ekkor egy *nyerget* kapunk.
A $(0,0)$ egyensúlyi pontban az előbbiekben már meghatároztuk, hogy a $c = 0$ *bifurkációs pont.*
A 18. ábrán az előzőekhez hasonlóan a fázisképek alakulálását láthatjuk a $c =$

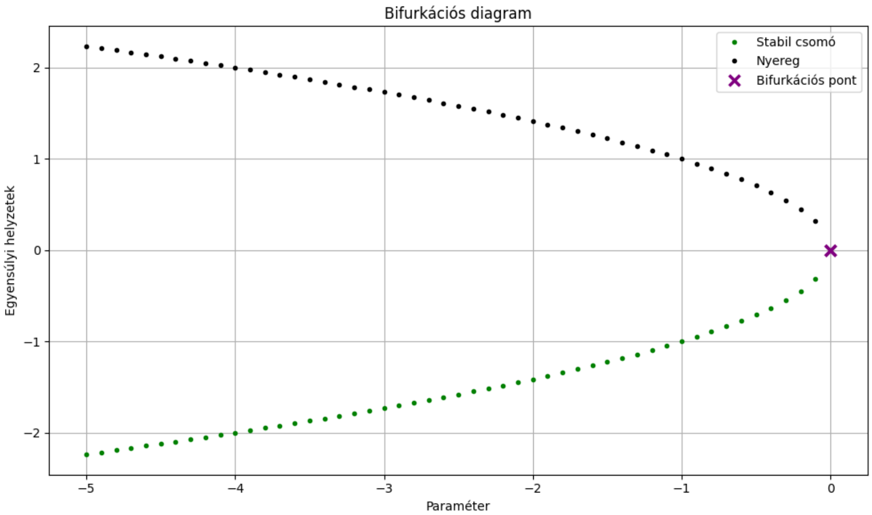


17. ábra. A (4.3) feladathoz tartozó fázisportrék $c = -0{,}03; -0{,}0225; -0{,}01; 0; 0{,}01; 0{,}01125; 0{,}02; 0{,}1; 0{,}5; 1$ értékek mellett.



18. ábra. A (4.5) feladathoz tartozó fázisportrék $c = -1; -,5; 0; 0,5; 1$ értékek mellett.

$-1; -,5; 0; 0,5; 1$ esetben. Most is megtekinthetjük, hogy az egyensúlyi pontok függnek a paraméterértékétől: $c > 0$ esetén nincs egyensúlyi helyzet, $c = 0$ esetén egy egyensúlyi helyzet van, és $c < 0$ esetben három egyensúlyi helyzet van.
A 19. ábrán a (4.5) feladat fázisképeinek változását mutatjuk be a c paraméter függvényében. Ez az ábra is az algoritmus megoldásával készült a `python` programozási nyelvvel.



19. ábra. A nyereg-csomó bifukáció bifurkációs diagramja a (4.5) feladat esetén.

5. fejezet

Hibaanalízis

A dolgozat ezen szakaszában az általunk kifejlesztett egy- és a kétdimenziós algoritmusok hibáját vizsgáljuk. Ehhez definiáljuk az alapvető fogalmakat, majd táblázat és ábrák segítségével mutatjuk meg az algoritmusok megbízhatóságát. Ebben a fejezetben az [1] könyvet használjuk fel.

5.1. Az egydimenziós algoritmus hibaanalízise

Egydimenzióban a 3. fejezetben bemutatott 3.2.1. példánál vizsgáljuk meg a numerikus módszer hibáját. Tekintsük az alábbi definíciókat:

5.1. Definíció. *Abszolút hiba*
Adott egy $u \in \mathbb{R}^n$, illetve az u-nak egy közelítése $v \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a v abszolút hibájának az $|u - v|$ értéket nevezzük.

5.2. Definíció. *Relatív hiba*
Adott egy $u \in \mathbb{R}^n$, illetve az u-nak egy közelítése $v \in \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy $u \neq 0$. Ekkor a v relatív hibájának az $\dfrac{|u - v|}{|u|}$ értéket nevezzük.

5.1.1. Egydimenziós vasvilla-bifurkáció

Tekintsük a 3.2.1. példát, láttuk a feladat analitikusan kiszámított egyensúlyi pontjait. A 10a. és a 10b. ábra között szabad szemmel nincs szignifikáns eltérés. Tekintve, hogy ismerjük az analitikus megoldását a feladatnak, könnyedén meg tudjuk határozni a közelítés abszolút és relatív hibáját. Világos, hogy szükséges feltétel az analitikus megoldhatóság a hibák kiszámításához. Tudjuk, hogy a (3.2) egyenletnek az egyensúlyi helyzetei a következők voltak:

$$\begin{array}{llll} c \leq 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_1 = 0, & & 1 \text{ darab egyensúlyi helyzet} \\ c > 0 \text{ esetén}: & \overline{x}_1 = 0, \quad \overline{x}_2 = \sqrt{c}, & \overline{x}_3 = -\sqrt{c}, & 3 \text{ darab egyensúlyi helyzet} \end{array}$$

Tekintsünk egy olyan esetet, amikor három egyensúlyi helyzete van az egyenletnek, tehát például legyen $c = 1{,}2$. Jelölje $\varepsilon > 0$ továbbra is a Newton-módszer hibakolátját ε.

1. Először $\varepsilon = 10^{-4}$ értékkel tekintjük a hibákat:

Pontos megoldás	Numerikus megoldás	Abszolút hiba	Relatív hiba
1.09545e+00	1.09546e+00	1.10373e-05	1.00756e-05
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	-
-1.09545e+00	-1.09546e+00	1.10373e-05	1.00756e-05

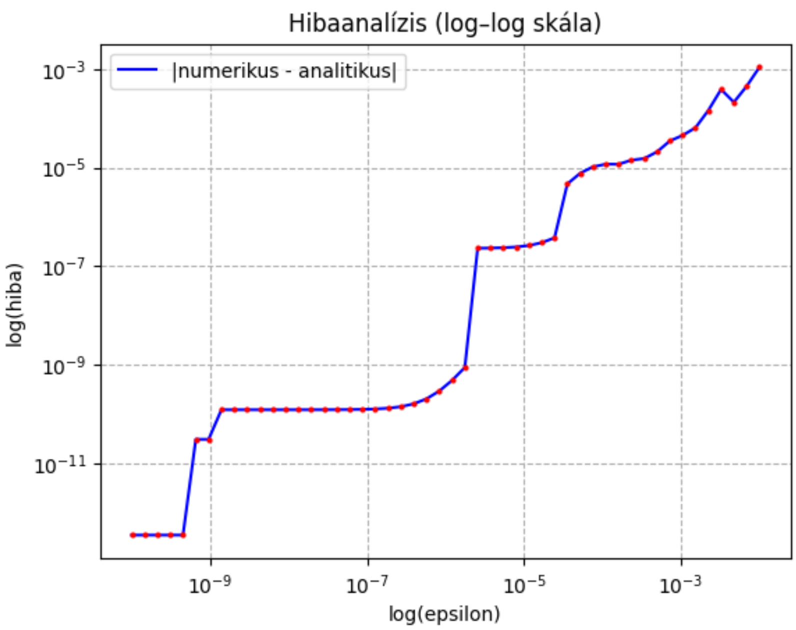
5. táblázat. A numerikus módszer hibái: $c = 1{,}2$, illetve $\varepsilon = 10^{-4}$ esetén.

2. Nézzük $\varepsilon = 10^{-7}$ értékkel a hibák alakulását:

Pontos megoldás	Numerikus megoldás	Abszolút hiba	Relatív hiba
1.09545e+00	1.09545e+00	8.91858e-09	8.14151e-09
0.00000e+00	0.00000e+00	0.00000e+00	-
-1.09545e+00	-1.09545e+00	8.91858e-09	8.14151e-09

6. táblázat. A numerikus módszer hibái: $c = 1{,}2$, illetve $\varepsilon = 10^{-7}$ esetén.

A táblázatokban látható, hogy mindkét esetben ε nagyságrendjébe eső, de azt nem meghaladó hibákat kapunk. Ebből következik, hogy $\varepsilon \to 0$ esetben az abszolút hiba és a relatív hiba is tart a 0-hoz. Ez az, amit elvárunk a módszertől.



20. ábra. Az egydimenziós algoritmus abszolút hibája log-log skálán

A 20. ábrán a 3.2.1. példa $x(t) = \sqrt{c}$ megoldáshoz tartozó abszolút hibát láthatjuk az ε függvényében. Az ε értékei 10^{-10} és 10^{-2} közül választott 50 érték logaritmikus lépésközzel. Ahogy az előző ábrák is, ez is a `python` programozási nyelvvel készült. Az ábra elkészítéséhez felhasználtuk a 3.1. fejezetben ismeretett algoritmus eredményét, azaz a 3.2.1. feladat egyensúlyi pontjaira kiszámított közelítő megoldását. Az előző két táblázat ismeretében ismételten azt az eredményt kaptuk, amit vártunk, azaz hogy a hiba arányos az ε-nal.

5.2. A kétdimenziós algoritmus hibaanalízise

Az előzőekhez hasonlóan a kétdimenziós modellek a 4.2.1. példáján keresztül megvizsgáljuk az általunk készített algoritmus hibáját.

5.2.1. Kétdimenziós transzkritikus bifurkáció

Láttuk, hogy a (4.2.1) példánál az egyensúlyi helyzetek nem függnek a paramétertől. A hibák kiszámítását az euklideszi normával végezhetjük el. Két ε érték esetében fogjuk kiszámítani a hibákat. Ezt követően láthatjuk, hogy egy adott paraméter mellett (50 ε értékkel kiszámítva), hogyan alakulnak a hibák. Ez a 21. ábrán tekinthető meg.
Az egyensúlyi helyzetek a következők voltak:

$$(\overline{x}_1, \overline{y}) = (0, 0) \quad \text{és} \quad (\overline{x}_2, \overline{y}) = (1, 0).$$

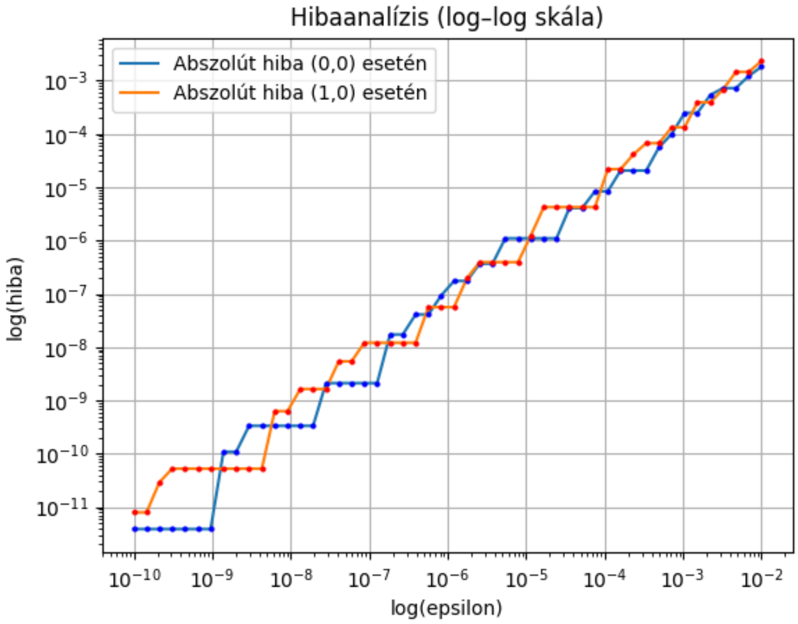
Pontos megoldás	Numerikus megoldás	Abszolút hiba	Relatív hiba
(0,0)	(-2.4876e-04, 0.0)	1.8214e-03	-
(1,0)	(1.0001e+00, 0.0)	2.3284e-03	2.3284e-03

7. táblázat. A kétdimenziós algoritmus abszolút és relatív hibája $\varepsilon = 10^{-3}$ esetén c = 1 paraméter mellett.

Pontos megoldás	Numerikus megoldás	Abszolút hiba	Relatív hiba
(0,0)	(-1.1005e-06, 0.0)	1.1005e-06	-
(1,0)	(1.0000e+00, 0.0)	1.2494e-06	1.2494e-06

8. táblázat. A kétdimenziós algoritmus abszolút és relatív hibája $\varepsilon = 10^{-5}$ esetén c = 1 paraméter mellett.

A 7. és a 8. táblázatokban láthatjuk a pontos megoldásokat, közelítő megoldásokat és a hibákat is. Ezeket mind `python`-ban számoltuk ki. Emellett alább megtekinthetjük ismét egy log-log skálán az abszolút hiba alakulását 10^{-10} és 10^{-2} között logaritmikus lépésközzel választott 50 értékére az ε-nak. A 21. ábrán a két megoldásra külön-külön két egyenes látható. A piros pontok jelölik magát a hiba számított értékét. Ebben az esetben is látható, hogy ε csökkenésével a hiba is csökken.



21. ábra. A kétdimenziós algoritmus abszolút hibája log-log skálán.

Összefoglalás

A dolgozatban differenciálegyenletek bifurkációit, azok típusait, valamint ezek algoritmikus meghatározását vizsgáltuk. Az alapfogalmak ismertetését követően bemutattuk az általunk készített algoritmust egy- és kétdimenziós esetekre. A kétdimenziós változatnál lényegesen összetettebb feladatot jelentett a gyökkeresés, illetve a stabilitás vizsgálata is. Mindkét esetben három-három példán keresztül meghatároztuk a bifurkációs diagramokat, és elemeztük, hogyan befolyásolja a paraméter változása a stabilitási viszonyokat. Ezután egy-egy kiválasztott példán keresztül megvizsgáltuk az algoritmus hibáját, és – nem meglepő módon – azt tapasztaltuk, hogy az abszolút hiba arányos a Newton-módszer ε paraméterével. Emellett az algoritmikus meghatározást a numerikus hiba mellett a számábrázolási pontatlanság is befolyásolja, ami – ahogy azt a 16. ábra is szemlélteti – akár az egyensúlyi pont típusának téves azonosításához is vezethet.
Mint ahogy a bevezetésben is említettük, a dolgozat motivációját az [5] cikk adta, amelyben a szerző olyan algoritmust fejlesztett ki, amely ismeri a függvényt és annak deriváltját is. Ennek megfelelően mi is feltettük, hogy mindkét algoritmusunk esetén ismert a függvény és a deriváltja. Ugyanakkor sok gyakorlati alkalmazásban a derivált meghatározása vagy létezése nem triviális. Egy lehetséges fejlesztési irány ezért az lehet, ha a deriváltat is numerikusan közelítjük – például az explicit Euler-módszerrel. Ebben az esetben azonban a kétdimenziós eset ismét jelentősen nehezebbnek bizonyul.

Irodalomjegyzék

[1] Ascher, Uri M. and Greif, Chen, *A First Course in Numerical Methods*, SIAM, 2011.

[2] Borelli, Coleman: *Differential equations from a modelling perspective*, John Wiley & Sons, 1998.

[3] Csomós Petra: *Differenciálegyenletek 1. előadás*, egyetemi jegyzet, 2023/2024 őszi félév.

[4] Caitlin McCann: *Bifurcation Analysis of Non-linear Differential Equations*, The University of Liverpool, 2013.

[5] H. Abelson: *The bifurcation interpreter: A step towards the automatic analysis of dynamical systems*, Elsevier, 1990.

[6] Havasi Ágnes: *Numerikus módszerek 1. előadás*, egyetemi jegyzet, 2023/2024 tavaszi félév.

[7] Simon L. Péter: *Bevezetés az analízisbe*, egyetemi jegyzet, 2016.

[8] Simon L. Péter: *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek*, Typotex, 2012.

[9] Tóth János, Simon L. Péter: *Differenciálegyenletek*, Typotex, 2020.

[10] Yuri A. Kuznetsov: *Elements of Applied Bifurcation Theory* Second Edition, Springer, 1998.

[11] Svantnerné Sebestyén Gabriella: *Populációdinamikai modellek és matematikai vizsgálatuk*, doktori értekezés, 2018.

[12] https://people.math.harvard.edu/~knill/teaching/math118/118_dynamicalsystems.pdf.

Alulírott *Balás Kata* nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	**Eszköz**	**Felhasználás helye**	**Megjegyzés**
Ábrák készítése	GPT-4o	1, 3, 4, 5	Python kód generálása, plottolás
Szövegjavítás (szóismétlés)	GPT-4o	Bevezetés, Összefoglalás	Stilisztikai javítás

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.