

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Koleszár Domonkos

**A CHIP-FIRING JÁTÉK AKTIVITÁSA**

Szakdolgozat  
Matematika BSc

Témavezető:  
Tóthmérész Lilla  
Operációkutatási Tanszék



Budapest, 2025

# Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani a témavezetőmnek, Tóthmérés Lillának az odaadó munkájáért, mellyel a rendszeres konzultációk során elősegítette a szakdolgozatom elkészítését. Köszönettel tartozom a családomnak is, akik elősegítették a matematika iránti szeretetem kialakulását, illetve végig támogattak az elmúlt években.

# Tartalomjegyzék

|                                                           |           |
|-----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                       | <b>4</b>  |
| <b>2. Jelölések</b>                                       | <b>6</b>  |
| <b>3. A játék végessége</b>                               | <b>9</b>  |
| 3.1. Végesség a chipszám függvényében . . . . .           | 9         |
| <b>4. Rekurrens chipleosztások a chip-firing játékban</b> | <b>13</b> |
| 4.1. A rekurrens állapotok karakterizációja . . . . .     | 13        |
| 4.2. A rekurrens állapotok elérése . . . . .              | 16        |
| 4.3. Lineáris ekvivalencia fákon . . . . .                | 19        |
| <b>5. Párhuzamos chip-firing periódusa</b>                | <b>23</b> |
| 5.1. A periódus tetszőleges gráfra . . . . .              | 23        |
| 5.2. A periódus fákon . . . . .                           | 27        |
| <b>6. Véletlenszerű chip-firing</b>                       | <b>31</b> |
| 6.1. Az aktivitás tetszőleges fán . . . . .               | 31        |
| 6.2. Véletlenszerű chip-firing $n$ csúcsú fákon . . . . . | 34        |
| <b>Összefoglalás</b>                                      | <b>38</b> |
| <b>Irodalomjegyzék</b>                                    | <b>39</b> |

# 1. fejezet

## Bevezetés

A szakdolgozat témája az úgynevezett chip-firing játék, amely egyszerű (hurok- és többszörös élek nélküli) irányított és irányítatlan gráfon is játszható egyszemélyes játék. Minden csúcson chippek (zsetonok) vannak, s a szomszédos csúcsok közötti kommunikáció abban merül ki, hogy egy csúcs a szomszédjainak küldhet chipeket. Egy csúcsot akkor nevezünk aktívnak, ha a chipszáma legalább annyi, mint a fokszáma (irányított gráfok esetén a kifoka). Egy csúcs pedig akkor lőhet, ha aktív, ekkor a lövés alatt azt értjük, hogy minden szomszédjának ad egyet-egyet a chipjei közül.

A játék alapváltozatában (amit tipikusan chip-firing játéknak fogunk nevezni, de a könnyebb megkülönböztetés kedvéért olykor aszinkron chip-firing játéknak) minden lépésben egy-egy aktív csúcs lő. Erről először az 1980-as években jelent meg szakirodalom, azóta pedig több egyéb típusát is vizsgálták, ezekből az egyik a párhuzamos chip-firing, mely során egy lépésben az összes aktív csúcs lő. A véletlenszerű chip-firing játék során pedig egy lépésben a lehető csúcsok között egy egyenletesen véletlenszerűen választott aktív csúcs lő.

Az aszinkron chip-firing játék önmagában nem determinisztikus, de sok tulajdonsága nem függ attól, hogy mely csúcsok milyen sorrendben lőnek. Ilyen például az, hogy a játék leáll-e véges sok lépésben, vagy az, hogy a játék leállásakor melyik csúcs hányszor lőtt. Ezzel szemben a végtelen játékok vizsgálatában természetes fogalom az aktivitás, ami azt méri, hogy átlagosan a csúcsok közül hány aktív, amely a lövések sorrendjétől is függ. Az aktivitás szempontjából fogom vizsgálni a játék különféle típusait főként fákon, élszámnyi chip esetén. Az aktivitás fogalmát nem leálló játékokon érdemes a leginkább vizsgálni, így először a játék végességére vonatkozó eredmények kerülnek összegyűjtésre, majd a későbbiekben látni fogjuk, hogy azon chipkonfigurációk játszanak fontos szerepet, ame-

lyekből vissza lehet jutni önmagukba. Ezek az úgynevezett rekurrens chipkonfigurációk, melyek a 4. fejezetben kerülnek tárgyalásra. A szakdolgozat további részében belátjuk, hogy a párhuzamos chip-firing esetén az aktivitás egy fa és élszámnyi chip esetén csak a fa csúcsszámától függ, azaz mindig ugyanannyi függetlenül attól, hogy milyen a fa, vagy hogyan oszlanak el a chipek a csúcsokon. Az utolsó fejezet a véletlenszerű chip-firing aktivitásával foglalkozik, mely során látni fogjuk, hogy az aktivitás fogalma érdekesebben viselkedik, mint a párhuzamos chip-firing játékban, viszont a korábbiakban említettekhez hűen belátjuk, hogy ebben az esetben sem számít a kiindulási chipkonfiguráció. Különböző fák azonos csúcsszám esetén nem egyezik a véletlenszerű chip-firing játék aktivitása, a szakdolgozat végén sejtéseket fogunk megfogalmazni különböző  $n$  csúcsú fák aktivitására vonatkozóan.

## 2. fejezet

### Jelölések

Ahogy a bevezetésben is említésre került, a szakdolgozat során lesz szó irányított, illetve irányítatlan gráfokról. Mindkét esetben egyszerű összefüggő (irányított esetben gyengén összefüggő) gráfokat értünk alatta, azaz nem tartalmaznak sem hurokélet, sem pedig többszörös éleket. Az irányítatlan gráfokon vett chip-firing értelmezhető irányítottként is, ahol minden élt megirányítunk mindkét irányba. A hurokélnak a chip-firing játékok szempontjából egyébként sincs különösebb jelentősége, hiszen ekkor egy csúcs önmagának küld chipet, azaz ezen él nem változtat egy csúcs chipszámán sem.

**2.0.1. Definíció.** *Egyszerű irányítatlan gráfokon egy csúcs lövésén az értendő, hogy minden belőle induló él mentén ad egy chipet az adott szomszédjának (azaz összesen foksámmal), míg egyszerű irányított gráfok esetén a belőle kiinduló élek mentén ad szintén egy-egy chipet (így ekkor annyi chipet ad, amennyi a kifoka).*

**2.0.2. Definíció.** *Egy csúcs akkor aktív, ha legalább annyi chipe van, amennyi a foksáma (irányított gráfok esetén a kifoka).*

A szakdolgozat során néha meg fogjuk engedni, hogy nem aktív csúcs is lőjön, ezért megkülönböztetésül az olyan játékokat legálisnak fogjuk nevezni, ahol végig csak aktív csúcsok lőnek.

Egy gráf éleinek számát rendre  $m$ , míg csúcsainak számát  $n$  vagy  $|V|$  fogja jelölni. A játékban szereplő chipek számát  $C$  jelöli. Egy  $c \in \mathbb{Z}_+^V$  chipkonfiguráció alatt egy olyan minden koordinátájában nemnegatív  $n$ -dimenziós vektort értünk, amelyre  $c(v)$  a  $v$ -nél levő chipek számát jelenti. Egy  $v$  csúcs irányítatlan gráfokon vett foksámát  $d(v)$  fogja jelölni, míg irányított gráfokon a kifokát  $d^+(v)$ . Az  $u$  és  $v$  csúcsok között menő élek számát irányítatlan gráfok esetén  $d(u, v)$ , irányított gráfok esetén  $\vec{d}(v, u)$  jelöli. Egy  $v$  csúcs

karakterisztikus vektora  $\mathbf{1}_v$ -ként fog szerepelni a későbbiekben.

A chip-firing játékban egy lépésben egy tetszőlegesen választott aktív csúcs lő, a párhuzamos chip-firing esetén minden aktív csúcs lő egyszerre, a véletlenszerű chip-firing játékban pedig egy egyenletes eloszlás szerint véletlenszerűen választott csúcs lő.

**2.0.3. Definíció.** *Egy adott párhuzamos chip-firing játék aktivitása egy  $G$  gráfon az aktív csúcsok átlagos száma, azaz egy  $x$  kezdőállapotból indulva*

$$A_G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k(x),$$

ahol  $A_k(x)$  az  $x$  kezdőállapotból indított játék  $k$ . lépése előtti pillanatban az aktív csúcsok száma.

**2.0.4. Megjegyzés.** *Mivel az aszinkron chip-firing játék során nincs szabály arra, hogy melyik csúcs lő, azaz a játék nemdeterminisztikus, így ez esetben nem jól definiált az aktivitás. A véletlenszerű chip-firing játék aktivitását a későbbiekben definiáljuk.*

**2.0.5. Definíció.** *Egy adott chip-firing játék lövésvektorán egy olyan  $f \in \mathbb{Z}_+^V$  vektort értünk, melyre  $f(v)$  azt adja meg, hogy a játék során a  $v$  csúcs hányszor lőtt.*

**2.0.6. Definíció.** *Egy irányított gráf Laplace-mátrixán a következő  $n \times n$ -es mátrix értendő:*

$$L(u, v) = \begin{cases} -d^+(v), & \text{ha } u = v; \\ \vec{d}(v, u), & \text{ha } u \neq v. \end{cases}$$

**2.0.7. Definíció.** *Egy irányítatlan gráf Laplace-mátrixán a következő  $n \times n$ -es mátrix értendő:*

$$L(u, v) = \begin{cases} -d(v), & \text{ha } u = v; \\ d(u, v), & \text{ha } u \neq v. \end{cases}$$

A Laplace-mátrix jelentőségét a chip-firing játékok esetén könnyen szemlélteti, hogy egy  $x \in \mathbb{Z}^V$  chipkonfigurációból egy  $v$  csúcs lövésével a kapott chipkonfigurációt  $x + L\mathbf{1}_v$  segítségével kaphatjuk meg, hiszen könnyen látható, hogy az  $L\mathbf{1}_v$  vektor  $v$ -hez tartozó koordinátája azt adja meg, hogy melyik csúcsnak mennyivel változott a chipszáma, hiszen a  $v$ -hez tartozó komponense a vektornak a küldött chipek számának  $-1$ -szerese, a  $v$

szomszédjaihoz tartozó komponensek az általuk kapott chipek lesznek, a  $v$ -vel nem szomszédos csúcsokhoz tartozó komponensek pedig mind 0-k lesznek. Hasonlóan látható, hogy egy  $f$  lövésvektor esetén  $(x + Lf)(v)$  annyi lesz, amennyi chip a  $v$  csúcsban van az  $x$  chipkonfigurációból indítva, s minden csúcsot annyszor löve, amennyi a lövésvektorban a koordinátája.

## 3. fejezet

# A játék végeessége

### 3.1. Végeesség a chipszám függvényében

Egy (párhuzamos) chip-firing játék akkor áll le, ha az aktuális állapotában nincs egy aktív csúcs sem, azaz egyik csúcs sem tud lőni. Azonban míg a párhuzamos chip-firing játék esetén a determinisztikussága miatt a kezdő chipkonfiguráció meghatározza azt, hogy a végtelenségig folytatódik-e a játék (azaz minden lépésben van-e aktív csúcs), illetve azt is, hogy ha leáll a játék, akkor mi a végső chipkonfiguráció, az aszinkron chip-firing játék esetén ez nem magától értetődő, de a következőkben belátjuk.

**3.1.1. Tétel.** [2, Remark 2.4.] Egy irányított gráfon vett kezdeti chipkonfigurációra vagy egyik legális chip-firing játék sem áll le függetlenül a közben történő lövésektől, vagy pedig mindegyik leáll, és leálláskor minden játék lövésvektora megegyező.

**Bizonyítás.** [6] Szimmetria okokból elegendő azt belátni, hogy ha egy kezdeti  $x$  chipkonfigurációból leáll a játék  $f$  lövésvektorral, akkor tetszőleges  $x$ -ből indított legális játékban leállásig minden  $v$  csúcs legfeljebb  $f(v)$ -szer lőtt.

Tegyük fel indirekten tehát, hogy létezik egy legális játék  $x$ -ből indítva, mely során valamelyik csúcs többször lőtt, mint az  $f$ -ben az ezen csúcshoz tartozó koordináta. Vizsgáljuk ebben a játékban az első pillanatot, amikor a következő lövő csúcs már 1-gyel többedszerre lőne, mint az  $f$ -ben a neki megfelelő koordináta, s legyen ez a csúcs  $v$ , az eddig a pillanatig tartozó lövésvektor pedig  $h$ . Ekkor igaz tehát, hogy  $h(v) = f(v)$ , illetve  $h(u) \leq f(u)$   $\forall u \neq v$ -re. Tehát eddig a pillanatig a  $v$  csúcs ugyanannyi chipet veszített  $h$ -ban és  $f$ -ben, de  $h$  játékában legfeljebb annyi chipet kaphatott a szomszédjaitól, mint  $f$ -ben. Emiatt tehát a  $h$  lövésvektorú játékban a vizsgált pillanatban  $v$ -nek legfeljebb annyi chipje van,

mint az  $f$  lövésvektorú játékban, de mivel az  $x$ -ből indított  $f$  lövésvektorú játék leállt, ezért  $(x + Lf)(v) \leq d^+(v) - 1$ , ezért a  $h$  játékában a  $v$  csúcs nem lehetett aktív, ezzel ellentmondásra jutottunk.  $\square$

**3.1.2. Megjegyzés.** *Teljesen hasonlóan belátható a tétel irányítatlan gráfokra is.*

Így a továbbiak során egy chip-firing játék egy kezdeti chipkonfigurációból leállónak, azaz végesnek nevezzük, ha egy belőle indított lövéssorozat leáll (és így az összes belőle indított lövéssorozat leáll), különben végtelennek vagy nem leállónak hívjuk.

**3.1.3. Lemma.** *[2, Lemma 3.1.] Ha a chip-firing játék végtelen, akkor minden csúcs végtelen sokszor lő.*

**Bizonyítás.**

Mivel a játék végtelen, ezért kell lennie egy olyan csúcsnak, amely végtelen sokszor lő, hiszen ha minden csúcs csak véges sokszor lőne, akkor a játék sem lenne végtelen. Ezen csúcs összes szomszédja is végtelen sokszor lő, hiszen ha csak véges sokszor lőne, akkor lenne egy pillanat, amikor már több chipje lenne ezen csúcsnak, mint amennyi chip összesen van, ami nem lehetséges. Így ezen szomszédok szomszédjai is végtelen sokszor lőnek, és így tovább, s mivel összefüggő a gráf, ezért a feladat állítását beláttuk.  $\square$

**3.1.4. Lemma.** *[2, Lemma 3.2.] Ha a chip-firing játék véges, akkor van olyan csúcs, amely sosem lő a játék során.*

**Bizonyítás.**

Azt fogjuk belátni, hogy ha a játék során valamikor már minden csúcs lőtt legalább egyszer, akkor onnantól kezdve már sose fog leállni a játék. Vegyünk tehát egy olyan pillanatot, amikor már minden csúcs lőtt legalább egyszer, és vizsgáljuk azt a csúcsot, amelyik a legrégebben lőtt. Ezen csúcs utolsó lövése óta minden másik csúcs lőtt, így kapott legalább fokszámnyi chipet, azaz aktív, tehát tud lőni, s ezt tudjuk ismételtetni, így ekkor valóban végtelen a játék. Így ha véges a játék, akkor semmiképpen sem fordulhatott elő az, hogy minden csúcs lőtt legalább egyszer, tehát van olyan csúcs, amely sosem lő a játék során.  $\square$

**3.1.5. Tétel.** *[2, Theorem 3.3.] A chip-firing játék végeességére a kiindulási chipszámtól függően az alábbiak igazak:*

*i) Ha több, mint  $2m - n$  chip van kiinduláskor, akkor a játék végtelen a játék a kezdeti chipkonfigurációtól függetlenül.*

*ii) Ha legalább  $m$  chip van a játékban, akkor van olyan kiindulási chipkonfiguráció, amelyből végtelen a játék.*

*iii) Ha kevesebb, mint  $m$  chip van, akkor minden kezdeti chipkonfigurációra leáll a játék véges sok lépésben.*

### **Bizonyítás.**

i) Tegyük fel indirekten, hogy egyszercsak leáll a játék. Ekkor egyik csúcs sem aktív, azaz minden csúcs chipszáma kevesebb a fokszámanál. Tehát minden  $v$  csúcsra  $c(v) < d(v)$ , azaz  $c(v) \leq d(v) - 1$ , tehát

$$C = \sum_v c(v) \leq \sum_v (d(v) - 1) = 2m - n,$$

tehát legfeljebb  $2m - n$  chip lehet ekkor a játékban, ami ellentmond az eredeti feltevésünknek.

ii) Elég  $m$  db chipre belátni az állítást, hiszen ha létezik egy olyan kiindulási chipkonfiguráció, amelyből kiindulva végtelen a játék, ezen chipkonfigurációhoz hozzáadogatva chipeket szintén végtelen lesz a játék. Az  $m$  db chip esetén tekintsük a következő konstrukciót: irányítsuk meg az irányítatlan gráf éleit úgy, hogy aciklikus legyen a kapott irányított gráf (ezt mindig megtehetjük). Legyen ekkor a kiindulási chipkonfigurációnk a következő: minden  $v$  csúcsra legyen  $c(v) = d^+(v)$ , azaz ekkor minden csúcsnak annyi chipe van, amennyi a kifoka. Ez értelemszerűen összesen  $m$  chipet jelent, és mivel aciklikus a kapott irányított gráf, ezért lesz egy forrás, amelyből pontosan annyi él indul az irányítatlan gráfban, mint amennyi chipje van. Ez tehát aktív csúcs, s miután ez a csúcs kilötte a chipjeit, a kapott chipkonfiguráció szintén könnyen megadható az élek megirányításával: fordítsuk meg a kilőtt csúcsból induló éleket, ekkor az ő kifoka 0 lesz, a szomszédainak a kifoka pedig nő eggyel-eggyel, s így a kapott irányításban is minden csúcsnak annyi lesz a kifoka, ahány chipje van. Mivel a forrásból kiinduló él megfordításával nem keletkezhett kör, így az új irányítás is aciklikus lesz, így újra tud lőni a forrás, s így tovább, s így valóban végtelen lesz a játék.

iii) Tekintsünk ismét egy aciklikus irányítást az éleknek, illetve vegyünk egy tetszőleges chipkonfigurációt élszámnál kevesebb chippel, egy  $v$  csúcsra jelölje  $c(v)$  a  $v$  chipjeinek

számát. Legyen

$$T = \sum_{v \in V(G)} \max(0, c(v) - d^+(v)).$$

Nevezzünk egy csúcsot hiányosnak, ha kevesebb a chipje, mint a kifoka, és mivel kevesebb, mint élszámnyi chip van a játékban, ezért mindenképpen van hiányos csúcs.

Vegyük azt a  $v$  csúcsot, amely először lő, erre értelemszerűen fennáll, hogy  $c(v) \geq d(v)$ . Ekkor lőjön  $v$ , és fordítsuk meg az összes  $v$ -ből induló élt! Ezzel új kör nem jön létre, valamint  $T$  nem nő, hiszen a  $v$ -hez tartozó tagja az összegnek  $d(v) - d^+(v)$ -vel csökken, míg a megfordított élek másik végpontjain az összeg megfelelő tagjai legfeljebb 1-gyel nőnek külön-külön. Ha ezen megfordított élek másik végpontjai között van hiányos, akkor  $T$  értéke csökken, de ha ezek közül egyik sem volt hiányos, akkor  $T$  értéke nem változott. Tehát ha a hiányos csúcsok halmaza változik, akkor  $T$  értéke csökkent, de mivel kezdetben volt egy hiányos csúcs, ezért ha a játék a végtelenségig tartana, akkor muszáj lenne végtelen sokszor változnia a hiányos csúcsok halmazának, hiszen a korábban belátott állítás miatt minden csúcs végtelen sokszor lő, és mindig van legalább egy hiányos csúcs. Így mivel  $T$  értéke nem csökkenhet végtelen sokszor, ezért a játék valóban véges. Tehát az állítást beláttuk.  $\square$

**3.1.6. Következmény.** *Egy  $n$  csúcsú fán legalább  $m = n - 1$  chippel a chip-firing játék mindig végtelen.*

**Bizonyítás.** Elegendő  $m$  chipre belátni.  $2m - n = 2 \cdot (n - 1) - n = n - 2$ , tehát jelen esetben  $c = m > 2m - n$ , így valóban végtelen a játék.  $\square$

## 4. fejezet

# Rekurrens chipleosztások a chip-firing játékban

**4.0.1. Definíció.** *Egy chipkonfiguráció egy adott gráfon rekurrens, ha legális lövésekkel vissza lehet jutni belőle önmagába.*

Ebben a fejezetben a rekurrens chipkonfigurációk karakterizációja, valamint tulajdonságai lesznek a középpontban. Megadjuk egy, a későbbiekben a véletlenszerű chip-firing során használható karakterizációját a rekurrens chipkonfigurációknak, majd egy akár negatív chipkonfigurációkon is értelmezhető ekvivalenciareláció segítségével bizonyítunk rekurrens állapotok elérhetőségével kapcsolatos állításokat.

## 4.1. A rekurrens állapotok karakterizációja

**4.1.1. Definíció.** *Egy  $G$  gráfra egy  $p \in \mathbb{Z}_+^V$  vektort periódusvektornak nevezünk, ha  $Lp = 0$ , ahol  $L$  a  $G$  gráfhoz tartozó Laplace-mátrix.*

A periódusvektor elnevezés onnan ered, hogy egy adott chipkonfigurációból indulva, ha minden csúcs pontosan annyiszor lő, amennyi az adott periódusvektorban a hozzá tartozó komponens, akkor ugyanabba a chipkonfigurációba jut vissza a játék, egyfajta lövéssorozat-periódust létrehozva.

**4.1.2. Definíció.** *Egy periódusvektor primitív, ha a komponenseinek nincsen 1-nél nagyobb közös osztója.*

**4.1.3. Állítás.** [3, Proposition 4.1.] Minden erősen összefüggő irányított gráfra egyértelműen létezik egy minden komponensében pozitív primitív periódusvektor. Jelölés:  $p_G$ .

**4.1.4. Megjegyzés.** Könnyen látszik, hogy egy irányítatlan gráfra a csupa 1-es vektor primitív periódusvektor.

**4.1.5. Lemma.** [3, Lemma 4.3] Legyen egy irányított gráfra és valamilyen kezdeti chip-konfigurációra  $v_1, v_2, \dots, v_k$  egy legális lövéssorozat, valamint legyen  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_q}$  egy (akár üres) másik lövéssorozat, amelyet úgy kapunk, hogy az eredeti lövéssorozatból kitöröljük minden  $v$  csúcsra az első  $p(v)$  előfordulását (ha ennél kevesebb van, akkor az összes előfordulását kitöröljük a sorozatból), ahol  $p$  egy periódusvektor. Ekkor a kapott lövéssorozat is legális lesz.

### Bizonyítás.

Alkalmazzunk teljes indukciót a kapott lövéssorozat elemeire! Az üres lövéssorozat értelemszerűen legális.

Most tegyük fel, hogy  $v_{i_1}, \dots, v_{i_{s-1}}$  (akár üres) legális lövéssorozat, és azt szeretnénk belátni, hogy  $v_{i_1}, \dots, v_{i_{s-1}}, v_{i_s}$  is legális lövéssorozat. Az eredeti játék során a  $v_{i_s}$  csúcs aktív (legyen a rajta levő chippek száma  $c$ ), azaz legalább  $d^+(v_{i_s})$  chip van rajta az első  $i_s - 1$  lépés után. Azt kell vizsgálni, hogy az új játékban az első  $s - 1$  lépés után szintén aktív lesz-e ezen csúcs. Mivel  $v_{i_s}$  első  $p(v_{i_s})$  előfordulását kitöröltük, így az új játékban  $p(v_{i_s}) \cdot d^+(v_{i_s})$ -sel több chipje marad, de a szomszédjai is kevesebbszer lőttek, méghozzá  $v_{i_s}$  minden  $u$  szomszédjától  $\max\{0, f(u) - p(u)\}$  chipet kapott az új játék első  $s - 1$  lépésében, ahol  $f(u)$  azt jelöli, hogy az eredeti játékban  $u$  hányszor lőtt az első  $i_s - 1$  lépésben. Ez azt jelenti, hogy  $v_{i_s}$  minden  $u$  szomszédjától  $\min\{p(u), f(u)\}$ -val kevesebbet kap az új játék első  $s - 1$  lépésében, mint az eredeti játék első  $i_s - 1$  lépésében. Tehát, ha  $d_{v,w}$  a  $v$  és  $w$  csúcsok között menő élek számát jelöli (a mi esetünkben ez 0 vagy 1), akkor  $v_{i_s}$  chipszáma az új játék első  $s - 1$  lépése után

$$\begin{aligned} c + p(v_{i_s}) \cdot d^+(v_{i_s}) - \sum_{u \neq v_{i_s}} d_{u,v_{i_s}} \cdot \min\{p(u), f(u)\} &\geq \\ &\geq c + p(v_{i_s}) \cdot d^+(v_{i_s}) - \sum_u d_{u,v_{i_s}} \cdot p(u) = c \geq d^+(v_{i_s}). \end{aligned}$$

Ezzel a lemma állítását beláttuk. □

**4.1.6. Következmény.** *Ha van egy legális lövéssorozat egy irányítatlan gráfon, melyre az  $f$  lövésvektor minden komponense legalább 1, akkor az  $f - (1, 1, \dots, 1)$  lövésvektorra is létezik legális lövéssorozat.*

**4.1.7. Állítás.** *Egy irányítatlan gráfon egy  $x$  chipkonfigurációból pontosan akkor lehet legális lövésekkel visszajutni önmagába, ha ezen lövéssorozat során a lövésvektor  $(k, k, \dots, k)$  valamilyen  $k$  pozitív egész számra.*

**Bizonyítás.**

Tegyük fel indirekt módon, hogy nem minden csúcs ugyanannyiszor lőtt egy ilyen lövéssorozat során. Vegyük egy olyan csúcsot, amelyhez a lövésvektorban tartozó komponens maximális (legyen ez  $l$ ), de valamelyik szomszédjához tartozó komponens kisebb nála. A gráf összefüggősége és az indirekt feltevés miatt mindenképpen van ilyen, legyen ez a csúcs  $v$ , kiinduláskor a rajta levő chipszám pedig  $x(v)$ . Mivel  $l$ -szer lőtt ki, ezért  $l \cdot d(v)$  chipet vesztett a lövéseivel, ám a szomszédjaitól kevesebb, mint  $l \cdot d(v)$  chipet, hiszen mindegyik szomszédja maximum  $l$ -szer lőtt, azaz minden szomszédjától legfeljebb  $l$  chipet kapott, de az előzőek alapján van egy  $l$ -nél kevesebbszer lövő csúcs, így ettől a csúcstól  $l$ -nél kevesebb chipet kapott. Így a lövéssorozat végén a chipszáma kevesebb, mint kiinduláskor, azaz a játék nem lehet a lövéssorozat végén megint az  $x$  chipkonfigurációban. Ezzel ellentmondásra jutottunk, így valóban igaz az állítás.

Ha a lövésvektor  $(k, k, \dots, k)$  valamilyen  $k$  természetes számra, akkor értelemszerűen visszajut a chipkonfiguráció önmagába, hiszen ekkor minden csúcsra igaz, hogy az összes élméntén, amelynek ez a csúcs az egyik végpontja, pontosan  $k$  chipet lőtt és kapott is.  $\square$

**4.1.8. Következmény.** *Egy irányítatlan gráfon egy  $x$  chipkonfiguráció pontosan akkor rekurrens, ha úgy is vissza lehet jutni önmagába legális lövésekkel, hogy közben minden csúcs pontosan egyszer lőtt.*

**4.1.9. Állítás.** *[7, Lemma 5] Egy chipkonfigurációba nem lehet visszatérni, mielőtt minden csúcs lőtt volna legalább egyszer.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy egy csúcssorozat lövései után visszajut a játék ugyanabba a chipkonfigurációba, illetve legyen  $u$  egy csúcs amely lőtt legalább egyszer. Mivel ezen lövés során  $u$  szomszédjainak nő a chipszáma, ezért ezen szomszédoknak is lőnie kellett, különben nem juthatott volna vissza a játék ugyanabba a chipkonfigurációba. Ugyanezen gondolatmenet miatt  $u$  szomszédjainak szomszédjainak is kellett lőnie, és így tovább, mivel

összefüggő a gráf, ezért minden csúcsnak lőnie kellett. Ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

**4.1.10. Tétel.** *[1, Theorem 16.] Legyen  $x$  egy chipkonfiguráció egy  $G$  irányítatlan gráfon. Ekkor  $x$  pontosan akkor rekurrens, ha létezik  $G$ -nek egy olyan aciklikus irányítása, melyre minden  $v$  csúcsra  $x(v)$  legalább annyi, mint  $v$  befoka az irányításban.*

### Bizonyítás.

Ha  $x$  rekurrens, akkor a 4.1.8. Következmény miatt létezik egy lövéssorozat, amelyben mindegyik csúcs egyszer lőtt. Vizsgáljuk egy ilyen lövéssorozatban a kilőtt csúcsok sorrendjét, legyen  $v_1$  az először lövő csúcs,  $v_2$  a másodszorra, s így tovább  $v_i$  az  $i$ . alkalommal lövő csúcs. Ekkor  $x(v_1) \geq d(v_1)$ , hiszen csak akkor tud legalisan lőni  $v_1$ , ha legalább annyi chipe van, mint a fokszáma. Hasonlóan  $x(v_2) + d(v_1, v_2) \geq d(v_2)$ , hiszen  $v_2$  csak akkor tudott lőni másodszorra, ha a kezdeti chipszámához hozzáadva a  $v_1$ -től kapott chipet a kapott érték legalább annyi, mint a fokszáma. Ha tehát  $V_i$ -vel jelöljük a  $v_1, v_2, \dots, v_i$  csúcsokat, és  $d(v_i, V_{i-1})$ -gyel a  $v_i$  és  $V_{i-1}$  között menő élek számát, akkor

$$\forall i\text{-re} : x(v_i) + d(v_i, V_{i-1}) \geq d(v_i).$$

Ha veszünk egy irányítást, amelyben minden élt a kisebb sorszámú csúcs felé irányítunk, akkor ez értelemszerűen egy aciklikus irányítás lesz, és  $v_i$  befoka megegyezik  $d(v_i) - d(v_i, V_{i-1})$ -vel. Azaz, ha  $x$  rekurrens, akkor

$$x(v_i) \geq d(v_i) - d(v_i, V_{i-1}) = d^+(v_i),$$

tehát létezik megfelelő aciklikus irányítás.

Ha pedig létezik  $G$ -nek egy olyan aciklikus irányítása, amelyben minden  $v$  csúcsra  $x(v)$  legalább annyi, mint  $v$  befoka az irányításban, akkor az irányítás egy topologikus sorrendjének fordítottja szerint kilőve a csúcsokat kapunk egy csupa legális lövésből álló,  $(1, 1, \dots, 1)$  lövésvektorú játékot, amely rekurrens chipkonfigurációt jelent a korábbiak alapján. Tehát valóban igaz a tétel állítása.  $\square$

## 4.2. A rekurrens állapotok elérése

**4.2.1. Definíció.** *Egy adott gráfra tetszőleges  $x, y \in \mathbb{Z}^V$  esetén  $x \sim y$ , ha létezik  $\exists z \in \mathbb{Z}^V$  úgy, hogy  $x = y + Lz$ .*

Könnyen ellenőrizhető, hogy  $\sim$  ekvivalenciareláció  $\mathbb{Z}^V$ -n, így az elnevezése a továbbiakban lineáris ekvivalencia.

**4.2.2. Állítás.** [1, Claim 9.] Ha  $x$  egy rekurrens chipkonfiguráció, és  $y \geq x$  koordinátánként, akkor  $y$  is egy rekurrens chipkonfiguráció.

**Bizonyítás.**

Mivel  $x$ -ből létezik egy legális lövéssorozat, amely visszavezet  $x$ -be, ezért  $y$ -ból ugyanezen lövéssorozat szintén legális lesz, és értelemszerűen  $y$ -ba vezet vissza.  $\square$

**4.2.3. Tétel.** [1, Theorem 5.] Legyen  $G$  egy erősen összefüggő irányított gráf és legyenek  $x$  és  $y$  két  $G$ -n vett chipkonfiguráció. Ekkor ha  $y$  rekurrens és  $x \sim y$ , akkor  $x$ -ből el lehet jutni legális lövésekkel  $y$ -ba.

**Bizonyítás.** Először azt látjuk be, hogy ha  $x \sim y$ , akkor létezik egy  $z \in \mathbb{Z}_+^V$  úgy, hogy  $x = y + Lz$ . A lineáris ekvivalencia definíciója szerint  $x = y + Lw$  valamilyen  $\mathbb{Z}^V$ -beli  $w$  vektorra, de mivel az előző állítás miatt létezik egy minden komponensében pozitív periódusvektor, ezért van egy olyan  $k$  pozitív egész szám, amelyre  $w + kp_G$  nemnegatív, de

$$L(w + kp_G) = Lw + kLp_G = Lw,$$

hiszen a periódusvektor definíciója szerint  $Lp_G = 0$ , így ha  $z = w + kp_G$ , akkor  $Lz = Lw$ , tehát  $x = y + Lw = y + Lz$ .

Legyen  $z$  tehát egy olyan  $\mathbb{Z}_+^V$ -beli vektor, amelyre  $x = y + Lz$ . Használjunk teljes indukciót  $\sum_{v \in V(G)} z(v)$  szerint! Ha  $\sum_{v \in V(G)} z(v) = 0$ , akkor  $z$  minden komponense 0, tehát  $Lz$  minden komponense is 0, tehát  $x = y$ , tehát értelemszerűen el lehet jutni legális lövésekkel  $x$ -ből  $y$ -ba (nem lő egyik csúcs sem). Tehát feltehető, hogy  $\sum_{v \in V(G)} z(v) > 0$ . Mivel  $y$  rekurrens, ezért van egy olyan  $v_1, v_2, \dots, v_k$  csúcssorozat, amelyben egy-egy csúcs többször is szerepelhet, és ezen csúcssorozatot  $y$  chipkonfigurációból indulva egymás után löve egy legális lövéssorozatot kapunk, mely az  $y$  konfigurációba visz vissza.

Ha tehát választunk egy ilyen  $v_1, v_2, \dots, v_k$  csúcssorozatot, akkor ebben minden csúcs szerepel legalább egyszer, hiszen ekkor a lövéshez tartozó  $w$  lövésvektorra fennáll, hogy

$$y = y + Lw, \text{ azaz } 0 = Lw,$$

tehát  $w$  a primitív periódusvektor valamilyen többszöröse, amelyről viszont tudjuk, hogy minden komponense pozitív, tehát a többszöröse is az, így valóban, az  $y$ -ba visszajutó

lövésorozatban mindegyik csúcs szerepel legalább egyszer. Legyen  $i$  a legkisebb olyan index, amelyre  $z(v_i)$  pozitív. Ilyen index mindenképpen létezik, hiszen a  $z$  vektornak van pozitív koordinátája, és az összes csúcs szerepel a  $v_1, v_2, \dots, v_k$  csúcsorozatban. Lőjenek az  $y$  chipkonfigurációból indulva a  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$  csúcsorozat tagjai, ez értelemszerűen egy legális lövésorozat, hiszen egymást követő tagjai egy legális lövésorozatnak. Az ezután kapott konfigurációt jelöljük  $y'$ -vel!

A  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$  lövésorozat  $x$ -ből indítva is legális. Ennek belátásához az előző állítás miatt elég azt bizonyítani, hogy minden  $1 \leq j \leq i-1$ -re  $x(v_j) \geq y(v_j)$ . Ez pedig azért igaz, mert

$$x(v_j) = y(v_j) + (Lz)(v_j),$$

de  $(Lz)(v_j) \geq 0$ , hiszen  $L$ -ben  $v_j$  sorában az egyetlen negatív elem az  $L(v_j, v_j)$ , ám  $z(v_j) = 0$ , így ez nem fog negatív komponenst eredményezni. Legyen tehát az  $x$ -ből indított  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$  legális lövésorozat végén kapott chipkonfiguráció  $x'$ .

Tudjuk, hogy  $x' = y' + Lz$ .  $y'$ -ből a  $v_i$  csúcs legálisan lőhető, az ezután kapott chipkonfiguráció legyen  $y''$ .  $y''$  is rekurrens, hiszen az eredeti lövésorozatot elvégezve  $v_k$ -ig visszajut a rendszer az  $y$  chipkonfigurációba, onnantól pedig a  $v_1, v_2, \dots, v_i$  lövésorozat után visszajut a rendszer  $y''$ -be. Látható, hogy

$$x' = y'' + Lz'.$$

ahol  $v_i$ -n kívül minden  $v$  csúcsra  $z'(v) = z(v)$ ,  $v_i$ -re pedig  $z'(v_i) = z(v_i) - 1$ . Tehát

$$\sum_{v \in V(G)} z'(v) = \sum_{v \in V(G)} z(v) - 1,$$

így az indukciós feltevés alapján  $x'$ -ből el lehet jutni legális játékkal  $y''$ -be. Mivel el lehet jutni legális játékokkal  $x$ -ből  $x'$ -be,  $x'$ -ből  $y''$ -be,  $y''$ -ből pedig  $y$ -ba, ezért  $x$ -ből is el lehet jutni legális játékkal  $y$ -ba, így a tétel állítását beláttuk.  $\square$

**4.2.4. Állítás.** *[1, Proposition 11.] Egy rekurrens chipkonfigurációból indulva a játék nem áll le, továbbá egy rekurrens chipkonfigurációból indított legális lövésorozat során csakis rekurrens chipkonfigurációkat vesz fel a játék.*

**Bizonyítás.** Értelemszerűen nem áll le egy rekurrens chipkonfigurációból indított játék, hiszen ismételve az önmagába vezető lövésorozatot a játék sosem ér véget.

Az állítás második felének bizonyításához elegendő azt belátni, hogy egy  $x$  rekurrens

chipkonfigurációból egy legális lövést elvégezve (azaz egy aktív csúcsot löve) szintén egy rekurrens chipkonfigurációba jut a játék. Legyen  $v_1, v_2, \dots, v_k$  egy csúcssorozat, amelyek ha ebben a sorrendben lőnek, akkor  $x$ -ből  $x$ -be jut vissza a játék. Legyen  $v$  egy tetszőleges aktív csúcs az  $x$  chipkonfigurációnál (ilyennek léteznie kell, hiszen  $x$  rekurrens). Legyen a  $v$  lövése után a kapott chipkonfiguráció  $x'$ . Azt kell tehát belátnunk, hogy  $x'$  is rekurrens. Ha a  $v$  csúcs nem szerepel a  $v_1, v_2, \dots, v_k$  csúcssorozatban, akkor ezen csúcssorozatban szereplő csúcsok mindegyikének legalább annyi chipe van  $x'$ -ben, mint  $x$ -ben, így ezen csúcssorozat lövése  $x'$ -ből indítva is egy legális lövéssorozatot ad, és  $x'$ -be vezet vissza, így ez esetben készen vagyunk.

Ha pedig  $v$  szerepel a  $v_1, v_2, \dots, v_k$  csúcssorozatban, legyen  $v_i$  az első előfordulása a sorozatban. Ekkor a

$$v_i, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k$$

lövössorozat is legális  $x$ -ből indítva, hiszen  $v_i$ -t úgy választottuk, hogy az  $x$  chipkonfigurációban aktív legyen, a  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$  csúcsok között nem szerepel a  $v_i$  csúcs, így ezeknek legalább annyi chipje van, mint az eredeti csúcssorozat esetén, a  $v_{i+1}, v_2, \dots, v_k$  csúcsokban pedig ugyanannyi chip van, hiszen ugyanaz az  $i$  lövés előzi meg mindkét csúcssorozat lövése esetén. De ekkor a

$$v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_k, v_i$$

lövössorozat legális  $x'$ -ből, és  $x'$ -be vezet vissza, tehát ekkor is rekurrens lesz az  $x'$  chipkonfiguráció, ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

### 4.3. Lineáris ekvivalencia fákön

**4.3.1. Állítás.** *Tetszőleges fára és  $x, y \in \mathbb{Z}^V$  chipkonfigurációkra, melyekben összesen ugyanannyi chip van, fennáll, hogy  $x \sim y$ .*

**Bizonyítás.** Mivel az  $x - y$  vektor koordinátáinak összege 0, hiszen  $x$  és  $y$  összesen ugyanannyi chipet tartalmaz, ezért az állítás ekvivalens azzal, hogy tetszőleges fára  $L$  Laplace-mátrixszal és  $\forall c \in \mathbb{Z}^V$  vektorra, melynek koordinátáinak összege 0, létezik  $z \in \mathbb{Z}^V$ , melyre  $c = Lz$ . Alkalmazzunk teljes indukciót a fák csúcsszámára! Ha  $n = 1$ , azaz a fa egy csúcsból áll, akkor a Laplace-mátrixa  $1 \times 1$ -es (egy 0-ból áll),  $c = 0$  az egyetlen olyan csúcsszámnai dimenziós vektor, amely koordinátáinak összege 0, erre valóban létezik  $z$ , melyre

$$Lz = c.$$

Tegyük fel tehát, hogy minden legfeljebb  $n$  csúcsú fára igaz az állítás. Vizsgáljunk tehát egy  $n+1$  csúcsú fát, s vegyük ennek egy  $u$  levelét! Legyen  $u$  egyetlen szomszédja  $v$ , s legyen  $c$  egy  $n+1$ -dimenziós vektor, amely koordinátáinak összege 0. Vegyük azt az  $n$  csúcsú fát, amely az  $u$  csúcs és az  $uv$  él eltörlésével kapható, s legyen ennek Laplace-mátrixa  $L'$ . Legyen  $c'$  egy ezen a fán vett  $n$ -dimenziós, egész koordinátájú 0 koordinátaösszegű vektor, amelyet a következő módon kapunk:

$$c'(w) = \begin{cases} c(w), & \text{ha } w \neq v; \\ c(v) + c(u), & \text{ha } w = v. \end{cases}$$

Ezen  $c'$  vektor koordinátáinak összege megegyezik  $c$ -ével, azaz 0. Így használjuk az indukciós feltevést, és legyen  $z'$  egy  $n$ -dimenziós egész koordinátájú vektor, melyre fennáll, hogy  $L'z' = c'$ . Ennek segítségével előállítható az  $n+1$ -dimenziós  $z$  vektor:

$$z(w) = \begin{cases} z'(w), & \text{ha } w \neq u; \\ z'(v) - c(u), & \text{ha } w = u. \end{cases}$$

Ellenőrizzük le, hogy ez valóban megfelelő  $z$  lesz, azaz  $Lz = c$ . Az egyetlen szomszédal (ez persze  $v$ ) rendelkező  $u$  csúcsra:

$$(Lz)(u) = z(v) - 1 \cdot z(u) = z'(v) - z'(v) + c(u) = c(u).$$

A  $v$  csúcsnak az  $n$  csúcsú fához képest az  $n+1$  csúcsú fában eggyel nagyobb a fokszáma, illetve a sorában megjelenik egy  $u$ -hoz tartozó 1-es:

$$(Lz)(v) = (L'z')(v) - z'(v) + z(u) = c'(v) - c(u) = c(v),$$

hiszen

$$z(u) - z'(v) = z'(v) - c(u) - z'(v) = -c(u).$$

Egy tetszőleges  $u$ -n és  $v$ -n kívüli  $w$  csúcsra

$$(Lz)(w) = (L'z')(w) = c'(w) = c(w),$$

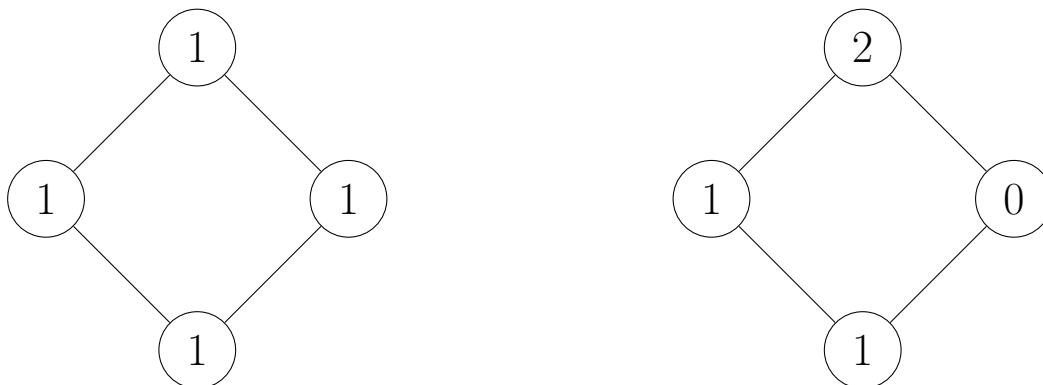
hiszen ezen csúcsok közül egyik sem szomszédja  $u$ -nak.

Tehát beláttuk, hogy az  $n + 1$  csúcsú fákra is fennáll, hogy a csúcsain értelmezett tetszőleges  $x, y$  chipkonfigurációkra, melyek ugyanannyi chipből állnak összesen, létezik  $z \in \mathbb{Z}^V$ , melyre

$$x = Lz + y.$$

Így az állítást beláttuk. □

Arra, hogy egy nem fagráf esetén nem igaz, hogy bármely két azonos összchipszámmal rendelkező chipkonfiguráció lineárisan ekvivalens, egy egyszerű ellenpélda az alábbi 4 csúcsú kör, 2 különböző chipkonfigurációval:



4.1. ábra

Látható, hogy két szemközti csúcson levő chipszámok összegének paritása állandó, hiszen ha egyikük lő, akkor 2-vel csökken az összegük, ha pedig egy másik csúcs lő, akkor 2-vel nő. Így mivel az első chipkonfigurációban a felső és alsó csúcson együtt összesen 2 chip van, azaz páros, míg a másodikban 3, azaz páratlan, ezért hiába van mindkettő chipkonfigurációban összesen 4 chip, nem lehetnek lineárisan ekvivalensek.

Valójában a következő, erősebb állítás is igaz a lineáris ekvivalenciaosztályok számára.

**4.3.2. Állítás.** [8] Egy irányítatlan  $G$  gráf esetén annyi lineáris ekvivalenciaosztály van, ahány feszítőfája van  $G$ -nek.

Ennek a 4.3.1. Állítás értelemszerűen egy speciális esete, ám az általános eset a szakdolgozat további részében nem kerül felhasználásra, így nem bizonyítjuk.

## 5. fejezet

# Párhuzamos chip-firing periódusa

Ez a fejezet Javier Bitar és Eric Goles *Parallel chip firing games on graphs* [4] c. cikkére épül.

### 5.1. A periódus tetszőleges gráfra

**5.1.1. Definíció.** *A párhuzamos chip-firing játékban egy chipkonfiguráció rekurrens, ha a játékot belőle indítva előbb-utóbb visszakerül önmagába.*

**5.1.2. Állítás.** *Minden nem leálló párhuzamos chip-firing játék rekurrens chipkonfigurációba ér véges sok lövés után.*

**Bizonyítás.** Mivel egy adott gráfra és összchipszámra csak véges sok különböző chipkonfiguráció létezik, ezért egy chipkonfiguráció véges sok lépés után megjelenik másodszorra, és ez rekurrens lesz.  $\square$

**5.1.3. Megjegyzés.** *A párhuzamos chip-firing játékban is igaz, hogy rekurrens chipkonfigurációból indított játék csak rekurrens állapotokat vesz fel, hiszen amikor visszakerül a játék az eredeti állapotba, a determinisztikussága miatt vissza fog kerülni minden olyan chipleosztásba, amelyet az eredeti chipleosztás első két megjelenése között felvett.*

A következőkben azt fogjuk belátni, hogy fagráfokra a párhuzamos chip-firingban az ismétlődő periódus (azaz az első felvett rekurrens chipkonfigurációtól kezdve ugyanezen chipkonfiguráció második előfordulása előtti állapotig tartó chipkonfiguráció-sorozat) a csúcsok aktivitása szempontjából 1 vagy 2 hosszú. Ez azt jelenti, hogy az ismétlődő periódus beállta után ha egy csúcst aktiv/nem aktiv egy adott chipkonfigurációban, akkor

a következő 2 lövés utáni chipkonfigurációban is aktív/nem aktív lesz. Ebből már következni fog, hogy élszámnyi chip esetén az ismétlődő periódusban minden csúcs pontosan egyszer aktív és egyszer nem aktív, így a párhuzamos chip-firing játék aktivitása ebből már könnyen kiszámolható.

Adott egy  $n$  csúcsú gráf, a csúcsokat sorszámozzuk 1-től  $n$ -ig. Egy  $x$  chipkonfigurációt egy  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$  vektor jelöl. Legyen  $x_i(t)$  az  $i$ . csúcsnál levő chipek száma a  $t$  időpillanatban, valamint  $N(i)$  az  $i$ . csúcs szomszédjainak halmaza. Ekkor a párhuzamos chip-firing dinamikája felírható a következő módon:

$$x_i(t+1) = x_i(t) - d(i) \cdot \mathbf{1}(x_i(t) - d(i)) + \sum_{j \in N(i)} \mathbf{1}(x_j(t) - d(j)), \quad (5.1)$$

ahol

$$\mathbf{1}(y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } y \geq 0; \\ 0, & \text{ha } y < 0. \end{cases}$$

Minden lépésben tehát minden csúcsra elvégezve az előbbi lépést kapjuk meg a következő chipkonfigurációt. Ez látható, hogy ekvivalens azzal a megfogalmazással, miszerint minden olyan csúcs ad egy-egy chipet a szomszédjainak, amelynek legalább annyi chipje van, mint amennyi a fokszáma. Mivel a lépés alapján könnyen látható, hogy a chipek száma összesen egy-egy lépés során konstans marad, azaz  $c$ , ezért a következő chipkonfiguráció mindig  $\{0, 1, \dots, c\}^n$  egy eleme, s mivel ez véges elemszámú, így előbb-utóbb olyan chipkonfigurációba ér a rendszer, amelyben már volt korábban, és innentől periodikusan ismétlődni fognak a chipkonfigurációk. Legyen ez az ismétlődő  $p$  hosszú, chipkonfigurációkból álló periódus elemei  $x(0), x(1), \dots, x(p-1)$ , ahol értelemszerűen  $x(p) = x(0)$ .

Az aktivitás szempontjából csak a periódus viselkedése fog számítani, azaz a periódus előtti viselkedés, illetve aktív csúcsok száma nem, így feltehető, hogy már beállt ebbe a periódusba a rendszer. Jelölje  $x_i$ -t ezentúl az  $i$ . csúcsához tartozó  $p$ -dimenziós vektor, amely a periódus egyes lépéseinél az  $i$ . csúcsban levő chipszámokat tartalmazza, azaz  $x_i = (x_i(0), x_i(1), \dots, x_i(p-1))$ . Legyen továbbá

$$\bar{x}_i = (\bar{x}_i(0), \bar{x}_i(1), \dots, \bar{x}_i(p-1)) \in \{0, 1\}^p,$$

ahol

$$\bar{x}_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha a } t \text{ időpontban az } i. \text{ csúcs aktív, azaz } x_i(t) - d(i) \geq 0; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen  $\text{supp}(\bar{x}_i) = \{t \in [0, p-1] : \bar{x}_i(t) = 1\}$ , azaz azon időpontok halmaza a perióduson belül, amelyekben az  $i$ . csúcs aktív. Hasonlóan definiálható  $\text{supp}(\bar{x}_i)^c = \{t \in [0, p-1] : \bar{x}_i(t) = 0\}$ , azaz azon időpontok halmaza a perióduson belül, amelyekben az  $i$ . csúcs inaktív.

**5.1.4. Lemma.** *A párhuzamos chip-firing során tetszőleges gráf és chipleosztás esetén az alábbiak igazak a periódusra:*

- i) Ha egy  $k$ -ra és  $\forall t$ -re  $\bar{x}_k(t) = 0$ , akkor  $\forall i$ -re és  $\forall t$ -re  $\bar{x}_i(t) = 0$ .
- ii) Ha  $[t_1, t_2]$  egy tovább nem bővíthető blokk  $\text{supp}(\bar{x}_i)$ -ben, akkor  $\exists j \in N(i)$  úgy, hogy  $[t_1 - 1, t_2 - 1] \subseteq \text{supp}(\bar{x}_j)$ .
- iii) Ha  $[t_1, t_2] \subseteq \text{supp}(\bar{x}_i)^c$ , azaz  $\forall t \in [t_1, t_2]$ -re  $\bar{x}_i(t) = 0$ , akkor  $\exists j \in N(i)$  úgy, hogy  $[t_1 - 1, t_2 - 1] \subseteq \text{supp}(\bar{x}_j)^c$ .

**Bizonyítás.**

- i) Elég azt belátni, hogy ha egy  $k$ -ra és  $\forall t$ -re  $\bar{x}_k(t) = 0$ , akkor  $\forall i \in N(k)$ -re és  $\forall t$ -re  $\bar{x}_i = 0$ . Az 5.1. egyenlet miatt

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= x_k(t) - d(i)\mathbf{1}(x_k(t) - d(k)) + \sum_{j \in N(k)} \mathbf{1}(x_j(t) - d(j)) = \\ &= x_k(t) + \sum_{j \in N(k)} \mathbf{1}(x_j(t) - d(j)) \geq x_k(t), \end{aligned}$$

tehát  $x_k(0) \leq x_k(1) \leq \dots \leq x_k(p-1)$ , de ugyanakkor  $x_k(p-1) \leq x_k(0)$ , így ez csak úgy lehet, ha  $x_k$  minden komponense ugyanannyi, de legfeljebb  $d(k) - 1$ , hiszen  $\forall t$ -re  $\bar{x}_k(t) = 0$ . Ha lenne olyan  $j \in N(k)$ , melyhez  $\exists t_1$ , amelyre  $\bar{x}_j(t_1) = 1$ , akkor  $x_k(t_1 + 1) \geq x_k(t_1) + 1$ , azaz  $x_k(t_1 + 1) \neq x_k(t_1)$ , amely ellentmondás, így ezen részállítást beláttuk.

A bizonyítás során tehát azt láttuk be, hogy ha egy perióduson belül egy csúcs sosem válik aktívvá, azaz sose lő, akkor egyik csúcs se lő. Ekkor értelemszerűen a periódus egyetlen konfigurációból áll, hiszen nem lő egy csúcs se, azaz nem változik a konfiguráció sosem. Hasonlóan bizonyítható, hogy ha egy  $k$ -ra és  $\forall t$ -re  $\bar{x}_k(t) = 1$ , akkor  $\forall i$ -re és  $\forall t$ -re  $\bar{x}_i = 1$ , azaz ha egy csúcs a perióduson belül mindig lő, akkor mindig minden csúcs lő. Ebben az

esetben is egy konfigurációból áll a periódus, hiszen minden csúcs fokszámnyi chipet lő ki, de pontosan ennyit is kap.

ii) Az 5.1. egyenlet alapján az  $i$ . csúcsra

$$x_i(t_2) = x_i(t_1) - (t_2 - t_1) \cdot d_i + \sum_{j \in N(i)} \sum_{t=0}^{t_2-t_1-1} \bar{x}_j(t_1 + t),$$

s mivel  $[t_1, t_2]$  egy tovább nem bővíthető blokk  $\text{supp}(\bar{x}_i)$ -ben, ezért  $x_i$   $t_1$  és  $t_2$  között ugyanannyiszor lő, mint  $t_1 - 1$  és  $t_2$  között, hiszen a  $t_1 - 1$  időpontban nem lő, mert ekkor bővíthető lenne a  $[t_1, t_2]$  blokk, ezért a következő írható fel:

$$x_i(t_2) = x_i(t_1 - 1) - (t_2 - t_1) \cdot d_i + \sum_{j \in N(i)} \sum_{t=-1}^{t_2-t_1-1} \bar{x}_j(t_1 + t),$$

de az  $i$ . csúcs  $t_1 - 1$ -beli inaktivitása miatt

$$x_i(t_2) \leq d_i - 1 - (t_2 - t_1) \cdot d_i + \sum_{j \in N(i)} \sum_{t=-1}^{t_2-t_1-1} \bar{x}_j(t_1 + t),$$

Tegyük fel indirekten, hogy  $\nexists j \in N(i)$ , melyre  $[t_1 - 1, t_2 - 1] \subseteq \text{supp}(\bar{x}_j)$ , azaz  $\forall j \in N(i)$ -re van olyan időpont a  $t_j \in [t_1 - 1, t_2 - 1]$  intervallumban, amelyre  $\bar{x}_j(t_j) = 0$ . Ez azt jelenti, hogy minden  $j \in N(i)$  legalább egyszer nem lő a  $[t_1 - 1, t_2 - 1]$  intervallumban, így legfeljebb  $t_2 - t_1$ -szer lő. Ekkor tehát  $t_2$  legfeljebb  $(t_2 - t_1) \cdot d_i$  chipet kap ebben az intervallumban, így

$$x_i(t_2) \leq d_i - 1 - (t_2 - t_1) \cdot d_i + (t_2 - t_1) \cdot d_i = d_i - 1.$$

Így ebben az esetben  $x_i$  a  $t_2$  időpontban inaktív, azaz  $\bar{x}_i(t_2) = 0$ , így ellentmondásra jutottunk, ezzel az állítást beláttuk.

iii) Tegyük fel indirekten, hogy  $\forall j \in N(i)$ -re  $\nexists t_j \in [t_1 - 1, t_2 - 1]$  úgy, hogy  $\bar{x}_j(t_j) = 1$ , tehát az  $i$ . csúcs minden szomszédja lő legalább egyszer a  $[t_1 - 1, t_2 - 1]$  intervallumban, így a  $[t_1, t_2]$  intervallumban az  $i$ . csúcs legalább  $d_i$  chipet kap. Ez azt jelenti, hogy a  $[t_1, t_2]$  intervallumban legalább egyszer aktívvá válik az  $i$ . csúcs, ami ellentmond azzal, hogy  $[t_1, t_2] \subseteq \text{supp}(\bar{x}_i)^c$ , azaz hogy  $\forall t \in [t_1, t_2]$ -re  $\bar{x}_i(t) = 0$ , így a lemma utolsó állítását is beláttuk.  $\square$

A  $\text{supp}(\bar{x}_i)$  halmaz felosztható blokkokra, amely blokkokban egymás után következő időpontok vannak. Legyen ezen blokkok száma  $b_i$ , s ekkor tehát  $\text{supp}(\bar{x}_i) = \bigcup_{k=1}^{b_i} C_k^i$ , ahol

minden  $k$ -ra  $C_k^i$  egy olyan  $[t_1, t_2]$  intervallum a perióduson belül, melyben minden  $m \in [t_1, t_2]$  időpontra  $\bar{x}_i(m) = 1$ , de  $\bar{x}_i(t_1 - 1) = \bar{x}_i(t_2 + 1) = 0$ . Legyen

$$M = \max_i \max_k |C_k^i|,$$

azaz  $M$  azt jelöli, hogy milyen hosszú a leghosszabb intervallum a perióduson belül, amelyre van olyan csúcs, amely végig aktív ezen intervallumon belül.

Bevezethetünk hasonló jelöléseket a  $\text{supp}(\bar{x}_i)^c$  halmazra, azaz osszuk fel  $c_i$  db blokkra, azaz egymást követő időpontokat tartalmazó intervallumokra. Tehát legyen  $\text{supp}(\bar{x}_i)^c = \bigcup_{k=1}^{c_i} D_k^i$ , s hasonlóan

$$N = \max_i \max_k |D_k^i|,$$

azaz  $N$  azt jelöli, hogy milyen hosszú a leghosszabb intervallum a perióduson belül, amelyre van olyan csúcs, amely végig inaktív ezen intervallumon belül.

## 5.2. A periódus fákon

**5.2.1. Lemma.** *Ha egy  $G$  fagrafra egy párhuzamos chip-firing játékban az ismétlődő periódus hossza  $p \geq 2$ , azaz a periódus felírható  $x(0), \dots, x(p-1)$  alakban, akkor az alábbiak igazak:*

$$\text{ha } 0 < M < p, \text{ akkor } M = 1,$$

$$\text{ha } 0 < N < p, \text{ akkor } N = 1.$$

### Bizonyítás.

Az  $M$ -mel kapcsolatos állítást fogjuk belátni,  $N$ -re a bizonyítás hasonlóan történik. Tegyük fel indirekten, hogy  $M \geq 2$ , és legyen  $i_0$  egy olyan csúcs, amelyre ténylegesen van  $M$  hosszú egymást követő 1-esekből álló, tovább nem bővíthető blokk  $\text{supp}(\bar{x}_{i_0})$ -ban, azaz  $\exists t$ , hogy  $[t, t + M - 1] \subseteq \text{supp}(\bar{x}_{i_0})$ , s legyen ez az intervallum  $C^0$ . Az 5.1.4. Lemma ii) része miatt  $\exists i_1 \in N(i_0)$ , hogy  $[t - 1, t + M - 2] \subseteq \text{supp}(\bar{x}_{i_1})$ , azaz  $[t - 1, t + M - 2]$  egy tovább nem bővíthető blokk  $\text{supp}(\bar{x}_{i_1})$ -ben, s legyen ez a blokk  $C^1$ . Ismételten az 5.1.4. Lemma ii) része miatt  $\exists i_2 \in N(i_1)$ , hogy  $[t - 2, t + M - 3] \subseteq \text{supp}(\bar{x}_{i_2})$ , azaz  $[t - 2, t + M - 3]$  egy tovább nem bővíthető blokk  $\text{supp}(\bar{x}_{i_2})$ -ben, legyen ez  $C^2$ . Mivel az indirekt feltevésünk szerint  $M \geq 2$ , ezért  $t + M - 3 \geq t - 1$ , tehát  $(t - 1) \in \text{supp}(\bar{x}_{i_2})$ .  $i_0 \neq i_2$ , hiszen ha  $i_0 = i_2$  lenne, akkor  $\bar{x}_{i_0}(t - 1) = 1$  lenne, ami ellentmondás, hiszen a  $[t, t + M - 1]$  intervallum nem bővíthető blokk  $\text{supp}(\bar{x}_{i_0})$ -ban. Mivel  $G$  egy fa, ezért van egy olyan  $i_0$ -ból induló út,

melynek másik végpontja (legyen ez  $i_s$ ) levél, s ezen  $i_0, \dots, i_s$  útra, mint csúcssorozatra az előző lemma ii) pontját, illetve az előbbi gondolatot használva (felhasználva, hogy  $M \geq 2$ ) igaz lesz, hogy

$$C^0 = [t, t + M - 1], C^1 = [t - 1, t + M - 2], \dots, \\ C^{s-1} = [t - s + 1, t + M - s], C^s = [t - s, t + M - s - 1],$$

azaz  $\forall j$ -re, melyre  $0 \leq j \leq s$  igaz, hogy  $C^j$  egy tovább nem bővíthető blokk  $\text{supp}(\bar{x}_{i_j})$ -ben.

A bizonyítás utolsó lépéseként használjuk még egyszer az 5.1.4. Lemma ii) részét az  $i_s$  csúcsra. Ennek egyetlen szomszédja van:  $i_{s-1}$ , s erre tehát igaznak kell lennie, hogy  $[t - s - 1, t + M - s - 2] \subseteq \text{supp}(\bar{x}_{i_{s-1}})$ , azaz  $\bar{x}_{i_{s-1}}(t - s) = 1$ , ami ellentmondás, hiszen  $[t - s + 1, t + M - s]$  egy tovább nem bővíthető halmaz  $\text{supp}(\bar{x}_{i_{s-1}})$ -ben. Tehát  $M = 1$ . Hasonlóan belátható, hogy  $N = 1$ .  $\square$

**5.2.2. Megjegyzés.** A lemma feltételei között azért szerepelt, hogy  $0 < M < p$ , mert  $M = 0$  fennállhat, ha minden csúcs a periódus minden pillanatában inaktív. Hasonlóan ha  $M = p$ , akkor minden csúcs minden pillanatban aktív. Ezen eseteket kizártuk.

Ezen lemma következménye, hogy ha  $G$  egy fagráf, akkor  $\forall i$ -re az  $i$ . csúcsra és  $\forall t$ -re  $\bar{x}_i(t) = \bar{x}_i(t + 2)$ .

**5.2.3. Tétel.** A párhuzamos chip-firing játékokban tetszőleges fára az ismétlődő periódus 1 vagy 2 hosszú.

**Bizonyítás.** Ha van olyan csúcs, amely a periódusban minden pillanatban aktív, akkor az 5.1.4. Lemma első részének megjegyzésben szereplő változata miatt minden csúcs minden lépésben aktív, ekkor az ismétlődő periódus valóban 1 hosszú (tehát egy chipkonfigurációból áll). Hasonlóan 1 a periódus, ha van végig inaktív csúcs, hiszen ekkor az 5.1.4. Lemma első része miatt minden csúcs inaktív.

Tehát tegyük fel, hogy minden csúcsra igaz, hogy a periódus során van olyan pillanat, amikor aktív, és olyan is van, amikor inaktív. Vegyük az  $i$ . csúcsot, és egy olyan  $t$  időpillanatot, amikor aktív az  $i$ . csúcs, s legyen  $l$  az  $i$ . csúcs ebben a  $t$  időpillanatban aktív szomszédainak száma. Mivel  $\bar{x}_i(t) = \bar{x}_i(t + 2)$ , és  $\bar{x}_i(t) = 1$ , ezért  $\bar{x}_i(t + 1) = 0$ . Tehát

$$x_i(t + 1) = x_i(t) - d_i + l,$$

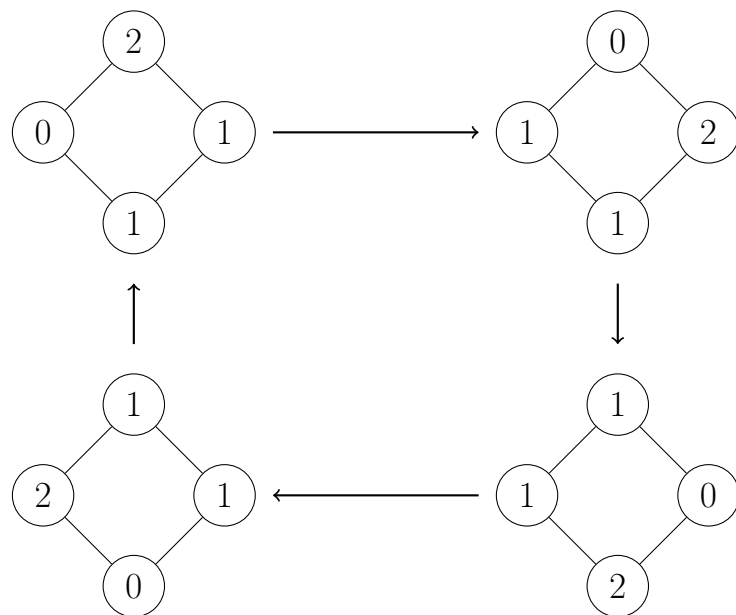
$$x_i(t + 2) = x_i(t + 1) + d_i - l = x_i(t) - d_i + l + d_i - l = x_i(t).$$

Ezzel a tétel állítását beláttuk. □

Jelen esetben egy fára élszámnyi chip esetén a korábbiakban láttak szerint mindig van aktív csúcs, tehát nem lehet minden csúcs végig inaktív, valamint legalább 2 csúcsú fák esetén nem lehet az sem, hogy minden csúcs aktív, hiszen ehhez legalább a foksámösszeg kétszeresének megfelelő mennyiségű chip kellene, ami nem lehetséges. Tehát a periódus 2 hosszú, s minden csúcs a 2 közül pontosan az egyik pillanatban lesz aktív, tehát a párhuzamos chip-firing játék aktivitása tetszőleges fára és élszámnyi chipre  $\frac{n}{2}$  lesz.

A továbbiakban adunk egy konstrukciót is az ismétlődő,  $\frac{n}{2}$  aktivitású periódusra, egész pontosan egy páros gráfokra működő konstrukciót adunk, amely értelemszerűen fákra is jó lesz, hiszen minden fagráf páros gráf is. Tekintsük a következő chipkonfigurációt: kiválasztjuk az egyik csúcsosztályt, majd ebben a csúcsosztályban minden csúcsnak legyen annyi chipje, amennyi a foksáma, ekkor mivel minden élnek pontosan az egyik végpontja van ebben a csúcsosztályban, ezért ez élszámnyi chipű játék lesz. Vizsgáljuk az első lövést! Mivel minden élhez tartozik egy chip, ezért az eddig 0 chippel rendelkező (azaz a másik csúcsosztályban szereplő) csúcsok ekkor minden szomszédjuktól kapnak egy-egy chipet, így most ezen csúcsoknak lesz pontosan foksámnyi chipük, az eredeti csúcsosztály csúcsainak pedig értelemszerűen 0. Így pontosan azon csúcsok lesznek aktívak, amelyek eredetileg nem voltak azok, s még egy lövés után visszkapjuk a kiindulási állapotot. Így ekkor minden csúcs vagy minden páratlanadik, vagy minden párosadik lépésben lesz aktív, tehát egy-egy kétlépéses periódusban összesen  $n$  aktív csúcs lesz, így átlagosan egy lépésben  $\frac{n}{2}$ , tehát ennyi a játék aktivitása.

Az aktivitás tehát a megadott chipkonfigurációból páros gráf esetén is  $\frac{n}{2}$ , ám az alábbi ábrán található ellenpélda arra, hogy a 4 csúcsú kör esetén (amely szintén páros gráf) van olyan élszámnyi chipből álló chipkonfiguráció, amelyből indulva az aktivitás 1, azaz nem  $\frac{4}{2} = 2$ .



## 6. fejezet

# Véletlenszerű chip-firing

A véletlenszerű chip-firing során minden lépésben egy csúcs lő, ám azt, hogy az aktív csúcsok közül melyik az, amelyik lő, egyenletes eloszlás szerint választjuk ki. Ebben a fejezetben végig egyszerű irányítatlan gráfon fogjuk vizsgálni a játékot. A véletlenszerű chip-firing játék rekurrens állapotai azok lesznek, amelyekbe pozitív valószínűséggel tér vissza a játék önmagukból indulva, ezek értelemszerűen megegyeznek a chip-firing játék rekurrens állapotaival. A fejezet során (az elején kívül) végig nem leálló játékok lesznek tanulmányozva (ehhez a chipszám legalább élszámnyi), hiszen leálló játékok esetén nem különösebben érdekes az aktivitás viselkedése, mert ekkor az aktivitás könnyen láthatóan mindig 0.

### 6.1. Az aktivitás tetszőleges fán

**6.1.1. Definíció.** *A véletlenszerű chip-firing játék aktivitása egy  $G$  gráfra egy  $x$  kezdeti chipelosztásra az aktív csúcsok átlagos számának a várható értéke, azaz  $A_G(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} E(A_k(x))$ , ahol  $A_k(x)$  egy ezen  $x$  chipkonfigurációból indított játék első  $k$  lépésében vett aktív csúcsok összes számát jelölő valószínűségi változó.*

**6.1.2. Állítás.** *A véletlenszerű chip-firing játék aktivitása egy adott  $fa$  esetén nem függ a kezdeti chipkonfigurációtól, csak a chipek számától.*

**Bizonyítás.**

Ha a chipek száma kevesebb az élszámnál, akkor a játék mindig leáll, azaz az aktivitás 0 lesz tetszőleges kezdeti chipkonfiguráció esetén.

A következőkben a nem leálló játékokra látjuk be az állítást, azaz amikor legalább élszámnyi chip van. Könnyen láthatjuk, hogy ekkor a véletlenszerű chip-firing tekinthető egy diszkrét állapotterű Markov-láncnak, ahol az állapotokat az adott összcipsszámmal rendelkező chipkonfigurációk jelentik, hiszen egy adott pillanatban a jövőbeli állapotok csak a jelenlegi chipkonfigurációtól függenek, a múltbeli állapotoktól nem.

A 4.2.3. Tételben láttuk, hogy egy tetszőleges  $y$  rekurrens chipkonfiguráció és  $x \sim y$  esetén  $x$ -ből legális lövésekkel is el lehet jutni az  $y$  chipkonfigurációba. Továbbá azt is tudjuk, hogy a 4.3.1. Állítás szerint tetszőleges fa esetén bármely két azonos összcipsszámmal rendelkező chipkonfiguráció lineárisan ekvivalens. Ezek miatt egy adott fára és összcipsszámmal az így létező rekurrens állapotokba bármely másik állapotból (és így persze önmagából is) el lehet jutni legális lövésekkel. Mivel a játék nem áll le, ezért természetesen léteznie kell legalább egy rekurrens állapotnak. (Ha pedig legalább 3 csúcsú fán történik a játék, akkor létezik nem rekurrens állapot is, hiszen egy tetszőleges levelet kiválasztva, és azt a chipkonfigurációt tekintve, amelynél ezen a levelen van az összes chip, ez semmiképpen sem lehet rekurrens, hiszen csak úgy lehetne eljutni ebbe a konfigurációba, ha a szomszédjától kap chipeket. A gráf összefüggősége miatt viszont a szomszédjának van legalább egy másik szomszédja, így annak is kell lennie legalább egy chipjének ez esetben.)

A véletlenszerű chip-firing nyelvén ez azt jelenti, hogy a létrejövő Markov-láncban a lényeges állapotok a rekurrens lesznek, a többi pedig lényegtelen állapot. Jelölje az állapotok számát  $S$ . Egy lényegtelen állapotból legfeljebb  $S$  lépés után rekurrensbe jutunk, hiszen ha nem így lenne, akkor létezne  $S$  egymást követő lépés, amely során egyik állapot sem rekurrens, ám mivel az előzőek alapján mindenképpen létezik legalább egy rekurrens állapot, ezért ez csak úgy történhetne meg, ha valamelyik nemrekurrens állapotban kétszer is lennénk, ez pedig értelemszerűen ellentmondás.

Az aktív csúcsok átlagos számának várható értékét, azaz az aktivitást elég attól a pillanattól kezdve vizsgálni, hogy a játék rekurrens chipkonfigurációba ért. Ez azért igaz, mert a végtelenbe tartó határérték esetén  $A_n(x)$  egy-egy realizációjára úgy tekintve, mint az aktív csúcsok első  $n$  lépésben vett számának összege, ezen összegből mindig csak korlátos sok tagot veszünk el, ha csak az első rekurrens állapottól vizsgáljuk az összeget. Azaz, ha egy kezdeti állapotból a játék 5 lépés után jut rekurrens chipkonfigurációba, akkor az  $n \leq 5$  értékekre elég az 5. lépéstől kezdve összegezni az aktív csúcsok számát. Tehát elegendő a rekurrens chipkonfigurációkra redukált Markov-láncot vizsgálni, amely irreducibilis lesz, hiszen bármelyik állapotból el lehet jutni bármelyik állapotba legális lövésekkel, azaz pozitív valószínűségekkel. Így a továbbiakban vizsgálhatjuk a játékot, s

így az aktivitást az első rekurrens állapotba való érés pillanatától kezdve. Ez valóban egy sztochasztikus folyamat lesz, nem történhet olyan, hogy egy rekurrens állapotból pozitív valószínűséggel léphetnénk nem rekurrens állapotba, tehát minden rekurrens állapotból a többi rekurrens állapotba menő átmenetvalószínűségek összege 1 lesz. Ezen Markov-lánc irreducibilitása miatt fennáll, hogy  $\forall i$ -re

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_{ij}^k = \pi_j,$$

ahol  $P$  a rekurrens állapotokra redukált Markov-lánc átmenetvalószínűség-mátrixa,  $\pi_j$  pedig a stacionárius eloszlás  $j$  állapothoz tartozó értéke. Legyen  $a$  azon rekurrens állapot, amelybe először ér a játék valamilyen  $x$  kezdeti chipkonfigurációból, továbbá legyen  $X_i(a)$  az  $i$ . lépésben szereplő állapotot jelölő valószínűségi változó, amikor az  $a$  állapotból indul a rekurrens állapotokon vett játék, illetve jelölje  $f$  függvény pedig az aktív csúcsok számát rendeli hozzá egy-egy chipkonfigurációhoz, mint állapothoz. Ekkor az aktivitás

$$A_G(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} E(A_m(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} E(A_k(a)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E(f(X_i(a)))$$

A jobb oldali kifejezést tovább alakítva:

$$\begin{aligned} A_G(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k E(f(X_i(a))) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sum_b P_{ab}^i f(b) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_b \left( \sum_{i=1}^k P_{ab}^i \right) f(b) = \sum_b \pi_b f(b), \end{aligned}$$

ahol  $b$  egy tetszőleges állapotot jelöl. Látható, hogy a kapott kifejezés nem függ  $a$ -tól, azaz az első rekurrens állapottól, így a kiindulási  $x$  állapottól sem, azaz az összes azonos (de legalább élszámnyi) összchipszámmal rendelkező chipkonfiguráció esetén egy adott fára ugyanannyi lesz az aktivitás, ezzel beláttuk az állítást.  $\square$

A bizonyítás menete alapján látható, hogy ugyanezen gondolatmenet működik egy tetszőleges gráf lineáris ekvivalenciaosztályára, azaz tetszőleges gráfon az azonos lineáris ekvivalenciaosztályba tartozó chipkonfigurációk aktivitása azonos lesz. Nem fagráfok esetén pedig azért nem lesz igaz az állítás, mert nem feltétlenül érhető el bármelyik rekurrens chipkonfiguráció legális játékkal bármelyik másik rekurrens chipkonfigurációból, hiszen nem feltétlenül lineárisan ekvivalensek, így nem feltétlenül igaz, hogy miután rekurrens állapotba ér a játék egy  $x$  kezdeti chipkonfigurációból, akkor ugyanazon állapotokból áll a kapott diszkrét állapotterű Markov-lánc, mint egy  $x$ -től különböző kezdeti chipkonfigurációra.

## 6.2. Véletlenszerű chip-firing $n$ csúcsú fákon

Egy  $n$  csúcsú fán élszámnyi, azaz  $n - 1$ -nél kevesebb chip esetén a véletlenszerű chip-firing játék mindig leáll, a továbbiakban tehát a lehető legkevesebb chipszám esetét vizsgáljuk, amelyre nem áll le a játék.

**6.2.1. Állítás.** *Egy  $n$  csúcsú csillagra  $n - 1$  db chippel a véletlenszerű chip-firing játék aktivitása mindig*

$$A_{S_n} = \frac{n^2 - n + 2}{2n}.$$

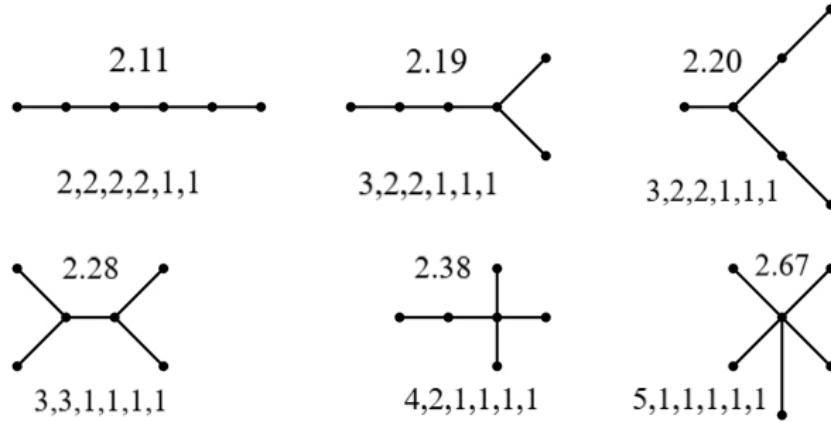
**Bizonyítás.** Mivel egy adott fagra csak a chipszámtól függ az aktivitás, ezért az általánosság megsértése nélkül ki lehet indulni a következő chipleosztásból: a leveleknek legyen 1-1 chipje, a központi csúcsnak pedig 0, s ekkor  $n - 1$  db aktív csúcs van a játékban. Ekkor látható, hogy ezen játék az aktív csúcsok számát tekintve valójában nem is véletlenszerű: az első  $n - 1$  lépésben csak a levelek lőhetőek valamilyen sorrendben egészen addig, amíg végül mind az  $n - 1$  chip a központi csúcsban van, innen még egyet löve kapjuk vissza a kiindulási állapotot. Ezen játék tehát  $n$  lépésenként ismétlődik, azaz az aktivitása ezen ciklusban vett átlagos aktív csúcsszám lesz. Kezdetben  $n - 1$  db aktív csúcs van, majd ez minden lépésben 1-gyel csökken, míg végül már csak 1 levél aktív, majd ezután csak a középső csúcs aktív. Tehát az aktivitás ekkor

$$\frac{n - 1 + n - 2 + \dots + 1 + 1}{n} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 1}{n} = \frac{n^2 - n + 2}{2n}.$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

A továbbiakban  $n$  csúcsú fagrafokra fogalmazunk meg a véletlenszerű chip-firing játék aktivitására sejtéseket. Ehhez először bevezetünk egy részbenrendezést az azonos csúcsú fagrafokon. Ennek egy módszere az, hogy a gráfok csökkenő sorrendbe rendezett fokszámsorozatait lexikografikus sorrend szerint rendezzük. Így például a 4 csúcsú gráfokon az út ( $P_4$ ) fokszámsorozata csökkenő sorrendben rendezve 2, 2, 1, 1, míg a csillag ( $S_4$ ) 3, 1, 1, 1, így a rendezés szerint az  $P_4 < S_4$ . Nevezzük ezt foksám szerinti részbenrendezésnek.

Vizsgáljuk meg ezen részbenrendezést 6 csúcsú fákon! A 6.1. ábrán látható a fokszámsorozatok lexikografikus rendezése, s az egyes fákra az aktivitások két tizedesjegy pontossággal, melyek számítógépes szimulációkkal lettek kiszámítva.



6.1. ábra

**6.2.2. Sejtés.** Egy  $n$  csúcsú útra élszámnyi chip esetén a véletlenszerű chip-firing játék aktivitása  $A_{P_n} = \frac{n^2+n-4}{4n-6}$ .

**6.2.3. Sejtés.** A véletlenszerű chip-firing játék aktivitása élszámnyi chip esetén szigorúan növekvő az  $n$  csúcsú fagrafok fokszaám szerinti részbenrendezésén, azaz ha  $T_1 < T_2$ , akkor  $A_{T_1} < A_{T_2}$ , ahol  $A_G$  a  $G$  gráf aktivitását jelöli  $n - 1$  chipű játék esetén.

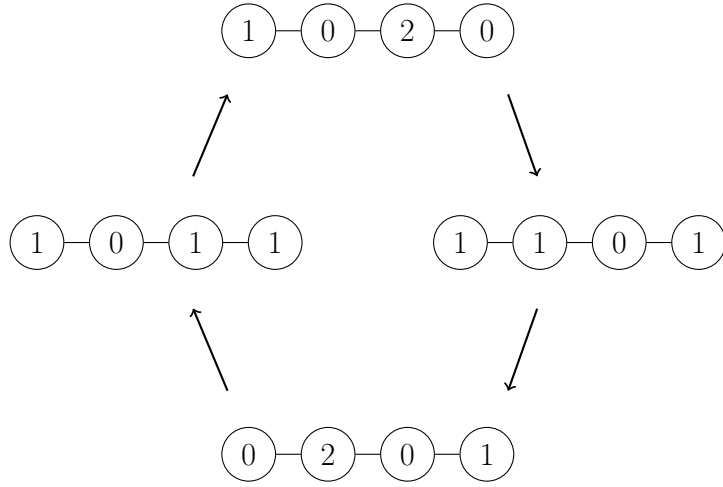
Ezen sejtést számítógépes szimulációkkal támasztottam alá kis  $n$ -ekre, melyekhez az Eger-vary Kutatócsoport által fejlesztett LEMON nevű C++ könyvtárat használtam.

**6.2.4. Megjegyzés.** Nem élszámnyi chip esetén is az a sejtésem, hogy növekvő az aktivitás ezen a részbenrendezésén.

Az előző sejtés igazságából természetesen következne az alábbi sejtés is.

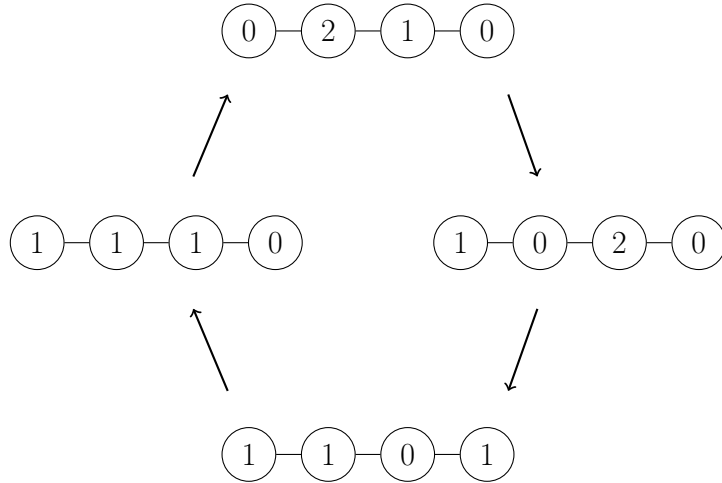
**6.2.5. Sejtés.** Tetszőleges  $n$  csúcsú  $T$  fára a véletlenszerű chip-firing játék aktivitása élszámnyi chip esetén  $\frac{n^2+n-4}{4n-6} \leq A_T \leq \frac{n^2-n+2}{2n}$ .

Természetesen következne abból a 6.2.5. Sejtés igazsága, ha egy periódusban az aktivitás a sejtésben szereplő korlátok között lenne. Ez viszont könnyen látható, hogy nem igaz, a játék kerülhet  $\frac{n^2-n+2}{2n}$ -nél nagyobb aktivitású periódusba. Erre egy ellenpélda az alábbi ábrán látható, mely játék során a periódusban végig 2 csúcs aktív, azaz a játék aktivitása 2. Ezzel szemben a véletlenszerű chip-firing játék esetén a Markov-láncok stacionáris eloszlásának kiszámolásával látható, hogy maximum  $\frac{7}{4}$  lehet 4 csúcsú fák 3 chip esetén (természetesen a sejtés felső becslése is ennyit ad).



6.2. ábra

Az sem igaz, hogy akárhogyan lövögetve nem kerülhet a játék  $\frac{n^2+n-4}{4n-6}$  kisebb aktivitású periódusba, erre is egy 4 csúcsú út szolgáltat példát, 1.5 aktivitással (ami a formulából adódó 1.6-nál kevesebb).



6.3. ábra

Fontos észrevétel, hogy élszámnyi chip esetén a rekurrens chipkonfigurációk a 4.1.10. Tétel miatt pontosan azon lesznek, amelyek előállnak úgy, hogy a gráf egy adott irányítására minden csúcs chipszáma annyi lesz, mint ezen irányításban ezen csúcsnak a befoka. Mivel

tehát egy  $n$  csúcsú fa éleit  $2^{n-1}$ -féleképpen lehet megirányítani, így pontosan ennyi rekurrens chipkonfiguráció lesz. Így például az út aktivitásáról szóló sejtés belátásához a  $2^{n-1}$  db állapotból álló Markov-lánc stacionárius eloszlásának és annak a  $2^{n-1}$ -dimenziós vektornak a skaláris szorzatát kell vizsgálnunk, amely vektornak egy adott állapothoz tartozó komponense az ezen állapothoz tartozó aktív csúcsok száma.

# Összefoglalás

Szakedolgozatomban során bizonyításra került több, a különböző chip-firing játéktípusokra vizsgált aktivitás fogalmával kapcsolatos állítás. Elsőként a 3. fejezetben játék végességével kapcsolatos állítások szerepeltek, majd a 4. fejezetben karakterizáltuk a véletlenszerű chip-firing játékhöz elengedhetetlen rekurrens chipkonfigurációkat, illetve különféle tulajdonságait vizsgáltuk ezeknek. Beláttuk, hogy fákon bármely állapotból elérhetőek ezek a rekurrens állapotok, s ezen állítás a véletlenszerű chip-firing játék aktivitásának vizsgálatánál jött jól. Az 5. fejezetben a párhuzamos chip-firing játékokban élszámnyi chip esetén mutattuk meg, hogy az aktivitás csak a csúcsok számától függ. A 6. fejezetben pedig a véletlenszerű chip-firing játék esetén láttuk be, hogy hiába véletlenszerű a játék, az aktivitás fogalma csakis a kezdeti chipkonfigurációtól függ, a játék során történő lépésektől pedig nem. Ezenfelül sejtéseket fogalmaztunk meg a véletlenszerű chip-firing játék aktivitása és a fák szerkezete közti összefüggésekről.

# Irodalomjegyzék

- [1] Bálint Hujter, Viktor Kiss, and Lilla Tóthmérész. *Reachability of recurrent positions in the chip-firing game*. arXiv preprint arXiv:1507.03209 (2015).
- [2] Anders Björner, László Lovász, and Peter W. Shor. *Chip-firing games on graphs*. European Journal of Combinatorics 12.4 (1991): 283-291.
- [3] Anders Björner and László Lovász. *Chip-firing games on directed graphs*. Journal of algebraic combinatorics 1 (1992): 305-328.
- [4] Javier Bitar and Eric Goles. *Parallel chip firing games on graphs*. Theoretical Computer Science 92.2 (1992): 291-300.
- [5] Lilla Tóthmérész. *The chip-firing game*. PhD Thesis (2016)
- [6] Mikkel Thorup. *Firing games*. (1996).
- [7] Janice Jeffs and Suzanne Seager. *The chip firing game on  $n$ -cycles*. Graphs and Combinatorics 11.1 (1995): 59-67.
- [8] Matthew Baker and Serguei Norine. *Riemann–Roch and Abel–Jacobi theory on a finite graph*. Advances in Mathematics 215.2 (2007): 766-788.

Alulírott *Koleszár Domonkos* nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

| Feladat      | Felhasznált eszköz | Felhasználás helye   | Megjegyzés           |
|--------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| Ábrakészítés | GPT o4-mini        | 4., 5. és 6. fejezet | LaTeX kód generálása |

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.