



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKAI INTÉZET

Nemnegatív mátrixok, elmélet és alkalmazások

Témavezető:

dr. Michaletzky György
egyetemi tanár

Szerző:

Hoffmann Szabolcs
Matematikus BSc

Budapest, 2025

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Michaletzky György Tanár Úrnak, akinek kimagasló szakmai tudása és a témakörben való jártassága nagyban hozzájárult a szakdolgozatom megírásához. Számos tanácsa, segítőkészsége nélkül nem sikerült volna ilyen eredményt elérnem.

Továbbá szeretném kifejezni hálámat az egész családomnak, akik tanulmányaim során mindenben támogattak.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Definíciók	4
3. Perron-Frobenius tételkör	6
4. Az inverz Perron-Frobenius tétel	9
5. A komplex Perron-Frobenius tétel	16
6. Kapcsolat Markov-láncokkal	29
7. Közgazdaságtani alkalmazások, a Leontief-féle modell	37
Irodalomjegyzék	40

1. fejezet

Bevezetés

Számos matematikai területen és azok alkalmazásaiban — a populációdinamikától és közgazdaságtantól a kvantummechanikáig és a numerikus analízisig — a *Perron-Frobenius-tétel* alapvető eredményként szolgál, mert képes összekapcsolni egy operátor spektrális tulajdonságait a pozitivitás és a hosszú távú viselkedés fogalmával. Klasszikus, véges dimenziós formájában azt garantálja, hogy egy irreducibilis nemnegatív mátrixnak van egy egyszeres maximális sajátértéke, amely megegyezik a spektrálsugárral, és ehhez egy szigorúan pozitív sajátvektor tartozik. Ez a sajátérték-sajátvektor pár nemcsak az iteratív sémák stabilitásáról és konvergenciájáról ad információt, hanem sztochasztikus modellekben az ergodicitás alapját is képezi, valamint a hővezetési problémák disszipációs rátáit is meghatározza.

Az elmúlt néhány évben a tétellel kapcsolatban jónéhány széleskörű általánosítási irány alakult ki, többek között:

- **Végtelen dimenziós, kúpalapú kiterjesztések**, amelyek a pozitivitást egy konvex kúp viszonylatában értelmezik Banach- vagy Hilbert-térben, és korlátos operátorokra, valamint félcsoportokra alkalmazhatók.
- **Komplex elemekkel rendelkező kiterjesztések**, amelyek a Perron-Frobenius-tétel analógjait keresik olyan mátrixokra, amelyek elemei nem mind nemnegatívak — sőt, nem is feltétlenül valósak — úgy, hogy bevezetik azokat a feltételeket, amelyek mellett továbbra is kialakul egy pozitív spektrálsugár és egy hozzáillő pozitív sajátvektor.

A dolgozat első részében két, e területek élvonalába tartozó hozzájárulást vizsgálunk meg:

Inverz Perron-Frobenius-tétel (Tomioka 2025) [1] A szerző nem azt vizsgálja, hogy egy operátor pozitivitása maga után vonja-e a maximális sajátérték egyszerűségét, hanem azt, hogy végtelen dimenziós Hilbert-terekben egy adott önadjungált operátor, amelynek egyszeres legnagyobb sajátértéke van, alkalmassá tehető-e a pozitívisztítésjavításra egy megfelelő Hilbert-kúp kiválasztásával. A Perron-sajátvektor köré konstruált kúppal a szerző bebizonyítja, hogy ebből ergodicitás és szigorú pozitívisztítés következik, továbbá azt is, hogy ez a tulajdonság ellenálló a kúp tengelyének perturbációival szemben.

Perron-Frobenius-tétel komplex mátrixokra (Noutsos & Varga 2012) [2] A szerzők itt egymást kiegészítő fogalmakat vezetnek be — az I. és II. típusú kiterjesztést — amelyek azt jellemzik, hogy mikor rendelkezik egy komplex mátrix valós, domináns sajátértékkel és olyan sajátvektorral, amelynek a valós részei nemnegatívak (vagy szigorúan pozitívak).

A két elmélet részletes bemutatásán túl jelen dolgozat kiemeli a közös témákat: hogyan értelmezhető újszerűen a pozitívisztítés geometrikusan, kúpok által, illetve algebraian, a valós részekre vonatkozó megszorítások révén, és miként marad a spektrálsugár az ergodicitás vagy a konvergencia feltételeinek központi szereplője.

A dolgozat 2. és 3. fejezetében a klasszikus tétellel kapcsolatos ismereteket taglaljuk. A 4. fejezetben a Perron-Frobenius tételkört végtelen dimenziós Hilbert-terekben vizsgálva kimondjuk és bebizonyítjuk az inverz Perron-Frobenius tételt, illetve a kapcsolódó definíciókban újragondoljuk a pozitívisztítés fogalmát, és Hilbert-kúpok segítségével vizsgáljuk az önadjungált operátorokat. Az 5. fejezetben kimondunk és bebizonyítunk olyan állításokat és tulajdonságokat, amelyek segítségével átfogó képet kapunk az I. illetve II. típusú Perron–Frobenius-tulajdonsággal rendelkező komplex mátrixokról. A 6. fejezetben nemnegatív mátrixok Markov-láncokkal való kapcsolatát vizsgáljuk, amiben [3] alapjait felhasználva egy önálló eredményt mutatunk be. Végül a 7. fejezetben közgazdaságtani alkalmazásokat mutatunk be. Irodalomjegyzék zárja a dolgozatot.

2. fejezet

Definíciók

Ebben a részben megadunk néhány, az egész dolgozatban konzisztensen használt alap definíciót, amik egyúttal előkészítik a Perron-Frobenius tétel kimondását. A speciális, a későbbi általánosított tételekhez szükséges definíciókat az adott fejezetek elején ismertetjük.

1. Definíció. Legyen A egy $n \times n$ méretű mátrix F test felett. Az A mátrix *irreducibilis*, ha a következő ekvivalens feltételek bármelyike teljesül:

- A nem rendelkezik — koordináta egységvektorok által meghatározott — nem-triviális, invariáns alterekkel, azaz bármely $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ által kifeszített lineáris altér A -ra vonatkozó képe nem fekszik ugyanabban az altérben.
- A nem hozható felső háromszög mátrix formára véges permutációs mátrixszal, azaz nem létezik P permutációs mátrix és nem-triviális (pozitív méretű) négyzetes blokkokból álló $\begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix}$ mátrix úgy, hogy

$$P A P^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

2. Definíció. Legyen A valós, nemnegatív mátrix. Válasszunk egy i indexet, és definiáljuk az i -edik *index periódusát* az összes olyan természetes m legnagyobb közös osztójaként, amelyekre $(A^m)_{ii} > 0$. Ha A irreducibilis, akkor minden index periódusa megegyezik, ezt hívjuk A periódusának. Valójában irreducibilis A esetén a periódust úgy is megadhatjuk, mint az A irányított gráfjában szereplő zárt utak hosszainak legnagyobb közös osztóját. Ha a periódus 1, akkor A *aperiodikus*.

3. Definíció. Legyenek $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix sajátértékei. Ekkor a mátrix *spektrálsugara*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}.$$

3. fejezet

Perron-Frobenius tételkör

A Perron–Frobenius-tétel a nemnegatív mátrixok spektrálméletének egyik alappillére, melyet eredetileg Perron [4] és Frobenius [5] dolgozott ki. A klasszikus állítás szerint, ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ irreducibilis és minden eleme nemnegatív, akkor

1. létezik egy $\rho(A)$ valós, pozitív sajátérték, amely megegyezik a mátrix spektrálsugarával,
2. ennek az értéknek a sajátaltère egydimenziós,
3. a hozzá tartozó jobb- illetve baloldali sajátvektorok komponensei mind szigorúan pozitívak.

Ez a *Perron–Frobenius-sajátpár* (sajátérték–sajátvektor-pár) számtalan területen kulcsszerepet tölt be: Markov-láncok átmenetvalószínűség mátrixainál az stacionárius eloszlás létezését garantálja, populációdinamikai modellekben az egyensúlyi állapot fenntarthatóságát magyarázza, míg numerikus módszerekben (pl. PageRank, Google-algoritmus) a konvergencia gyorsaságáról és a domináns komponens előtérbe kerüléséről ad információt.

A tétel további általánosításokkal (Krein–Rutman-tétel, végtelen dimenzió, kúpelmélet) és változatokkal (negatív elemeket is engedő mátrixok, komplex entitások) bővült; ezek mind azt közvetítik, hogy a spektrálsugar egyszerűsége és a hozzá tartozó „pozitív” sajátvektor-szerkezet meglete mély, egyetemes jelenség a lineáris operátorok világában. A Perron–Frobenius-tétel következő verzióját [6] alapján mutatjuk be.

1. Tétel (Perron–Frobenius-tétel irreducibilis nemnegatív mátrixokra).

Legyen A egy irreducibilis, nemnegatív $N \times N$ -es mátrix h periódussal és $\rho(A) = r$ spektrálsugárral. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek:

- $r \in \mathbb{R}^+$ pozitív valós szám, és r sajátértéke az A mátrixnak. Ezt nevezzük Perron–Frobenius-sajátértéknek.
- Az r Perron–Frobenius-sajátérték egyszeres: a hozzá tartozó jobb- és baloldali sajátaltér egydimenziós.
- A -nak van jobb- és baloldali sajátvektora is (jelöljük ezeket $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ -vel), mindkettő sajátértéke r , komponenseik pedig pozitívak. Továbbá az olyan sajátvektorok, amelyeknek minden komponense pozitív, azok az r -hez tartozó sajátvektorok.
- A mátrixnak pontosan h darab r abszolút értékű komplex sajátértéke van (ahol h a periódus). Mindegyik egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, és ezek r és a h -adik egységgyökök szorzataként adódnak.
- Legyen $\omega = 2\pi/h$. Ekkor A hasonló $e^{i\omega}A$ -hoz, így a spektruma invariáns az $e^{i\omega}$ -szoros elforgatásra.
- Ha $h > 1$, akkor P létezik permutáció-mátrix, amellyel

$$P A P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{h-1} \\ A_h & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ahol minden 0 a megfelelő méretű nullmátrix, és az A_j blokkok négyzetesek.

- Collatz–Wielandt-formula: minden $\mathbf{x}$ nemnegatív, nem-nullvektor esetén definiáljuk a következő függvényt:

$$f(\mathbf{x}) = \min_{i: x_i \neq 0} \frac{[A\mathbf{x}]_i}{x_i}.$$

Ekkor f valós értékű függvény, amelynek maximuma éppen a Perron–Frobenius-sajátérték.

- *A Perron–Frobenius-sajátérték eleget tesz az alábbi egyenlőtlenségnek:*

$$\min_i \sum_j a_{ij} \leq r \leq \max_i \sum_j a_{ij}.$$

4. fejezet

Az inverz Perron-Frobenius tétel

Jelen fejezet fő célja, hogy a Perron-Frobenius tételkört végtelen dimenziós Hilbert-terekben vizsgálva kimondjuk és bebizonyítsuk az inverz Perron-Frobenius tételt. A kapcsolódó definíciókban újragondoljuk a pozitivitás fogalmát, és Hilbert-kúpok segítségével vizsgáljuk az önadjungált operátorokat.

A következőkben [1] alapján ismertetjük az ehhez kapcsolódó tételeket és definíciókat, néhány fontos bizonyításra is kitérve, valamint megvizsgáljuk geometriai jelentésüket is.

4. Definíció.

Legyen $\mathcal{H}$ egy valós Hilbert-tér. Egy nem üres $C \subseteq \mathcal{H}$ halmazt *Hilbert-kúp*nak nevezzünk, ha a következő feltételek teljesülnek:

- (i) C konvex kúp $\mathcal{H}$ -ban, azaz $C + C \subseteq C$, $[0, \infty) \cdot C \subseteq C$ és $C \cap (-C) = \{0\}$.
- (ii) C zárt részhalmaza $\mathcal{H}$ -nak.
- (iii) Bármely $u, v \in C$ esetén $\langle u, v \rangle \geq 0$.
- (iv) Tetszőleges $w \in \mathcal{H}$ esetén léteznek $u, v \in C$, hogy $w = u - v$ és $\langle u, v \rangle = 0$.

5. Definíció. Egy $u \in C \setminus \{0\}$ vektort szigorúan pozitív vektornak nevezzünk a C halmazra nézve, ha minden $v \in C \setminus \{0\}$ vektorra $\langle u, v \rangle > 0$. A C -re nézve szigorúan pozitív vektorok halmazát jelölje $C_{>0}$.

6. Definíció. Egy valós Hilbert-térben legyen adott egy Hilbert-kúp. Legyen A egy korlátos pozitív önadjungált operátor. Ekkor A *ergodikus* a Hilbert-kúpra nézve, ha a legnagyobb sajátértéke ($\|A\|$) egyszeres, és a hozzá tartozó sajátvektor szigorúan pozitív.

7. Definíció.

Legyen $\mathcal{H}$ egy valós Hilbert-tér, $C \subseteq \mathcal{H}$ egy Hilbert-kúp, és legyen $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a korlátos lineáris operátorok halmaza. Ekkor:

- (i) Ha $AC \subseteq C$, akkor A -t *pozitivitás-megőrző operátornak* nevezzük a C kúpra nézve.
- (ii) Ha $A(C \setminus \{0\}) \subseteq C_{>0}$, akkor A -t *pozitivitás-javító operátornak* nevezzük a C kúpra nézve.

8. Definíció.

Legyen $\mathcal{H}$ egy valós Hilbert-tér és $C \subseteq \mathcal{H}$ egy Hilbert-kúp.

- (i) Egy $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ halmazt *ergodikusnak* nevezünk a C kúpra vonatkozóan, ha bármely $u, v \in C \setminus \{0\}$ esetén létezik $A \in \mathcal{E}$ úgy, hogy $\langle u, Av \rangle > 0$.
- (ii) Egy $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operátort *ergodikusnak* nevezünk a C kúpra vonatkozóan, ha a $\{A^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat ergodikus a C kúpra nézve.

9. Definíció.

Legyen $\mathcal{H}$ egy valós Hilbert-tér, és legyen $u_0 \in \mathcal{H}$ egy egységvektor. A

$$P(u_0) := \{ u \in \mathcal{H} \mid \langle u_0, u \rangle \geq \frac{\|u\|}{\sqrt{2}} \}$$

kúpot u_0 *tengelyű kúpnak* nevezzük.

A fent bevezetett *Hilbert-kúp* fogalma megadja azt a keretet, amelyben egy általános, végtelen-dimenziós operátor „pozitívnak” tekinthető. Most kimondjuk a Perron-Frobenius tételt végtelen dimenziós Hilbert-térben. A fejezet hangsúlya az inverz tételen van, így ezt a tételt most nem bizonyítjuk.

2. Tétel. (*Perron-Frobenius Hilbert-tereken*). Legyen $\mathcal{H}$ egy valós Hilbert-tér, és C egy $\mathcal{H}$ -beli Hilbert-kúp. Továbbá legyen $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy pozitív önadjungált operátor, amely megőrzi a pozitivitást C -re nézve. Tegyük fel, hogy $\|A\|$ az A operátor sajátértéke. Ekkor a két állítás ekvivalens:

- (i) A ergodikus C -re.
- (ii) Létezik olyan $w \in C_{>0}$, hogy $\ker(\|A\|I - A) = \mathbb{R}w$, ahol I az identitás operátort, $\ker(T)$ egy adott T operátor kernelét és $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát jelöli.

Tekintsük a fenti tételhez kapcsolódó inverz problémát: Ha adott egy A pozitív önadjungált operátor egy egyszeres $\|A\|$ sajátértékkel, akkor létezik-e olyan C Hilbert-kúp, hogy A megőrzi (javítja) a pozitivitást C -re nézve. A következőkben kimondjuk és bebizonyítjuk a fejezet legfontosabb eredményét, miszerint ha egy A pozitív, önadjungált operátor legnagyobb sajátértéke egyszeres, és a hozzá tartozó sajátvektorra épített $P(u_0)$ kúpot nézzük, akkor A ezen a kúpon nemcsak megőrzi, hanem *javítja* is a pozitivitást: minden nem nulla $u \in P(u_0)$ -ra Au pozitív, és az u_0 sajátvektorra épített kúp szerint szigorúan pozitív vektorok a kúp belsejében vannak.

3. Tétel.

Legyen $\mathcal{H}$ egy valós Hilbert-tér, és $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy pozitív, önadjungált operátor. Tegyük fel továbbá, hogy $\|A\|$ egyszeres sajátértéke A -nak, és legyen $u_0 \in \ker(\|A\|I - A)$ egy egységvektor. Ekkor A a $P(u_0)$ kúpra nézve pozitivitás-javító operátor.

Geometriailag a fenti tétel azt jelenti, hogy az $AP(u_0)$ kép a $P(u_0)$ kúpnál „hegyesebb” alakot ölt.

Bizonyítás. Legyen $u \in P(u_0) \setminus \{0\}$. Ekkor

$$\langle u_0, Au \rangle = \langle Au_0, u \rangle = \|A\| \langle u_0, u \rangle \geq \|A\| \frac{\|u\|}{\sqrt{2}} \geq \frac{\|Au\|}{\sqrt{2}}.$$

Így A megtartja a pozitivitást a $P(u_0)$ kúpra nézve.

Ha viszont

$$u \in \ker(\|A\|I - A),$$

akkor az előbbi egyenlőtlenség során $\|A\|\langle u_0, u \rangle = \|Au\|$, ami azt eredményezi, hogy $Au \in \text{int } P(u_0)$.

Másrészt

$$\|Au\| < \|A\|\|u\| \iff u \notin \ker(\|A\|I - A),$$

és ekkor

$$\langle u_0, Au \rangle > \frac{\|Au\|}{\sqrt{2}}$$

is teljesül.

□

Az alábbi, 4. tétel kiterjeszti az 3. tétel eredményét: ha az u_0 tengelyvektor helyett egy közel eső u_1 egységvektort választunk úgy, hogy $\|u_1 - u_0\| < 1/\sqrt{2}$, akkor az ergodikus tulajdonság megmarad: az A operátor többszöri iterációja esetén minden $P(u_1)$ -beli vektor „összemosódik” a tengely irányába.

4. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy valós Hilbert-tér, és $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy pozitív, önadjungált operátor. Tegyük fel, hogy $\|A\|$ egyszeres sajátértéke A -nak, és legyen $u_0 \in \ker(\|A\|I - A)$ egy egységvektor. Ekkor bármely $u_1 \in \mathcal{H}$ egységvektor esetén, amelyre*

$$\|u_1 - u_0\| < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

az A operátor ergodikus a $P(u_1)$ kúpra nézve.

A geometriai magyarázat a következő: a korábbiakban láttuk, hogy A ergodikus a $P(u_0)$ kúpra. Ennek következményeként A -t többszörösen alkalmazva $\mathcal{H}$ -beli vektorokra, csak a u_0 irányába eső komponens marad meg. Ha az új tengelyvektor, u_1 elég közel van u_0 -hoz (azaz $u_0 \in P(u_1)$), akkor A továbbra is ergodikus a $P(u_1)$ kúpra.

Bizonyítás. Legyenek $u, v \in P(u_1) \setminus \{0\}$. Ekkor

$$\left\langle u, \frac{A^{2n}v}{\|A\|^{2n}} \right\rangle = \left\langle \frac{A^n u}{\|A\|^n}, \frac{A^n v}{\|A\|^n} \right\rangle \longrightarrow \langle u_0, u \rangle \langle u_0, v \rangle = \langle u_0, u \rangle \langle u_0, v \rangle \quad (n \rightarrow \infty).$$

Így az ergodicitás igazolásához elég belátni, hogy bármely $u \in P(u_1) \setminus \{0\}$ esetén

$$\langle u_0, u \rangle > 0.$$

Valóban,

$$\langle u_0, u \rangle = \langle u_0 - u_1, u \rangle + \langle u_1, u \rangle \geq -\|u_0 - u_1\| \|u\| + \frac{\|u\|}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \|u_0 - u_1\| \right) \|u\| > 0,$$

mivel $\|u_0 - u_1\| < 1/\sqrt{2}$. □

Az 3. tételben az A operátor a $P(u_0)$ kúpra nézve pozitivitás-javítóként került jellemzésre. A 4. tételben azonban, amikor az u_0 tengelyvektor perturbációjáról van szó, csupán az ergodicitás gyengébb tulajdonsága őrződik meg, nem pedig a korábban említett pozitivitás-javítás. Feltéve, hogy A spektrális réssel rendelkezik (azaz van szigorúan kisebb második sajátérték), az alábbi, 5. tétel megmutatja, hogy a

pozitivitás-javítás még kis perturbációk esetén is fennmarad, pontosabban a kúp tengelyének elmozdítása megengedhető $\|u_1 - u_0\| < r(\alpha)$ mértékig, ahol az r és az $\alpha := \lambda_1/\|A\|$ a spektrális rés nagyságától függ. A bizonyításhoz szükségünk lesz két lemmára is.

5. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ egy valós Hilbert-tér, és legyen $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ egy pozitív, ön-adjungált operátor. Tegyük fel, hogy $\|A\|$ egyszeres sajátértéke A -nak, és legyen $u_0 \in \ker(\|A\|I - A)$ egy egységvektor. Továbbá tegyük fel, hogy*

$$\lambda_1 := \sup_{\substack{u \in (\ker(\|A\|I - A))^\perp \\ \|u\|=1}} \langle u, Au \rangle < \|A\|.$$

Ekkor bármely $u_1 \in \mathcal{H}$ egységvektor esetén, amelyre

$$\|u_1 - u_0\| < r,$$

az operátor A pozitivitás-javító a $P(u_1)$ kúpra nézve. Itt

$$r := \frac{1 - \alpha^2}{4\sqrt{2}(1 + \alpha^2)}, \quad \alpha := \frac{\lambda_1}{\|A\|}.$$

Geometriai szemszögből a spektrális rés jelenléte azt indukálja, hogy az úgynevezett „felső féltér”:

$$\{u \in \mathcal{H} \mid \langle u_0, u \rangle > 0\},$$

(ahol u_0 felfelé mutat) az A operátor hatására u_0 irányában jelentős összeszűkülést szenved. Következésképp, ha a tengelyvektor perturbációja elég kicsi, vagy u_1 elég közel van u_0 -hoz, akkor az $P(u_1)$ kúp képe A hatására hasonló összeszűkülést mutat. Ez az észrevétel összhangban van azzal, hogy A pozitivitás-javító operátorként viselkedik a $P(u_1)$ kúpra nézve.

Hogy bebizonyítsuk a fenti tételt, két lemmára van szükségünk:

6. *Lemma.* Ugyanazokkal a feltevésekkel, mint az 5-ös tételben, a következő igaz: Legyen $u \in \mathcal{H}$ és $t \geq 1$. Ha

$$\langle u_0, u \rangle \geq \frac{1}{t} \|u\|,$$

akkor

$$\langle u_1, Au \rangle \geq \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}(t^2-1)} - \|u_1 - u_0\| \right) \|Au\|.$$

Bizonyítás. Legyen az ortogonális felbontás

$$u = \langle u_0, u \rangle u_0 + u', \quad u' \perp u_0.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \|Au\|^2 &= \|A\|^2 \langle u_0, u \rangle^2 + \|Au'\|^2 \\ &\leq \|A\|^2 \langle u_0, u \rangle^2 + \lambda_1^2 \|u'\|^2 \\ &= \|A\|^2 \langle u_0, u \rangle^2 + \lambda_1^2 (\|u\|^2 - \langle u_0, u \rangle^2) \\ &\leq \{\|A\|^2 + \lambda_1^2(t^2 - 1)\} \langle u_0, u \rangle^2. \end{aligned}$$

Így

$$\langle u_0, Au \rangle = \|A\| \langle u_0, u \rangle \geq \frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2 + \lambda_1^2(t^2 - 1)}} \|Au\| = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2(t^2 - 1)}} \|Au\|.$$

Végül

$$\langle u_1, Au \rangle = \langle u_1 - u_0, Au \rangle + \langle u_0, Au \rangle \geq -\|u_1 - u_0\| \|Au\| + \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2(t^2 - 1)}} \|Au\|,$$

amiből az állítás következik. $\square$

A következő lemma triviális, így bizonyítását elhagyjuk:

7. *Lemma.* Legyen $c > 0$. Tekintsük a

$$g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := x^4 - 2x^2 + cx - \frac{1}{4}$$

függvényt. Ekkor ha

$$x < \min\{c/4, 1/(4c)\},$$

akkor $g(x) < 0$.

Bizonyítás. [A 5. tétel bizonyítása] Hasonlóan a 4. tétel utolsó részéhez, meggyezzük, hogy

$$P(u_1) \subset \{u \in \mathcal{H} \mid \langle u_0, u \rangle \geq (\frac{1}{\sqrt{2}} - \|u_1 - u_0\|) \|u\|\}.$$

Ha most

$$t = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \|u_1 - u_0\|\right)^{-1},$$

akkor a 6. lemmát alkalmazva elegendő belátni, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 \{(1/\sqrt{2} - \|u_1 - u_0\|)^{-2} - 1\}}} - \|u_1 - u_0\| > \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.1)$$

Legyen most g a fenti 7. lemmában definiált függvény. Ha

$$c = \frac{\sqrt{2}(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2},$$

akkor a (4.1) egyenlőtlenség épp ekvivalens azzal, hogy $g(\|u_1 - u_0\|) < 0$. A 7. lemma alapján ez teljesül, és ezzel a 5. tétel bizonyítása befejeződik. $\square$

5. fejezet

A komplex Perron-Frobenius tétel

Ebben a fejezetben a Perron–Frobenius-tétel komplex mátrixokra történő kiterjesztéseinek (I. és II. típus) elemzését mutatjuk be [2] alapján. Kimondunk és bebizonyítunk olyan fő állításokat és tulajdonságokat, amelyek segítségével átfogó képet kapunk az I. illetve II. típusú Perron–Frobenius-tulajdonsággal rendelkező komplex mátrixokról.

Megjegyezzük továbbá, hogy mivel egy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma megegyezik A^T spektrumával, míg A^* spektruma az A sajátértékeinek konjugáltjaiból áll, sok alábbi eredmény egyaránt alkalmazható A^T -re, illetve A^* sajátértékeire is abban az esetben, ha A szigorúan domináns (abszolútértékben) pozitív sajátértékkel rendelkezik.

Elemzésünket azzal kezdjük, hogy bizonyítunk néhány tulajdonságot, amelyek jellemzik azokat a mátrixokat, melyek:

- rendelkeznek (erős) Perron–Frobenius-tulajdonsággal, vagy
- rendelkeznek (erős) komplex Perron–Frobenius-tulajdonsággal.

I. típusú kiterjesztések: tiszta Perron–Frobenius–tulajdonság

A részletes tárgyaláshoz szükségünk lesz néhány definícióra.

10. Definíció.

Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, és jelölje $\rho(A)$ a spektrális sugarat. Azt mondjuk, hogy λ_1 *domináns sajátértéke* A -nak, ha

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_i| \quad \text{minden } i = 2, 3, \dots, n, \quad \text{és} \quad |\lambda_1| = \rho(A).$$

11. Definíció.

Azt mondjuk, hogy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ rendelkezik a *Perron–Frobenius-tulajdonsággal*, ha létezik λ_1 sajátérték, amelyre

$$\lambda_1 = \rho(A) > 0,$$

és létezik hozzá egy nem nulla $\mathbf{x}$ sajátvektor, melynek minden komponense nemnegatív. Ezt a vektort *jobb Perron–Frobenius-sajátvektornak* nevezzük.

12. Definíció.

Azt mondjuk, hogy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ rendelkezik az *erős Perron–Frobenius-tulajdonsággal*, ha van egy egyszeres sajátértéke λ_1 , melyre

$$\lambda_1 = \rho(A) > 0, \quad |\lambda_1| > |\lambda_i| \quad \text{minden } i = 2, 3, \dots, n,$$

és a hozzá tartozó sajátvektor ($\mathbf{x}$) komponensei szigorúan pozitívak. Ezt a vektort *erős jobb Perron–Frobenius-sajátvektornak* nevezzük.

A következő tétel megmutatja, hogy ha egy komplex A mátrix rendelkezik a klasszikus Perron–Frobenius-tulajdonsággal (pozitív domináns sajátérték és nemnegatív sajátvektor), akkor a hatványai felbonthatók valós és képzetes részre úgy, hogy a képzetes rész, $A_{k,2}$ kinullázza a Perron-vektort: $A_2^k \mathbf{x} = 0$.

8. Tétel.

Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ rendelkezik a Perron–Frobenius-tulajdonsággal a $(\rho(A), \mathbf{x})$ sajátérték-sajátvektor párral. Legyen k egy tetszőleges pozitív egész, és tekintsük az

$$A^k = A_{k,1} + i A_{k,2},$$

felírást, ahol $A_{k,1}, A_{k,2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor minden k -ra

$$A_{k,2} \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Bizonyítás. Mivel $(\rho(A), \mathbf{x})$ sajátérték-sajátvektor pár, és $k \geq 1$ egész szám, teljesül:

$$A^k \mathbf{x} = (A_{k,1} + i A_{k,2}) \mathbf{x} = A_{k,1} \mathbf{x} + i A_{k,2} \mathbf{x} = (\rho(A))^k \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy $i A_{k,2} \mathbf{x} = 0$, azaz $A_{k,2} \mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

II. típusú kiterjesztések: komplex komponensek torzítása

A 9. tételben igazoljuk, hogy ha mind A , mind A^* domináns sajátértéke egyszeres, és a hozzájuk tartozó bal- és jobboldali sajátvektorok a komplex jobb fűlsíkra esnek, akkor létezik θ , amelyre

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \operatorname{Re}(e^{i\theta} A^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \text{nemnegatív mátrix}.$$

Geometriaiban értelmeiben a mátrix hatványai egy jól irányzott forgatással aszimptotikusan „pozitívan” rendeződnek.

A tétel precíz kimondásához és bizonyításához szükségünk lesz néhány további definícióra.

13. Definíció.

Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Azt mondjuk, hogy A rendelkezik a *komplex Perron-Frobenius-tulajdonsággal*, ha van egy domináns sajátértéke

$$\lambda_1 = \rho(A) > 0,$$

és hozzá felvehető olyan $\mathbf{x}$ (nem nulla) oszlop-sajátvektor, hogy

$$\operatorname{Re}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0},$$

azaz ha $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, akkor $\operatorname{Re}(x_j) \geq 0$ minden $j = 1, 2, \dots, n$ -re. Ezt a vektort *komplex jobb Perron-Frobenius-sajátvektornak* nevezzük.

Az előző definícióban megfogalmazott feltétel, miszerint $\operatorname{Re}(x_j) \geq 0$ minden j -re, a sajátvektor komponenseit a zárt jobb félsíkra helyezi. Megjegyezzük, hogy a definíció tovább általánosítható úgy, hogy egy valós θ -ra teljesüljön, hogy

$$\operatorname{Re}(e^{i\theta} \mathbf{x}) \geq 0.$$

14. Definíció.

Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Azt mondjuk, hogy A rendelkezik az *erős komplex Perron-Frobenius-tulajdonsággal*, ha van egy egyszeres, domináns sajátértéke

$$\lambda_1 = \rho(A) > 0, \quad |\lambda_1| > |\lambda_i| \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

és hozzá tartozik egy $\mathbf{x}$ oszlop-sajátvektor, amelyre

$$\operatorname{Re}(\mathbf{x}) > 0,$$

azaz $\operatorname{Re}(x_j) > 0$ minden $j = 1, 2, \dots, n$ -re. Ezt a vektort *erős komplex jobb Perron-Frobenius-sajátvektornak* nevezzük.

Most következzenek a tételünk:

9. Tétel.

Tegyük fel, hogy mind $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, mind A^* rendelkezik a komplex Perron-Frobenius-tulajdonsággal, továbbá a domináns sajátérték

$$\lambda_1 = \rho(A) = \rho(A^*)$$

egyszeres, és

$$\lambda_1 > |\lambda_i(A)| = |\lambda_i(A^*)| \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Legyenek továbbá $\mathbf{x}$ és $\mathbf{z}$ a jobb, illetve bal Perron-Frobenius-sajátvektorok, amelyekre

$$\operatorname{Re}(\mathbf{x}) \geq |\operatorname{Im}(\mathbf{x})| \quad \text{és} \quad \operatorname{Re}(\mathbf{z}) \geq |\operatorname{Im}(\mathbf{z})|.$$

Ekkor létezik egy $\theta \in [-\pi, \pi]$ úgy, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} \operatorname{Re}(e^{i\theta} A^k) \geq 0,$$

ahol a jobb oldalon szereplő 0 alatt az $n \times n$ nullmátrixot értjük.

Bizonyítás. Legyenek $X, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ olyan mátrixok, hogy $\det X \neq 0$ és

$$A = X D X^{-1},$$

ahol D az A Jordan-kanonikus alakja. Feltesszük, hogy a domináns sajátérték λ_1 a D első diagonális eleme, így

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D_{n-1,n-1} \end{bmatrix}, \quad X = [\mathbf{x} \mid X_{n,n-1}], \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^* \\ Y_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{x}$ a jobb Perron-Frobenius sajátvektor és egyben X első oszlopa, $X_{n,n-1}$ pedig a maradék $n-1$ oszlop. Hasonlóan $\mathbf{y}^*$ az első sora, $Y_{n-1,n}$ pedig a maradék sorai X^{-1} -nek. Természetesen $\mathbf{y}$ baloldali sajátvektora A -nak, ezért, feltéve, hogy $\mathbf{z}$ egyértelmű,

$$\mathbf{y} = c \mathbf{z} = \alpha e^{i\theta} \mathbf{z}, \quad \alpha > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

továbbá $\mathbf{y}^*$ az első sora X^{-1} -nek és $X^{-1}X = I$, ezért $\mathbf{y}^*\mathbf{x} = 1$, amiből kapjuk, hogy

$$\mathbf{z}^*\mathbf{x} = \frac{1}{\alpha} e^{i\theta}.$$

A következőkben használjuk a tételben megfogalmazott feltételt, hogy $\operatorname{Re}(\mathbf{x}) \geq |\operatorname{Im}(\mathbf{x})|$ és $\operatorname{Re}(\mathbf{z}) \geq |\operatorname{Im}(\mathbf{z})|$. Ebből következik, hogy $\operatorname{Re}(\mathbf{z}^*\mathbf{x}) \geq 0$, ezért $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Tekintsük most A Jordan-kanonikus alakját, és annak k -adik hatványra emelését:

$$A^k = X D^k X^{-1} = [\mathbf{x} \mid X_{n,n-1}] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & D_{n-1,n-1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^* \\ Y_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

Továbbá $\lambda_1 > 0$ miatt ezzel egyenértékű, hogy

$$\frac{1}{\lambda_1^k} A^k = X D^k X^{-1} = [\mathbf{x} \mid X_{n,n-1}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1^k} D_{n-1,n-1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^* \\ Y_{n-1,n} \end{bmatrix},$$

Mivel λ_1 az egyetlen sajátérték a $\{w \in \mathbb{C} : |w| = \lambda_1\}$ körén, és a többi Jordan-blokk spektruma abszolútértékben kisebb, következik, hogy

$$\frac{1}{\lambda_1^k} D_{n-1,n-1}^k \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Így

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} A^k = \mathbf{x} \mathbf{y}^* = \alpha e^{-i\theta} \mathbf{x} \mathbf{z}^*,$$

és ebből adódik, hogy

$$\operatorname{Re} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} e^{i\theta} A^k \right) = \Re(\alpha \mathbf{x} \mathbf{z}^*) \geq 0.$$

Ezzel a tételt beláttuk. □

Megjegyezzük, hogy a tételben és annak bizonyításában szerepet játszik a jobb és bal Perron–Frobenius-sajátvektorok speciális választása, miszerint teljesül rájuk, hogy

$$\mathbf{y}^* \mathbf{x} = 1.$$

Ezeket a vektorokat *normalizált sajátvektoroknak* nevezzük, és ezt a kifejezést a fejezet során következetesen alkalmazzuk.

Erősebb konvergencia és belső nemnegativitás

A következő tételben azt mutatjuk be, hogy ha ráadásul az erős Perron–Frobenius-tulajdonság is fennáll (szigorú spektrális rés és pozitív komponensek), akkor egy küszöböt meghaladó $k \geq k_0$ esetén már maga $\operatorname{Re}(A^k)$ is szigorúan nemnegatív.

10. Tétel.

Tegyük fel, hogy mind $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, mind A^ rendelkezik a komplex Perron–Frobenius-tulajdonsággal, a domináns sajátérték*

$$\lambda_1 = \rho(A) = \rho(A^*)$$

egyszeres, továbbá

$$\lambda_1 > |\lambda_i(A)| = |\lambda_i(A^*)| \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Legyenek $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a megfelelően normalizált jobb, illetve bal Perron–Frobenius-sajátvektorok. Ekkor

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1^k} A^k = \mathbf{x} \mathbf{y}^T \geq 0.$$

Továbbá, ha A és A^* egyaránt erős Perron–Frobenius-tulajdonsággal rendelkeznek, akkor létezik egy pozitív egész k_0 , hogy minden $k \geq k_0$ esetén

$$\operatorname{Re}(A^k) > 0.$$

Vázlat a bizonyításhoz. A bizonyítás analóg az előző tételével, ezért itt elhagyjuk. Megjegyezzük azonban, hogy ha A nem erős Perron–Frobenius-tulajdonságú, akkor az oszlopok között előfordulhat nulla komponens, és ennek következtében $\frac{1}{\lambda_1^k} A^k \rightarrow 0$ oszlopaiban nem feltétlenül marad meg a nemnegativitás. $\square$

Kombinatorikus előkészületek és a “fordított” irány

A következő két lemma a komplex exponenciálisok speciális összegzését szabályozza, amely kulcs a 13. tétel bizonyításához: ha A nem nilpotens és $\operatorname{Re}(A^k) \geq 0$ minden elég nagy k -ra, akkor automatikusan visszkapjuk, hogy A és A^* komplex Perron–Frobenius-tulajdonsággal bírnak.

A következő lemma, egy kombinatorikus eredmény, amely a valós számok arkhimédészi tulajdonságán alapul [7].

11. *Lemma.*

Legyen θ egy valós szám, amelyre $0 < \theta < 2\pi$, és legyen k_0 egy pozitív egész. Ekkor léteznek $\{k_j\}_{j=1}^4$ egész számok és $\{m_j\}_{j=1}^4$ nemnegatív egész számok úgy, hogy $k_j \geq k_0$ minden $j = 1, 2, 3, 4$ esetén, és teljesülnek a következők:

- (i) $0 \leq k_1\theta - 2m_1\pi \leq \frac{\pi}{2},$
- (ii) $\frac{\pi}{2} \leq k_2\theta - 2m_2\pi \leq \pi,$
- (iii) $\pi \leq k_3\theta - 2m_3\pi \leq \frac{3\pi}{2},$
- (iv) $\frac{3\pi}{2} \leq k_4\theta - 2m_4\pi \leq 2\pi.$

Bizonyítás. Különböztessünk meg két esetet.

1. eset. $\alpha := \frac{\theta}{2\pi}$ irracionális szám. Ekkor a $k\alpha$ törtrészeiből álló halmaz sűrű a $[0, 1]$ intervallumban. Igaz marad ez akkor is, ha a $k \geq k_0$ egész számokra szorítkozunk. Tehát alkalmas $k_1, m_1, k_2, m_2, k_3, m_3, k_4, m_4$ választás mellett ezen törtrész értéke a $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$ intervallumba esik.

2. eset. $\alpha = \frac{p}{q}$ racionális szám, ahol p és q relatív prímek, $p < q$. Írjuk fel k értékét a q szerint vett maradékos osztás alapján $k = aq + b$ alakban. Ekkor $k\alpha = ap + \frac{bp}{q}$. Itt most ap már egész szám, amelyik tetszőlegesen nagy lehet. Ugyanakkor a $\frac{bp}{q}$ alakú számok törtrészei a $0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$ számok. Ezért alkalmas b választással elérhető, hogy rendre a fenti intervallumokba essék ennek értéke.

□

A következő lemma lényegében általánosítja az előző eredményét.

12. *Lemma.* Legyenek $\{\theta_j\}_{j=1}^q$ valós számok úgy, hogy

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < 2\pi,$$

legyenek $\{c_j\}_{j=1}^q$ komplex számok, nem mind nulla, és legyen k_0 egy adott pozitív egész. Ekkor létezik olyan egész $k \geq k_0$, hogy

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^q c_j e^{ik\theta_j}\right) < 0.$$

Bizonyítás. Először $q = 1$ esetén bizonyítjuk az állítást. Ebben az esetben $c_1 \neq 0$, és legyen $c_1 = |c_1|e^{i\phi_1}$, ahol $0 < \phi_1 \leq 2\pi$. Ekkor

$$c_1 e^{ik\theta_1} = |c_1| e^{i(k\theta_1 + \phi_1)}.$$

Tegyük fel először, hogy $0 < \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$. Az előző lemma (ii) pontja biztosítja, hogy léteznek $k_2 \geq k_0$ és $m_2 \geq 0$ egészek úgy, hogy

$$2m_2\pi + \frac{\pi}{2} \leq k_2\theta_1 < 2m_2\pi + \pi.$$

Ebből következik, hogy

$$2m_2\pi + \frac{\pi}{2} < k_2\theta_1 + \phi_1 \leq 2m_2\pi + \frac{3\pi}{2},$$

és így $\operatorname{Re}(c_1 e^{ik_2\theta_1}) < 0$. Ha egyenlőség állna fenn, azaz $k_2\theta_1 + \phi_1 = 2m_2\pi + \frac{3\pi}{2}$ esetén, akkor válasszuk k -t úgy, hogy $k = 2k_2$, amiből $k\theta_1 + \phi_1 = 4m_2\pi + \pi$, és így $\operatorname{Re}(c_1 e^{ik\theta_1}) < 0$. A maradék három eset ($\frac{\pi}{2} < \theta_1 \leq \pi$, stb.) bizonyítása ezzel analóg módon történik, az előző lemma másik három egyenlőtlenségének alkalmazásával. Tehát a $q = 1$ esetre a lemma állítása teljesül.

Általánosan, $q > 1$ esetén a bizonyítás indukcióval történik. Tegyük fel, hogy a lemma igaz minden j -re $1 \leq j \leq q - 1$ esetén (ahol $q \geq 2$), és tekintsük a q -adik esetet. Indirekt módon tegyük fel, hogy

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^q c_j e^{ik\theta_j}\right) \geq 0 \quad \forall k \geq k_0. \quad (5.1)$$

Most tegyük fel, hogy valamely θ_j , mondjuk θ_1 racionális többszöröse 2π -nek, azaz

$$\theta_1 = \frac{p}{\ell} 2\pi, \quad p, \ell \in \mathbb{Z}, \quad p < \ell.$$

Mivel a feltételezett egyenlőtlenség

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^q c_j e^{ik\theta_j}\right) \geq 0 \quad \forall k \geq k_0,$$

így érvényes $k, k+1, \dots, k+\ell-1$ mindegyikére. Ezek összeadásával kapjuk

$$\operatorname{Re}\left(c_1 \sum_{j=0}^{\ell-1} e^{i(k+j)\frac{p}{\ell}2\pi} + c_2 \sum_{j=0}^{\ell-1} e^{i(k+j)\theta_2} + \dots + c_q \sum_{j=0}^{\ell-1} e^{i(k+j)\theta_q}\right) \geq 0.$$

A baloldali első összeget írjuk át:

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} e^{i(k+j)\frac{p}{\ell}2\pi} = e^{ik\frac{p}{\ell}2\pi} \sum_{j=0}^{\ell-1} z^j, \quad z := e^{i\frac{p}{\ell}2\pi}.$$

Mivel $z^\ell = 1$, a geometriai sor összege

$$\sum_{j=0}^{\ell-1} z^j = \frac{1 - z^\ell}{1 - z} = 0.$$

Így az c_1 -hez tartozó tag kiesik, és a bal oldali összeg ténylegesen csak $q - 1$ tagból áll. Ezért, ha a

$$\tilde{c}_h = c_h \sum_{j=0}^{\ell-1} e^{ij\theta_h}, \quad h = 2, \dots, q$$

együtthatók mellett — az indukciós feltevést alkalmazva — úgy választjuk meg k értékét a $\theta_2, \dots, \theta_q$ számokhoz, azaz

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=2}^q \tilde{c}_j e^{ik\theta_j}\right) < 0,$$

akkor ellentmondásra jutunk.

A bizonyítás fennmaradó, irracionális szögekkel foglalkozó része meglehetősen terjedelmes, ezért itt most nem ismertetjük. $\square$

A fenti két lemma segítségével bizonyítható a következő fontos tétel.

13. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nem nilpotens, azaz $A^k \neq 0$ minden pozitív egész k esetén, és tegyük fel, hogy létezik egy $k_0 > 0$ egész szám, amire*

$$\operatorname{Re}(A^k) > 0 \quad \text{minden } k \geq k_0 \text{ esetén.}$$

Ekkor mind A , mind az adjungált transzponáltja, A^ , rendelkezik a komplex Perron-Frobenius-tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Először azt bizonyítjuk, hogy létezik egy pozitív sajátérték, jelöljük ezt λ_1 -gyel, amely megfelel az A spektrálsugarának. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy léteznek olyan sajátértékek $\lambda_j = |\lambda_1|e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2, \dots, s$, $r_j > 0$ multiplicitással, ahol $0 < \theta_j < 2\pi$, továbbá feltesszük, hogy $|\lambda_1| > 0$. Legyen r az ezekhez a sajátértékekhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk dimenziója, és tegyük fel, hogy ez az első m sajátértékre vonatkozik, azaz $\lambda_j = |\lambda_1|e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2, \dots, m$; $m \leq s$. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy minden sajátértékhez pontosan egy ilyen legnagyobb blokk tartozik. Vegyük az A^k Jordan-kanonikus alakját, és osszuk fel úgy, hogy

$$A^k = [X_{rm} \mid X_{n-rm}] \begin{bmatrix} D_{rm}^k & 0 \\ 0 & D_{n-rm}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{rm}^* \\ Y_{n-rm} \end{bmatrix},$$

ahol D_{rm} az $rm \times rm$ -es blokk diagonális mátrix, amely az m darab, $r \times r$ -es Jordan-blokkjait tartalmazza λ_j -nek, $j = 1, 2, \dots, m$, és D_{n-rm}^k az $(n - rm) \times (n - rm)$ -es blokk diagonális mátrix ami tartalmazza a többi Jordan-blokkot. Így D_{rm}^k előállítható a következő mátrixok direktösszegéből:

$$J_j^k = \begin{pmatrix} \lambda_j^k & \binom{k}{1}\lambda_j^{k-1} & \cdots & \binom{k}{r-1}\lambda_j^{k-r+1} \\ 0 & \lambda_j^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \binom{k}{1}\lambda_j^{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_j^k \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Ha J_j^k -t elosztjuk $|\lambda_1|^{k-r+1} \binom{k}{r-1}$ -gyel, akkor

$$\frac{J_j^k}{|\lambda_1|^{k-r+1} \binom{k}{r-1}}$$

minden eleme tart 0-hoz, ha k tart végtelenhez, kivéve

$$\frac{(J_j^k)_{1r}}{|\lambda_1|^{k-r+1} \binom{k}{r-1}} = e^{i(k-r+1)\theta_j}.$$

Természetesen D_{n-rm}^k -ra teljesül, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_1|^{k-r+1} \binom{k}{r-1}} D_{n-rm}^k = 0.$$

Tehát $\frac{1}{|\lambda_1|^{k-r+1} \binom{k}{r-1}} A^k$ minden elegendően nagy k esetén úgy viselkedik, mint az $X_{rm} E_k Y_{rm}^*$ mátrix, ahol

$$E_k = \bigoplus_{j=1}^m \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & e^{i(k-r+1)\theta_j} \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $Re(A^k) > 0$ minden $k \geq k_0$ esetén, következik, hogy $Re(X_{rm} E_k Y_{rm}^H) \geq 0$ minden elég nagy k -ra.

Másrészt

$$\begin{aligned} X_{rm} E_k Y_{rm}^* &= \\ &= e^{i(k-r+1)\theta_1} \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_r^* + e^{i(k-r+1)\theta_2} \mathbf{x}_{r+1} \mathbf{y}_{2r}^* + \dots + e^{i(k-r+1)\theta_m} \mathbf{x}_{(m-1)r+1} \mathbf{y}_{mr}^* = \\ &= C_1 e^{i(k-r+1)\theta_1} + C_2 e^{i(k-r+1)\theta_2} + \dots + C_m e^{i(k-r+1)\theta_m}, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{x}_{(j-1)r+1}$ és $\mathbf{y}_{jr}$ az A -nak bal- és jobboldali sajátvektorai a megfelelő λ_j -hez, $C_j = \mathbf{x}_{(j-1)r+1} \mathbf{y}_{jr}^*$. Ennek a mátrixnak minden nullától eltérő eleme a 11. lemmában megfogalmazott összefüggés szerinti összeg alakját ölti ($Re(\sum_{j=1}^q c_j e^{ik\theta_j}) < 0.$), így a 11. lemma alapján létezik olyan elég nagy k , amelynél ez az eleme $X_{rm} E_k Y_{rm}^H$ -nak és következésképp az A^k megfelelő eleme valós részében negatívvá válik, ami ellentmond a feltevésünknek. Következésképp létezik egy pozitív sajátérték, amely a spektrális sugárnak felel meg, ami azt jelenti, hogy az elemzés során szereplő θ_j -k közül legalább egynek a folyamata során nulla a valós része.

Tegyük fel most, hogy $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_q = 0$, a többi $\neq 0$. Ugyanígy gondolkodva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} B_k &= X_{rm} E_k Y_{rm}^* \\ &= \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_r^* + \mathbf{x}_{r+1} \mathbf{y}_{2r}^* + \dots + \mathbf{x}_{(q-1)r+1} \mathbf{y}_{qr}^* \\ &\quad + e^{i(k-r+1)\theta_{q+1}} \mathbf{x}_{qr+1} \mathbf{y}_{(q+1)r}^* + e^{i(k-r+1)\theta_{q+2}} \mathbf{x}_{(q+1)r+1} \mathbf{y}_{(q+2)r}^* \\ &\quad + \dots + e^{i(k-r+1)\theta_m} \mathbf{x}_{(m-1)r+1} \mathbf{y}_{mr}^* \\ &= C + C_1 e^{i(k-r+1)\theta_{q+1}} + \dots + C_{m-q} e^{i(k-r+1)\theta_m}, \end{aligned}$$

ahol $C = \sum_{j=1}^q C_j$ és $\operatorname{Re}(B_k) \geq 0$ minden elég nagy k esetén. A 11. lemma alapján, a

$$Z_k := C_1 e^{i(k-r+1)\theta_{q+1}} + C_2 e^{i(k-r+1)\theta_{q+2}} + \dots + C_{m-q} e^{i(k-r+1)\theta_m}$$

mátrix minden nemnulla eleme esetén létezik elég nagy k , amelynél ez az elem negatívvá válik. Így C valós része szükségszerűen nemnegatív.

Szorozzuk meg jobbról az C mátrixot az $\mathbf{e}$ oszlopvektorral, amelynek minden komponense 1. Ekkor $\operatorname{Re}(C) \geq 0$ azt implikálja, hogy $\operatorname{Re}(C\mathbf{e}) \geq 0$. Másrészt $\mathbf{e}$ felírható az

$$X = [X_{rm} \mid X_{n-rm}]$$

mátrix oszlopainak lineáris kombinációjaként: $\mathbf{e} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}_j$. Ekkor

$$C\mathbf{e} = (\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_r^* + \mathbf{x}_{r+1} \mathbf{y}_{2r}^* + \dots + \mathbf{x}_{(q-1)r+1} \mathbf{y}_{qr}^*) \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{x}_j.$$

Így:

$$C\mathbf{e} = c_r \mathbf{x}_1 + c_{r+1} \mathbf{x}_{r+1} + \dots + c_{qr} \mathbf{x}_{(q-1)r+1},$$

mivel $\mathbf{y}_j^* \mathbf{x}_l = 0$, ha $j \neq l$, és 1, ha $j = l$. Az utolsó összeget az A operátor λ_1 -hez tartozó q darab jobboldali sajátvektorának lineáris kombinációjaként írhatjuk föl. Mivel egyazon sajátértékhez tartozó sajátvektorok tetszőleges lineáris kombinációja szintén sajátvektor, $C\mathbf{e}$ az λ_1 -hez tartozó sajátvektor. Így a pozitív λ_1 sajátértékhez létezik olyan jobboldali sajátvektor, amelynek valós része nemnegatív, ami azt jelenti, hogy A rendelkezik a komplex Perron–Frobenius tulajdonsággal.

A^* esetén a bizonyítást analóg módon kapjuk: balról szorozzuk C -t az $\mathbf{e}^T$ vektorral, és $\mathbf{e}$ -t felírjuk az $\mathbf{y}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ezzel a bizonyítás teljes.

□

Az eddigi eredmények összegzése: a „pozitivitás” általánosítása

Mindkét cikk a mátrixpozitivitás klasszikus fogalmának kiterjesztésére törekszik, de ezt egymást kiegészítő módon teszik.

A végtelen-dimenziós részben Tomioka bevezeti a Hilbert-kúpokat valós Hilbert-terekben – ezek zárt, önduális konvex kúpok, amelyek geometriailag az u_0 tengelyvektor segítségével ragadják meg a „pozitivitás” fogalmát. A fő inverz Perron–Frobenius eredmény (3. tétel) kimondja, hogy ha egy A korlátos, pozitív, önadjungált operátornak egyszeres legnagyobb sajátértéke van, akkor fel lehet építeni egy $P(u_0)$ Hilbert-kúpot, amelyre nézve A pozitivitást javító tulajdonságú.

Ezzel szemben Noutsos és Varga a pozitivitást komplex mátrixokra terjesztik ki azáltal, hogy megkövetelik, hogy a domináns sajátvektor valós része a nemnegatív ortánsban feküdjön (komplex Perron–Frobenius tulajdonság, 13. definíció). Tehát:

- Geometriai, kúpalapú pozitivitás (végtelen-dimenziós valós operátorok) esetén a pozitivitás egy kúptengelyvektorral szembeni belső szorzatbeli kikötéseken keresztül érvényesül.
- Valósrészt pozitivitás (véges-dimenziós komplex mátrixok) esetén a pozitivitás a sajátvektor valós részeinek koordinátánkénti nemnegativitásával valósul meg.

Ezek az eltérő formalizálások egyaránt azt a célt szolgálják, hogy a spektrális sugárhoz egyedi, szigorúan pozitív (a választott értelemben vett) sajátvektort garantáljanak.

6. fejezet

Kapcsolat Markov-láncokkal

Ebben a fejezetben a nemnegatív mátrixok és a Markov-láncok kapcsolatára mutatunk egy példát, valamint [3] alapjait felhasználva egy önálló eredményt mutatunk be.

Előzetes definíciók

15. Definíció (Állapottér és átmenetvalószínűség mátrix). Legyen $\mathcal{I}$ egy véges állapotter. A Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixa

$$P = (p_{xy})_{x,y \in \mathcal{I}}, \quad p_{xy} = P(X_{n+1} = y \mid X_n = x),$$

ahol $p_{xy} \geq 0$ és $\sum_{y \in \mathcal{I}} p_{xy} = 1$ minden $x \in \mathcal{I}$ -re.

16. Definíció (Kezdeti eloszlás). A Markov-lánc kezdeti eloszlása legyen

$$q_x = P(X_0 = x), \quad q_x \geq 0, \quad \sum_{x \in \mathcal{I}} q_x = 1.$$

Ekkor az n -edik lépés eloszlása $\mathbf{q}P^n$, azaz

$$P(X_n = x) = [\mathbf{q}P^n]_x.$$

17. Definíció (Irreducibilitás és aperiodicitás). A Markov-lánc *irreducibilis*, ha $\forall x, y \in \mathcal{I}$ létezik $n \geq 1$, hogy $(P^n)_{xy} > 0$. Az $x \in \mathcal{I}$ állapot *periodikus* d_x -periodikussal, ahol

$$d_x = \gcd\{n \geq 1 : (P^n)_{xx} > 0\}.$$

Ha $d_x = 1$, akkor x *aperiodikus*. Irreducibilitás esetén a periódus független x -től.

18. Definíció (Stacionárius eloszlás). A $\pi = (\pi_x)_{x \in \mathcal{I}}$ vektort *stacionárius eloszlásnak* nevezzük, ha

$$\pi_x \geq 0, \quad \sum_x \pi_x = 1, \quad \pi P = \pi, \quad \text{i.e.} \quad \sum_{x \in \mathcal{I}} \pi_x p_{xy} = \pi_y \quad \forall y.$$

Tegyük fel, hogy egy Markov-lánc állapottere az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz, és az átmenetvalószínűségek a p paraméter szerint vannak meghatározva a következő módon: legyen $M(p) = (M_{ij}(p))_{i,j=1}^n$ az az átmenetvalószínűség-mátrix, amelyben

$$M_{i,i+1}(p) = p, \quad M_{i,i-1}(p) = 1 - p \quad (i = 2, \dots, n-1),$$

$$M_{1,1}(p) = 1 - p, \quad M_{1,2}(p) = p, \quad M_{n,n-1}(p) = 1 - p, \quad M_{n,n}(p) = p.$$

Jelöljük $q(p) = (q_1(p), q_2(p), \dots, q_n(p))$ -vel a stacionárius eloszlást, amelyre

$$q(p)M(p) = q(p), \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^n q_i(p) = 1.$$

Definiáljuk továbbá a farok-kumulatív vektort:

$$q'(p) = (s_1(p), s_2(p), \dots, s_n(p)), \quad \text{ahol} \quad s_i(p) = \sum_{j=i}^n q_j(p).$$

Megjegyezzük, hogy $s_1(p) = 1$, míg $s_i(p)$ a magasabb állapotok valószínűségeinek összegét adja meg.

Azt szeretnénk megmutatni, hogy két paraméter esetén, ha $p^* > p$, akkor a lánc átmeneteiben a felfelé lépés valószínűsége nő, azaz a magasabb állapotok felé történő elmozdulás nagyobb. Intuitív módon ez azt jelenti, hogy a p^* -gal rendelkező lánc stacionárius eloszlása eltolódik a magasabb állapotok felé, így a farok-kumulatív eloszlás komponensei, amelyek a magasabb állapotokban lévő tömeg nagyságát fejezik ki, növekednek. Formálisan ez az elsőrendű stochasztikus dominancia megfogalmazásával írható le:

$$\sum_{j=i}^n q_j(p^*) \geq \sum_{j=i}^n q_j(p), \quad \text{azaz} \quad q'(p^*) \geq q'(p) \quad \text{komponensenként.}$$

Ennek bizonyításához szükségünk lesz egy segédtétele.

14. Tétel (Ergod-tétel véges állapotterén). *Legyen P egy véges állapotterű irreducibilis és aperiodikus Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixa, és legyen π a hozzá tartozó egyértelmű stacionárius eloszlás. Ekkor bármely $\mathbf{q}$ kezdeti eloszlás esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{q} P^n]_x = \pi_x, \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

Bizonyítás. Az irreducibilis, aperiodikus P spektrálsugara $\rho(P) = 1$ egyszeres, és a többi sajátérték abszolútértéke szigorúan kisebb, mint 1 (Perron–Frobenius tétel). A π stacionárius eloszlás a baloldali Perron-sajátvektor, azaz

$$\pi P = \pi, \quad \sum_x \pi_x = 1, \quad \pi_x > 0.$$

A hatványtétel szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \mathbf{1} \pi,$$

ahol $\mathbf{1}$ egy csupa 1-esekből álló oszlopvektor. Ebből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{q} P^n = \mathbf{q} (\mathbf{1} \pi) = (\mathbf{q} \mathbf{1}) \pi = 1 \cdot \pi = \pi.$$

Így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbf{q} P^n]_x = \pi_x,$$

□

Most következhet a fenti állítás bizonyítása.

Bizonyítás. Készítsünk két Markov-láncot, az egyiket p paraméterrel, a másikat p^* paraméterrel, ahol $p^* > p$. Tegyük fel, hogy mindkét láncot ugyanazon a valószínűségi téren futtatjuk. Legyen $U_1, U_2, \dots$ $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, és ezek segítségével határozzuk meg a Markov-lánc átmeneteit minden lépésben mindkét láncra. Ekkor az 1. lépésben:

- Ha $U_l \leq p$, akkor mindkét lánc egy lépcsővel feljebb lép (persze, ha az n -edik állapotban van, akkor ottmarad).
- Ha $p < U_l \leq p^*$, akkor a p^* -gal rendelkező lánc felfelé lép, míg a p -vel rendelkező lánc nem.
- Ha $U_l > p^*$, akkor mindkét lánc lefelé lép (persze, ha az első állapotban van, akkor ottmarad).

Ebből következik, hogy a p^* -gal rendelkező lánc soha nem esik alacsonyabb állapotba, mint a p -vel rendelkező; bizonyos esetekben akár szigorúan magasabb állapotba kerül.

Ez azt eredményezi, hogy a p^* -gal rendelkező lánc stacionárius eloszlása stochasztikusan nagyobb (azaz több tömeget helyez a magasabb állapotokba) mint a p -vel rendelkező láncé. Mivel a farok-kumulatív vektor

$$\tilde{q}(p) = (s_1(p), s_2(p), \dots, s_n(p)), \quad \text{ahol } s_i(p) = \sum_{j=i}^n q_j(p),$$

éppen azt méri, hogy mekkora a tömeg az i -edik állapottól felfelé, ez azt jelenti, hogy:

$$s_i(p^*) \geq s_i(p) \quad \text{minden } i\text{-re,}$$

azaz

$$q'(p^*) \geq q'(p) \quad \text{komponensenként.}$$

Irreducibilitás és aperiodicitás

Irreducibilitás

Minden $i < j$ közötti út: $i \rightarrow i+1 \rightarrow \dots \rightarrow j$ létezik, mert $M_{k,k+1}(p) = p > 0$. Minden $i > j$ közötti út: $i \rightarrow i-1 \rightarrow \dots \rightarrow j$ létezik, mert $M_{k,k-1}(p) = 1-p > 0$. Tehát az állapotok kölcsönösen elérhetők egymásból, így a lánc irreducibilis.

Aperiodicitás ($d = 1$)

Mivel $M_{1,1}(p) = 1-p > 0$, az 1-es állapotból egy lépés után is visszatérünk saját magába. Így $\text{lnko}\{\ell : (M(p)^\ell)_{11} > 0\} = 1$. Belátható, hogy ha egy állapotnak a periódusa 1, akkor az irreducibilitás miatt minden állapot periódusa is 1 lesz. Azaz a lánc aperiodikus.

Következmény a stacionárius eloszlásra

Mivel $M(p)$ irreducibilis és aperiodikus, a stacionárius eloszlás

$$q(p) = (q_1(p), q_2(p), \dots, q_n(p))$$

egyértelmű és minden komponense pozitív. Mivel az ergod-tétel szerint bármely kezdeti eloszlásból a stacionárius eloszláshoz tartunk, ha egy lépésben a p^* -gal rendelkező Markov lánc magasabb állapotban lesz, akkor végül a stacionárius eloszlásokra is igaz a reláció. Ekkor a fenti érvelés (amely megmutatta, hogy ha $p^* > p$, akkor a farok-kumulatív vektor

$$q'(p) = (s_1(p), \dots, s_n(p)), \quad s_i(p) = \sum_{j=i}^n q_j(p)$$

komponensei növekednek) érvényes, hiszen a láncok minden állapota pozitív eséllyel elérhető.

A farok-kumulatív definíció adja a stochasztikus dominanciát, és így

$$q'(p^*) \geq q'(p) \quad (\text{komponensenként}).$$

Ez teljessé teszi a bizonyítást.

□

Általánosítás

A következő tétel kimondásához és bizonyításához vezessük be a következő jelöléseket. Az állapotteret jelölje $I = \{1, \dots, n\}$. Legyenek $\{X_l\}$ és $\{X'_l\}$ olyan, azonos állapotéren futó Markov-láncok, amelyek átmeneti valószínűségei rendre

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{l+1} = j \mid X_l = i) \quad \text{és} \quad p'_{ij} = \mathbb{P}(X'_{l+1} = j \mid X'_l = i),$$

ahol $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Legyen $f(i, u) = k$, ha

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} \leq u < \sum_{j=1}^k p_{ij},$$

ahol $f : [n] \times [0, 1] \rightarrow [n]$.

Tegyük fel, hogy $l \leq i$ esetén minden $1 \leq k \leq n$ -re

$$\sum_{j=k}^n p_{ij} \leq \sum_{j=k}^n p'_{lj}.$$

Továbbá legyenek $U_l \sim U[0, 1]$ független, valószínűségi változók. Ha az X_l és X'_l sorozatokat az $X_{l+1} = f(X_l, U_l)$ és $X'_{l+1} = f'(X'_l, U_l)$ képletek adják meg, akkor

ezek Markov-láncok lesznek, a megkívtánt átmenetvalószínűség mátrixszal.

A következőkben feltesszük, hogy minden $i = 1, \dots, n$ és $k = 1, \dots, n$ esetén teljesül, hogy

$$\sum_{j=k}^n p'_{ij} \geq \sum_{j=k}^n p_{ij}.$$

15. Tétel. Ha teljesül, hogy $X_l \leq X'_l$, akkor $X_{l+1} \leq X'_{l+1}$ is teljesül.

A tétel belátásához szükségünk lesz a következő lemmára.

16. *Lemma.* Legyen $g : [0, 1] \rightarrow [n]$ és legyen $g(x) = k$, ha

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_{ij} \leq x \leq \sum_{j=1}^k p_{ij}.$$

Hasonlóan definiáljuk $g'(x)$ -et p' esetén. Ekkor ha p' dominálja p -t, akkor $g'(x) \geq g(x)$.

Bizonyítás. Ha $g'(x) = k$, akkor

$$x < \sum_{j=1}^k p'_{ij} \leq \sum_{j=1}^k p_{ij},$$

amiből következik, hogy $g(x) \leq k$.

□

Most következzen a tétel bizonyítása.

Bizonyítás. Ehhez tekintsük $X_{l+1}(w) = f(X_l(w), U_l(w))$ alakot. tegyük fel, hogy $X_l(w) = i$, és jelölje i' az $X'_l(w)$ értékét. Ekkor $i' \geq i$.

A következők teljesülnek:

$$X_{l+1} = j, \quad \text{ha} \quad \sum_{h=1}^{j-1} p_{ih} \leq U_l < \sum_{h=1}^j p_{ih},$$

$$X'_{l+1} = j', \quad \text{ha} \quad \sum_{h=1}^{j'-1} p_{i'h} \leq U_l < \sum_{h=1}^{j'} p'_{i'h}.$$

Ezek alapján pedig azt kapjuk, hogy

$$\sum_{h=1}^{j'} p'_{i'h} \leq \sum_{h=1}^{j'} p_{i'h} \leq \sum_{h=1}^{j'} p_{ih},$$

amiből pedig az következik, hogy $j \leq j'$. Ezzel az állítást beláttuk.

□

Most pedig következzen egy speciális eset, ami viszont az első állításunk általánosítása. Itt ne csak egylépéses átmenetek legyenek, hanem az átmeneteket egy vektor definiálja:

$$v(p) = (p_1(p), p_2(p), \dots, p_n(p)), \quad \sum_{k=1}^n p_k(p) = 1,$$

ahol p valamilyen háttér paraméter. Ebből építjük fel az $n \times n$ -es $A(p) = (A_{ij}(p))$ átmenetmátrixot úgy, hogy minden sorban „eltoljuk” az átmenet vektort, és az esetleges túllógó komponenseket összevonjuk az utolsó oszlopba.

Legyen az i -edik sor eltolása $i - 1$. Az $A_{i,j}(p)$ elemet az alábbi módon definiáljuk, feltételezve, hogy az i sorban az eltolás nagysága $i - 1 - \ell$ (valamely rögzített $0 \leq \ell \leq n - 1$ mellett):

$$A_{i,j}(p) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\ell+1-i} p_k(p), & j = 1, 1 \leq i \leq \ell \\ \sum_{k=n-i+\ell}^n p_k(p), & j = n, \ell \leq i \leq n \\ p_{j-i+\ell}, & \ell + j \leq i \leq n, \text{ vagy } n + 1 - \ell + i \leq j \leq n \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezzel a szabállyal minden sor összege $\sum_{j=1}^n A_{i,j}(p) = \sum_{k=1}^n p_k(p) = 1$, és az átmenetmátrix sorai paraméter-függően formálják a sztochasztikus rendszert.

Legyen adott két paraméter, $p < p^*$ és a hozzájuk tartozó átmeneteket tartalmazó vektorok

$$v(p) = (p_1(p), p_2(p), \dots, p_n(p)), \quad v(p^*) = (p_1(p^*), p_2(p^*), \dots, p_n(p^*)),$$

ahol mindkét vektor komponensei nemnegatívak és

$$\sum_{k=1}^n p_k(p) = \sum_{k=1}^n p_k(p^*) = 1.$$

és tegyük fel, hogy p^* esetén a farok kumulatív összegek mindig nagyobbak, mint a p esetén.

Bizonyítás. A bizonyítást hasonlóan építjük fel, mint egylépéses átmenetre.

Általános lépés:

Vegyünk itt $U_1, U_2, \dots$ $[0, 1]$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozatát, és futtassuk mindkét láncot ugyanazon a valószínűségi téren. Az t -edik lépésben határozzuk meg a $k \in \{1, \dots, n\}$ indexet, amire a p^* -lánc magasabb állapotban lesz, mint a p -lánc:

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i(p) < U_t \leq \sum_{i=1}^k p_i(p).$$

Hasonlóan, határozzuk meg a $k^* \in \{1, \dots, n\}$ indexet a p^* vektorral:

$$\sum_{i=1}^{k^*-1} p_i(p^*) < U_t \leq \sum_{i=1}^{k^*} p_i(p^*).$$

Mivel $p^* > p$ és mindkét átmenet-vektor farok-kumulatívjai monoton nőnek, mindig

$$k^* \geq k.$$

Ekkor teljesül a fenti, általános tételben megadott feltétel, hogy a p^* -gal rendelkező lánc egy általános lépésben nem jut a p -vel rendelkező alatti állapotba, így az ergod-tétel szerint a p^* -hoz tartozó stacionárius eloszlás sztochasztikusan dominálja a p -hez tartozót.

□

7. fejezet

Közgazdaságtani alkalmazások, a Leontief-féle modell

Az alábbi gondolatmenet [8] alapján rámutat arra, hogy a nemnegatív elemű mátrixok fontos szerepet játszanak a különböző gazdasági modellekben. Ilyen modell például az ágazati kapcsolatok mérlegeit vizsgáló Leontief-féle modell.

A témakör részletes tárgyalásához szükségünk lesz néhány jelölésre.

Jelölések:

- q_j : a j . termék termelési szintje, $j = 1, \dots, n$
- r_{ij} : az i . termék mennyisége egységnyi j . termékben, úgynevezett ráfordítási együttható
- E az egységmátrix, $q = (q_j)$ a termelési szintek vektora.

Ekkor a nettó kibocsátás vektora:

$$v = q - Rq = (E - R)q.$$

Másként:

$$v_i = q_i - r_{i,1}q_1 - r_{i,2}q_2 - \dots - r_{i,n}q_n.$$

Az alapvető probléma a következő: adott $v \geq 0$ esetén, határozzuk meg q -t! Egy adott nettó kibocsátás esetén szeretnénk tehát meghatározni az egyes termékek termelési szintjét. Ezen feladat a gyakorlatban mindennapos, széleskörű a felhasználási területe.

A probléma megoldásához $q = (E - R)^{-1}v$ miatt szükséges az ún. *Leontief-inverz*: $(E - R)^{-1}$.

A témakörrel számos irodalom foglalkozik mélyebben, és általánosan a következő állítások teljesülnek.

17. Tétel. *Az alábbiak ekvivalensek:*

- *létezik inverz és az nem negatív elemű;*
- *létezik $q \geq 0$, melyre $q > Rq$ (Gale-féle produktivitási feltétel);*
- *az R mátrix Neumann-sora konvergens;*
- *$\lambda(R)$, azaz R domináns sajátértéke valós és 1-nél kisebb.*

Megjegyzés: A működőképesség feltétele, hogy létezik $q \geq (\neq)0$, melyre $q \geq Rq$, azaz van olyan termelés, mely legalább annyit előállít, mint amennyit felhasznál.

Jelen dolgozat szempontjából az első két pont ekvivalenciája kiemelten érdekes. Ezt mondja ki a Gale-féle produktivitási tétel. Ehhez a fentiekén túl egyetlen elnevezést kell ismernünk: egy mátrixot *produktív*nek nevezünk, ha teljesül rá a Gale-féle produktivitási feltétel.

18. Tétel (Gale-féle produktivitási tétel). *Akkor és csak akkor létezik (nemnegatív) Leontief-inverz, ha a mátrix produktív.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljességéhez az elégségeséget, és a szükségességet is igazolnunk kell.

Elégségeség: tegyük fel, hogy létezik olyan $\hat{q} \geq 0$, melyre $\hat{q} > R\hat{q}$. Azt szeretnénk belátni, hogy $E - R$ invertálható, azaz az $(E - R)q = 0$ -ból következik, hogy $q = 0$, ami átrendezve:

$$q = Rq \implies q = 0,$$

továbbá, hogy az inverze nemnegatív.

Az invertálhatóság bizonyítása:

- a) Minden eleme pozitív, ugyanis $\hat{q} > R\hat{q} \geq 0$.
- b) Megmutatjuk, hogy az $q \geq Rq$ egyenlőtlenség megoldásai nemnegatív elemű vektorok lehetnek csak.

Ha q pozitív konstansszoros $\hat{q}$ -nak, akkor már az a) alapján tudjuk, hogy q minden eleme pozitív.

Tegyük fel tehát, hogy most q nem konstansszoros $\hat{q}$ -nak. Ha q -nak lenne negatív eleme, akkor van olyan $\lambda > 0$ skalár, hogy $q + \lambda\hat{q}$ minden eleme nemnegatív, de van nulla eleme, hiszen nulláról növelve λ értékét minden koordináta szigorúan nő, de kezdetben még van negatív komponens. Tehát addig növelünk ameddig a legkisebb komponens is már átcsapna pozitívba.

Ekkor azonban

$$(q + \lambda\hat{q}) > R(q + \lambda\hat{q}) \quad \text{és} \quad q + \lambda\hat{q} \geq 0.$$

Mivel $R(q + \lambda\hat{q}) \geq 0$, így $q + \lambda\hat{q}$ minden koordinátája pozitív kell legyen, ez ellentmond λ megválasztásának. Tehát q -nak nem lehet negatív koordinátája.

c) Tekintsük most a $q = Rq$ egyenletet.

Ez ekvivalens a

$$q \geq Rq \quad \text{és} \quad -q \geq R(-q)$$

egyenlőtlenséggel. A b) alapján ezek megoldása nemnegatív elemű lehet csak. Azaz $q \geq 0$, és $-q \geq 0$, tehát $q = 0$. Másképpen: az $E - R$ mátrix invertálható. (A nulltere triviális.)

Végül megmutatjuk, hogy az inverz minden eleme nemnegatív.

Ugyanis legyen

$$s_j = (E - R)^{-1}e_j,$$

ahol e_j a j . egységvektor (s_j az inverz j . oszlopa). Ekkor

$$(E - R)s_j = e_j \geq 0 \implies s_j = Es_j \geq Rs_j.$$

A b) pontban láttuk, hogy ennek megoldása csak nemnegatív elemű vektor lehet.

Szükségesség: Legyen d tetszőleges olyan vektor, melynek mindegyik eleme pozitív, és legyen $q = (E - R)^{-1}d$. Ekkor

$$q = (E - R)^{-1}d \geq 0 \quad \text{és} \quad q - Rq = d > 0,$$

tehát teljesül a Gale-féle produktivitási feltétel.

□

Alulírott Hoffmann Szabolcs nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye
LaTeX kód generálás	GPT-o4 mini	Teljes dolgozatban a bonyolultabb képleteknél
Szövegvázlat készítés	GPT-o4 mini	Teljes dolgozatban a felsorolások elkészítésére, külalak javítása

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.

Irodalomjegyzék

- [1] Shunsuke Tomioka. „An Inverse Theorem for the Perron–Frobenius Theorem”. *arXiv preprint arXiv:2405.11136* (2024).
- [2] Dimitrios Noutsos és Richard S Varga. „On the Perron–Frobenius theory for complex matrices”. *Linear algebra and its applications* 437.4 (2012), 1071–1088. old.
- [3] Csiszár Villő. *Diszkrét és folytonos idejű Markov-láncok*. ELTE egyetemi jegyzet.
- [4] O Perron. „Zur Theorie der uber Matrizen”. *Math. Ann* 64.248-263 (1907), 147l. old.
- [5] Ferdinand Georg Frobenius. „Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys Math Kl”. *Reprinted in Ferdinand Georg Frobenius, Gesammelte Abhandlungen* 3 (1912), 546–567. old.
- [6] https://en.wikipedia.org/wiki/Perron_Frobenius_theorem. Utolsó elérés: 2025.05.30.
- [7] Garrett Birkhoff és Saunders Mac Lane. *A survey of modern algebra*. AK Peters/CRC Press, 2017.
- [8] Zalai Ernő és Virág Gábor. *Matematikai közgazdaságtan: a korszerű mikroökonómiai elemzés klasszikus és neoklasszikus szemléletű modelljei*. KJK-KERSZÖV Jogi és Üzleti Kiadó Kft., 2000.