

A Banach-Tarski paradoxonról

Szőke Gergely

2025

Témavezető:

Dr. Buczolic Zoltán



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

2025

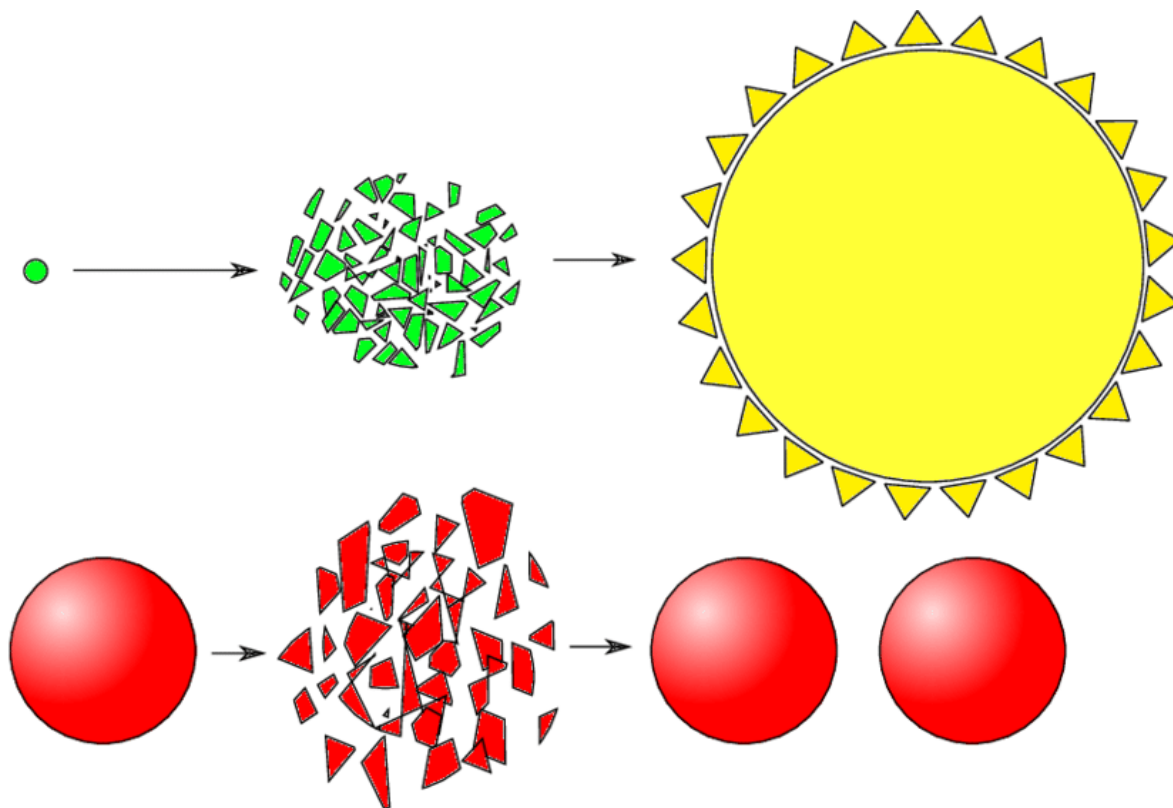
Tartalomjegyzék

1. Jelölések	3
2. Bevezető	4
3. Banach-Tarski paradoxon kimondása és bizonyítása	5
3.1. Az erős és gyenge Banach-Tarski paradoxon kimondása	5
3.2. Bizonyítás	6
3.2.1. Szabad csoportok, paradox tulajdonság	6
3.2.2. A másodrangú szabad csoport paradox tulajdonságú	10
3.2.3. $\mathbf{F}_2$ megkeresése $SO(3)$ -ban	12
3.2.4. A Hausdorff paradoxon	13
3.2.5. Egymásba darabolhatóság	14
3.2.6. A gyenge Banach-Tarski paradoxon bizonyítása	16
3.2.7. Az erős Banach-Tarski paradoxon bizonyítása	17
4. Miért nem lehet aranyat sokszorozni a Banach-Tarski paradoxon segítségével?	18
4.1. A használt halmazok a fizikai valóságban nem léteznek	18
4.2. Problémák a forgatással	18
5. Néhány gondolat a kiválasztási axiómáról	18
5.1. Algebrai indokok	19
5.2. Egyéb végtelen "paradoxonok"	20
5.3. A Banach-Tarski paradoxon alacsonyabb dimenzióban nem igaz	20
6. Banach-Tarski paradoxon magasabb dimenziós és hiperbolikus tereken	21
6.1. Legalább háromdimenziós terek	21
6.1.1. Euklideszi terek	21
6.1.2. Legalább háromdimenziós hiperbolikus terek	21
6.2. A hiperbolikus sík	24
6.2.1. A Banach-Tarski paradoxon bizonyítása a hiperbolikus síkon	33
7. Köszönetnyilvánítás	34
8. Nyilatkozat	34

1. Jelölések

- $\mathbb{D}^n$: origó középpontú, n -dimenziós egység sugarú zárt gömb,
- S^2 : origó középpontú, háromdimenziós egység sugarú gömb felszíne,
- $\sqcup$, ahol az unió tagjai különböznek: diszjunkt unió,
- $\sqcup_{i=1}^n A$, ahol A tetszőleges halmaz: az A halmaz n darab, egymástól páronként diszjunkt példánya,
- $\mathbb{N}$: természetes számok, ebben a dolgozatban 0 is természetes szám,
- $B(x, r)$: x középpontú, r sugarú nyílt gömb,
- $\text{SO}(3)$: a háromdimenziós tér origót tartalmazó tengely körüli forgatások csoportja, csoportművelet a kompozíció,
- $\mathcal{P}(X)$: az X halmaz részhalmazainak halmaza,
- AC: a kiválasztási axióma rövidítése,
- $\langle v, w \rangle$: v és w vektorok skaláris szorzata.

2. Bevezető



1. ábra. A Banach-Tarski paradoxon népszerű ábrázolásai [1]

"Egy meggy magot fel lehet darabolni úgy, hogy a részeket másképp összerakva megkapjuk a Napot." Bárhol említik meg a Banach-Tarski paradoxont, mindig ez a reklámszöveg, amellyel az olvasó figyelmét fel szeretnék kelteni. Figyelemfelkeltésre tökéletes, hiszen mindenki tudja, hogy a Nap sokkal nagyobb, mint egy meggy mag, és a valóságról alkotott elképzeléseinkkel teljesen szembe megy ez az eredmény, első látásra hihetetlennek tűnhet. Éppen ezért hívjuk paradoxonnak, és nem tételnek, mert annyira ellentmond az intuícióinknak. Persze abban az értelemben nem igaz, hogy a valóságban meg lehetne csinálni, mert nem lehet, az elméletében azonban nincs hiba, csak a gyakorlatba nem átültethető.

Az emberiséget mindig is foglalkoztatták a paradoxonok, gondolhatunk a görögök több ezer éves problémájára. Akhilleusz sohasem éri utol a teknősbékát, hiszen mire odaérne, ahol a teknős az előbb volt, az már egy kicsit továbbment. Ezt a paradoxont persze a határérték fogalma feloldja, egy végtelen összeg megmondja, mikor éri utol Akhilleusz a teknősbékát. Ehhez hasonlóan a Banach-Tarski paradoxont a nem mérhető halmazok létezése oldja fel. Hiszen ha olyan darabokra vágjuk fel a meggy magot, amelyeknek nincs méretük, nem várhatjuk el, hogy ha másképp rakjuk össze, a térfogatuk összeadódjon,

és visszkapjuk a mag térfogatát, hiszen a számok, amelyeket össze akarunk adni, nem léteznek.

A dolgozat 3. fejezetében kimondjuk a Banach-Tarski paradoxon gyenge és erős változatát. Majd a 3.2.1, 3.2.2 és 3.2.3 alfejezetekben lerakjuk a bizonyításhoz szükséges csoportelméleti alapokat, meghatározzuk, hogy mitől lesz valami paradox, és összekapcsoljuk ezeket az alapokat a Banach-Tarski paradoxonnal. Ezután a 3.2.5 alfejezetben bevezetjük az egymásba darabolhatóság kissé absztraktabb fogalmát, majd ennek segítségével fejezzük be a paradoxon bizonyítását.

Ezt követően a 4. fejezetben kitérünk arra, hogy miért nem lehet a Banach-Tarski paradoxon segítségével nyersanyagot sokszorozni, és utána az 5. fejezetben megvizsgáljuk a bizonyításhoz elengedhetetlen kiválasztási axiómát.

Legvégül az 6. fejezetben megvizsgáljuk a paradoxont a magasabb dimenziós euklideszi és a hiperbolikus terekben. A 6.2 alfejezetben kicsit jobban megismerkedünk a hiperbolikus síkkal, majd bebizonyítjuk arra is a Banach-Tarski paradoxont. Fontos megemlíteni, hogy míg a hiperbolikus síkon igaz a paradoxon, az euklideszi síkon nem igaz.

3. Banach-Tarski paradoxon kimondása és bizonyítása

Amint azt a bevezetőben is említettem, először kimondjuk a paradoxont, és egy kis algebrai alapozás után bizonyítjuk.

3.1. Az erős és gyenge Banach-Tarski paradoxon kimondása

A tétel gyenge verziója:

3.1.1. Tétel. *A háromdimenziós egységgömböt fel lehet véges sok darabra bontani úgy, hogy azokat a darabokat forgatva és eltolva két példányban kapjuk vissza az eredeti gömböt. Azaz létezik $n \in \mathbb{N}$, $B_0, \dots, B_n \subseteq \mathbb{D}^3$ úgy, hogy $\mathbb{D}^3 = \bigcup_{i=0}^n B_i$, és $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén, és léteznek $\Phi_0, \dots, \Phi_n \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ úgy, hogy $\bigsqcup_{i=0}^n \Phi_i(B_i) = \mathbb{D}^3 \sqcup \mathbb{D}^3$.*

Az erős verzió hasonló, csak egy gömb és kettő gömb helyett bármely két $\mathbb{R}^3$ -beli halmaz lehet, annyi feltétellel, hogy mindkettő korlátos és nemüres belsejű.

3.1.2. Tétel. *Legyen $H, K \subseteq \mathbb{R}^3$, olyanok, hogy $\text{int}H \neq \emptyset$, $\text{int}K \neq \emptyset$, és létezik $R \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $H, K \subseteq B(0, R)$. Ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$, $B_0, \dots, B_n \subseteq H$, $H = \bigsqcup_{i=0}^n B_i$, és $B_i \cap B_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ -re és létezik $\Phi_0, \dots, \Phi_n \in \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ úgy, hogy $K = \bigsqcup_{i=0}^n \Phi_i B_i$.*

3.1.3. Megjegyzés. Látható, hogy ha $H = \mathbb{D}^3$, $K = \mathbb{D}^3 \sqcup \mathbb{D}^3$, akkor visszkapjuk a tétel gyenge verzióját.

3.2. Bizonyítás

A tétel bizonyítása előtt szükséges egy kis algebrai kitekintő. Meg kell ismerkednünk a szabad csoportokkal, leginkább a másodrangúval. Meg kell fogalmazni, hogy pontosan miért is hívjuk paradoxonnak a tételt, és egy kicsit általánosabban mit jelent, az hogy egy megfelelő matematikai objektum paradox tulajdonsággal bír ebben a kontextusban.

3.2.1. Szabad csoportok, paradox tulajdonság

3.2.1. Definíció. Egy algebrai csoport egy G halmaz ellátva egy kétváltozós művelettel, aminek a jele $\cdot$ (mint a klasszikus szorzásnál, itt sem fogjuk használni a jelet), és a műveletnek meg kell felelnie a csoportaxiómáknak, melyek a következők:

- $\forall g, h, k \in G, (gh)k = g(hk)$, asszociatív,
- $\exists e \in G, \forall g \in G, eg = ge = g$, létezik egységelem,
- $\forall g \in G \exists h \in G, gh = hg = e$, minden elemnek van inverze.

3.2.2. Definíció. A G csoport részcsoportha H , ha mint halmaz része, az egységelem benne van, emellett az inverz képzés és a szorzás nem vezet ki H -ből.

3.2.3. Definíció. Legyen G egy csoport, $A \subset G$. A G csoport A által generált részcsoportha a legszűkebb, A -t tartalmazó részcsoportha.

Néhány példa csoportokra: az egész számok az összeadással, m szerinti maradékosztályok (jel: $\mathbf{Z}_m$) az összeadással, valós vagy komplex számok a 0 nélkül a szorzással. Ezek közül az összes kommutatív, $\mathbf{Z}_m$ összes elemére pedig igaz, ha m -szer összeadjuk, a 0-t kapjuk. Tehát ezekben a csoportokban vannak plusz műveleti szabályok, melyek nem igazak minden csoportra.

"A szabad csoport olyan csoport, amelyben semmilyen szorzási szabály nincs az axiómákon kívül." Az n -edrangú, vagy n generátorú szabad csoport felépítése: van n darab betű, legyenek $a_1, \dots, a_n$. Vegyük azokat a véges karaktersorozatokat, "szavakat", melyek előállnak $a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$ karakterek használatával. Ekkor mint karaktersorozat $a_1 a_1^{-1} a_2 \neq a_2$, de mivel mi egy csoportot próbálunk csinálni, ekvivalensnek tekintjük őket. Általánosabban két szó ekvivalens, ha $a_i a_i^{-1}, a_j^{-1} a_j$ alakú részzavak véges mennyiségű kitörölésével és beszúrásával megkaphatók egymásból. Ez egy ekvivalenciareláció. Egy szó redukált, ha nem lehet belőle ilyen betűpárt kitörölni. Az üres szó a 0 karakterből álló karaktersorozat.

3.2.4. Állítás. Minden ekvivalenciaosztályban egyértelműen létezik redukált példány.

Bizonyítás. Az, hogy minden ekvivalenciaosztályban létezik redukált példány nem annyira bonyolult, hiszen, ha fogunk egy tetszőleges w elemet, akkor az vagy redukált, vagy nem. Amennyiben redukált, akkor w ekvivalenciaosztályából találtunk egy redukált elemet. Ha nem redukált, akkor létezik benne egy $a_i a_i^{-1}$ vagy $a_i^{-1} a_i$ alakú tag, amit ki lehet törölni. Ezután egy rövidebb szó marad, és a fenti eljárást lehet folytatni, amíg redukált nem lesz. Ez véges lépés alatt megtörténik, hiszen csak véges karaktersorozatok vannak, és a hossza mindenképp nem negatív.

Ami nehezebb az az, hogy ez a redukált elem egyértelmű. Legyen w egy redukált szó. Először bebizonyítjuk, hogy ha w -be beszúrunk $n > 0$ darab $a_i a_i^{-1}$, $a_i^{-1} a_i$ alakú karakterpárost, majd egyet kitörlünk, a kapott karaktersorozat megkapható $n - 1$ darab beszúrással w -ből.

- Az első lehetőség az, hogy egy beszúrt párost töröltünk ki. Ekkor nyilvánvaló, hogy megkapható eggyel kevesebb beszúrással.
- A második lehetőség az az, hogy a kitörölt páros mindkét tagja beszúrt elem, de nem ugyanabból a párosból. Tegyük fel, hogy a kitörölt páros $a_l a_l^{-1}$ alakú, másik esetben hasonló a bizonyítás. Ekkor a kitörölés előtti szó $\dots a_l^{-1} \dots a_l a_l^{-1} \dots a_l \dots$ alakú, és w karakterei csak az első a_l^{-1} előtt és az utolsó a_l után lehetnek. Például legyen $w = ab$ és a karakterpárok beszúrássai során az új karaktersorozat $ac^{-1}cb$ majd $ac^{-1}d^{-1}dcb$ ezután $ac^{-1}d^{-1}dcc^{-1}cb$, végül $ac^{-1}d^{-1}dcc^{-1}ee^{-1}cb$ alakú. Ekkor a törlés után kapott karaktersorozat $\dots a_l^{-1} \dots a_l \dots$ alakú, a példánkban ez $ac^{-1}d^{-1}dee^{-1}cb$. Ekkor a példában szereplő szót úgy is megkaphatjuk, ha a beszúrássok sorozata a következő: kiindulunk ab -ből, ezután $ac^{-1}cb$ -t, majd $ac^{-1}d^{-1}dcb$ -t végül $ac^{-1}d^{-1}dee^{-1}cb$ -t kapva eljutottunk eggyel kevesebb beszúrással és kitörölés nélkül ugyanahhoz a szóhoz, $ac^{-1}d^{-1}dee^{-1}cb$ -hez. Általában a módszer a következő: mindent úgy csinálunk, mint eredetileg, csak a kitörölt páros másodjára beszúrt karakterét tartalmazó $a_l^{-1} a_l$ karakterpárt nem szúrjuk be, és amit a két karaktere közé szúrnánk be, azt a korábban beszúrt $a_l^{-1} a_l$ páros két betűje közé szúrjuk, úgy, hogy a többi ott levő betűvel a sorrend olyan legyen mint eredetileg. Így megkaptuk eggyel kevesebb beszúrással ugyanazt a szót.
- Ha a kitörölt betűpár egyik tagja w -beli, a másik pedig nem, akkor feltehető, hogy a kitörölt karakterpár $a_l a_l^{-1}$ alakú, és az első betű volt része w -nek. Ekkor a törlés előtti pillanatban a szó $\dots a_l a_l^{-1} \dots a_l \dots$ alakú, ahol w karakterei csak az első a_l , és az előtt, továbbá az utolsó a_l után lehetnek. Például legyen ezúttal $w = abc$, a beszúrássorozattal keletkező szavak legyenek $abb^{-1}bc$, és $abb^{-1}d^{-1}dbc$. A kitörölés után kapott szó $\dots a_l \dots$ alakú, a példánkban $ad^{-1}dbc$. Ezt úgy kaphatjuk meg $n - 1$ beszúrással, hogy az $a_l^{-1} a_l$ párost nem szúrjuk be, és a karakterpár két betűje közé beszúrt karaktereket közvetlen az eredeti a_l elé szúrjuk, ezt leszámítva mindent

pontosan úgy csinálunk, mint eredetileg. Így ugyanazt a szót megkaptuk $n - 1$ beszúrással. A példában pedig egy darab $d^{-1}d$ karakterpár beszúráásával eljutunk a végső szóig.

Ennyi elég is az állítás bizonyításához, hiszen tegyük fel, hogy $w \sim z$ redukált elemek. Ekkor létezik beszúrássok és kitörlések véges sorozata, mellyel w -ből kiindulva megkapjuk z -t. Beszúrással kell kezdeni, mert w redukált elem. A fenti állítás miatt amíg többször szúrtunk be, mint töröltünk, az megfelel $k > 0$ beszúrásnak, azaz a kapott szó nem redukált. Emiatt amikor épp megegyezik a két szám, akkor w -t kapjuk vissza, mert az előző cselekedet törlés volt, azaz az akkori szó megkapható volt w -ből egy beszúrással, és az állítás miatt a törlés után visszakapjuk w -t.

Vagyis minden ekvivalenciaosztályban egyértelműen létezik redukált példány. $\square$

3.2.5. Definíció. Az n -ed rendű szabad csoport $(\mathbf{F}_n)$ elemei a véges karaktersorozatok ekvivalenciaosztályai. Két csoportbeli elem szorzatát úgy kapjuk, hogy vesszük az ekvivalenciaosztályok egy-egy reprezentáns elemét, a karaktersorozatokat egymás után írjuk, majd az így kapott szó ekvivalenciaosztályát vesszük.

3.2.6. Állítás. *Ez a művelet jól definiált, azaz független a reprezentánsok választásától.*

Bizonyítás. Legyenek $w \sim w' \in \mathbf{F}_n$ és $s \sim s' \in \mathbf{F}_n$. Ekkor $ws \sim w's'$, hiszen a megfelelő karakterpárokat be lehet szűnni és ki lehet törölni a szorzatban attól függetlenül, hogy a szó elejére vagy végére odaírunk néhány karaktert. $\square$

3.2.7. Állítás. $\mathbf{F}_n$ egy csoport.

Bizonyítás. Az egységelem az üres szó, aa^{-1} ekvivalenciaosztályának redukált eleme. Ez tényleg egységelem, hiszen ha egy w karaktersorozat elejére vagy végére odaírjuk az üres szót, azaz a semmit, a w karaktersorozat nem változik meg.

Egy $w = a_i^{s_i} a_j^{s_j} \dots a_k^{s_k}$ elem inverze, ahol $s_l \in \{-1, 1\}$: $w^{-1} = a_k^{-s_k} \dots a_j^{-s_j} a_i^{-s_i}$. Ekkor $ww^{-1} = w^{-1}w = e$, hiszen a karaktersorozatban középen $a_n a_n^{-1}$ vagy $a_n^{-1} a_n$ alakú, és ha ezt kitöröljük egy két betűvel rövidebb ugyanilyen típusú karaktersorozatot kapunk, vagy az üres szót, így véges lépésben eljutunk az üres szóig.

Asszociativitás: $w_1(w_2 w_3) = (w_1 w_2) w_3$, hiszen a karaktersorozat zárójellezéstől függetlenül ugyanazokból a betűkből áll, ugyanabban a sorrendben. $\square$

Ami ebből nekünk fontos, az a másodrangú szabad csoport. A generátorokat jelölje a, b, a^{-1} és b^{-1} , a csoportot $\mathbf{F}_2$. Először belátjuk, hogy $\mathbf{F}_2$ paradox, majd a kiválasztási axióma segítségével ezt a paradox tulajdonságot megörökli az egységömb is, amihez a csoportthatásokat kell egy kicsit megvizsgálni. De előtte egy definíció, hogy pontosan mi is az a paradox tulajdonság.

3.2.8. Definíció. Egy G csoport paradox tulajdonságú, ha létezik $n, m \in \mathbb{N}$, és létezik $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_m \subset G$ úgy, hogy ezek közül bármely kettő páronként diszjunkt és létezik $g_0, \dots, g_n, h_0, \dots, h_m \in G$ úgy, hogy $\bigcup_{i=0}^n g_i A_i = G, \bigcup_{j=0}^m h_j B_j = G$.

3.2.9. Állítás. *Ekvivalens definíciót kapunk, ha azt követeljük meg, hogy $\bigsqcup_{i=0}^n A_i \sqcup \bigsqcup_{j=0}^m B_j$ legyen az egész G , és a $g_i A_i$ halmazok, illetve a $h_j B_j$ halmazok páronként diszjunktak.*

Bizonyítás. Először nézzük a G csoport eredeti definíció szerinti paradox felbontását. Tegyük fel, hogy egy $i < j$ párosra $g_i(A_i) \cap g_j(A_j) \neq \emptyset$. Ekkor legyen $A'_j = A_j \setminus g_j^{-1}(g_i(A_i) \cap g_j(A_j))$, minden más részhalmaz és minden csoportelem változatlan. Ezzel az olyan $l < k$ párok száma legalább eggyel csökkent, melyekre $g_l(A_l) \cap g_k(A_k) \neq \emptyset$. Mivel eredetileg véges sok ilyen számpár volt, a fenti változtatás véges sok alkalmazása után a képhalmazok diszjunktak lesznek. Ugyanezt végrehajtva B_j halmazokra, $h_j(B_j)$ halmazok is páronként diszjunktak.

Az állítás második felének bizonyításához még nincsenek meg az eszközeink, később, a 3.2.31 Állításban fogjuk csak bizonyítani. $\square$

Beszélhetünk paradox halmazokról is, de ahhoz előbb meg kell ismerkednünk a csoport-hatásokkal.

3.2.10. Definíció. A G csoport (balról) hat az X halmazon, ha létezik $F : G \times X \rightarrow X$ leképezés úgy, hogy minden $g, h \in G$ -re és minden $x \in X$ -re $(gh)x = g(hx)$. A G csoport szabadon hat, ha minden $g \in G$ -re és minden $x \in X$ -re ha $gx = hx$, akkor $h = g$. Jelölések: $G \curvearrowright X$, $F(g, x) = gx$.

3.2.11. Megjegyzés. A definícióból következik, hogy bármely $g \in G$ -t lerögzítve egy $X \rightarrow X$ bijekciót kapunk, továbbá minden $x \in X$ -re $ex = x$.

3.2.12. Definíció. Legyen G egy csoport X egy halmaz és $G \curvearrowright X$, az $x \in X$ pont pályája: $\{y \in X \mid \exists g \in G, gx = y\}$.

3.2.13. Definíció. Ha $G \curvearrowright X$, $x, y \in X$, $x \sim_G y$ ha létezik $g \in G$ úgy, hogy $gx = y$.

3.2.14. Megjegyzés. $\sim_G$ egy ekvivalenciareláció és a pályák a reláció ekvivalenciaosztályai.

Így már tudjuk a paradox halmazokat definiálni.

3.2.15. Definíció. Legyen G egy csoport. Egy X halmaz G -paradox, ha G hat X -en, és létezik $n, k \in \mathbb{N}$ továbbá léteznek $g_0, \dots, g_n, h_0, \dots, h_k \in G$, és léteznek páronként diszjunkt $A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_k \subset X$ olyan halmazok, hogy $\bigcup_{i=0}^n g_i A_i = \bigcup_{j=0}^k h_j B_j = X$.

3.2.16. Megjegyzés. Ahogyan a paradox csoportoknál, itt is ekvivalens definíciót kapunk, ha azt követeljük meg, hogy $\bigsqcup_{i=0}^n A_i \sqcup \bigsqcup_{j=0}^k B_j = X$, és hogy a $g_i A_i$ halmazok, illetve a $h_j B_j$ halmazok páronként diszjunktak legyenek. Hasonló a bizonyítás, mint ami csoportok esetén.

3.2.17. Állítás. *Legyen G egy csoport. Ekkor az, hogy G paradox ekvivalens azzal, hogy minden X halmaz, melyen G szabadon hat, G -paradox.*

Bizonyítás. A bizonyítás egyik iránya könnyű, hiszen G a balról szorzással saját magán szabadon hat, és ha erre a hatásra G egy paradox halmaz, akkor definíció szerint G egy paradox csoport.

A másik irányhoz legyen X tetszőleges halmaz, amelyen G szabadon hat. Vegyük a csoporthatás pályáit, majd a kiválasztási axióma segítségével válasszunk minden pályából egy elemet. Egy konkrét pályát meg lehet duplázni úgy, hogy a kiválasztott x pontot megfeleltetjük G egységelemének, a pálya többi pontját pedig a csoport azon elemének, amivel megkapható a kiválasztott x pontból. Így a pályát megfeleltettük G -nek, és meg tudjuk duplázni pont úgy, ahogy G -t. A kiválasztási axióma miatt ezt minden pályán meg tudjuk csinálni egyszerre, vagyis visszakaptuk X -et két példányban. Tehát legyen K a csoporthatás minden pályájából egy elemet tartalmazó halmaz. A csoport paradox voltát tanúsító részhalmazok legyenek $A_0, \dots, A_n$ és $B_0, \dots, B_k$, a hozzájuk tartozó csoportelemek pedig $g_0, \dots, g_n$ és $h_0, \dots, h_k$. Legyen $A'_i = A_i \cdot K$, $B'_j = B_j \cdot K$. Ekkor A'_i , B'_j halmazrendszer elemei páronként diszjunktak, mert a hatás pályái diszjunktak egymástól. Egy konkrét pályán belül pedig azért diszjunktak, mert szabad a hatás. Ekkor $\bigsqcup_{i=0}^n g_i \cdot A'_i = \bigsqcup_{i=0}^n g_i A_i \cdot K = \mathbf{F}_2 \cdot K = X$. Hasonlóan belátható, hogy $\bigsqcup_{j=0}^k h_j \cdot B'_j = X$. $\square$

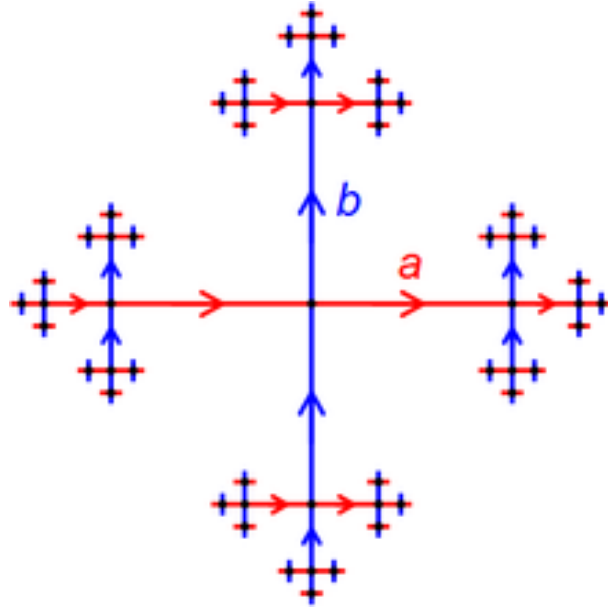
3.2.2. A másodrangú szabad csoport paradox tulajdonságú

A 4.1 Tétel bizonyításának egyik legfontosabb lépése annak belátása, hogy $\mathbf{F}_2$ paradox, és hogy a háromdimenziós térnek van vele izomorf részcsoportja.

3.2.18. Tétel. *A másodrangú szabad csoport paradox tulajdonságú. [2]*

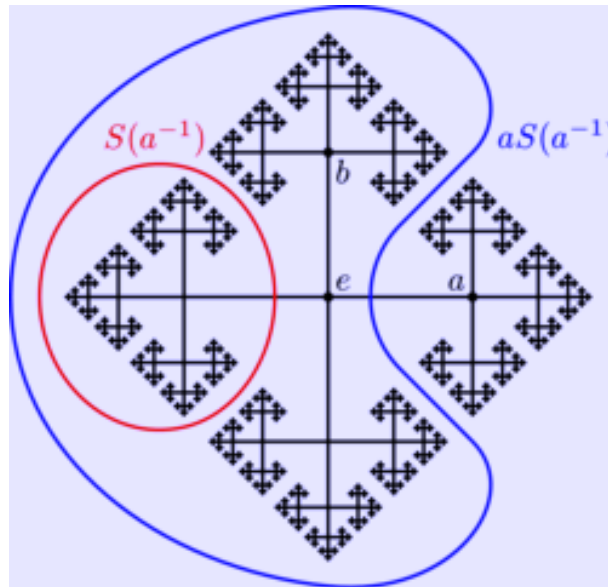
Bizonyítás. A másodrangú szabad csoport viszonylag természetesen és egyszerűen felbontható öt részhalmazra a kezdőbetűk szerint. Az egyik részhalmaz csak az egységelemet tartalmazza, hiszen az az üres szó, nincs kezdőbetűje. A megmaradt elemeket úgy osztjuk szét, hogy a redukált szavak melyik betűvel kezdődnek. Azaz az öt részhalmaz:

- $e = \{e\}$,
- $S(a) = \{x \in \mathbf{F}_2 : x \text{ ekvivalenciaosztályának redukált eleme } a\text{-val kezdődik}\}$,
- $S(a^{-1}) = \{x \in \mathbf{F}_2 : x \text{ ekvivalenciaosztályának redukált eleme } a^{-1}\text{-zel kezdődik}\}$,
- $S(b) = \{x \in \mathbf{F}_2 : x \text{ ekvivalenciaosztályának redukált eleme } b\text{-vel kezdődik}\}$,
- $S(b^{-1}) = \{x \in \mathbf{F}_2 : x \text{ ekvivalenciaosztályának redukált eleme } b^{-1}\text{-zel kezdődik}\}$.



2. ábra. A másodrangú szabad csoport (https://en.wikipedia.org/wiki/Free_group)

Ekkor $S(a) \cup a \cdot S(a^{-1}) = \mathbf{F}_2 = S(b) \cup b \cdot S(b^{-1})$, hiszen ha az a^{-1} -zel kezdődő szavak elejére írunk egy a -t, akkor a kapott redukált szó első betűje az eredeti második betűje lesz, ami a -t kivéve bármi lehet. Az a azért nem, mert redukált szavakkal dolgozunk. Így $a \cdot S(a)^{-1} = e \cup S(a^{-1}) \cup S(b) \cup S(b^{-1})$. A másik egyenlőséget hasonlóan lehet bizonyítani. $\square$



3. ábra. $S(a^{-1})$ és képe [2]

3.2.3. F_2 megkeresése $SO(3)$ -ban

3.2.19. Állítás. *Egy, a másodrangú szabad csoporttal izomorf részcsoporthal található $SO(3)$ -ban. [1]*

Bizonyítás. Vegyünk fel egy Descartes-féle koordináta-rendszert. Ekkor az x és az y tengely körüli $\arcsin(3/5)$ szögű forgatások szabad részcsoporthat generálnak. Legyen ez a két

forgatás ϕ és ψ . Ekkor a standard bázisban ϕ mátrixa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

és ψ mátrixa $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Ezek a mátrixok racionálisak, ezért tekinthetjük őket $\mathbb{Q}^3 \rightarrow$

$\mathbb{Q}^3$ leképezéseknek. Azt akarjuk megmutatni, hogy minden nemtriviális redukált elemhez található olyan $\mathbb{Q}^3$ -beli vektor, amely nem fixpontja az elemnek. Vegyük észre, hogy elég egy $\mathbb{Z}^3$ -beli vektort találnunk, mert azt normálva kapunk egy vektort S^2 -n, és a linearitás miatt ez se lehet fixpont, ha az eredeti nem az. Ha ϕ -t, ϕ^{-1} -t, ψ -t és ψ^{-1} -t felszorozzuk öttel, akkor kapunk kettő darab $\mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ lineáris leképezést. Így a ϕ és ψ által generált részcsoporthal levő tetszőleges redukált ρ elemhez létezik egy olyan $\rho' = 5^n \rho$ leképezés az egész számhármassok között, ahol n megegyezik ρ hosszával. Ekkor elég, ha megmutatjuk, hogy létezik $x \in \mathbb{Z}^3$ úgy, hogy minden $k \geq 1$ -re $\rho'(x) \neq 5^k x$, hiszen ekkor $\rho(x/|x|) \neq x/|x|$. Ezután még egyszer egyszerűsíthetjük a teret ahol dolgozunk, elég ugyanis $\mathbf{Z}_5^3$ -ben dol-

gozni. Ekkor a két generálómátrixunk $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ és $\tau = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, hiszen $0 \equiv 5$

és $2 \equiv -3 \pmod{5}$. Ekkor elég azt megmutatnunk, hogy létezik olyan $x \in \mathbf{Z}_5^3$, amelyre $\rho'(x) \not\equiv 0 \pmod{5}$, mert ebben az esetben $\rho'(x) \neq 5^k x$. Ekkor

$$\sigma(a, b, c) \equiv (0, 4b + 2c, 3b + 4c),$$

$$\sigma^{-1}(a, b, c) \equiv (0, 4b + 3c, 2b + 4c),$$

$$\tau(a, b, c) \equiv (4a + 3c, 0, 2a + 4c) \text{ és}$$

$$\tau^{-1}(a, b, c) \equiv (4a + 2c, 0, 3a + 4c) \pmod{5}.$$

Ekkor a fenti inverzzel jelölt leképezések már nem inverzei egymásnak a szokásos algerai értelemben, hiszen a kompozíciójuk a konstans nulla leképezés $\pmod{5}$, de jelölésnek alkalmas, mert a mátrixok, amikből származnak, azok egymás inverzei voltak. Mivel

$$3(3b + 4c) \equiv 9b + 12c \equiv 4b + 2c \pmod{5},$$

ezért σ képterében $(0, 3m, m)$ alakú vektorok vannak.

Most vizsgáljuk meg σ magterét. Láthatjuk, hogy $(0, 3(3b + 4c), 3b + 4c) \equiv (0, 0, 0)$ akkor

és csak akkor, ha $3b + 4c \equiv 0$, azaz $3b \equiv c$. Ezek szerint a leképezések és magterek a következők:

$$\begin{aligned}\text{ran}(\sigma) &= \{(0, 3m, m) \in \mathbf{Z}_5^3\}, \text{ ker}(\sigma) = \{(m, n, 3n) \in \mathbf{Z}_5^3\}, \\ \text{ran}(\sigma^{-1}) &= \{(0, m, 3m) \in \mathbf{Z}_5^3\}, \text{ ker}(\sigma^{-1}) = \{(m, 3n, n) \in \mathbf{Z}_5^3\}, \\ \text{ran}(\tau) &= \{(m, 0, 3m) \in \mathbf{Z}_5^3\}, \text{ ker}(\tau) = \{(3m, n, m) \in \mathbf{Z}_5^3\}, \\ \text{ran}(\tau^{-1}) &= \{(3m, 0, m) \in \mathbf{Z}_5^3\}, \text{ ker}(\tau^{-1}) = \{(m, n, 3m) \in \mathbf{Z}_5^3\}.\end{aligned}$$

Ekkor $\text{ran}(\sigma) \subset \text{ker}(\sigma^{-1})$, és viszont, továbbá ezek a tartalmazások τ -ra és τ^{-1} -re is igazak. Ezekon kívül azonban az összes többi magtér-képtér metszet triviális. Vegyünk egy ρ redukált szóhoz a fenti módon rendelt ρ' leképezést. Legyen $\rho' \equiv \sigma^{p_1} \tau^{q_1} \dots \sigma^{p_l} \tau^{q_l}$ alakú. Ekkor ha egy x vektor nincs benne τ^{q_l} magjában, akkor a τ^{q_l} általi képe nincs benne $\text{ker}(\sigma^{p_l})$ -ben, és ezért x -nek $\sigma^{p_l} \tau^{q_l}$ általi képe nincs $\tau^{q_{l-1}}$ magterében. Így indukcióval végig lehet lépkedni egész ρ' -n, és egyik lépésben sem lesz benne a leképezés magterében, azaz $x \notin \text{ker}(\rho')$. Már csak egy olyan x -et kell találni, amelyre ez igaz. Ilyet viszont találunk, hiszen a $(0,0,1)$ pont megfelelő, mert a négyből bármely leképezés bármely pozitív hatványával hatva a képe nem lesz 0.

Tehát a $(0,0,1)$ pont nincs benne a csoport egyik nemtriviális ρ' elemének magterében sem, így nem lesz fixpontja egyik nemtriviális ρ szónak sem, így $\rho \neq e$. Azaz ϕ és ψ szabad részcsoporthat generálnak $SO(3)$ -ban. $\square$

Most már minden algebrai eszköz megvan ahhoz, hogy bebizonyítsuk a tételt.

3.2.4. A Hausdorff paradoxon

A következő fontos lépés a Hausdorff paradoxon bizonyítása.

3.2.20. Tétel. *Létezik olyan $D \subset S^2$ megszámlálható, hogy $S^2 \setminus D$ egy $SO(3)$ -paradoxon halmaz.*

Bizonyítás. Vegyünk kettő, origót tartalmazó, egymásra tengely körüli $\arcsin(3/5)$ szögű forgatást. Az ezek által generált $SO(3)$ -beli, másodrangú szabad csoporttal izomorf részcsoporthat legyen G . Ezután D legyen azon x pontok halmaza, melyekre valamelyik $e \neq g \in G$ -re $gx = x$. Lineáris algebrából tudjuk, hogy $\mathbb{R}^3$ -ben két tetszőleges, origót tartalmazó tengely körüli forgatás kompozíciója mindig forgatás. Ezért a csoport minden eleme csak két pontot hagy fixen, a forgatás tengelyének kettő metszéspontját S^2 -vel, és mivel $\mathbf{F}_2$ megszámlálható, így D is.

3.2.21. Állítás. *Az $S^2 \setminus D$ halmazon szabadon hat G .*

Bizonyítás. Vegyünk tetszőleges $x \in S^2 \setminus D$ -t. Az kell, hogy G bármely két különböző g, h elemére különbözik gx és hx . Legyen $g, h \in G, gx = hx$. Ekkor $x = g^{-1}hx$, és mivel x nincs benne D -ben, $g^{-1}h = 1$, azaz $g = h$. Vagyis G szabadon hat $S^2 \setminus D$ -n. Így 3.2.17 Állítás szerint S^2 egy $SO(3)$ -paradox halmaz. $\square$

Ezzel a Hausdorff paradoxont bizonyítottuk.

3.2.22. Megjegyzés. Mivel a kiválasztási axiómát használtuk, ezért valójában nem tudni, hogyan is néznek ki ezek a halmazok. Csak azt mutattuk meg, hogy léteznek.

3.2.5. Egymásba darabolhatóság

Ami még hátramaradt az az, hogy a kihagyott pontokat is meg kellene duplázni valahogy, majd az ekkor már az egész gömbfelszínen értelmezett paradoxont ki kell terjeszteni a zárt gömbre. Ehhez azonban szükség van további fogalmakra.

3.2.23. Definíció. Legyen $A, B \subset X$, és tegyük fel, hogy a G csoport hat X -en. Az A és B halmazok G -egymásba darabolhatóak, ha létezik $n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \subset A$, és $B_1, \dots, B_n \subset B$ úgy, hogy $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigsqcup_{j=1}^n B_j$, továbbá létezik $g_1, \dots, g_n \in G$, úgy, hogy minden i -re $g_i \cdot A_i = B_i$. Jelölés: $A \equiv_G B$

3.2.24. Megjegyzés. Ez egy reflexív és szimmetrikus reláció.

3.2.25. Definíció. Legyen $A, B \subset X$. Az A halmaz G -darabolható B -be, ha létezik $B' \subseteq B$, úgy hogy $A \equiv_G B'$. Jelölés: $A \preceq_G B$

3.2.26. Állítás. $A \preceq_G B$ reláció tranzitív.

Bizonyítás. Legyen $A \preceq_G B$ és $B \preceq_G C$. Ekkor léteznek $A_1, \dots, A_n \subset A$ páronként diszjunkt halmazok, és léteznek $B_1, \dots, B_k \subset B$ páronként diszjunkt halmazok, továbbá léteznek $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_k \in G$, hogy $\bigsqcup_{i=1}^n g_i \cdot A_i \subset B$ és $\bigsqcup_{j=1}^k h_j \cdot B_j \subset C$. Legyen $A_{i,j} = g_i^{-1} \cdot (B_j \cap g_i \cdot A_i)$. Ekkor $\bigsqcup_{i,j=1}^{n,k} h_j g_i \cdot A_{i,j} \subset C$, tehát $A \preceq_G C$. $\square$

3.2.27. Tétel. Ha $A \preceq_G B$ és $B \preceq_G A$, akkor $A \equiv_G B$.

Bizonyítás. Legyen $f : A \rightarrow B$ az a függvény, melyre $f|_{A_i} = g_i$, és $\phi : B \rightarrow A$ az, melyre $g|_{B_j} = h_j$, ahol A_i, B_j, g_i és h_j a definícióban szereplő részhalmazok és csoportelemek. Ekkor fel lehet osztani A -t három részre: az egyik $\{x \in A \mid \phi(f(x)) = x\}$. Ezt a részhalmazt jelölje α_1 . Tehát ezen a részhalmazon és f szerinti képén f és ϕ egymás inverzei. Az A halmaz maradék pontjai vagy kívül esnek ϕ képterén, vagy ϕ szerinti ösképek és f szerinti képek nem egyezik meg. Legyen $C = \{a \in A \mid \nexists b \in B : a = \phi(b)\}$. A második rész, (α_2) azon elemei A -nak, melyek elérhetők C -ből f -et és ϕ -t használva. Azaz $\alpha_2 = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, y \in C : x = (\phi \circ f)^n(y)\}$. A harmadik rész: $\alpha_3 = A \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2)$. Az $F : A \rightarrow B$ függvény legyen α_1 -en és α_2 -n f , α_3 -on pedig ϕ^{-1} .

Kell: F jól definiált, egy bijekció A és B között, továbbá létezik A -nak olyan partíciója, hogy mindegyik darabon egy G beli elemmel reprezentálható, hiszen ekkor lesz $A \equiv_G B$. F jól definiált és bijekció: $\alpha_{1,2}$ pontjainak képét f egyértelműen megadja, és mivel $\alpha_3 \subset A \setminus C$, mindegyik α_3 beli pontnak van egyértelmű ϕ szerinti őse. Ahhoz, hogy az F függvény bijektív legyen, szükséges hogy injektív és szürjektív legyen. Az injektivitás csak akkor romolhat el, ha létezik $x \in \alpha_2, y \in \alpha_3$, hogy $f(x) = \phi^{-1}(y)$, hiszen az egyes halmazokon belül f és ϕ injektivitása miatt nem lehet nem injektív F . Az α_1 halmazon és képen pedig f és ϕ egymás inverzei, tehát csak ezt a két függvényt használva nem lehet A másik pontjaiba eljutni, tehát $B \setminus f(\alpha_1)$ pontjaiba se.

Nézzük ezt a konkrét x -et és y -t. $f(x) = \phi^{-1}(y)$ miatt $y = \phi(f(x))$, tehát $y \in \alpha_2$, ellentmondás.

A szürjektiváshoz vegyünk tetszőleges $b \in B$ -t. Tegyük fel, hogy $b \notin f(\alpha_1 \cup \alpha_2)$. Ekkor az kell, hogy $\phi(b) \in \alpha_3$. Ha $\phi(b) = a \in \alpha_1$, akkor $b = f(a)$ tehát $b \in f(\alpha_1)$, ez a feltevés miatt nem lehet. Ha $\phi(b) = a \in \alpha_2$, az azt jelenti, hogy a megkapható f és ϕ használatával C -ből, vagyis $a = (\phi \circ f)^n(y), y \in C$. Ekkor a nem lehet C -ben, mert akkor nem lenne ϕ szerinti őse. Ez azt jelenti, hogy létezik $x \in \alpha_2$, hogy $a = \phi(f(x))$, tehát ϕ injektivitása miatt $b = f(x)$, ahol $x \in \alpha_2$, ami ellentmond a feltevésünknek. Tehát $\phi(b) \in \alpha_3$, vagyis b egy α_3 beli elem ϕ szerinti őse, azaz F szerinti képe.

Ezzel beláttuk, hogy F egy bijekció A és B között.

Létezik A -nak olyan partíciója, hogy F mindegyik darabon egy G beli elemmel reprezentálható: $F|_{A_i \cap (\alpha_1 \cup \alpha_2)}$ reprezentálható az eredeti g_i csoportelemmel.

Továbbá $\alpha_3 = \bigsqcup_{j=1}^k h_j \cdot (F(\alpha_3) \cap B_j)$, és a diszjunkt unió j -edik tagján F reprezentálható h_j^{-1} -zel. Ezzel megadtunk A -ra egy partíciót, melynek minden tagján F függvény megegyezik valamelyik $g \in G$ elem hatásával a részhalmazon, tehát $A \equiv_G B$. $\square$

3.2.28. Állítás. $A \equiv_G$ reláció tranzitív, ezért ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. Legyen $A \equiv_G B \equiv_G C$. Ekkor $A \preceq_G B \preceq_G C$ és $C \preceq_G B \preceq_G A$, továbbá $\preceq_G$ tranzitivitása miatt $A \preceq_G C$ és $C \preceq_G A$. A 3.2.27 Tétel miatt ennyi elég az állítás bizonyításához, azaz $A \equiv_G C$, tehát a reláció tranzitív. $\square$

Az, hogy az egymásba darabolhatóságnak mi köze van a Banach-Tarski paradoxonhoz és miért kellett ez a hosszú bizonyítás, az az alábbi tételből derül ki.

3.2.29. Tétel. Ha $A \equiv_G B$ és A G -paradox, akkor B is G -paradox.

Bizonyítás. Elég $\equiv_G$ reláció tranzitivitását felhasználni. Ha a paradox tulajdonság definícióját kicsit átfogalmazzuk, azt kapjuk, hogy az A halmaz akkor G -paradox, ha létezik $A_1, A_2 \subset A$ úgy, hogy $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ és $A_1 \equiv_G A_2 \equiv_G A$.

A tétel feltételei szerint $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ és $A_1 \equiv_G A_2 \equiv_G A \equiv_G B$. Tudjuk, hogy létezik olyan $C_0, \dots, C_n \subseteq A$, hogy $\bigsqcup_{i=1}^n C_i = A$ és $g_0, \dots, g_n \in G$, hogy $\bigsqcup_{i=0}^n g_i \cdot C_i = B$. Legyen

$B_j = \sqcup_{i=0}^n g_i \cdot (C_i \cap A_j)$, ahol $j = 1, 2$. Ekkor $A_1 \equiv_G B_1$ és $A_2 \equiv_G B_2$, tehát

$$B \equiv_G A \equiv_G A_1 \equiv_G A_2 \equiv_G B_1 \equiv_G B_2.$$

Így létezik $B_1, B_2 \subset B$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ és $B_1 \equiv_G B \equiv_G B_2$, azaz B egy G -paradox halmaz. $\square$

3.2.30. Megjegyzés. A tételből következik, hogy nem kell megadnunk S^2 -nek a pontos szétDarabolását még annyira se, mint $S^2 \setminus D$ -nek, ahhoz hogy megmutassuk, hogy S^2 egy $SO(3)$ -paradox halmaz. Elég azt megmutatni, hogy $S^2 \setminus D \equiv_{SO(3)} S^2$.

3.2.31. Állítás. Legyen G egy csoport. Az alábbi két állítás ekvivalens:

1. Létezik $A_1, A_2 \subseteq G$ úgy, hogy $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \equiv_G A \equiv_G A_2$.
2. Létezik $A_1, A_2 \subseteq G$ úgy, hogy $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \equiv_G A \equiv_G A_2$, és $A_1 \cup A_2 = A$.

Bizonyítás. (1) $\implies$ (2): Legyen $A_1, A_2 \subseteq G$ úgy, hogy $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \equiv_G A \equiv_G A_2$. Ekkor $A \preceq_G A \setminus A_1$ és $A \setminus A_1 \preceq_G A$, ezért $A_1 \equiv_G A \equiv_G A \setminus A_1$. A másik irány nyilvánvaló. $\square$

3.2.6. A gyenge Banach-Tarski paradoxon bizonyítása

Az előző tétel szerint elég megmutatni, hogy $S^2 \setminus D \equiv_{SO(3)} S^2$.

3.2.32. Állítás. $S^2 \setminus D \equiv_{SO(3)} S^2$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy D megszámlálható, tehát található a gömbfelszínen két átlellenes pont úgy, hogy egyik sem D bel. Válasszunk egy ilyen pontpár által meghatározott tengelyt, és akörül vegyünk egy olyan ϕ forgatást, hogy minden $n \in \mathbb{N}_{>0}$ -ra és minden $x \in D$ -re $\phi^n(x) \notin D$. Ilyen szögű forgatás létezik, mert D megszámlálható, tehát mindegyik elemére megszámlálható szög van, amelyik D -beli elembe forgatja, mert a forgatásnak nincs d -beli fixpontja. Mindegyik ilyen "rossz" szögű forgatás csak megszámlálható darab forgatásnak lesz a valahányadik iteráltja, és megszámlálható elemre kell ezeket a "rossz" szögű forgatásokat kidobni az összesből. Továbbá $\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0$ még mindig megszámlálható, tehát lesz egy olyan ϕ forgatás, amelyre $\phi^n(D) \cap D = \emptyset$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

Vegyük a $D^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \phi^n(D)$ halmazt. Ekkor $\phi(D^*) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi^n(D) = D^* \setminus D$.

Így már minden adott ahhoz, hogy megmutassuk, hogy $S^2 \setminus D \equiv_{SO(3)} S^2$. Hiszen

$$S^2 = S^2 \setminus D^* \sqcup D^* \text{ és } S^2 \setminus D^* \sqcup \phi(D^*) = (S^2 \setminus D^*) \sqcup (D^* \setminus D) = S^2 \setminus D.$$

Tehát $S^2 \setminus D$ és S^2 egymásba darabolhatóak, tehát S^2 egy $SO(3)$ -paradox halmaz. $\square$

Innentől annyi a feladat, hogy a gömbfelszínen levő paradoxont kiterjesszük az egész egységgömbre. A $\mathbb{D}^3 \setminus \{0\}$ halmaz felírható $\{(x, r) : x \in S^2, 0 < r \leq 1\}$ alakban. Ekkor

a paradoxont ki lehet terjeszteni az egységgömbre úgy, hogy ugyanazt csináljuk, mint S^2 esetén, csak x pontok helyett $\{(x, r) : 0 < R \leq 1\}$ halmazokkal. Mivel csak forgatásokkal dolgoztunk, a különböző sugarú gömbretegeket lehet egyszerre kezelni. Így már csak az origó marad ki, és arra pontosan ugyanazzal a trükkel terjesztjük ki a paradoxont, mint $S^2 \setminus D$ -ről S^2 -re.

3.2.33. Állítás. $\mathbb{D}^3 \setminus \{0\} \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} \mathbb{D}^3$

Bizonyítás. Válasszuk ki az $(\frac{1}{3}, 0, 0)$ pontot, és az azon a ponton keresztül haladó, z tengellyel párhuzamos egyenes körüli 1 szögű forgatást. Nevezzük el ezt ψ -nek. Mivel 1 π -hez képest irracionális, minden $0 \neq n \in \mathbb{N}$ esetén $\psi^n(0) \neq 0$. Legyen $H = \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi^n(0)$. Ekkor $\psi(H) = H \setminus \{0\}$ tehát

$$\mathbb{D}^3 = (\mathbb{D}^3 \setminus H) \cup H \text{ és } (\mathbb{D}^3 \setminus H) \cup \psi(H) = \mathbb{D}^3 \setminus \{0\}.$$

Vagyis $\mathbb{D}^3 \setminus \{0\} \equiv \mathbb{D}^3$, azaz $\mathbb{D}^3$ egy $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ -paradox halmaz.

Ezzel a Banach-Tarski paradoxon gyenge verzióját beláttuk. $\square$

3.2.7. Az erős Banach-Tarski paradoxon bizonyítása

Ha a tételt kicsit átfogalmazzuk, azt állítjuk, hogy ha H és K korlátosak és belsejük nemüres, akkor egymásba darabolhatóak. A 3.2.27 Tételt most fogjuk felhasználni, mert sokkal könnyebb $H \prec_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} K$ -t bizonyítani, mint $H \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} K$ -t.

3.2.34. Állítás. Ha $H, K \subset \mathbb{R}^3$, H korlátos és K nemüres belsejű, akkor $H \prec_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} K$.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy K belseje nem üres, tehát létezik egy valamekkora sugarú B_1 nyílt gömb K -ban. Vegyük B_1 elég sok, de véges sok példányát, annyit, hogy a példányokat megfelelően eltolva befedjék a H -t tartalmazó nyílt B_2 gömböt. Ilyen B_2 létezik, hiszen H korlátos. Vagyis $H \subset B_2 \subset \bigcup_{i=1}^n B_{1_i}$, ahol B_{1_i} gömbök sugara megegyezik B_1 sugarával, középpontjaikat pedig úgy választjuk, hogy a fenti tartalmazás bekövetkezzen. Mivel egy gömb és két gömb egymásba darabolhatóak, egy gömb és tetszőleges véges sok gömb is egymásba darabolhatóak. Azaz $B_1 \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} \bigsqcup_{i=1}^n B_{1_i}$. Bár a fenti $\bigcup_{i=1}^n B_{1_i}$ halmazban az unió tagjai nem diszjunktak, választhatók $B'_{1_i} \subseteq B_{1_i}$ halmazok úgy, hogy $\bigcup_{i=1}^n B_{1_i} = \bigsqcup_{i=1}^n B'_{1_i}$. Az új halmazokat úgy kapjuk, hogy bármely x pontra kiválasztjuk a legkisebb sorszámú halmazt, amelynek eleme, és a többiből kidobjuk. Azaz $B'_{1_i} = \{x : x \in B_{1_i}, \forall j < i, x \notin B_{1_j}\}$. Ha ekkor az eredeti diszjunkt uniónál használt átdarabolást elvégezzük, akkor a végén megkapjuk B_1 egy részhalmazát. Ezek szerint $H \subset B_2 \subset \bigcup_{i=1}^n B_{1_i} \prec_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} B_1 \subset K$. Mivel $C \subseteq D$ -ből következik, hogy $C \prec_G D$, és $\prec_G$ reláció tranzitív, $H \prec_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} K$.

Az állítás szerint a tételben szereplő H , K halmazokra, mivel mindkettő nemüres belsejű és korlátos, $H \prec_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} K$ és $K \prec_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} H$, azaz $H \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{R}^3)} K$.

Ezzel a Banach-Tarski paradoxon erős verzióját is beláttuk. $\square$

4. Miért nem lehet aranyat sokszorozni a Banach-Tarski paradoxon segítségével?

4.1. A használt halmazok a fizikai valóságban nem léteznek

A valóságban a gömbök nem feleltethetők meg a matematikai gömböknek, hiszen folytonosan, azaz kontinuum sok ponttal modellezünk egy alapvetően máshogy felépülő tárgyat. A világ atomokból épül fel, minden test véges sokból. Mivel kiválasztási axiómával dolgozunk, az atomoknál kisebb méretekig el kell jutni. Így eljutunk a kvantumfizika számomra kevésbé ismert területére. Az pedig, hogy egy elektron valószínűségi mezejét hogyan daraboljuk fel, nem beszélve az atomok közti "üres" térről egy teljesen más téma, és bőven túlmutat a dolgozat keretein.

Még fontos megemlíteni, hogy a valóságban nincsenek nem mérhető tárgyak, hiszen egy egyszerű, megfelelően elég pontos mérleg megmondja egy tárgy tömegét, vízbe eresztve lehet vízkiszorítással térfogatot mérni, stb. A kiválasztási axióma gyakorlatban való felhasználása szintén egy elég érdekes kérdés, hiszen kontinuum sok halmazból kell pontosan egy elemet kivenni.

4.2. Problémák a forgatással

A matematikai forgatás az egy függvény, amely egy "igazi" forgatás kezdő és végállapotát tárolja. Azzal egyáltalán nem foglalkozik, hogy ha forgatunk valamit, a közbülső állapotokon is át kell haladni. A paradoxon akkor is fennáll, hogy ha megköveteljük, hogy minden darab átmenjen a közbülső állapotokon, úgy, hogy minden időpontban diszjunktak legyenek, bár itt se forgatunk, csak úgy mozgatjuk a darabokat, hogy a végpont a forgatás végpontja legyen. [3]

És ha ezeken a problémákat figyelmen kívül hagyjuk, még valahogyan meg kell "fogni" ezeket a halmazokat, ahhoz hogy elforgathassuk őket.

5. Néhány gondolat a kiválasztási axiómáról

Sok matematikus úgy gondolta, hogy mivel a kiválasztási axióma (AC) nélkül nem igaz a Banach-Tarski paradoxon, ezért a halmazelmélet axiómáiból ki kell venni a kiválasztási axiómát, hiszen a használatával ilyen, intuíciónak teljesen ellentmondó eredményeket lehet kapni. Ezért úgy gondoltam, hogy illene néhány érvet felsorakoztatni amellett, hogy a AC napjainkban széles körben elfogadott.

A kiválasztási axióma annyira intuitív, hogy megfogalmazása előtt minden matematikus használta, mert helyessége mindenki számára annyira nyilvánvaló volt, hogy használata

fel sem tűnt. Az axiómával szkeptikus matematikusok csak a pontos megfogalmazás után tűntek fel, amikor az AC-t elkezdtek mélyebben kutatni, és a Banach-Tarski paradoxonhoz hasonló intuíciónak ellentmondó eredmények születtek.

5.1. Algebrai indokok

Mivel a Zorn-lemmáról fog szólni az alábbi szakasz, be kell vezetni néhány definíciót, és a lemmát is ki kell mondani.

5.1.1. Definíció. Legyen X egy halmaz, $<$ pedig egy kétváltozós reláció. Ekkor $<$ egy részbenrendezés, ha az alábbiak igazak

- $\forall a \in X, \quad a \not< a$, azaz irreflexív,
- $\forall a, b \in X, \quad a < b \implies b \not< a$, azaz asszimmetrikus,
- $\forall a, b, c \in X, \quad a < b, \quad b < c \implies a < c$, azaz tranzitív.

Amennyiben $<$ trichotóm, vagyis minden $a, b \in X$ esetén $a = b, a < b$ és $b < a$ közül pontosan egy teljesül, tehát bármely két elem összehasonlítható, akkor $<$ egy rendezés. Jelölés: $(X, <)$. Ekkor az $(X, <)$ párt (részben)rendezett halmaznak nevezzük.

5.1.2. Definíció. Legyen $(X, <)$ egy részbenrendezett halmaz. Ekkor láncnak nevezünk egy $Y \subseteq X$ részhalmazt, ha Y -ra megszorítva a részbenrendezést egy rendezést kapunk.

5.1.3. Definíció. Legyen $(X, <)$ egy részbenrendezett halmaz és $Y \subseteq X$. Ekkor egy $a \in X$ elem felső korlátja Y -nak, ha bármely $b \in Y$ esetén $b < a$. Egy $a \in X$ elem maximális eleme X -nek, ha nem létezik $c \in X$ úgy, hogy $a < c$. Szemléletesen a felső korlát mindennél nagyobb, a maximális elemnél pedig nincs nagyobb. Az, hogy egy elem maximális egy formálisan gyengébb tulajdonság.

Most már készen állunk a Zorn-lemma kimondására.

5.1.4. Tétel. *Ha egy $(X, <)$ részben rendezett halmazban minden láncnak van felső korlátja, akkor X -nek van maximális eleme.*

Halmazelméletből ismert, hogy a halmazelmélet többi axiómája mellett a kiválasztási axióma és a Zorn-lemma ekvivalensek. Zorn-lemma nélkül pedig nincsen minden vektortérnek bázisa. A véges dimenziós vektortereknek kiválasztási axióma nélkül is van bázisuk, de végtelen dimenziónál a bizonyítás Zorn-lemmát használ. Sőt, a kiválasztási axióma nélkül létezik olyan vektortér, amelynek van kettő, különböző számosságú bázisa [4].

A kiválasztási axióma nélkül halmazok számosságáról nem lehet beszélni, hiszen amiatt van bijekció bármely halmazból valamelyik rendszámra. Az axióma nélkül a számosságok elmélete, és emiatt az egész halmazelmélet alapjaiban megváltozik.

5.2. Egyéb végtelen "paradoxonok"

Aki matematikával foglalkozik, hallott már a végtelen szálloda paradoxonjairól. Ha egy végtelen szobás szálloda tele van, és a szomszédos, végtelen emeletes, mindegyik emeleten végtelen szobás szálloda leég, az összes vendég elfér az eredeti szállodában. Persze ez csak a halmazelméleti $\aleph_0^2 = \aleph_0$ azonosság elmesélve szállodákkal, de első hallásra a matematikában járatlannak ugyanolyan hihetetlen és paradox, mint egy gömb megduplázása. A Banach-Tarski paradoxon azért tűnhet jobban paradoxonnak, mert gömböt mindenki látott már, végtelen szobás szállodát pedig nem. Viszont mindkettő paradoxonnak a végtelen az oka. A szállodák végtelen férőhelye, és a háromdimenziós tér végtelen sok, végtelen kicsi pontja.

Megemlíthető még a bizonyításban többször is használt (például 3.2.32 Állítás bizonyítása) olyan halmaz, amelyet egy megfelelő szöggel elforgatva egy valódi részhalmazát kapjuk eredményül, azaz egy forgatástól "kisebb" lesz. Ide tartozik továbbá a bevezetőben említett Akhilleusz és teknős probléma.

5.3. A Banach-Tarski paradoxon alacsonyabb dimenzióban nem igaz

5.3.1. Definíció. Egy G csoport amenábilis, ha létezik rajta egy végesen additív, a csoportbeli szorzásra invariáns μ valószínűségi mérték. Azaz bármely diszjunkt $A, B \subseteq G$ és $g \in G$ esetén $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$, $\mu(G) = 1$ továbbá $\mu(gA) = \mu(A)$.

5.3.2. Megjegyzés. Látható, hogy amenábilis csoport nem lehet paradox, hiszen egy G csoport paradox felbontása megmutatja, hogy nincs a csoporton ilyen valószínűségi mérték, mert $2 \neq 1$.

Egy kicsit ironikus, de az axióma, ami lehetővé teszi három és magasabb dimenzióban a paradoxont, megakadályozza azt kettő és egy dimenzióban. A kommutatív csoportok mind amenábilisek, amely kizárja azt, hogy paradoxak legyenek, és a bizonyítás használja AC-t, bár egy picit gyengébb axióma is elég ehhez az eredményhez. Ismert, hogy $\mathbb{Z}^2$ és $SO(2)$ csoportok kommutatívak, ezért $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ is amenábilis, így a Banach-Tarski paradoxon nem igaz a síkon.

6. Banach-Tarski paradoxon magasabb dimenziós és hiperbolikus tereken

6.1. Legalább háromdimenziós terek

6.1.1. Euklideszi terek

A gyenge- és erős Banach-Tarski paradoxon magasabb dimenzióban is igaz.

6.1.1. Tétel. *Legyen $3 \leq n$. Ekkor $\mathbb{D}^n \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{R}^n)} \mathbb{D}^n \sqcup \mathbb{D}^n$, azaz az n -dimenziós gömb feldarabolható véges sok darabra úgy, hogy azokból eltolásokkal és forgatásokkal rekonstruálható az eredeti gömb két példányban.*

6.1.2. Tétel. *Legyen továbbra is $3 \leq n$. Ekkor bármely $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos és nemüres belsejű halmazokra $A \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{R}^n)} B$.*

Bizonyítás. A tételt indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $n > 3$ és minden $3 \leq l < n$ esetén igaz mindkettő tétel.

Ekkor vegyük $\mathbb{D}^{n-1}$ egységgömböt, és egy paradox felbontását. A részhalmazokat jelölje $A_0, \dots, A_k$, a csoportelemeket $g_0, \dots, g_k \in \text{Isom}(\mathbb{R}^{n-1})$. Ekkor vegyük $\mathbb{R}^n$ -ben a $K = \mathbb{D}^{n-1} \times [0, 1]$ halmazt. Legyen $A'_i = A_i \times [0, 1]$, és g'_i az első $(n-1)$ koordinátára hasson úgy, mint g_i , az utolsó koordinátát pedig hagyja fixen. Ekkor az A'_i halmazok és g'_i izometriák K halmaz egy paradox felbontása, hiszen minden rétegben egyszerre megcsinálja az eredeti darabolást. Ekkor a már korábban látott módon (3.2.7 Állítás) be lehet bizonyítani a tétel erős verzióját, felhasználva, hogy minden gömb belsejébe befér egy kellően kicsi henger, és bármely hengerbe befér egy megfelelő sugarú gömb. A tétel erős verziójából következik a gyenge verzió. $\square$

6.1.2. Legalább háromdimenziós hiperbolikus terek

Először definiáljuk a hiperbolikus teret, és a definícióhoz szükséges fogalmakat.

6.1.3. Definíció. Az n -dimenziós hiperbolikus tér az egyetlen olyan n -dimenziós egyszeresen összefüggő konstans -1 szakaszgörbületű Riemann-sokaság ($n \geq 2$). Jelölés: $\mathbb{H}^n$.

A Riemann-sokaságok szakaszgörbülete messze túlmutat ezen dolgozat keretein, azt az intuíciót fogja meg és általánosítja magasabb dimenzióban, hogy különböző sugarú gömbök görbületének a nagysága más, és hogy egy úszógumi a belső vonalán máshogy görbül, mint egy gömb. [5]

6.1.4. Definíció. Legyen X halmaz és $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ekkor az (X, τ) pár topologikus tér, ha az alábbiak teljesülnek:

- $\emptyset, X \in \tau$,
- ha $A, B \in \tau$, akkor $A \cap B \in \tau$, azaz τ zárt a véges metszetre,
- ha $\alpha \subseteq \tau$, akkor $\bigcup_{A \in \alpha} A \in \tau$, azaz τ zárt az unióra.

Ekkor τ elemeit X nyílt halmazainak nevezzük.

6.1.5. Megjegyzés. Ha (X, d) egy metrikus tér, akkor a metrika automatikusan generál egy topológiát. Egy $A \subseteq X$ halmaz akkor nyílt, ha minden $x \in A$ esetén létezik $\epsilon > 0$ úgy, hogy $B(x, \epsilon) \subseteq A$.

Néhány példa topologikus terekre:

- $\mathbb{R}^n$ a szokásos metrikával,
- a folytonos $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, ahol $d(f, g) = \sup |f - g|$ vagy $\sqrt[p]{\int_0^1 |f - g|^p}$, ahol $p \geq 1$,
- tetszőleges X halmaz, ahol minden $Y \subseteq X$ halmaz nyílt.

6.1.6. Definíció. Legyen (X, τ_1) és (Y, τ_2) két topologikus tér. Ekkor egy $f : X \rightarrow Y$ függvény folytonos ha nyílt halmaz ösképe nyílt, azaz ha $A \in \tau_2$ akkor $f^{-1}(A) \in \tau_1$.

Amennyiben f bijektív, és az inverze is folytonos, akkor f egy homeomorfizmus. Ha X és Y között van homeomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy homeomorfak. Jelölés: $X \cong Y$.

Az egyszeres összefüggőség fogalma terjedelmi okokból nem fér bele ebbe a dolgozatba. Egy topologikus tér akkor egyszeresen összefüggő, ha a fundamentális csoportja a triviális csoport. Intuitíven ez azt jelenti, hogy nincs olyan lyuk a téren, amelyre rá lehet akasztani egy olyan hurkot, amelyet nem lehet fokozatosan összehúzni. Például a körvonal nem egyszeresen összefüggő, hiszen ha egyszer körbemegyünk a körvonal mentén, akkor megkerültünk egy lyukat. A gömbfelszín viszont egyszeresen összefüggő, mert akárhogy teszünk rá egy hurkot, azt a gömbfelszín mentén "le lehet húzni". [6]

6.1.7. Definíció. Egy (X, τ) topologikus tér Hausdorff, ha bármely két $x, y \in X$ pontra léteznek A és B nyílt halmazok, úgy, hogy $x \in A$, $y \in B$ és $A \cap B = \emptyset$.

6.1.8. Definíció. Legyen (X, τ) egy topologikus tér, Ekkor $\mathcal{B} \subseteq \tau$ a topológia egy bázisa, ha tetszőleges $A \in \tau$ előáll $\mathcal{B}$ beli nyílt halmazok uniójaként.

6.1.9. Definíció. Egy (X, τ) topologikus tér M_2 , ha τ -nak létezik megszámlálható bázisa.

6.1.10. Definíció. Az (X, τ) topologikus tér egy n -dimenziós sokaság, ha Hausdorff, M_2 és minden $x \in X$ -re létezik egy $x \in A$ nyílt halmaz úgy, hogy A homeomorf $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazával.

Az X egy sima sokaság, ha ezek az A_x nyílt halmazok és ϕ_{A_x} homeomorfizmusok választhatók úgy, hogy ha $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, akkor az $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : f_1(A_1 \cap A_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy sima valós függvény. A ϕ_{A_x} homeomorfizmusokat térképeknek nevezzük.

Az úszógumi felszíne, vagy éppen a gömbfelszín kétdimenziós sokaságok. Az n -dimenziós sokaság ezeknek a felületeknek az általánosítása más dimenzióban. Megköveteljük, hogy a sokaság minden pontja körül úgy néz ki, mint az n -dimenziós tér, ahogyan a gömb alakú föld is a mindennapi életben rengeteg szempontból olyan, mintha sík lenne. A Hausdorff és M_2 tulajdonság azért kell, mert nélkülük nagyon furcsa terek is sokaságok lennének. Egy sokaság az egyértelmű konvergencia miatt kell Hausdorff legyen, az M_2 tulajdonság azért kell, mert ilyenkor gyakran metrizálható.

6.1.11. Definíció. Legyen X egy sima sokaság, egy adott $x_0 \in X$ pont esetén X -nek az x_0 belüli érintőtere $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X, \gamma(0) = x_0$ sima görbék ekvivalenciaosztályai, ahol γ és $\tilde{\gamma}$ görbék ekvivalensek, ha tetszőleges f térképre $(f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \tilde{\gamma})'(0)$ olyan f -ekre, melyekre a kompozíció értelmes a 0 egy kis környezetében.

6.1.12. Definíció. Egy X sima sokaság egy Riemann-sokaság, ha minden $x \in X$ pontra az x -beli érintőtérben van egy pozitív definit bilineáris forma, amely folytonosan függ x -től. Azaz a sokaság bármely pontjából induló bármely két érintővektort össze tudjuk szorozni skalárisan.

6.1.13. Megjegyzés. Egy X Riemann sokaság mindig egy metrikus tér is, ahol jelölje G_x az x pontbeli érintőtérben definiált skaláris szorzást. Ekkor bármely $x, y \in X$ esetén $d(x, y) = \inf \{ \int_0^1 \sqrt{G_x(\gamma'(x), \gamma'(x))} dx \}$ ahol $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ sima görbe és $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Mivel a hiperbolikus tér fenti definíciója elég absztrakt, a tér geometriai tulajdonságait különböző modelleken szokták vizsgálni. Jól érzékelteti a definíció hiányosságait az, hogy ha a görbületet nullára illetve egyre cserélnénk, az euklideszi teret illetve a gömbfelszínt kapnánk. A hiperbolikus tér egy modellje $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmaza, ellátva a megfelelő tulajdonságú metrikával.

- A hiperbolikus tér Poincaré-féle gömbmodellje az $\mathbb{R}^n$ belüli nyílt egységgömb, az $x = (x_1, \dots, x_n)$ pontbeli $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$ vektorok skaláris szorzata pedig $4 \frac{\sum_{i=1}^n v_i w_i}{(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2)^2}$. Ez a klasszikus euklideszi skaláris szorzat, szorozva néggyel és osztva x pontnak a gömbfelszíntől vett euklideszi távolságnégyzetével.
- A felső féltér modell elemei az olyan $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pontok, melyekre $x_n > 0$. Egy ilyen x pontban v és w vektorok skalárszorzata $\frac{\sum_{i=1}^n v_i w_i}{x_n^2}$. Ez a metrika is az euklideszi elosztva egy x -től függő értékkel. Mindkét modellen szorzunk egy

x -től független konstanssal, majd osztunk x -nek a modell határától vett euklideszi távolságának négyzetével.

6.1.14. Megjegyzés. Vektorok bezárt szöge mindkettő modellen ugyanannyi valós és hiperbolikus esetben, hiszen $\frac{\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^n}}{|v|_{\mathbb{R}^n}|w|_{\mathbb{R}^n}} = \frac{\langle v, w \rangle_{\mathbb{H}^n}}{|v|_{\mathbb{H}^n}|w|_{\mathbb{H}^n}}$.

6.1.15. Tétel. *A legalább háromdimenziós hiperbolikus térben tetszőleges pont körüli egysugarú gömb egy $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ -paradox halmaz.*

Mivel $\mathbb{H}^n$ izometriái egy jóval gazdagabb csoportot alkotnak, mint az azonos dimenziójú euklideszi tér izometriái, ezért a paradoxon hasonló módon bizonyítható. [7]

Az érdekes eset a hiperbolikus sík, mert egy ottani egysugarú gömb paradox, míg az $\mathbb{R}^2$ beli nem paradox, hiszen $SO(2)$ nem paradox csoport.

6.2. A hiperbolikus sík

Mielőtt rátérünk a paradoxonra $\mathbb{H}^2$ -en, vizsgáljuk meg kicsit részletesebben a hiperbolikus sík geometriáját. A matematikusokat sokáig nagyon érdekelte az a kérdés, hogy az euklideszi sík többi axiómájából le lehet-e vezetni az utolsót, a párhuzamossági axiómát. Ez az axióma azt mondja, hogy egy e egyeneshez egy külső p pontból egyetlen párhuzamos, e -t nem metsző egyenes húzható. A kérdés megoldása az, hogy nem lehet, ha a párhuzamossági axiómát kicseréljük arra, hogy végtelen sok, az e egyenest nem metsző p -t tartalmazó egyenes létezik, akkor a hiperbolikus síkot kapjuk. Ez a szemlélet sokkal régebbi, mint a modellek, amiken manapság vizsgáljuk $\mathbb{H}^2$ -t. Mi is főként a körlap modellen fogunk dolgozni, és nem az axiomatikus felépítésből vezetünk le állításokat.

Kétdimenziós esetben érdemes úgy gondolni a pontokra, mint komplex számokra. A körlap modell azért jó, mert szimmetrikus, és ezért sok tulajdonság szépen látható rajta. Ezzel szemben a féltér modell előnye, hogy a képzetes tengelyen sokkal könnyebb számolni. Egy $z = x + yi$ pontbeli v érintővektor hossznégyszete ekkor a körlap modellen $\frac{v_1^2 + v_2^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$, a féltér modellen pedig $\frac{v_1^2 + v_2^2}{y^2}$. Az irányítástartó izometriák a felső féltéren $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ alakúak, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $ad - bc = 1$. [8]

Figyeljük meg, hogy ekkor ϕ reprezentálható egy $\Phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrixszal, továbbá $-\Phi$ és Φ ugyanazt a leképezést reprezentálja. Vegyük még észre, hogy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} az + b \\ \frac{az + b}{cz + d} \\ 1 \end{pmatrix}$, ha ekvivalensnek tekintjük $\mathbb{C}^2$ nem nulla, azonos komplex egyenesen elhelyezkedő elemeit. Fontos megemlíteni, hogy $cz + d \neq 0$, mert a $-d/c$ alakú

számok tisztán valósak, ezért nem elemei a féltér modellnek. Így a lineáris algebrából tanultak alapján $\psi \circ \phi$ reprezentáló mátrixa $\Psi \cdot \Phi$. Azaz $\text{Isom}_+(\mathbb{H}^2)$ csoport izomorf $PSL(2, \mathbb{R})$ csoporttal.

A körlap modellen ugyanezt a csoportot $z \rightarrow e^{i\alpha}z$ és a $z \rightarrow \frac{a+z}{\bar{a}z+1}$ transzformációk generálják, ahol $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ és $a \in \mathbb{C}, |a| < 1$. [7]

Látható, hogy $\mathbb{H}^2$ izometria-csoportja egy gazdagabb csoport, mint $\mathbb{R}^2$ -é, mert $SO(2)$ -nél sokkal bővebb $SL(2, \mathbb{R})$, és $PSL(2, \mathbb{R})$ úgy keletkezik $SL(2, \mathbb{R})$ -ből, hogy $-\Phi$ -t azonosítjuk Φ -vel.

Mivel a bizonyításban a körlap modellt fogjuk használni, vizsgáljuk meg azt részletesebben. Jelölje a $z \rightarrow \frac{a+z}{\bar{a}z+1}$ leképezést τ_a . Nézzük meg, hogyan viszonyul egymáshoz

valós a esetén τ_a és τ_{ia} . Megfigyelhetjük, hogy $e^{i\pi}\tau_a(e^{-i\pi}z) = i\tau_a(-iz) = i\frac{-iz+a}{-aiz+1} = \frac{z+ia}{ia z+1} = \tau_{ia}(z)$. Azaz a két leképezés majdnem ugyanúgy hat, annyi különbséggel, hogy τ_a vízszintesen, míg τ_{ia} függőlegesen.

6.2.1. Definíció. Egy hiperbolikus egyenes egy olyan $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ ívhossz szerint parametrizált görbe képe, mely bármely $a, b \in \mathbb{R}$ pontok esetén $d(\gamma(a), \gamma(b)) = l(\gamma)|_a^b$, ahol $l(\gamma)|_a^b$ a γ görbe hossza a -tól b -ig.

6.2.2. Definíció. Legyen L egy hiperbolikus egyenes, $x \notin L$ egy pont. Ekkor az L egyenes x -re illeszkedő ekvidisztánsa az az x -et tartalmazó összefüggő halmaz, mely minden pontjának távolsága L -től $d(x, L)$.

6.2.3. Megjegyzés. Bár az euklideszi esetben az ekvidisztánsok párhuzamos egyenesek, hiperbolikus esetben az ekvidisztánsok nem lesznek egyenesek.

Egy izometria minden egyenest egyenesbe, és egy L egyenestől d távolságban futó ekvidisztáns L képétől d távolságban futó ekvidisztánsba visz. Ezen felül a valós esethez hasonlóan két különböző pont képe és az irányítás egyértelműen meghatároz egy ϕ izometriát. Ebből következik, hogy ha egy irányítástartó izometriának legalább kettő fixpontja van, akkor az az identitás.

A körlap modellen az egyenesek a modell átmérői, illetve a modell határára mindkét metszéspontban merőleges körvonalak. A féltér modellen a hiperbolikus egyenesek a valós tengelyre mindkét pontban merőleges félkörívek, illetve a valós tengelyre merőleges félegyenesek. A hiperbolikus körök ezen mindkét modellen valóban is körök, csak más középponttal és sugárral rendelkeznek.

6.2.4. Tétel. *A hiperbolikus sík bármely két nemüres belsejű és korlátos részhalmaza egymásba darabolható, azaz ha $A, B \subseteq \mathbb{H}^2$ nemüres és korlátos, akkor $A \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} B$.* [9]

Bizonyítás. Nagyvonalakban hasonlít a bizonyítás a háromdimenziós valós esetre. Megkeressük azt a B halmazt, amely az egységömb helyét veszi át, és hozzá a duplázáshoz

Először megkeressük a szabad csoport generátorait, megmutatjuk, hogy tényleg szabadon generálnak, és hogy legfeljebb megszámlálható pont lehet fixpont, majd azt kiterjesztjük az egész B -re. Végül a már látott módszerrel bizonyítjuk az erős paradoxont a gyengéből. Jelölje a $z \rightarrow \frac{a+z}{az+1}$ leképezést továbbra is τ_a .

Ahogy korábban, itt is azzal kezdjük a bizonyítást, hogy keresünk egy $\mathbf{F}_2$ -vel izomorf részcsoportot $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ -ben. A későbbiekben ezeket a generátorokat felhasználva találjuk meg a fent említett szabad részcsoportot generáló átdarabolásokat.

Bizonyítás. Az ábrán látható L_2 egyenes L_1 -nek τ_a általi képe, ahol L_1 -et úgy választottuk, hogy a valós hossza ugyanakkora legyen, mint a képének a valós hossza, továbbá mint euklideszi körív, a középpontja tisztán valós. Ezt megtehetjük, hiszen ha nem ugyanakkora a hosszuk, akkor lehet a középpont helyét változtatni, és ha L_1 valós hossza nő, L_2 -é csökken. Hasonlóan az L_3 egyenest úgy választottuk, hogy mindez τ_{ia} -ra legyen igaz, és az euklideszi középpontja legyen tisztán képzetes. Mivel $a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért ezek az egyenesek páronként diszjunktak. Legyenek az A_1, A_2, B_1, B_2, C halmazok az ábrán láthatóak.

Ekkor $k \neq 0$ esetén $\tau_a^k(C \cup B_1 \cup B_2) \subseteq A_1 \cup A_2$ és $\tau_{ia}^k(C \cup A_1 \cup A_2) \subseteq B_1 \cup B_2$. Ekkor vegyünk egy τ_a és τ_{ia} transzformációkból álló nemtriviális redukált w szót. Ekkor $w(C) \subseteq A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$. Ezt az állítást w hosszára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Mivel $\tau_a^k(C) \subseteq A_1 \cup A_2$ és $\tau_{ia}^k(C) \subseteq B_1 \cup B_2$, ezért feltehetjük, hogy w hossza legalább kettő. Ekkor w az első és utolsó karaktere alapján négyféle lehet, tegyük fel, hogy $w = \tau_a^{p_1} \tau_{ia}^{q_1} \dots \tau_a^{p_n} \tau_{ia}^{q_n}$. Ekkor $w' = \tau_{ia}^{q_1} \dots \tau_a^{p_n} \tau_{ia}^{q_n}$ -re igaz az állítás, azaz $w'(C) \subseteq B_1 \cup B_2$. Ekkor mivel $\tau_a^k(C \cup B_1 \cup B_2) \subseteq A_1 \cup A_2$, ezért $\tau_a^{q_1} w'(C) \subseteq A_1 \cup A_2$. A másik három eset hasonlóan bizonyítható. Azaz $w(C) \subseteq A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2$. $\square$

6.2.7. Megjegyzés. Ezzel azt már bebizonyítottuk, hogy a hiperbolikus sík paradox, mert $\mathbf{F}_2$ szabadon hat rajta. A korábbiakhoz képest az a különbség, hogy a valós téren $\mathbf{F}_2$ úgy hatott, hogy S^2 invariáns volt rá, azonban $\mathbb{H}^2$ -ben nem invariáns egy korlátos halmaz sem, hiszen lényegében eltolásokkal hat $\mathbf{F}_2$ és nem forgatással. Az alábbi részben kidolgozzuk, hogyan lehet jól megválasztott átdarabolásokra kicserélni a fenti két eltolást.

Elsőre talán nem nyilvánvaló a következő állítás szerepe, de a bizonyítás során kulcsfontosságú lesz. Amikor a hiperbolikus gyenge Banach-Tarski paradoxon bizonyításához konstruáljuk meg a szabadon generáló leképezéseket, ilyen alakúak lesznek a transzformációkból képzett szavak.

6.2.8. Állítás. Azon $(a, b) \in (-1, 1)^2$ pontok halmaza teljes mértékű és reziduális, melyekre igaz az alábbi:

Bármely olyan $p_{i,j}, q_{i,j}$ véges sorozatra, ahol $0 \leq i \leq n$, $j = 1, 2$ és $n \geq 1$, továbbá $k > 0$ esetén $p_{k,1} + p_{k,2} \neq 0$ és $k < n$ esetén $q_{k,1} + q_{k,2} \neq 0$, az

$$f(z) = \tau_a^{p_{0,1}} \tau_b^{q_{0,1}} \tau_{ia}^{p_{0,2}} \tau_{ib}^{q_{0,2}} \dots \tau_a^{p_{n,1}} \tau_b^{q_{n,1}} \tau_{ia}^{p_{n,2}} \tau_{ib}^{q_{n,2}}(z)$$

függvény nem az identitás.

Bizonyítás. Rögzítsük le a $p_{i,j}, q_{i,j}$ sorozatot. Vizsgáljuk az $f(0) = 0$ egyenletet. Komplex függvénytanból tudjuk hogy lineáris törtfüggvények kompozíciója is lineáris törtfüggvény, és mindegyik együttható a és b egy polinomja. Így az $f(0) = 0$ egy algebrai egyenlet. A 7.2.6 Állítás alapján az $a = b$ átlónak az $\{f(0) = 0\}$ egy valódi részhalmaza, ezért az egész $(-1, 1)^2$ négyzetnek is valódi része. Mivel egy polinom nullhelye amennyiben nem az egész tér, akkor egy nullmértékű és sehol sem sűrű halmaz, továbbá $\{f(0) = 0\} \subsetneq \{f = \text{id}\}$ így rögzített sorozatra igaz az állítás. Mivel megszámlálható sok véges sorozat van, ezért azon pontpárok halmaza, melyekre nem igazak az állítás feltételei, nullmértékű és első kategóriás. $\square$

6.2.9. Megjegyzés. Egy halmaz akkor reziduális, ha a komplementere megkapható megszámlálhatóan sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként. Ha egy halmaz reziduális, azt jelenti, hogy topológiai értelemben nagy, míg a teljes mértékűséget azt jelenti, hogy a területe nagy.

Mint a klasszikus, háromdimenziós esetben, itt is foglalkozni kell a lehetséges fixpontokkal. Az alábbi állítás a hiperbolikus megfelelője annak, amikor a Hausdorff-paradoxont kiterjesztettük az egész gömbfelszínre.

6.2.10. Állítás. *Legyen $A \subseteq \mathbb{H}^2$ nemüres belsejű halmaz, és $C \subseteq A$ megszámlálható és korlátos. Ekkor $A \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} A \setminus C$.*

Bizonyítás. Mivel C megszámlálható és $\text{int}(A) \neq \emptyset$, ezért létezik egy r sugarú nyílt körlap $B \subseteq \text{int}(A)$, melynek b középpontja nem esik C -be. Ekkor vegyünk egy $C_1 \subseteq B$ megszámlálható halmazt úgy, hogy $b \notin C_1$, $C_1 \cap C = \emptyset$ és $C \setminus B \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} C_1$. Ilyen C_1 létezik, hiszen mivel C korlátos, lefedhető véges sok $r/2$ sugarú gömbbel, ezek legyenek $B_0, \dots, B_n$. Majd legyen $D_i = B_i \cap C$. Továbbá legyen $C \cap B = K_0$. Ekkor kontinuum sok τ_a eltolás esetén lesz $\tau_a(D_0) \subseteq B$, és mivel D_0 és K_0 megszámlálható, csak megszámlálható eltolás esetén lesz $\tau_a(D_0) \cap K_0$ nemüres, ezért létezik olyan a_0 , hogy $\tau_{a_0}(D_0) \cap K_0 = \emptyset$, és legyen $K_1 = \tau_{a_0}(D_0) \cup K_0$. Indukcióval látszik, hogy bármely $i \leq n$ esetén létezik a_i úgy, hogy $\tau_{a_i}(D_0) \cap K_i = \emptyset$. Legyen $C_1 = \sqcup_{i=1}^n \tau_{a_i} D_i$, a konstrukció biztosítja, hogy C_1 teljesíti a feltételeket.

Ezután legyen $C_2 = (C \cap B) \cup C_1$. Ekkor $C \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} C_2$. Legyen ρ egy olyan b körüli forgatás, hogy $\rho^n(C_2) \cap C_2 = \emptyset$ minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén. Ilyen létezik, mert C_2 megszámlálható. Mivel $\rho(\sqcup_{i=0}^\infty \rho^i(C_2)) = \sqcup_{i=1}^\infty \rho^i(C_2)$, így $B \setminus C_2 \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} B$. Ekkor

$$A = (A \setminus B) \cup B \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} (A \setminus B) \cup (B \setminus C_2) = A \setminus C_2.$$

Mivel $C \cap C_2 = \emptyset$ és $C_2 \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} C$ így

$$A \setminus C = (A \setminus (C \sqcup C_2)) \sqcup C_2 \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} (A \setminus (C \sqcup C_2)) \sqcup C = A \setminus C_2,$$

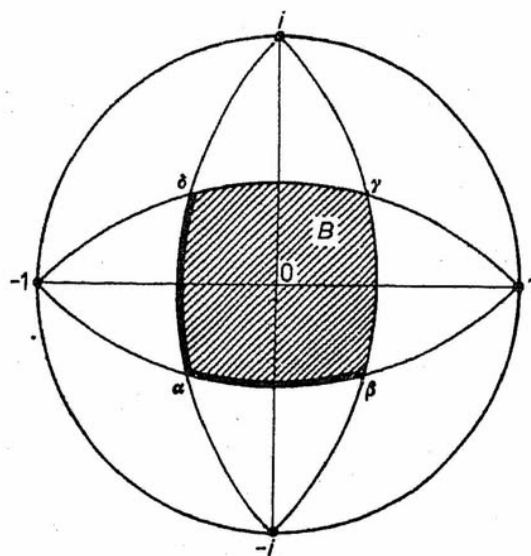
ezért $A \setminus C_2 \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} A \setminus C$, azaz $A \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} A \setminus C$. □

6.2.11. Állítás. *Legyen G egy csoport, X egy halmaz és $G \curvearrowright X$. Tegyük fel, hogy $A \subseteq B \subseteq C \subset X$ és $A \equiv_G C$. Ekkor $A \equiv_G B$.*

Bizonyítás. Mivel $A \subseteq B$, ezért $A \preceq_G B$. Továbbá $B \subseteq C \equiv_G A$, azaz $B \preceq_G A$. Ekkor 3.2.27 Tétel szerint $A \equiv_G B$. □

Most következik a legfontosabb állítás a 6.2.4 Tétel bizonyításához, lényegében a hiperbolikus sík gyenge Banach-Tarski paradoxona.

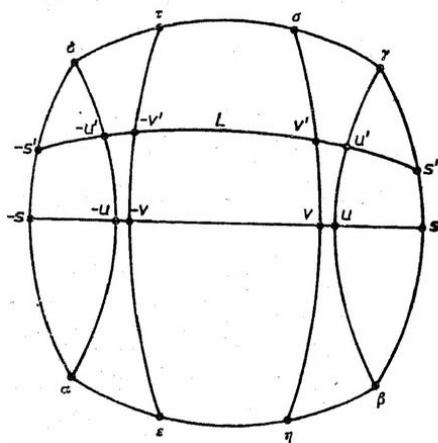
6.2.12. Tétel. *Legyen $\epsilon > 0$. Ekkor létezik egy nemüres belsejű $D \subseteq \mathbb{H}^2$ halmaz úgy, hogy $D \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} D \sqcup D$ és D átmérője legfeljebb ϵ .*



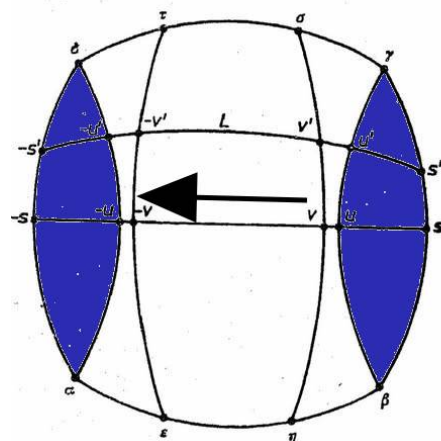
5. ábra. A B halmaz [9]

Bizonyítás. Legyen B az 5. ábrán látható halmaz, ahol α, β, γ és δ egy origó középpontú, kisebb, mint ε átmérőjű hiperbolikus négyzet négy csúcsa. Viszont B oldalai nem a négyzet oldalai, hanem a valós, illetve a képzetes tengellyel párhuzamos ekvidisztáns szakaszok. Továbbá legyenek $[\alpha, \beta)$ és $[\alpha, \delta)$ félig nyílt ekvidisztáns szakaszok B -ben, $[\beta, \gamma]$ és $[\gamma, \delta]$ zárt ekvidisztáns szakaszok pedig $\mathbb{H}^2 \setminus B$ -ben.

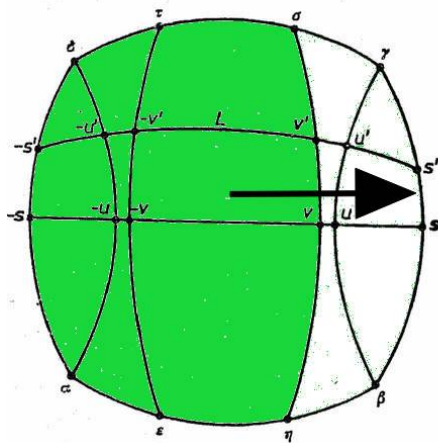
Ezután definiáljuk a következő $\phi : B \rightarrow B$ bijekciót az alábbi, 6. ábra alapján.



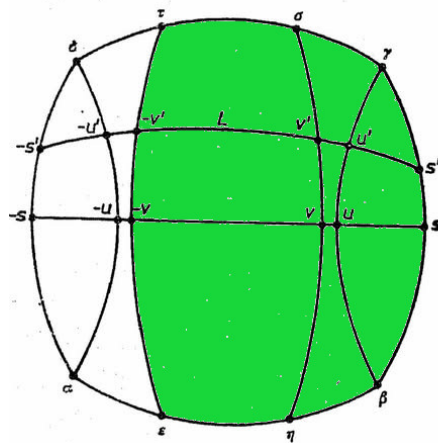
(a) A bizonyításban szereplő halmaz és pontok [9]



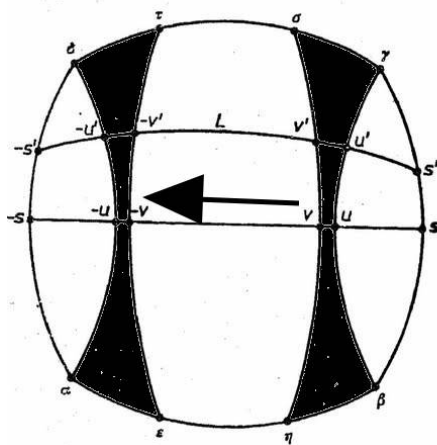
(b) Az első eltolás



(c) A második eltolás



(d) A második eltolás, képhalmaz



(e) A harmadik eltolás

6. ábra. A halmazok és az eltolások

Legyen a B halmaz $\beta\gamma$ oldalának felezőpontja s , ekkor s egy tisztán valós szám. Ezen felül legyenek $u, v \in \mathbb{R}_{>0}$ olyan számok, hogy $v \leq u < s$. Ekkor legyenek a képzetes tengely v -re, illetve $-v$ -re illeszkedő ekvidisztánsának B oldalaival való metszéspontjai a 6a ábra alapján η, σ , illetve ϵ és τ . A ϕ leképezés három eltolásból fog állni. Az összes lent szereplő halmaz jobbról és felülről nyílt, balról és alulról zárt, hasonlóan B -hez. Legyen az $u; s$ szakasz képe a $-s; -u$ szakasz. Ekkor a β, u, γ és s által meghatározott nagyító lencse alakú halmaz képe az a halmaz, amelyet az $\alpha, -s, \delta$ és $-u$ pontok feszítenek ki (6b ábra). Ez az eltolás $a = \frac{-u-s}{1+us}$ esetén τ_a . Továbbá az $\alpha, -s, \delta, \sigma, \eta$ négyszög képe legyen az $\epsilon, \tau, \gamma, s, \beta$ négyszög, ez $\tau_b, b = \frac{s-v}{1-sv}$ esetén (6c és 6d ábra). Az utolsó eltolás képezze az $\eta, \sigma, \gamma, u, \beta$ pontok közötti kicsinyítő lencse alakú halmazt az $\alpha, -u, \delta, \tau, \epsilon$ által feszített halmazba (6e ábra). Az utolsó leképezés a $\tau_c, c = \frac{-u-v}{1+uv}$ eltolás. Így ϕ átdarabolja B -t önmagába.

Most vegyük a valós tengely egy d távolságra fekvő L ekvidisztánsát, majd paraméterezzük az L görbét ívhossz szerint. Jelölje a paraméterteret I és jelölje a megfelelő metszéspontok ősképeit a paramétertéren $-s', -u', -v', v', u'$ és s' . Ekkor ϕ hat a paramétertéren is, úgy, hogy $L(\phi(x)) = \phi(L(x))$. Ezt a hatást le lehet írni a következő módon:

- $\phi(x) = x + (s' - v')$, ha $x \in [-s', v']$,
- $\phi(x) = x - (v' + u')$, ha $x \in [v', u']$,
- $\phi(x) = x - (u' + s')$, ha $x \in [u', s']$.

6.2.13. Állítás. Bármely $n \in \mathbb{N}$ és a paramétertér bármely x pontja esetén léteznek $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ egészek úgy, hogy $n \leq n_1 + n_2 \leq 2n$ és $\phi^n(x) = x + n_1(s' - v') - n_2(u' + s')$.

Bizonyítás. Ha a fenti hatást megvizsgáljuk, láthatjuk, hogy minden $x \in I$ esetén léteznek $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $k_1 + k_2 + k_3 = n$ és $\phi^n(x) = x + k_1(s' - v') - k_2(v' + u') - k_3(u' + s')$. A konkrét értékek attól függenek, hogy x melyik fenti intervallumba hányszor kerül. Azonban ekkor

$$x + k_1(s' - v') - k_2(v' + u') - k_3(u' + s') = x + (k_1 + k_2)(s' - v') - (k_2 + k_3)(u' + s')$$

és $0 \leq k_2 \leq n$, azaz $n \leq n_1 + n_2 = k_1 + k_2 + k_3 \leq 2n$. □

6.2.14. Állítás. Ha $\frac{s'-v'}{u'+s'}$ irracionális, akkor minden $x \in I$ és $k > 0$ esetén $\phi^k(x) \neq x$.

Bizonyítás. Az előző állítás miatt ha $\phi^k(x) = x$, akkor $n_1(s' - v') - n_2(u' + s') = 0$ valamilyen n_1, n_2 egészekre, ami nem lehet, mert $\frac{s'-v'}{u'+s'}$ irracionális. □

Most már csak uniformizálni kell a fenti állításokat az egész B -re. Ehhez át fogunk térni egy kicsit a felső féltér modellre, a szükséges számolások ott sokkal könnyebbek.

6.2.15. Állítás. Legyen L egy hiperbolikus egyenes, $x, y \in L$, e pedig egy L -től d távolságban futó ekvidisztáns. Ekkor ha merőlegeseket bocsátunk L -re x -en és y -on keresztül, és a megfelelő metszéspontokat elnevezzük x' -nek és y' -nek, akkor $l_{x'}^{y'}(e) = \cosh d \cdot d(x, y)$.

Bizonyítás. A féltér modellen fogunk számolni. Feltehetjük, hogy L egyenes a képzetes tengely, az x pont az i komplex szám, és $y = ki$, ahol $k > 1$, mert egy izometriával odavihetők. Ekkor egy d távolságban futó ekvidisztáns egy valós tengellyel θ szöget bezáró, origót tartalmazó egyenes, továbbá x' és y' euklideszi távolsága az origótól 1 és k . Tehát a $\gamma : [1, k] \rightarrow \mathbb{H}^2$, $\gamma(t) = (t \cos \theta, t \sin \theta)$ görbe leírja e kérdéses darabját. Így

$$l_{x'}^{y'}(e) = \int_1^k \sqrt{\|\gamma'(t)\|_{\mathbb{H}^2}} dt = \int_1^k \sqrt{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{t^2 \sin^2 \theta}} dt = \int_1^k \frac{1}{t \sin \theta} dt = \frac{1}{\sin \theta} [\log t]_1^k = \frac{\log k}{\sin \theta}.$$

A $\theta = \pi$ eset az, amikor $d = 0$, tehát $d(x, y) = k$. Ezek szerint $d(x', y') = \frac{d(x, y)}{\sin \theta}$. Most már csak a θ és d közötti összefüggést kell kiszámolni. Legyen $\bar{\gamma} : [\theta, \pi] \rightarrow \mathbb{H}^2$, $\bar{\gamma}(u) = (\cos u, \sin u)$, az x -et x' -vel összekötő hiperbolikus egyenes egy darabja. Ekkor

$$d = d(x, x') = l(\bar{\gamma}) = \int_{\theta}^{\pi} \frac{1}{\sin u} du = \left[\log \tan \frac{u}{2} \right]_{\theta}^{\pi} = -\log \tan \frac{\theta}{2}.$$

Azaz $d = -\log \tan \frac{\theta}{2}$, vagyis $e^{-d} = \tan \frac{\theta}{2}$, továbbá

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2}}{2} = \frac{e^d + e^{-d}}{2} = \cosh d.$$

Tehát $\frac{1}{\sin \theta} = \cosh d$, vagyis $l_{x'}^{y'}(e) = \cosh d \cdot d(x, y)$. □

Ezek szerint felírhatunk $s - v$ és $s' - v'$, vagy általánosabban tetszőleges $x, y \in L$ esetén $x - y$ és $x' - y'$ között egy egyszerű összefüggést, $x' - y' = \cosh(d) \cdot (x - y)$. Azaz $\frac{s' - v'}{u' + s'} = \frac{\cosh(d) \cdot (s - v)}{\cosh(d) \cdot (u + s)} = \frac{s - v}{u + s}$, tehát u és v megfelelő választása esetén bármely $k > 0$ esetén ϕ^k -nak nincs fixpontja.

Mivel a fenti állítások igazak bármely d távolságban futó ekvidisztánssra, ezért az egész B halmazra igaz, hogy bármely $k \in \mathbb{N}_{>0}$ esetén minden $x \in B$ pontra valamilyen n_1, n_2 számokra $\phi^k(x)$ -szel megegyezik n_1 darab eltolás $\cosh(d)(s - v)$ -vel, majd n_2 darab eltolás $\cosh(d)(-s - u)$ -val az ekvidisztáns mentén. Mindegyik ekvidisztáns menti eltolás az eredeti ϕ beli három eltolás egyikének megfelelője. Legyen $\phi_1 = \tau_a$ és $\phi_2 = \tau_b$, ahol $s = \frac{s - v}{1 - sv}$ és $b = \frac{-s - u}{1 + us}$, a ϕ leképezés definíciójánál levő három értékből kettő. Ekkor mivel rögzített n -re n_1 és n_2 is véges sok értéket vehet fel, ezért minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén B feldarabolható véges sok S_i halmazra úgy, hogy $\phi^n|_{S_i} = \phi_1^{n_{1,i}} \phi_2^{n_{2,i}}$ megfelelő $n_{1,i}$ és $n_{2,i}$ esetén. Ekkor ϕ_1 és ϕ_2 kommutálnak.

Ezután válasszuk meg v -t és u -t úgy, hogy a 6.2.8 Állítás feltételeinek megfelelően a és b ,

továbbá $\frac{s-v}{u+s}$ irracionális maradjon. Ilyen u és v létezik, hiszen mindkét feltételnek teljes Lebesgue-mértékű halmaz felel meg.

Ezután válasszunk B egy hasonló ψ átdarabolását önmagába úgy, hogy $+\pi$ -vel elforgatjuk az előző ábrát. Így $\psi_1 = \tau_{ia}$ és $\psi_2 = \tau_{ib}$ ugyanarra az a, b valós számpárra. Ekkor tetszőleges

$$\Phi = \phi^{p_1} \psi^{q_1} \dots \phi^{p_n} \psi^{q_n}, p_k \neq 0, \text{ ha } k > 0, q_l \neq 0, \text{ ha } l < n$$

leképezés esetén 6.2.13 Állítás miatt B feldarabolható véges sok S_i részhalmazzal úgy, hogy mindegyik S_i halmazon felírható a Φ

$$\phi_1^{p_{1,1}} \phi_2^{p_{1,2}} \psi_1^{q_{1,1}} \psi_2^{q_{1,2}} \dots \phi_1^{p_{n,1}} \phi_2^{p_{n,2}} \psi_1^{q_{n,1}} \psi_2^{q_{n,2}}$$

alakban, megfelelő $p_{i,j}, q_{i,j}$ egészekkel. Ekkor Φ bármely S_i -re megszorítva a 6.2.8 Állítás szerint nem az identitás, azaz legfeljebb egy darab fixpontja lehet.

Ekkor ϕ és ψ egy $\mathbf{F}_2$ másodrangú szabad csoportot generál a B -t önmagába átdaraboló leképezések csoportjában. Legyen $C \subseteq B$ azon x pontok halmaza, melyekre létezik $1 \neq \Phi \in \mathbf{F}_2$ úgy, hogy $\Phi(x) = x$. Így $\mathbf{F}_2$ szabadon hat $B \setminus C$ halmazon, tehát $B \setminus C$ egy paradox halmaz. Továbbá C megszámlálható, mert a szabad csoportnak megszámlálható eleme van, és mindegyik elemnek véges sok fixpontja. Így

$$B \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} B \setminus C \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} B \setminus C \sqcup B \setminus C \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} B \sqcup B$$

.

Ezzel a 6.2.12 Tételt bizonyítottuk. □

Most már be tudjuk bizonyítani 6.2.4 Tételt.

6.2.1. A Banach-Tarski paradoxon bizonyítása a hiperbolikus síkon

Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{H}^2$ nemüres belsejű, korlátos halmazok. Ekkor léteznek $A \subseteq B_1$ és $B_2 \subseteq B$ nyílt gömbök. Ekkor vegyük a 6.2.12 Tétel alapján létező paradox $D \subseteq B_2$ halmazt. Az erős Banach-Tarski paradoxon bizonyításához hasonlóan belátható, hogy $B_1 \preceq_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} B_2$, ezért $A \preceq_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} B$. Mivel a feltételek szimmetrikusak, $B \preceq_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} A$ és 3.2.27 Tétel miatt $A \equiv_{\text{Isom}(\mathbb{H}^2)} B$. Azaz B átdarabolható két diszjunkt példányává. □

7. Köszönetnyilvánítás

Szeretném kifejezni hálámat Dr. Buczolic Zoltán tanár úrnak a témavezetői munkájáért és támogatásáért. Az ő egyik óráján hallottam először a Banach–Tarski paradoxonról, amely végül szakdolgozatom témájává vált. Amikor a dolgozat elkészítése során elakadtam, több hasznos ötlettel is segítette, milyen irányba lehetne továbbhaladni.

8. Nyilatkozat

Alulírott Szőke Gergely nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye
Nyelvhelyesség ellenőrzése	ChatGPT	Egész dolgozat
Latex szintaxis és formázási tanácsok	ChatGPT	Egész dolgozat

Hivatkozások

- [1] Mats Wahlberg, *The Banach–Tarski Paradox: How I Learned to Stop Worrying and Love the Axiom of Choice*, Bachelor Thesis, Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå University, Spring 2022.
<https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1672461/FULLTEXT01.pdf>
- [2] Ismeretlen szerző, *Banach–Tarski paradox*, Scientific Library,
<https://www.scientificlib.com/en/Mathematics/MeasureTheory/BanachTarskiParadox.html>
- [3] V. A. Churkin, *A continuous version of the Hausdorff–Banach–Tarski paradox*, Algebra and Logic, Vol. 49, No. 1 (2010), pp. 91–98.
<https://doi.org/10.1007/s10469-010-9080-y>
- [4] Hans Läuchli, *Auswahlaxiom in der Algebra*, Commentarii Mathematici Helvetici 37, 1–18 (1962).
- [5] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [6] Szűcs András, *Topológia*, ELTE TTK Matematikai Intézet, egyetemi jegyzet, Budapest, 2005.
- [7] Marc Lackenby, *Hyperbolic Manifolds*, In: *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, 2008, pp. 538–541.
- [8] Ilyas Khan, *Hyperbolic geometry: isometry groups of hyperbolic space*, University of Chicago, REU Report (2012).
<https://math.uchicago.edu/~may/REU2012/REUPapers/Khan.pdf>
- [9] Jan Mycielski, *The Banach–Tarski paradox for the hyperbolic plane*, Fundamenta Mathematicae 132 (1989), 1–13.
<https://bibliotekanauki.pl/articles/1215583.pdf>