



ELTE | TTK
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Riemann felületek uniformizációja Ricci árammal

Konzulens:

Tóth Árpád
Egyetemi docens

Író:

Fogarasi András
Matematika BSc hallgató

Budapest, 2025

Tartalomjegyzék

1. Görbületi fogalmak	3
1.1. Mennyiségek változása időben változó metrika esetén	5
2. A Ricci áram	8
2.1. A Ricci áram rövidtávú létezése	8
2.2. A DeTurck trükk	9
2.3. Egyediség	12
2.4. A normalizált Ricci áram	14
3. Uniformizációs tétel	16
3.1. A görbület relációja két konform ekvivalens felület között	17
3.2. A görbület fejlődése a Ricci áram folyamán	19
3.3. Korlátok a görbületre egyszerű esetben	21
3.4. A görbületpotenciál	22
3.5. Hosszútávú létezés	24
3.6. Korlátok a görbület deriváltjaira	26
3.7. Konvergencia a végtelenben	30

Bevezetés

Ez a dolgozat bemutatja az uniformizációs tétel egy bizonyítását oly felületekre, melyeknek Euler karakterisztikája negatív. Ehhez a bizonyításhoz be fogjuk még vezetni a Ricci áram fogalmát.

A dolgozat feltételezi a differenciálformák, Riemann felületek, tenzorok, konnexiók ismeretét. Felhasználunk ezentúl egy tételt a nemlineáris parabolikus differenciálegyenletek lokális létezéséről és a Gauss-Bonnet tételt.

Az első fejezetben átvesszük a görbületi fogalmak definícióit, beleértve a Riemann és Ricci tenzorokat, illetve megismerjük, hogy egy idő szerint változó metrika esetében ezek miként változnak.

A második fejezetben bevezetjük a Ricci áram, illetve normalizált Ricci áram fogalmait, melyek megoldásai egyes differenciálegyenleteknek a metrikára. Belátjuk az úgynevezett DeTurck trükk segítségével a Ricci áram rövidtávú létezését, és hogy a normalizált Ricci áramra a létezése átvihető.

A harmadik fejezetben nekikezdünk az uniformizációs tétel bizonyításának. Ezen tétel szerint minden Riemann 2-sokaság konform ekvivalens egy olyan Riemann 2-sokasággal, melynek a görbülete konstans. A bizonyítás csak azon felületekre fog kiterjedni, melyeknek Euler karakterisztikája nagyobb, mint 2. Az alkalmazott bizonyítási módszer görbületbecsléseken alapul, melyek segítségével majd belátjuk, hogy a normalizált Ricci áram egyenletesen konvergál egy sima metrikához, illetve hogy a görbülete egyenletesen konvergál egy konstanshoz, melyek együtt megadják a tételt.

A dolgozat folyamán közel követni fogjuk Bennet Chow és Dan Knopf *The Ricci Flow: an Introduction*^[1] című könyvét. Az érdeklődők itt, illetve egyéb forrásokból is megismerhetik az általánosabb eset bizonyításának módjait, melyek nem sokkal nehezebbek, mint az itt bemutatottak.

1. fejezet

Görbületi fogalmak

Létezik egy tenzor, ami azt méri, hogy mennyi hibával kommutálnak a második kovariáns derivált indexei. Ezt hívjuk a Riemann tenzornak.

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z \\ &= (\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z) - (\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)} Z \end{aligned}$$

Le ellenőrizhetjük, hogy ez a kifejezés tenzoriális, hisz additív, illetve:

$$\begin{aligned} \nabla_{fX,gY}^2(hZ) &= \nabla_{fX} \nabla_{gY}(hZ) - \nabla_{\nabla_{fX}(gY)}(hZ) \\ &= f(\nabla_X g)(\nabla_Y h)Z + fg(\nabla_X \nabla_Y h)Z + fg(\nabla_Y h)\nabla_X Z + \\ &\quad fg(\nabla_X h)\nabla_Y Z + fh(\nabla_X g)\nabla_Y Z + fgh\nabla_X \nabla_Y Z - \\ &\quad f(\nabla_X g)(\nabla_Y h)Z - fh(\nabla_X g)(\nabla_Y Z) - \\ &\quad fg(\nabla_{\nabla_X Y} h)Z - fgh(\nabla_{\nabla_X Y} Z) \\ &= fh(\nabla_X g)\nabla_Y Z + fg(\nabla_Y h)\nabla_X Z + \\ &\quad fg(\nabla_{X,Y}^2 h)Z + fgh\nabla_{X,Y}^2 Z \end{aligned}$$

Tehát:

$$\begin{aligned} R(fX, gY)(hZ) &= \nabla_{fX,gY}^2(hZ) - \nabla_{gY,fX}^2(hZ) \\ &= fgh(\nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z) \\ &= fgh(R(X, Y)Z) \end{aligned}$$

A Riemann tenzor felírható lokális koordináta bázisban a Christoffel szimbólumokkal is. Mivel $\nabla_i e_j = \Gamma_{ij}^l e_l$:

$$\begin{aligned} R(e_i, e_j)e_k &= \nabla_i(\Gamma_{jk}^l e_l) - \nabla_j(\Gamma_{ik}^l e_l) - \nabla_{\Gamma_{ij}^l e_l - \Gamma_{ji}^l e_l} e_k \\ &= (\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l) e_l \end{aligned}$$

Ahol Γ_{ij}^k a Christoffel szimbólum, mely kiszámítható, mint:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

Fennállnak a következő triviális szimmetriák:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$$

Absztrakt index jelölésben a következő módon jelöljük a tenzort:

$$\begin{aligned} (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) V^l &= R_{ijk}^l V^k \\ R_{ijkl} &= g_{ml} R_{ijk}^m \end{aligned}$$

Az azt is megengedi számunkra, hogy felírjuk az úgynevezett Ricci identitást:

$$\begin{aligned} (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) T_{a_1, \dots, a_n}^{b_1, \dots, b_m} &= R_{ijk}^{b_1} T_{a_1, \dots, a_n}^{k, \dots, b_m} + \dots + R_{ijk}^{b_m} T_{a_1, \dots, a_n}^{b_1, \dots, k} \\ &\quad - (R_{ija_1}^k T_{k, \dots, a_n}^{b_1, \dots, b_m} + \dots + R_{ija_n}^k T_{a_1, \dots, k}^{b_1, \dots, b_m}) \end{aligned}$$

Ez könnyen belátható a kifejezések teljes kiterjesztésével Christoffel szimbólumokká.

A 3 dimenziós térben immerzált 2-sokaságok tanulmányozásából felismerhetjük ezt a $(\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l)$ kifejezést a Gauss egyenletekből, hisz ez egyenlő a $\mathbb{I}(e_i, e_l)\mathbb{I}(e_j, e_k) - \mathbb{I}(e_i, e_k)\mathbb{I}(e_j, e_l)$ kifejezéssel, ahol $\mathbb{I}$ a második fundamentális forma.

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= g_{lm} R_{ijk}^m = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle \\ &= g_{lm} (\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{jk}^n \Gamma_{in}^m - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{jn}^m) \\ &= g_{lm} (\mathbb{I}(e_i, e_m)\mathbb{I}(e_j, e_k) - \mathbb{I}(e_i, e_k)\mathbb{I}(e_j, e_m)) \end{aligned}$$

Emiatt kifejezhető a Gauss görbület a következő módon ha euklideszi térben levő felületen vagyunk, és (e_1, e_2) ortonormált bázis:

$$K = R_{1221}$$

Ha nem egy euklideszi térben beágyazott sokaságon vagyunk, akkor ez a K definíciója.

A Ricci tenzor R_{ij} a Riemann tenzor kontrakciója.

$$R_{ij} = R_{kij}^k = g^{nm} R_{nijm}$$

Két dimenzióban ez egész egyszerű. Csak az R_{1221} és az előbb mutatott permutációk nem nullák, így megintcsak ortonormált bázisban:

$$\begin{aligned} R_{11} &= g^{22} R_{2112} = K \\ R_{12} &= g^{21} R_{2121} = 0 \\ R_{21} &= g^{12} R_{1212} = 0 \\ R_{22} &= g^{11} R_{1221} = K \end{aligned}$$

Tehát röviden $\text{Ric} = Kg$, ahol Ric a Ricci tenzor. Definiáljuk még az úgynevezett skaláris görbületet. Ez $R = g^{ij}R_{ij}$, a Ricci tenzor nyoma. Ha felületen vagyunk, akkor $R = g^{ij}g_{ij}K = 2K$.

Ezentúl a Riemann tenzor maga 2 dimenzióban teljesen meg van határozva a metrika és a skalár görbület által a következő egyenleten keresztül:

$$R_{ijkl} = \frac{R}{2}(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})$$

Ez könnyen látható azáltal, hogy a Riemann tenzor 16 komponense közül csak 4 nem 0, és ezeket ez a kifejezés megadja.

1.1. Mennyiségek változása időben változó metrika esetén

Ezen dolgozatban időben változó mértékekről lesz szó. Így megérne belátni pár állítást. Legyen g egy időben változó sima metrika és h egy időben simán változó sima szimmetrikus tenzor, melyek megfelelnek a következő differenciálegyenletnek:

$$\frac{\partial}{\partial t}g = h$$

Ekkor számoljuk ki, hogy egyes mennyiségek hogyan változnak. Először a metrika inverze:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{ij}g_{jk}) = g_{jk}\frac{\partial}{\partial t}g^{ij} + g^{ij}\frac{\partial}{\partial t}g_{jk} \\ g_{jk}\frac{\partial}{\partial t}g^{ij} &= -g^{ij}h_{jk} \\ \frac{\partial}{\partial t}g^{il} &= -g^{ij}h_{jk}g^{kl} \end{aligned}$$

Ezután a Christoffel szimbólumok:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_{ij}^k &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}g^{kl}(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) \right) \\
&= -\frac{1}{2}(h^{kl})(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) + \frac{1}{2}g^{kl}(h_{jl,i} + h_{il,j} - h_{ij,l}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{ko}(h_{op})g^{pl}(g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}) + \frac{1}{2}g^{kl}(h_{jl,i} + h_{il,j} - h_{ij,l}) \\
&= -g^{ko}(h_{op})\Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2}g^{kl}(h_{jl,i} + h_{il,j} - h_{ij,l}) \\
&= -g^{kl}(h_{lp})\Gamma_{ij}^p + \frac{1}{2}g^{kl}(h_{jl,i} + h_{il,j} - h_{ij,l}) \\
&= \frac{1}{2}g^{kl}(h_{jl,i} + h_{il,j} - h_{ij,l} - 2(h_{lp})\Gamma_{ij}^p) \\
&= \frac{1}{2}g^{kl}(h_{jl,i} - (h_{jp})\Gamma_{il}^p - (h_{lp})\Gamma_{ij}^p + \\
&\quad h_{il,j} - (h_{lp})\Gamma_{ij}^p - (h_{ip})\Gamma_{jl}^p - \\
&\quad h_{ij,l} + (h_{jp})\Gamma_{il}^p + (h_{ip})\Gamma_{jl}^p) \\
&= \frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij})
\end{aligned}$$

Érdekes tény, hogy ez egy tenzoriális mennyiség annak ellenére, hogy a Christoffel szimbólum maga nem az.

Ezután a Riemann tenzor. Geodetikus koordinátákban $\partial_i T = \nabla_i T$ és $\Gamma_{ij}^k = 0$, tehát:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_{ijk}^l &= \frac{\partial}{\partial t}(\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^l - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^l) \\
&= \partial_i \left(\frac{1}{2}g^{lm}(\nabla_j h_{km} + \nabla_k h_{jm} - \nabla_m h_{jk}) \right) - \\
&\quad \partial_j \left(\frac{1}{2}g^{lm}(\nabla_i h_{km} + \nabla_k h_{im} - \nabla_m h_{ik}) \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{lm}(\nabla_i \nabla_j h_{km} + \nabla_i \nabla_k h_{jm} - \nabla_i \nabla_m h_{jk} - \\
&\quad \nabla_j \nabla_i h_{km} - \nabla_j \nabla_k h_{im} + \nabla_j \nabla_m h_{ik})
\end{aligned}$$

A Ricci tenzor:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}R_{ik} &= \frac{\partial}{\partial t}R_{nik}^n \\
&= \frac{1}{2}g^{nm}(\nabla_n \nabla_i h_{km} + \nabla_n \nabla_k h_{im} - \nabla_n \nabla_m h_{ik} - \\
&\quad \nabla_i \nabla_n h_{km} - \nabla_i \nabla_k h_{nm} + \nabla_i \nabla_m h_{nk}) \\
&= \frac{1}{2}g^{nm}(\nabla_n \nabla_i h_{km} + \nabla_n \nabla_k h_{im} - \nabla_i \nabla_k h_{nm} - \nabla_n \nabla_m h_{ik})
\end{aligned}$$

És végül a skalárbörbület:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} R &= \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \right) R_{ij} + g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} R_{ij} \right) \\
&= (-g^{ij} h_{jm} g^{lm}) (R_{ikl}^k) - \\
&\quad g^{ij} \left(\frac{1}{2} g^{lm} (\nabla_i \nabla_j h_{lm} + \nabla_l \nabla_m h_{ij} - \nabla_l \nabla_i h_{jm} - \nabla_l \nabla_j h_{im}) \right) \\
&= g^{ij} g^{lm} \left(\frac{1}{2} (-\nabla_i \nabla_j h_{lm} - \nabla_l \nabla_m h_{ij} + \nabla_l \nabla_i h_{jm} + \nabla_l \nabla_j h_{im}) - h_{jm} R_{ikl}^k \right) \\
&= -\Delta(g^{ij} h_{ij}) + \nabla^m \nabla^j h_{mj} - \langle h, \text{Ric} \rangle
\end{aligned}$$

2. fejezet

A Ricci áram

Egy tetszőleges $\mathcal{M}$ sokaságon egy tetszőleges g_0 kezdeti sima sokaság mellett egy Ricci áram a következő differenciálegyenletnek a megoldása:

$$\begin{aligned} g(0) &= g_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= -2\text{Ric}_{g(t)} \end{aligned}$$

Ahol $\text{Ric}_{g(t)}$ a $g(t)$ metrikához tartozó Ricci tenzor.

2.1. A Ricci áram rövidtávú létezése

Be kívánjuk látni, hogy a Ricci áram létezik rövidtávon. Ezt kiírva lokális koordinátákban kapunk egy nemlineáris másodrendű differenciálegyenletet rendszert.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= -2R_{ij} = -2R^k_{kij} \\ &= -2(\partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^l_{ij} \Gamma^k_{kl} - \Gamma^l_{kj} \Gamma^k_{il}) \\ &= -\partial_k (g^{km} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})) + \\ &\quad \partial_i (g^{km} (\partial_k g_{jm} + \partial_j g_{km} - \partial_m g_{kj})) - \\ &\quad \frac{1}{2} (g^{lm} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})) (g^{kn} (\partial_k g_{ln} + \partial_l g_{kn} - \partial_n g_{kl})) + \\ &\quad \frac{1}{2} (g^{lm} (\partial_k g_{jm} + \partial_j g_{km} - \partial_m g_{kj})) (g^{km} (\partial_i g_{lm} + \partial_l g_{im} - \partial_m g_{il})) \\ &= g^{km} (-\partial_k \partial_i g_{jm} - \partial_k \partial_j g_{im} + \partial_k \partial_m g_{ij} + \\ &\quad \partial_i \partial_k g_{jm} + \partial_i \partial_j g_{km} - \partial_i \partial_m g_{kj}) + \dots \\ &= g^{km} (\partial_{km}^2 g_{ij} - \partial_{kj}^2 g_{im} - \partial_{im}^2 g_{kj} + \partial_{ij}^2 g_{km}) + \dots \end{aligned}$$

Ahol $\dots$ jelöli az alacsonyabb rendű tagokat.

Legyen egy L egy nyalábszeléseken ható differenciáloperátor $L = \sum_{|\alpha| \leq k} l_\alpha \partial^\alpha$ alakú, ahol l_α egy skalármező és α egy multi-index. Ekkor az $\hat{\sigma}$ ω kovektor irányba vett szimbólumának hívjuk a $\sigma_L(\omega) = \sum_{|\alpha| \leq k} \omega^\alpha l_\alpha$ operátort. Fő szimbólumnak hívjuk, amikor csak a legnagyobb rendű deriváltakat tekintjük, avagy $\hat{\sigma}(\omega) = \sum_{|\alpha|=k} \omega^\alpha l_\alpha$.

A -2Ric nem egy lineáris differenciáloperátor, de kvázilineáris, mivel a legmagasabb rangú tagjaiban lineáris. A D operátor linearizációjának hívjuk a deriváltját. A Ricci tenzor variációját már láttuk, így:

$$(D(-2\text{Ric}_g)(h))_{ij} = -g^{nm}(\nabla_n \nabla_i h_{jm} + \nabla_n \nabla_j h_{im} - \nabla_i \nabla_j h_{nm} - \nabla_n \nabla_m h_{ij})$$

Ennek a fő szimbóluma:

$$(\hat{\sigma}(D(-2\text{Ric}_g))(\xi)(h))_{ij} = g^{nm}(\xi_n \xi_m h_{ij} + \xi_i \xi_j h_{nm} - \xi_n \xi_i h_{jm} - \xi_n \xi_j h_{im})$$

Egy E operátort elliptikusnak hívunk, ha $\xi \neq 0$ esetén mindenhol $\hat{\sigma}(DE)(\xi)$ egy pozitív definit operátor. Ha egy differenciálegyenlet $\frac{\partial x}{\partial t} = E(x)$ alakú, ahol E elliptikus, akkor ezt egy parabolikus rendszernek hívjuk. Az egy tétel, amit nem fogunk bizonyítani, hogy egy kompakt térben ha egy parabolikus differenciálegyenlet-rendszer kezdeti feltétele és operátora sima, akkor létezik rövidtávú megoldása. A simaság triviális, így minékünk csak a parabolicitást kell ellenőrizni.

Találjunk tetszőleges egység-hosszú ξ -re oly ortonormált koordinátarendszert, melyben $\xi_1 = 1$, és $n \neq 1 \Rightarrow \xi_n = 0$. Így felírva a fő szimbólum hatása:

$$(\hat{\sigma}(D(-2\text{Ric}_g))(\xi)(h))_{ij} = \begin{cases} h_{ij} & \text{ha } i \neq 1, j \neq 1 \\ 0 & \text{ha } i = 1, j \neq 1 \\ h_{22} + \dots + h_{nn} & \text{ha } i = 1, j = 1 \end{cases}$$

Úgy tűnik, hogy az operátor sajnos nem elliptikus, hisz léteznek 0 sajátértékei. Szerencsére létezik egy transzformáció ami ezt a problémát átalakítja egy parabolikus rendszerré. Ezt hívjuk az úgynevezett DeTurck trükknek.

2.2. A DeTurck trükk

Itt bemutatjuk az úgynevezett DeTurck trükköt, mely megengedi számunkra, hogy átalakítsuk a Ricci áram nemelliptikus operátorát egy szép elliptikus operátorrá. Ehhez be fogunk vezetni egy időben változó diffeomorfizmust, melynek a hatása az lesz, hogy átalakítja az egyenletrendszerünket egy parabolikus rendszerré.

Viszont a motiváció érdekében először lássuk be a következő lemmát:

Ha

$$V_i = g^{pq} \left(\frac{1}{2} \nabla_i h_{pq} - \nabla_q h_{pi} \right)$$

akkor

$$D(-2\text{Ric}_{g(t)})(h)_{ij} = g^{pq}\nabla_p\nabla_q h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i + \dots$$

Ez levezethető a következő már ismert kifejezésből:

$$(D(-2\text{Ric}_g)(h))_{ij} = -g^{nm}(\nabla_n\nabla_i h_{jm} + \nabla_n\nabla_j h_{im} - \nabla_i\nabla_j h_{nm} - \nabla_n\nabla_m h_{ij})$$

Mivel általában tudjuk a következő identitást:

$$\begin{aligned}\nabla_a\nabla_b T_{cd} &= \nabla_b\nabla_a T_{cd} - R_{abc}^r T_{rd} - R_{abd}^r T_{cr} \\ &= \nabla_b\nabla_a T_{cd} + \dots\end{aligned}$$

Tehát deriváltakat kommutálva, előjeleket összevonva:

$$\begin{aligned}(D(-2\text{Ric}_g)(h))_{ij} &= g^{nm}(\nabla_n\nabla_m h_{ij} + \\ &\quad \nabla_i\left(\frac{1}{2}\nabla_j h_{nm} - \nabla_n h_{jm}\right) + \\ &\quad \nabla_j\left(\frac{1}{2}\nabla_i h_{nm} - \nabla_n h_{im}\right) + \dots)\end{aligned}$$

Ezt kívántuk belátni. Ebből az alakból jól látszik, hogy ha képesek lennénk eltávolítani a szimbólumból a $\nabla_i V_j + \nabla_j V_i$ tagot, akkor a kifejezés legmagasabb rendű tagjai között csak a Laplace operátor maradna. Ennek érdekében fogunk bevezetni egy időben változó diffeomorfizmust, ami átvizs minket egy olyan egyenletrendszerbe, ahol ezek a tagok eltűnnek.

Pontosabban megfogalmazva, keresünk egy $\bar{g}(t)$ metrikát és φ_t diffeomorfizmus-családot, hogy a probléma felírható a következő módon:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\bar{g}(t) &= P(\bar{g}(t)) \\ g(t) &= \varphi_t^*\bar{g}(t)\end{aligned}$$

Ahol P egy elliptikus operátor. Ekkor felírhatjuk a következő kifejezést g változására:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g(t) &= \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t^*\bar{g}(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(\varphi_{t+s}^*\bar{g}(t+s))\Big|_{s=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial s}(\varphi_t^*\bar{g}(t+s))\Big|_{s=0} + \frac{\partial}{\partial s}(\varphi_{t+s}^*\bar{g}(t))\Big|_{s=0} \\ &= \varphi_t^*P\bar{g}(t) + \varphi_t^*\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t}\bar{g}(t)\end{aligned}$$

Legyen φ_t olyan, hogy $\varphi_0 = \text{id}$ és $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = W(t)$ ahol $W(t)$ egy időbán változó vektormező.

Ez egyszerűsíti a problémát a következő egyenlet megoldására:

$$\varphi_t^* P(\bar{g}(t)) + \varphi_t^* \mathcal{L}_{W(t)} \bar{g}(t) = -2\text{Ric}_{g(t)} = -2\varphi_t^* \text{Ric}_{\bar{g}(t)}$$

Az utolsó egyenlőségénél felhasználtuk, hogy $\varphi : (M, \varphi^* g) \rightarrow (M, g)$ egy izometria. A fenti miatt:

$$P(\bar{g}(t)) = -2\text{Ric}_{\bar{g}(t)} - \mathcal{L}_{W(t)} \bar{g}(t)$$

A metrika Lie deriváltját a következő módon is írhatjuk:

$$(\mathcal{L}_{W(t)} \bar{g}(t))_{ij} = \nabla_i W_j + \nabla_j W_i$$

Így felírhatjuk a P linearizációját a következő módon:

$$(D(P)(h))_{ij} = g^{pq} \nabla_p \nabla_q h_{ij} + \nabla_i V_j + \nabla_j V_i - (D(\nabla_i W_j + \nabla_j W_i)(h))_{ij} + \dots$$

Úgy akarjuk megválasztani W -t, hogy itt csak a Laplace operátor maradjon, legmagasabb rend erejéig. A kovariáns differenciálás legmagasabb rendű része ugyanaz, mint az iránymenti deriválté, így a legmagasabb rendű elem erejéig:

$$D(\nabla_i W_j) = D(\partial_i W_j) = \partial_i D(W_j) = \nabla_i D(W_j)$$

Így ahhoz, hogy kiessenek a tagok, csak arra van szükségünk, hogy a következő teljesüljön a legmagasabb rendű elem erejéig:

$$V_i = D(W_i)(h)$$

Mivel tudjuk, hogy $V_i = g^{pq}(\frac{1}{2}\nabla_i h_{pq} - \nabla_p h_{qi})$, illetve azt, hogy $D(\Gamma_{ij}^k)(h) = \partial_t(\Gamma_{ij}^k(g(t))) = \frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij})$, megpróbálhatnánk a következő definíciót:

$$W_i = -g^{pq} g_{ij} \Gamma_{pq}^j$$

Ez viszont nem egy tenzoriális kifejezés, mivel a Γ nem egy tenzor. Írjuk fel a koordinátaváltás hatását Γ -ra, hogy jobban megértsük.

$$\begin{aligned} \nabla_{e_i} e_j &= \Gamma_{ij}^k e_k \\ f_n &= \alpha_n^i e_i \\ \tilde{\Gamma}_{nm}^l f_l &= \nabla_{f_n} f_m \\ &= \alpha_n^i (\nabla_{e_i} (\alpha_m^j e_j)) \\ &= \alpha_n^i (\nabla_{e_i} (\alpha_m^j) e_j + \alpha_m^j \nabla_{e_i} (e_j)) \\ &= \alpha_n^i (\nabla_{e_i} (\alpha_m^j) e_j + \alpha_m^j \Gamma_{ij}^k e_k) \\ &= \alpha_n^i (\nabla_{e_i} (\alpha_m^k) + \alpha_m^j \Gamma_{ij}^k) e_k \\ &= \alpha_n^i (\nabla_{e_i} (\alpha_m^k) + \alpha_m^j \Gamma_{ij}^k) (\alpha^{-1})_k^o f_o \\ \tilde{\Gamma}_{nm}^l &= \alpha_n^i (\alpha^{-1})_k^l \nabla_{e_i} (\alpha_m^k) + \alpha_n^i \alpha_m^j (\alpha^{-1})_k^l \Gamma_{ij}^k \end{aligned}$$

Az összeg második tagja a lineáris transzformáció amire akkor számítanánk, ha Γ tenzoriális lenne, de az első tag ezt elrontja. Viszont azt észrevehetjük, hogy az első tag nem függ Γ -tól. Így bár Γ nem tenzoriális, de ha van egy másik metrikához tartozó $\tilde{\Gamma}$ -mánk is, akkor $\Gamma - \tilde{\Gamma}$ már tenzoriális, hisz koordinátaváltáskor az első tagok kiesnek. Emiatt választhatunk egy tetszőleges konstans metrikát a sokaságunkon, és a W következő definíciója már helyes eredményt ad:

$$W_i(g, \tilde{g}) = -g^{pq}g_{ij}(\Gamma_{pq}^j - \tilde{\Gamma}_{pq}^j)$$

Ezzel definiálhatjuk a Ricci-DeTurck áram operátorát.

$$P(\bar{g}(t)) = -2\text{Ric}_{\bar{g}(t)} - \mathcal{L}_{W(\bar{g}(t), \tilde{g})}\bar{g}(t)$$

Ez elliptikus a konstrukció miatt, így a következő egyenletrendszernek lesz megoldása:

$$\begin{aligned}\bar{g}(0) &= g_0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\bar{g}(t) &= P(\bar{g}(t)) \\ \varphi_0 &= \text{id} \\ \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t &= W(\bar{g}(t), \tilde{g})\end{aligned}$$

Ez a Ricci-DeTurck áram. Ha $g(t) = \varphi_t^*\bar{g}(t)$, akkor:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\text{Ric}_{g(t)}$$

2.3. Egyediség

Beláttuk, hogy a Ricci áram létezik rövidtávon. Viszont a bizonyításban akadt egy tetszőlegesen választott W , így látszólag a Ricci áram nem egyértelmű. Itt bebizonyítjuk, hogy nem ez az eset. Ehhez be kell vezetnünk először a harmonikus térkép hőáram fogalmát.

Legyen $f : (\mathcal{M}, g) \rightarrow (\mathcal{N}, h)$ egy sima leképezés két Riemann sokaság közt. Használjuk az $\{x^i\}$ lokális koordinátákat $\mathcal{M}$ -en és $\{y^\alpha\}$ lokális koordinátákat $\mathcal{N}$ -en. Jelöljük ezentúl a g és h szerinti Levi-Civita konnexitásokat Γ_g , illetve Γ_h -val. Ezek segítségével definiáljuk a harmonikus térkép Laplace operátort g -ből h -ba:

$$\Delta_{g,h}f^\gamma = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma_g)_{ij}^k \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^k} + ((\Gamma_h)_{\alpha\beta}^\gamma \circ f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} \right)$$

Ezen operátor segítségével definiáljuk a harmonikus térkép hőáramot.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f &= \Delta_{g,h}f \\ f(0) &= f_0\end{aligned}$$

Ez egy parabolikus differenciálegyenlet rendszer, így létezik egyértelmű megoldása.

Ha f egy diffeomorfizmus, akkor egy érdekes alakot vesz fel.

$$(\Delta_{g,h}f)^\gamma(x) = ((f^{-1})^*g)^{\alpha\beta}(-(\Gamma_{(f^{-1})^*g})^\gamma_{\alpha\beta} + (\Gamma_h)^\gamma_{\alpha\beta})(f(x))$$

Ennek bizonyításához gondoljuk meg, hogy miképp hat a Christoffel szimbólumokra egy visszahúzás. Tetszőleges κ metrika és φ helyes terek közt menő diffeomorfizmus esetén:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{\varphi^*\kappa})^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} &= (\varphi^{-1})_* \left(\nabla_{\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)} \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) \\ &= (\varphi^{-1})_* \left(\nabla_{\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right) \\ &= (\varphi^{-1})_* \left(\frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\beta} + (\Gamma_\kappa)^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial (\varphi^{-1})^k}{\partial y^\beta} + (\Gamma_\kappa)^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial (\varphi^{-1})^k}{\partial y^\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

Emiatt:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{\varphi^*\kappa})^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} &= \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + (\Gamma_\kappa)^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \\ -(\Gamma_\kappa)^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} &= \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma_{\varphi^*\kappa})^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \\ -\kappa^{\alpha\beta} (\Gamma_\kappa)^\gamma_{\alpha\beta} &= (\varphi^*\kappa)^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma_{\varphi^*\kappa})^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k} \right) \end{aligned}$$

Behelyettesítve $\varphi = f$ és $\kappa = (f^{-1})^*g$ változókat, és az egész egyenlőséget behelyettesítve $\Delta_{g,h}$ definíciójába:

$$\begin{aligned} \Delta_{g,h}f^\gamma &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma_g)^k_{ij} \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^k} + ((\Gamma_h)^\gamma_{\alpha\beta} \circ f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} \right) \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - (\Gamma_g)^k_{ij} \frac{\partial f^\gamma}{\partial x^k} \right) + g^{ij} \left(((\Gamma_h)^\gamma_{\alpha\beta} \circ f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} \right) \\ &= -((f^{-1})^*g)^{\alpha\beta} (\Gamma_{(f^{-1})^*g})^\gamma_{\alpha\beta} + g^{ij} \left(((\Gamma_h)^\gamma_{\alpha\beta} \circ f) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} \right) \\ &= -((f^{-1})^*g)^{\alpha\beta} (\Gamma_{(f^{-1})^*g})^\gamma_{\alpha\beta} + ((f^{-1})^*g)^{\alpha\beta} (\Gamma_h)^\gamma_{\alpha\beta} \\ &= ((f^{-1})^*g)^{\alpha\beta} ((\Gamma_h)^\gamma_{\alpha\beta} - (\Gamma_{(f^{-1})^*g})^\gamma_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

Ez a belátandó állítás.

Ennek segítségével vizsgáljuk meg a Ricci-DeTurck áramot. Emlékezzünk, hogy:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t = g^{pq} (-(\Gamma_g)^j_{pq} + (\Gamma_{\tilde{g}})^j_{pq})$$

De az épp most belátottak miatt, és mivel $g(t) = \varphi_t^* \bar{g}(t)$ ekkor φ_t teljesíteni fogja a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t &= (\bar{g}(t))^{pq} (-(\Gamma_{\bar{g}(t)})^j_{pq} + (\Gamma_{\tilde{g}})^j_{pq}) \\ &= ((\varphi^{-1})^* g(t))^{pq} (-(\Gamma_{(\varphi^{-1})^* g(t)})^j_{pq} + (\Gamma_{\tilde{g}})^j_{pq}) \\ &= \Delta_{g(t), \tilde{g}} \varphi_t \end{aligned}$$

Tehát a diffeomorfizmus teljesíti a harmonikus térkép hőáramot.

Ezután már az egyediség könnyen jön. Tegyük fel, hogy g_1 és g_2 megoldásai ugyanazon Ricci áramnak. Legyen φ_i a megoldása a harmonikus térkép hő-egyenletnek g_i -ből valamilyen $\tilde{g}$ -be. Ekkor $\bar{g}_i = (\varphi_i)_* g_i$ az egyedi megoldása a Ricci-DeTurck áramnak azonos kezdeti feltételek és $\tilde{g}$ választás mellett. Viszont ez azt jelenti, hogy $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$. Ezentúl a $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_i = W(g_i(t), \tilde{g})$ egyenlőség miatt $\varphi_1 = \varphi_2$. Így $g_1 = \varphi_1^* \bar{g}_1 = \varphi_2^* \bar{g}_2 = g_2$. Tehát a Ricci áram egyedi.

2.4. A normalizált Ricci áram

Kompakt sokaság esetén megfontoljuk még az úgynevezett normalizált Ricci áramot:

$$\begin{aligned} g(0) &= g_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= \frac{2}{n} r g(t) - 2 \text{Ric}_{g(t)} \end{aligned}$$

Ahol $r = \frac{\int_{\mathcal{M}} R d\mu}{\int_{\mathcal{M}} d\mu}$ az átlaggörbület. Be kívánjuk látni ennek is a létezését.

Ehhez tegyük fel, hogy g egy megoldása a normalizálatlan Ricci áramnak, és definiáljunk egy $\bar{g}(t) = \psi(t)g(t)$ metrikát, ahol ψ egy időben változó konstans, melyet úgy választunk meg, hogy $\int_{\mathcal{M}} d\bar{\mu} = 1$ teljesüljön minden időpillanatban.

Ezentúl definiálunk egy $\bar{t} = \int_0^t \psi(\tau) d\tau$ időparamétert.

Konstans átskálázás mellett könnyen látható, hogy $\bar{R}_{ijkl} = \psi R_{ijkl}$, $\bar{R}_{ij} = R_{ij}$, $\bar{R} = \psi^{-1} R$, illetve $d\bar{\mu} = \psi^{\frac{n}{2}} d\mu$. A g determinánsának a deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial t} \det(g) = \det(g) g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) = -2R \det(g)$$

Ahol felhasználtuk a Jacobi formulát. Ebből következik, hogy $\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{M}} d\mu = -\int_{\mathcal{M}} R d\mu$, ami mutatja, hogy ψ egy sima függvény. Emiatt megkapjuk a következő egyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{g} = \frac{dt}{d\bar{t}} \frac{\partial}{\partial t} (\psi g) = -2\bar{\text{Ric}} + \left(\psi^{-2} \frac{d\psi}{d\bar{t}} \right) \bar{g}$$

Kiszámítva $\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(\bar{g})}$ -t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(\bar{g})} &= \frac{\frac{\partial}{\partial t}(\psi^n \det(g))}{2\sqrt{\det(\bar{g})}} \\ &= \frac{1}{2\psi^{\frac{n}{2}}} \left(n\psi^{n-1} \frac{d\psi}{dt} - 2R\psi^n \right) \sqrt{\det(g)} \\ &= \left(\frac{n}{2\psi} \frac{d\psi}{dt} - \psi \bar{R} \right) \sqrt{\det(\bar{g})} \end{aligned}$$

Megkapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{M}} d\bar{\mu} \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{n}{2\psi} \frac{d\psi}{dt} - \psi \bar{R} \right) d\bar{\mu} \\ &= \frac{n}{2\psi} \frac{d\psi}{dt} - \psi r \end{aligned}$$

Ez egyszerűsíti az előbbi egyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{g} &= -2\bar{\text{Ric}} + \left(\psi^{-2} \frac{d\psi}{dt} \right) \bar{g} \\ &= -2\bar{\text{Ric}} + \frac{2}{n} r g \end{aligned}$$

Tehát ez az időben és térben átskálázott folyamat teljesíti a normalizált Ricci áramot. Tehát a normalizált és normalizálatlan folyamatot lényegében csak egy efféle transzformáció választja el egymástól. Speciálisan, akkor és csak akkor létezik rövidtávon a Ricci áram, ha létezik normalizált Ricci áram.

3. fejezet

Uniformizációs tétel

Itt belátjuk az uniformizációs tételt oly felületekre, melyeknek Euler karakterisztikája kisebb, mint 0. A tétel a következő:

3.0.1. Tétel (Uniformizációs tétel). *Tetszőleges (M, g) Riemann felületre létezik egy h metrika ugyanazon a felületen, melyre $h = fg$ valami f sima skalár-függvényre, illetve (M, h) konstans görbülettel rendelkezik.*

Azon tulajdonságot, hogy $h = fg$ a h és g konform ekvivalenciájának nevezzük. Ez a név onnan származik, hogy két vektor által bezárt szög g és h szerint ilyenkor ugyanaz.

A tétel bizonyításához fel fogjuk használni a normalizált Ricci áramot. Speciálisan azt fogjuk belátni, hogy konvergál egy megfelelő h metrikához. Egy felületen a normalizált Ricci áram a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} g(0) &= g_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= (r - R)g \end{aligned}$$

Ahol $r = (\int_M R d\mu) / (\int_M 1 d\mu)$ a felület átlaggörbülete. Egy könnyen látható állítás, hogy ez konstans.

3.0.1. Lemma. *A normalizált Ricci áram folyamán az átlaggörbület konstans.*

Bizonyítás. A Gauss-Bonnet tétel miatt $r = 4\pi\chi(M) / (\int_M 1 d\mu)$ ahol $\chi(M)$ az M felület Euler karakterisztikája. A normalizált Ricci áram konstrukciója folytán $\int_M 1 d\mu$ konstans, így r is az. $\square$

Már láttuk, hogy a Ricci áramnak létezik rövidtávú megoldása. A célunk az lesz, hogy belássuk egy hosszútávú megoldás létezését, és hogy $g(t)$ konvergál a végtelenben egy konstans görbülettel rendelkező konform ekvivalens metrikához.

3.1. A görbület relációja két konform ekvivalens felület között

Először megpróbáljuk megérteni, hogy mi köze van két konform ekvivalens felület görbületének egymáshoz. A következő tételt látjuk be:

3.1.1. Tétel. *Legyenek g és h metrikák egy 2-sokaságon, és u egy skalármező, hogy fennáll a következő egyenlőség:*

$$g = e^{2u}h$$

Ekkor következik, hogy a két metrikából számított görbületre fennáll a következő:

$$R_g = e^{-2u}(R_h - 2\Delta_h u)$$

A bizonyításhoz differenciálformákat fogunk használni. Legyen M egy zárt 2-sokaság és g rajta egy Riemann metrika. Lokálisan legyen (e_1, e_2) egy ortonormált bázis mező és (ω^1, ω^2) a duálisa.

Ehhez a felülethez és lokális bázis mezőhöz tartozik egy Levi-Civita konnexió ∇ . Ez felírható, mint $\nabla_X e_i = \omega_i^j(X)e_j$. Ekkor $\omega_i^j = \omega^j(\nabla_k e_i)dx^k$

A Levi-Civita konnexió egyik jellemző tulajdonsága, hogy:

$$\nabla_X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

Ha $Y = e_i$ és $Z = e_j$, akkor a bal oldal eltűnik, mivel konstansnak vesszük deriváltját. Emiatt kijön a következő egyenlet:

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_X e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_X e_j) \\ &= \omega_i^j(X) + \omega_j^i(X) \end{aligned}$$

Röviden ω_i^j antiszimmetrikus. Mivel két dimenzióban dolgozunk, ez speciálisan itt azt jelenti, hogy egyetlen számmal jellemezhető.

A célunk az, hogy kifejezzük a görbületet differenciálformákkal. Ehhez először belátunk egy általános formulát:

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2 e_i &= \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_{\nabla_X Y} e_i \\ &= \nabla_X (\omega_i^j(Y)e_j) - \omega_i^j(\nabla_X Y)e_j \\ &= \partial_X (\omega_i^j(Y))e_j + \omega_i^j(Y)\omega_j^k(X)e_k - \omega_i^j(\nabla_X Y)e_j \end{aligned}$$

Emiatt:

$$\begin{aligned} R(X, Y)e_i &= \nabla_{X,Y}^2 e_i - \nabla_{Y,X}^2 e_i \\ &= (\partial_X (\omega_i^j(Y)) - \partial_Y (\omega_i^j(X)) - \omega_i^j(\nabla_X Y - \nabla_Y X))e_j + \\ &\quad (\omega_i^k(Y)\omega_k^j(X) - \omega_i^k(X)\omega_k^j(Y))e_j \\ &= (d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j)(X, Y)e_j \end{aligned}$$

Így két dimenziós felületen $K = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = d\omega_2^1(e_1, e_2)$.

3.1.1 bizonyítása. Legyen $g = e^{2u}h$ ahol g és h metrikák ugyanazon a felületen. Legyen (e_1, e_2) egy ortonormált rendszer g szerint, és $f_i = e^u e_i$. Ekkor (f_1, f_2) egy ortonormált rendszer h szerint. Továbbá, $\omega^i = e^u \eta^i$, ahol (ω^1, ω^2) az (e_1, e_2) duálisa és (η^1, η^2) a (f_1, f_2) duálisa. Ilyenkor:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= d(e^u \eta^1) = e^u (du \wedge \eta^1 + d\eta^1) = e^u (\eta^2 \wedge \eta_2^1 + f_2(u) \eta^2 \wedge \eta^1) \\ d\omega^2 &= d(e^u \eta^2) = e^u (du \wedge \eta^2 + d\eta^2) = e^u (\eta^1 \wedge \eta_1^2 + f_1(u) \eta^1 \wedge \eta^2) \end{aligned}$$

Azt is láthatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} d\omega^i(e_2, e_1) &= \partial_{e_2}(\omega^i(e_1)) - \partial_{e_1}(\omega^i(e_2)) - \omega^i(\nabla_{e_2} e_1 - \nabla_{e_1} e_2) \\ &= \omega^i(\omega_2^j(e_1) e_j - \omega_1^j(e_2) e_j) \\ &= \omega_2^1(e_i) \end{aligned}$$

Emiatt felírhatjuk azt, hogy $\omega_2^1 = d\omega^1(e_2, e_1)\omega^1 + d\omega^2(e_2, e_1)\omega^2$, így:

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= (e^u (\eta^2 \wedge \eta_2^1 + f_2(u) \eta^2 \wedge \eta^1))(e_2, e_1) \omega^1 + \\ &\quad (e^u (\eta^1 \wedge \eta_1^2 + f_1(u) \eta^1 \wedge \eta^2))(e_2, e_1) \omega^2 \\ \omega_2^1 &= (\eta_2^1(e_1) + e^{-u} f_2(u)) \omega^1 - (\eta_1^2(e_2) + e^{-u} f_1(u)) \omega^2 \\ \omega_2^1 &= \eta_2^1 + f_2(u) \eta^1 - f_1(u) \eta^2 \end{aligned}$$

Alkalmazva a képletet a görbületre:

$$\begin{aligned} K_g &= d\omega_2^1(e_1, e_2) = d\eta_2^1(e_1, e_2) + d(f_2(u) \eta^1 - f_1(u) \eta^2)(e_1, e_2) \\ &= e^{-2u} (K_h + d(f_2(u) \eta^1 - f_1(u) \eta^2)(f_1, f_2)) \\ &= e^{-2u} K_h + \\ &\quad e^{-2u} (f_2 f_2(u) \eta^2 \wedge \eta^1 + f_2(u) d\eta^1 - \\ &\quad f_1 f_1(u) \eta^1 \wedge \eta^2 - f_1(u) d\eta^2)(f_1, f_2) \end{aligned}$$

Viszont mivel $d\eta^k = \eta_2^1(f_k) \eta^1 \wedge \eta^2$, ezért:

$$\begin{aligned} K_g &= e^{-2u} K_h + \\ &\quad e^{-2u} (f_2 f_2(u) \eta^2 \wedge \eta^1 + f_2(u) d\eta^1 - \\ &\quad f_1 f_1(u) \eta^1 \wedge \eta^2 - f_1(u) d\eta^2)(f_1, f_2) \\ &= e^{-2u} (K_h + (-(f_1 f_1(u) + f_2 f_2(u)) + f_2(u) \eta_2^1(f_1) - f_1(u) \eta_2^1(f_2)) \\ &= e^{-2u} (K_h - \nabla_{f_1, f_1}^2 u - \nabla_{f_2, f_2}^2 u) \\ &= e^{-2u} (K_h - \Delta_h u) \end{aligned}$$

Tehát beláttuk, hogy ha $g = e^{-u}h$, akkor $K_g = e^{-2u}(K_h - \Delta_h u)$. Emiatt $R_g = e^{-2u}(R_h - 2\Delta_h u)$. $\square$

3.2. A görbület fejlődése a Ricci áram folyamán

Itt a következő tételt fogjuk belátni, mely alapjául szolgál majd a görbületi becsléseinknek:

3.2.1. Tétel. *A normalizált Ricci áram folyamán*

$$\frac{\partial}{\partial t} R = (R - r)R + \Delta R$$

A normalizált Ricci áram $n = 2$ esetének az alakjából könnyen látszik, hogy g végig konform ekvivalens marad g_0 -lal. A 3.1.1 tételben már láttunk egy egyenletet, ami összekapcsolja R_g -t és R_{g_0} a Laplace operátor segítségével. Emiatt ki kell, hogy fejezzük a Laplace operátor változását.

3.2.1. Lemma. *Egy 2-sokaságon ha metrika a $\frac{\partial}{\partial t} g = fg$ egyenlet alapján fejlődik valamilyen f skalármező mellett, akkor:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_g = -f \Delta_g$$

Bizonyítás. A Laplace operátor hatása lokális koordinátabázisban:

$$\Delta_g u = g^{ij} (\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k \partial_k) u$$

Ha g változik t függvényében, akkor a Laplace operátor változása:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_g &= \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij} (\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k \partial_k)) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Delta_g &= \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij}) (\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k \partial_k) - \left(g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) \right) \end{aligned}$$

Viszont:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} + \nabla_j \frac{\partial}{\partial t} g_{il} - \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right)$$

Tehát:

$$\begin{aligned} g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(g^{ij} \left(\nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} + \nabla_j \frac{\partial}{\partial t} g_{il} \right) - g^{ij} \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \\ g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k &= g^{kl} \left(g^{ij} \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} - \frac{1}{2} g^{ij} \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \end{aligned}$$

Emlékezzünk vissza, hogy miért csináljuk ezt. Konform deformáció esetén $\frac{\partial}{\partial t}g = fg$ ahol f valamilyen időtől függő skalármező. Így a kifejezés tovább egyszerűsödik.

$$\begin{aligned}
g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(g^{ij} \left(\nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} + \nabla_j \frac{\partial}{\partial t} g_{il} \right) - g^{ij} \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} \right) \\
&= g^{kl} \left(g^{ij} \nabla_i (f g_{jl}) - \frac{1}{2} g^{ij} \nabla_l (f g_{ij}) \right) \\
&= g^{kl} \left(g^{ij} g_{jl} \nabla_i f - \frac{1}{2} g^{ij} g_{ij} \nabla_l f \right) \\
&= g^{kl} \left(\delta_{il} \nabla_i f - \frac{n}{2} \nabla_l f \right) \\
&= g^{kl} \left(1 - \frac{n}{2} \right) \nabla_l f
\end{aligned}$$

Mivel a mi esetünkben $n = 2$, ez a kifejezés 0. Így befelyezhetjük a Laplace operátor változásának jellemzését.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Delta_g &= \frac{\partial}{\partial t} (g^{ij}) ((\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k) \partial_k) - \left(g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \partial_k \right) \right) \\
&= -f (g^{ij}) ((\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k) \partial_k) \\
&= -f \Delta_g
\end{aligned}$$

□

Ezzel befelyezhetjük a tételt.

3.2.1 bizonyítása. Legyen $g = e^u h$ ahol g az időtől függ és h konstans. Ez egyértelműen meghatároz egy időtől függő u -t. Ekkor ha $\frac{\partial}{\partial t}g = fg$ valamilyen időtől függő f -re, akkor $\frac{\partial}{\partial t}u = f$. Ezután felhasználjuk a korábban kidolgozott képletet g görbületére.

$$\begin{aligned}
R_g &= e^{-u} (R_h - \Delta_h u) \\
\frac{\partial}{\partial t} R_g &= - \left(\frac{\partial}{\partial t} u \right) e^{-u} (R_h - \Delta_h u) - e^{-u} \Delta_h \left(\frac{\partial}{\partial t} u \right) \\
&= -f R_g - \Delta_g f
\end{aligned}$$

A Ricci áramban $f = r - R$, ahol r konstans, így megkapjuk, hogy:

$$\frac{\partial}{\partial t} R = (R - r) R + \Delta R$$

□

3.3. Korlátok a görbületre egyszerű esetben

Eddig beláttuk, hogy a Ricci áram rövidtávon létezik, és hogy igaz rá a $\frac{\partial}{\partial t}R = (R - r)R + \Delta R$ egyenlet, ahol r konstans. Itt felhasználjuk a maximum elv változatát.

3.3.1. Tétel. *Maximum elv Ha u egy sima skalármező, akkor $\Delta u \geq 0$ lokális minimumokban és $\Delta u \leq 0$ lokális maximumokban.*

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű. Visszaemlékezünk, hogy a Laplace operátor lokális koordináta-bázisban:

$$\begin{aligned}\Delta u &= g^{ij} \nabla_{ij}^2 u \\ &= g^{ij} (\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k \partial_k) u\end{aligned}$$

Ha egy szélsőérték helyében geodetikus koordinátákat választunk, akkor ott $\Gamma_{ij}^k = 0$. Ekkor a jól ismert $\mathbb{R}^n$ -beli esetből kifolyólag $\nabla^2 u$ pozitív szemidefinit lesz, és így $\Delta u \geq 0$. $\square$

Legyenek $R_{\max}$ és $R_{\min}$ az R maximuma illetve minimuma. Ezeknek teljesíteniük kell a következő egyenleteteket a maximum elv miatt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R_{\max} &\leq R_{\max}(R_{\max} - r) \\ \frac{\partial}{\partial t} R_{\min} &\geq R_{\min}(R_{\min} - r)\end{aligned}$$

Abban az esetben, ha $R < 0$, létezik egy $\varepsilon > 0$, hogy $R < -\varepsilon$. Mivel $R_{\max} - r \geq 0$, és $R_{\min} - r \leq 0$, és $R_{\max} \leq -\varepsilon$, és $R_{\min} \leq r$, ekkor fennáll a következő két egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} R_{\max} &\leq -\varepsilon(R_{\max} - r) \\ \frac{\partial}{\partial t} R_{\min} &\geq r(R_{\min} - r)\end{aligned}$$

Továbbá, ha $-C < R$, akkor ez ad nekünk egy időbeli szűkülő korlátot:

$$r e^{-\varepsilon t} \leq r - R \leq C e^{rt}$$

Emiatt, mint később belátjuk, létezik majd a Ricci áramnak egy hosszútávú megoldása, mely egy konstans görbületű g_∞ metrikához konvergál.

Ha viszont $R > 0$ valahol, akkor csak a felső korlát teljesül. Egy alsó korlát belátásához egyéb megközelítés szükséges. Ez az alsó korlát viszont megjegyzendő.

3.3.2. Tétel. *A kompakt 2-sokaságokon történő normalizált Ricci áram folyamán, ha $r < 0$, akkor:*

$$r - R \leq C e^{rt}$$

3.4. A görbületpotenciál

Legyen az úgynevezett potenciál f_0 azon megoldása a $\Delta f_0 = R - r$ egyenletnek, mely a felületen átlagosan 0. A konstansfüggvényekre ortogonális sima $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények terén a Laplace operátor bijektív és az inverze korlátos. Emiatt, és mivel Δ és $R - r$ simán változnak az időben, f_0 is simán fog változni. Emiatt differenciálhatjuk az öt definiáló egyenletet az idő szerint.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} \Delta\right)(f_0) + \Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} f_0\right) &= \frac{\partial}{\partial t} R = R(R - r) + \Delta R \\
(R - g)\Delta(f_0) + \Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} f_0\right) &= R(R - r) + \Delta R \\
\Delta\left(\frac{\partial}{\partial t} f_0\right) &= R(R - r) + \Delta R - (R - r)^2 \\
&= r(R - r) + \Delta R \\
&= \Delta(rf_0 + R) \\
&= \Delta(\Delta f_0 + rf_0) \\
\frac{\partial}{\partial t} f_0 &= \Delta f_0 + rf_0 - b
\end{aligned}$$

Ahol b csak az időtől függ.

Bevezetünk egy faktort, hogy a differenciálegyenletet homogénné tegyük. Megválasztva, hogy $f(t) = f_0(t) - e^{rt} \int_0^t e^{-r\tau} b(\tau) d\tau$, azt látjuk, hogy f már a homogén $\frac{\partial}{\partial t} f = \Delta f + rf$ szerint fejlődik. Ennek segítségével definiálhatjuk a következő mennyiségeket, melyek segíteni fognak a görbület becslésében:

$$\begin{aligned}
h &= \Delta f + |\nabla f|^2 \\
M &= \nabla \nabla f - \frac{1}{2}(\Delta f)g
\end{aligned}$$

Meg kívánjuk vizsgálni h időbeli változását. Ehhez az öt definiáló összeg két tagját vizsgáljuk:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\Delta f) &= \frac{\partial}{\partial t}(R - r) = \Delta R + R(R - r) \\
&= \Delta(R - r) + (\Delta f)^2 + r(R - r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|\nabla|^2 &= \frac{\partial}{\partial t}(g^{ij} \nabla_i f \nabla_j f) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} g^{ij}\right) \nabla_i f \nabla_j f + 2g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla_i f\right) \nabla_j f \\
&= (R - r)|\nabla f|^2 + 2\langle \nabla(\Delta f + rf), \nabla f \rangle \\
&= (R + r)|\nabla f|^2 + 2\langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle
\end{aligned}$$

Számítsuk ki $\nabla\Delta f$ -et.

$$\begin{aligned}
\nabla_i \Delta f &= g^{mn} (\nabla_i \nabla_m \nabla_n f) \\
&= g^{mn} (\nabla_m \nabla_i \nabla_n f + (\nabla_i \nabla_m - \nabla_m \nabla_i) \nabla_n f) \\
&= g^{mn} (\nabla_m \nabla_n \nabla_i f + (\nabla_i \nabla_m - \nabla_m \nabla_i) \nabla_n f) \\
&= \Delta \nabla_i f - g^{mn} R(e_i, e_m) \nabla_n f \\
&= \Delta \nabla_i f - g^{mn} R_{imnl} g^{lk} \nabla_k f \\
&= \Delta \nabla_i f - g^{lk} R_{il} \nabla_k f
\end{aligned}$$

Emiatt:

$$\begin{aligned}
2\langle \nabla \Delta f, \nabla f \rangle &= 2\langle \Delta \nabla f, \nabla f \rangle - 2g^{in} g^{lk} \langle R_{il} \nabla_k f, \nabla_n f \rangle \\
&= 2\langle \Delta \nabla f, \nabla f \rangle - 2K g^{in} g^{lk} \langle g_{il} \nabla_k f, \nabla_n f \rangle \\
&= 2\langle \Delta \nabla f, \nabla f \rangle - R |\nabla f|^2
\end{aligned}$$

Így:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla f|^2 = r |\nabla f|^2 + 2\langle \Delta \nabla f, \nabla f \rangle$$

Ezután számoljuk ki $\Delta |\nabla f|^2$ -et.

$$\begin{aligned}
\Delta |\nabla f|^2 &= g^{nm} \nabla_n \nabla_m (g^{ij} \langle \nabla_i f, \nabla_j f \rangle) \\
&= g^{mn} \nabla_n g^{ij} (\langle \nabla_m \nabla_i f, \nabla_j f \rangle + \langle \nabla_i f, \nabla_m \nabla_j f \rangle) \\
&= g^{mn} g^{ij} (\langle \nabla_n \nabla_m \nabla_i f, \nabla_j f \rangle + \langle \nabla_m \nabla_i f, \nabla_n \nabla_j f \rangle + \\
&\quad \langle \nabla_n \nabla_i f, \nabla_m \nabla_j f \rangle + \langle \nabla_i f, \nabla_n \nabla_m \nabla_j f \rangle) \\
&= 2\langle \Delta \nabla f, \nabla f \rangle + 2\langle \nabla \nabla f, \nabla \nabla f \rangle \\
&= 2\langle \Delta \nabla f, \nabla f \rangle + 2|\nabla \nabla f|^2
\end{aligned}$$

Így:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla f|^2 = r |\nabla f|^2 - 2|\nabla \nabla f|^2 + \Delta |\nabla f|^2$$

És végre befejezhetjük a $\frac{\partial}{\partial t} h$ kiszámítását.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h &= \frac{\partial}{\partial t} \Delta f + \frac{\partial}{\partial t} |\nabla f|^2 \\
&= \Delta(R - r) + (\Delta f)^2 + r(R - r) + r |\nabla f|^2 - 2|\nabla \nabla f|^2 + \Delta |\nabla f|^2 \\
&= \Delta h + r h + (\Delta f)^2 - 2|\nabla \nabla f|^2 \\
&= \Delta h + r h - 2|M|^2
\end{aligned}$$

Korábbiakhoz hasonlóan kijön a következő felső korlát h -ra:

$$h \leq Ce^{rt}$$

Viszont $R - r \leq h$, tehát a 3.3.2-rel kombinálva megkapjuk a következő egyenlőtlenséget:

3.4.1. Tétel.

$$-Ce^{rt} \leq R - r \leq Ce^{rt}$$

Így azt találjuk, hogy $R \rightarrow r$ exponenciális sebességgel. Ez lesz a kulcsa a hosszútávú létezés és a konvergencia bebizonyításának.

3.5. Hosszútávú létezés

Be akarjuk látni, hogy a normalizált Ricci áram létezik hosszútávon. Már tudunk egy jó korlátot R -re.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= (r - R)g \\ -Ce^{rt} &\leq R - r \leq Ce^{rt} \end{aligned}$$

A rövidtávú létezést már láttuk. A létezési intervallum szuprémumát jelöljük T -vel. Tegyük fel, hogy $T < \infty$. Ekkor tetszőleges $t_0 < T$ -re:

$$\begin{aligned} \left| \ln\left(\frac{g_{t_0}}{g_0}\right) \right| &= \left| \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} \ln(g_t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^{t_0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} g_t}{g_t} dt \right| \\ &= \left| \int_0^{t_0} (r - R) dt \right| \\ &\leq \int_0^{t_0} Ce^{rt} dt \\ &= \frac{C}{r} (e^{rt_0} - 1) \leq \frac{-C}{r} \end{aligned}$$

Exponenciálás és g_0 -lal szorzás után:

$$\exp\left(\frac{C}{r}\right) g_0 \leq g_{t_0} \leq \exp\left(\frac{-C}{r}\right) g_0$$

Emiatt pedig tudjuk azt, hogy:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} g_t(e_i, e_j) \right) \right| dt &\leq \int_{t_0}^T \left| (R - r) \exp\left(\frac{-C}{r}\right) g_0(e_i, e_j) \right| \\ &= (T - t_0) \left| C \exp\left(\frac{-C}{r}\right) g_0(e_i, e_j) \right| \end{aligned}$$

A kompaktság miatt a jobb oldal egy egyenletes korlát, és egyenletesen tart 0-hoz ahogy $t_0 \rightarrow T$. Emiatt g_t egyenletesen konvergál valamilyen g_T folytonos metrikához. Ha g_T -ről be tudnánk látni, hogy sima, akkor készen is lennénk a hosszútávú létezéssel, hisz g_T -től kezdve meg lehetne hosszabbítani a Ricci áram létezési intervallumát. Ezt úgy fogjuk belátni, hogy találunk hasonló egyenletes korlátokat R deriváltjaira.

Viszont ezelőtt még lássunk be egy általános tulajdonságot a konform ekvivalens metrikákról. Legyen $\tilde{g} = e^{2u}g$. Ekkor a $\tilde{g}$ -hez tartozó kovariáns derivált Christoffel szimbólumait kiszámíthatjuk, mint:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{kl}(\partial_i\tilde{g}_{jk} + \partial_j\tilde{g}_{ik} - \partial_k\tilde{g}_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2u}g^{kl}(\partial_i(e^{2u})g_{jk} + e^{2u}\partial_i g_{jk} + \\ &\quad \partial_j(e^{2u})g_{ik} + e^{2u}\partial_j g_{ik} - \\ &\quad \partial_k(e^{2u})g_{ij} - e^{2u}\partial_k g_{ij}) \\ &= g^{kl}(\partial_i u g_{jk} + \partial_j u g_{ik} - \partial_k u g_{ij}) + \Gamma_{ij}^k \\ &= \Gamma_{ij}^k + (\partial_i u)\delta_j^l + (\partial_j u)\delta_i^l - (\partial_k u)g^{kl}g_{ij}\end{aligned}$$

Az u deriváltja így meghatároz egy felső korlátot a szimbólumok megváltozására, mely egy kompakt téren ráadásul egyenletes korlát lesz. Ennek az a fontos következménye, hogy ha képesek vagyunk korlátokat találni $|\nabla^n u|$ -re és $|\nabla^n T|$ -re minden n -re, akkor abból következni fog egy korlát $|\tilde{\nabla}^n T|$ -re is.

A mi alkalmazásunk az lesz, hogy belátunk egyenletes korlátokat $|\nabla^n R|_{\tilde{g}}$ -re, amiből következni fognak egyenletes korlátok $|\tilde{\nabla}^n g_t|_{\tilde{g}}$ -re ahol $\tilde{g}$ valamilyen fix metrika. Ebből következik, hogy $|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} g_t| \leq C_n$.

Ekkor V, W egységshosszúságú vektorokra:

$$\int_{t_0}^T \left| \frac{\partial}{\partial t} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} g_t(V, W) \right| dt \leq \int_{t_0}^T |(R - r)C_n| dt \leq (T - t_0)|CC_n|$$

Ami azt jelenti, hogy g_t összes deriváltja egyenletesen konvergál, amiből az következik, hogy g_T sima.

3.6. Korlátok a görbület deriváltjaira

Be kívánjuk látni, hogy $|\nabla^n R| \leq C_n$. Lássuk be az $n = 1$ esetet. Először egy lemma:

$$\begin{aligned}
\nabla_i \Delta R &= g^{jk} \nabla_i \nabla_j \nabla_k R \\
&= g^{jk} (\nabla_j \nabla_k \nabla_i R + (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) \nabla_k R) \\
&= \Delta \nabla_i R - g^{jk} (R_{ijk}^l) \nabla_l R \\
&= \Delta \nabla_i R - g^{jk} g^{lm} (R_{ijkm}) \nabla_l R \\
&= \Delta \nabla_i R - g^{lm} (R_{im}) \nabla_l R \\
&= \Delta \nabla_i R - g^{lm} g_{im} K \nabla_l R \\
&= \Delta \nabla_i R - \frac{1}{2} R \nabla_i R
\end{aligned}$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \nabla R &= \nabla (\Delta R + R(R - r)) \\
&= \Delta \nabla R + \frac{3}{2} R \nabla R - r \nabla R
\end{aligned}$$

És emiatt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |\nabla R|^2 &= \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} \nabla_i R \nabla_j R \\
&= (R - r) |\nabla R|^2 + 2 \langle \nabla R, \Delta \nabla R + \frac{3}{2} R \nabla R - r \nabla R \rangle \\
&= (4R - 3r) |\nabla R|^2 + 2 \langle \nabla R, \Delta \nabla R \rangle \\
&= \Delta |\nabla R|^2 + (4R - 3r) |\nabla R|^2 - 2 |\nabla^2 R|^2 \\
&\leq \Delta |\nabla R|^2 + (4C e^{-rt} + r) |\nabla R|^2
\end{aligned}$$

Így $|\nabla R|$ korlátos. Sőt, ha t elég nagy, akkor $(4C e^{-rt} + r) \leq r/2$, mivel $r < 0$. Ez még nem túl érdekes, mivel a hosszútávú létezését nem láttuk be, de később érdekes lesz. Így jegyezzük meg a következőt:

$$|\nabla R|^2 \leq C_1 \exp\left(\frac{r}{2}t\right)$$

A magasabb deriváltakra a bizonyítás strukturája pontosan ugyanaz, bár a kifejezések valamennyivel komplikáltabbak. A tételünk a következő:

3.6.1. Tétel. *Egy kompakt 2-sokaságon értelmezett normalizált Ricci áram folyamán tetszőleges N teszmészetes számra létezik egy C_N korlát, hogy*

$$|\nabla^N R|^2 \leq C_N \exp\left(\frac{r}{2}t\right)$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $N - 1$ -ig már beláttuk a tételt. Ekkor először megvizsgáljuk, hogy ∇^N és Δ hogyan kommutálnak:

$$\begin{aligned}\nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_N} \Delta R &= \Delta \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_N} R + \\ &\quad g^{jk} (\nabla_{i_1} \nabla_j - \nabla_j \nabla_{i_1}) \nabla_k \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} R + \\ &\quad g^{jk} \nabla_j (\nabla_{i_1} \nabla_k - \nabla_k \nabla_{i_1}) \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} R + \\ &\quad \nabla_{i_1} (\nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} \Delta R - \Delta \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} R)\end{aligned}$$

Az összeg első tagja szép, és a negyedik rekurzív. Kiszámítjuk a másodikat.

$$\begin{aligned}g^{jk} (\nabla_{i_1} \nabla_j - \nabla_j \nabla_{i_1}) \nabla_k \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} R &= -g^{jk} g^{lm} R_{i_1 j k m} (\nabla_l \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} R) \\ &\quad - g^{jk} g^{lm} R_{i_1 j i_2 m} (\nabla_k \nabla_l \nabla_{i_3} \cdots \nabla_{i_N} R) \\ &\quad - \dots \\ &\quad - g^{jk} g^{lm} R_{i_1 j i_N m} (\nabla_k \nabla_{i_2} \cdots \nabla_l R)\end{aligned}$$

Itt az első tag $-\frac{1}{2} R \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_N} R$ hasonlóan az $N = 1$ esethez.
A másodikat tag:

$$\begin{aligned}g^{jk} g^{lm} R_{i_1 j i_2 m} (\nabla_k \nabla_l \nabla_{i_3} \cdots \nabla_{i_N} R) &= g^{jk} g^{lm} \frac{R}{2} (g_{i_1 m} g_{j i_2} - g_{i_1 i_2} g_{j m}) \\ &\quad (\nabla_k \nabla_l \nabla_{i_3} \cdots \nabla_{i_N} R) \\ &= \frac{R}{2} (\nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_N} R) - \\ &\quad \frac{R}{2} g^{jk} (\nabla_j \nabla_k \nabla_{i_3} \cdots \nabla_{i_N} R) g_{i_1 i_2}\end{aligned}$$

A többi tag hasonló.

Már csak a következő tagot kell kiszámítani, hogy megtudjuk, miképp kommutál ∇^N és Δ :

$$\begin{aligned}g^{jk} \nabla_j (\nabla_{i_1} \nabla_k - \nabla_k \nabla_{i_1}) \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} R &= -g^{jk} g^{ml} \nabla_j (R_{i_1 k i_2 m} (\nabla_l \nabla_{i_3} \cdots \nabla_{i_N} R)) \\ &\quad - g^{jk} g^{ml} \nabla_j (R_{i_1 k i_3 m} (\nabla_{i_2} \nabla_l \cdots \nabla_{i_N} R)) \\ &\quad - \dots \\ &\quad - g^{jk} g^{ml} \nabla_j (R_{i_1 k i_N m} (\nabla_{i_2} \nabla_{i_3} \cdots \nabla_l R))\end{aligned}$$

Kiszámítjuk az első tagot, a többi hasonló:

$$\begin{aligned}g^{jk} g^{ml} \nabla_j (R_{i_1 k i_2 m} (\nabla_l \nabla_{i_3} \cdots \nabla_{i_N} R)) &= \frac{1}{2} g^{jk} g^{ml} (g_{i_1 m} g_{i_2 k} - g_{i_1 i_2} g_{k m}) \\ &\quad (\nabla_j R \nabla_l \nabla_{i_3} \cdots \nabla_{i_N} R) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_{i_1} R \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} R - \\ &\quad \frac{1}{2} g^{km} \nabla_k R \nabla_m \nabla_{i_3} \cdots \nabla_{i_N} R g_{i_1 i_2}\end{aligned}$$

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe, és megoldva a rekurziót, kiderül egy ilyen alakú egyenlőség:

$$\nabla^N \Delta R - \Delta \nabla^N R = \sum_{I=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\nabla^I R) \otimes_g (\nabla^{N-I} R)$$

Ahol $\otimes_g$ jelöli egy tenzorszorzat akárhányszoros g általi összehúzásainak egy lineáris kombinációját. Hasonló mód létezik egy ilyen alakú formula:

$$\nabla^N (R^2) = \sum_{I=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\nabla^I R) \otimes_g (\nabla^{N-I} R)$$

Illetve visszaemlékezve a Γ evolúcióját leíró egyenletre:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\nabla_j \frac{\partial}{\partial t} g_{il} + \nabla_l \frac{\partial}{\partial t} g_{ij} + \nabla_i \frac{\partial}{\partial t} g_{jl} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} ((\nabla_j R) g_{il} + (\nabla_l R) g_{ij} + (\nabla_i R) g_{jl}) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k \right) \otimes_g (\nabla^N R) &= (\nabla R) \otimes_g (\nabla^N R) \end{aligned}$$

Ezen formulákkal először kiszámítjuk a görbület N -edik deriváltjának az időbeli változását:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_N} R) &= \nabla_{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} R \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{i_1 i_2}^p \right) \nabla_p \nabla_{i_3} \cdots \nabla_{i_N} R \\ &= \nabla_{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{i_2} \cdots \nabla_{i_N} R \right) + (\nabla R) \otimes_g (\nabla^{N-1} R) \end{aligned}$$

Rekurzív applikáció után:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^N R) &= \sum_{I=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\nabla^I R) \otimes_g (\nabla^{N-I} R) + \nabla^N \left(\frac{\partial}{\partial t} R \right) \\ &= \sum_{I=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\nabla^I R) \otimes_g (\nabla^{N-I} R) + \nabla^N (\Delta R + R(R-r)) \\ &= \sum_{I=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\nabla^I R) \otimes_g (\nabla^{N-I} R) + \Delta \nabla^N R - r \nabla^N R \end{aligned}$$

Ezáltal kiszámíthatjuk a magával vett skalárszorzatának a változását:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^N R|^2 &= 2 \left(g^{a_1 b_1} \dots g^{a_N b_N} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^N R \right)_{a_1 \dots a_N}, (\nabla^N R)_{b_1 \dots b_N} \right) \\
&= (\nabla^N R) \otimes_g \sum_{I=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} (\nabla^I R) \otimes_g (\nabla^{N-I} R) + \\
&\quad \Delta |\nabla^N R|^2 - 2 |\nabla^{N+1} R|^2 - (N+2)r |\nabla^N R|^2 \\
&\leq \Delta |\nabla^N R|^2 + C' \exp\left(\frac{r}{2}t\right) |\nabla^N R| - (N+2)r |\nabla^N R|^2
\end{aligned}$$

Indukcióval feltehető, hogy ismerünk egy ilyen alakú becslést $N-1$ -re is. Ekkor definiálhatjuk a következő függvényt:

$$\varphi = |\nabla^N R|^2 - (N+1)r |\nabla^{N-1} R|^2$$

Az indukciós feltétel miatt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^{N-1} R|^2 &= (\nabla^{N-1} R) \otimes_g \sum_{I=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} (\nabla^I R) \otimes_g (\nabla^{N-1-I} R) + \\
&\quad \Delta |\nabla^{N-1} R|^2 - 2 |\nabla^N R|^2 - (N+1)r |\nabla^{N-1} R|^2 \\
&\leq \Delta |\nabla^{N-1} R|^2 - 2 |\nabla^N R|^2 + C'' \exp\left(\frac{r}{2}t\right)
\end{aligned}$$

Így kiszámíthatjuk φ időbeli változásának egy korlátját:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \varphi &\leq \Delta \varphi + Nr |\nabla^N R|^2 + C''' \exp\left(\frac{r}{2}t\right) (1 + |\nabla^N R|) \\
&\leq \Delta \varphi + Nr \varphi + C''' \exp\left(\frac{r}{2}t\right) (1 + \sqrt{\varphi})
\end{aligned}$$

Először belátjuk, hogy φ korlátos. Ehhez tovább becsljük:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi \leq \Delta \varphi + C''' \exp\left(\frac{r}{2}t\right) (1 + \sqrt{\varphi})$$

Ekkor kisebbnek kell lennie, mint a következő szeparábilis differenciálegyenlet megoldása x -re. x -re nehéz megoldani, így oldjuk meg inkább t -re és vizsgáljuk az inverzet. Ez az inverz létezik, mivel a megoldás nyilván szigorúan monoton növe:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(t) &= C''' \exp\left(\frac{r}{2}t\right) (1 + \sqrt{f(t)}) \\
\frac{\frac{d}{dt} f(t)}{1 + \sqrt{f(t)}} &= C''' \exp\left(\frac{r}{2}t\right) \\
t &= \frac{2}{r} \ln \left(\frac{r}{2C'''} \int \frac{1}{1 + \sqrt{f}} df + C \right)
\end{aligned}$$

Könnyű látni, hogy $\int \frac{1}{1+\sqrt{f}} df$ korlátlan, így a jobb oldal véges "idő" belül a végtelenbe tart akármilyen C -re. Ez azt jelenti, hogy a megoldás inverze korlátos. Tehát φ is az.

Mivel φ korlátos, $(1 + \sqrt{\varphi})$ is az. Így:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi \leq \Delta \varphi + Nr\varphi + C'''' \exp\left(\frac{r}{2}t\right)$$

Ebből következik, hogy:

$$\varphi \leq Ae^{Nrt} + \frac{2C''''}{r - 2Nr} \exp\left(\frac{r}{2}t\right)$$

Valamilyen A konstansra. Ebből következik, hogy előbb-utóbb:

$$|\nabla^N R|^2 \leq \varphi \leq C_N \exp\left(\frac{r}{2}t\right)$$

□

Tehát R deriváltjai ténylegesen korlátosak. Emiatt hosszútávon létezik a Ricci áram.

3.7. Konvergencia a végtelenben

Beláttuk, hogy a Ricci áram létezik hosszú távon, és ezentúl még a következő egyenlőtlenségeket:

$$|R - r| \leq Ce^{rt}$$

$$|\nabla^N R|^2 \leq C_N \exp\left(\frac{r}{2}t\right)$$

3.0.1 bizonyítása. Legyen $\tilde{g} = g_0$ egy fix háttérmetrika. Mivel ekkor $\ln(g/\tilde{g}) \leq -C/r$, ez indukál hasonló korlátokat a háttérmetrika szerinti deriváláshoz, amely pedig indukál korlátokat a parciális deriváltakhoz, ami indukál korlátokat a metrika változásának a parciális deriváltjaihoz.

$$|\tilde{\nabla}^N R|^2 \leq \tilde{C}_N \exp\left(\frac{r}{2}t\right)$$

$$|\partial^N R| \leq \tilde{C}'_N \exp\left(\frac{r}{4}t\right)$$

$$\left| \partial^N \frac{\partial}{\partial t} g \right| \leq \tilde{C}''_N \exp\left(\frac{r}{4}t\right)$$

Mivel $(R - r) \rightarrow 0$ exponenciálisan, g konvergál valamilyen g_∞ -hez egyenletesen. Ez egy folytonos metrika lesz. De hisz a parciális deriváltjai is folytonosan konvergálnak. Így g_∞ sima. Ezentúl pedig g_∞ -ben $R - r = 0$, és $g_\infty = \exp(\int_0^\infty (R - r))g_0$.

Tehát g_∞ egy g_0 -al konform ekvivalens sima metrika, melynek görbülete konstans. □

Irodalom

- [1] Dan Knopf Bennett Chow. *The Ricci Flow: an Introduction*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2004. ISBN: 978-1-4704-1337-8. DOI: 10.1090/surv/110.
- [2] Lei Ni Bennett Chow Peng Lu. *Hamilton's Ricci Flow*. 77. köt. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society; Science Press, 2004. ISBN: 978-1-4704-2111-3. DOI: 10.1090/gsm/077.
- [3] Richard S. Hamilton. „The Ricci flow on surfaces”. *Contemporary Mathematics* 71 (1986), 237–262. old. DOI: 10.1090/conm/071/954419.
- [4] Richard S. Hamilton. „Three-manifolds with positive Ricci curvature”. *Journal of Differential Geometry* 17.2 (1982), 255–306. old. DOI: 10.4310/jdg/1214436922.
- [5] Stephen Shang Yi Liu. *Notes on Ricci-DeTurck Flow*. 2022. URL: <https://steuyve.github.io/ricci-deturck.html>. (accessed: 2025.05.19).
- [6] Christos Mantoulidis Otis Chodosh. *Richard Bamler - Ricci Flow Lecture Notes*. 2015. URL: <https://web.stanford.edu/~ochodosh/Bamler-RFnotes.pdf>. (accessed: 2025.05.19).
- [7] Deane Yang. *DeTurck's trick for the prescribed Ricci equation*. 2016. URL: https://cims.nyu.edu/~yangd/papers/deturck_trick.pdf. (accessed: 2025.05.19).

Nyilatkozat

Én, Fogarasi András, a dolgozat írója nyilatkozom, hogy a következő mesterséges intelligenciát igénybevevő eszközöket alkalmaztam a dolgozat írásának céljából:

- ChatGPT - Irodalomkeresés, egész dolgozat
- DuckDuckGo AI-assisted answers - Irodalomkeresés, egész dolgozat
- Google Search AI Overviews - Irodalomkeresés, egész dolgozat

Ezeket túl nyilatkozom, hogy nem használtam mesterséges intelligenciát igénybevevő eszközöket a dolgozat írásának céljából.