

Reziduum-alapú integrálási metódusok

Schwarz-Christoffel formula
Weierstrass-féle $\wp$ függvény



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematika BSc

2025

Szakdolgozatot írta:

Korompay Ábel

Témavezető:

Dr. Sigray István Pál

ELTE Matematikai Intézet, Analízis tanszék

Köszönetnyilvánítás

Elsőként témavezetőmnek, Sigray Istvánnak szeretnék köszönetet mondani, aki mindig rendelkezésemre állt. Nemcsak egyengette utamat szakértelmével és meglátásaival, hanem tisztelettel és alázattal fordult felém, ami nagyon jól esett.

Valamint szeretnék köszönetet mondani a családomnak és a barátaimnak, hogy ott vannak nekem és számíthatok rájuk.

Fodor Ákos: VÁLASZ

Én nem tudom, hogyan kell.

Bármit. A "dolgot".

Csak van, hogy sikerül (nem is kevészer)

– de, hogy is mondjam? n e m : nekem.

Hangszer ne legyen büszke a zenére.

Bevezető

Szakedolgozatom célja az olvasót ahhoz a felismeréshez elvezetni, hogy a komplex függvénytan elegáns válaszokkal szolgál olyan gyakorlati és elméleti integrál problémák kapcsán is, ahol nem létezik primitív függvény és a valós analízis eszköztára határhoz ér.

Az első részben különböző reziduum-alapú integrálási módszerekkel ismerkedünk meg, melyekkel az $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ alakú integrálok, illetve a valós improprius integrálok gyors számításokká egyszerűsödnek.

A második részben a Schwarz-Christoffel formula segítségével nem csak a sokszögtartományra való konform leképezés válik lehetővé, hanem a függvény inverzének kiterjesztése által geometriai szemléletet nyerünk a Weierstrass-féle $\wp$ függvényhez, melyet ezután alaposabban szemügyre veszünk. Laczkovich Miklós szerint Weierstrass eredeti motivációja függvényei megalkotására nem más volt, mint a $\int \frac{1}{\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}} dx$ alakú integrálok kezelhetővé tétele.

Az elemi primitív függvénnyel nem rendelkező integrálok komplex függvénytan eszközeivel történő machinálása egész dolgozaton átívelő alapgondolat, ezáltal összetartó erő is.

Tartalomjegyzék

1. A Reziduumtétel	4
1.1. Elméleti felépítése	4
1.2. A Reziduumtétel alkalmazása $\cos\theta$ és $\sin\theta$ racionális függvényeire	7
1.3. A Reziduumtétel alkalmazása valós improprius integrálokra	9
1.3.1. Első módszer: félkörön vett integrál	10
1.3.2. Második módszer: módosított félkörön vett integrál	14
1.3.3. Harmadik módszer: szögtartományon vett integrál	18
1.3.4. Negyedik módszer: kulcslyukon vett integrál	20
1.3.5. Fresnel-integrálok	24
1.4. A Reziduumtétel következményei	27
2. Schwarz-Christoffel formula	28
2.1. Téglalap esetén az inverz kiterjesztése	30
2.2. Szabályos háromszög esetén az inverz kiterjesztése	33
2.3. Elliptikus függvények	35
2.4. A Weierstrass-féle $\wp$ függvény	36
2.4.1. Konvergenciája	36
2.4.2. Periodikussága	38
2.4.3. Differenciálegyenlete	39
2.5. Kitekintés	41

1. A Reziduumtétel

1.1. Elméleti felépítése

Kós Géza Komplex függvénytan című jegyzetére [1] támaszkodunk az elméleti felépítés kapcsán. A homotópia fogalma kulcsfontosságú a komplex integrálelméletben. Azt mondjuk, hogy γ_0 és γ_1 D tartománybeli folytonos görbe homotóp egymással, ha közös a kezdő- és végpontjuk vagy mindketten zártak, továbbá D -ben folytonosan átdeformálhatók egymásba. Ez a topológiai tulajdonság az adott tartománybeli szakaszonként folytonosan differenciálható görbéket ekvivalenciaosztályokba rendezi. Ráadásul, ha egy komplex értékű függvény adott ekvivalenciaosztály minden görbéjének képén értelmes, akkor bármely két görbén vett vonalintegrál értéke megegyezik. Vagyis egy f függvény vonalintegráljának értékére tekinthetünk úgy, mint a D -beli szakaszonként folytonosan differenciálható görbék osztálytulajdonsága, ami azért hasznos szemlélet, mert mindig azt a reprezentáns görbét tudjuk választani, ami éppen kapóra jön.

Egy D tartományon értelmezett, komplex értékű, folytonos f függvénynek pontosan akkor létezik primitív függvénye, ha a vonalintegrálja nulla minden D -beli zárt töröttvonalon. A Goursat-lemma egy D tartományon holomorf f függvény kapcsán állítja a következő implikációt. Ha egy irányított háromszög vonal a belsejével együtt D -be esik, akkor ezen a töröttvonalon az f vonalintegrálja nulla. Ennek fontos következménye, hogy egy f holomorf függvénynek minden tartománybeli pont körül létezik lokális primitív függvénye, amiből már kisebb ügyeskedés útján belátható a homotóp görbéken vett vonalintegrálásra vonatkozó állítás, amely a következő tételek alapjául szolgál.

1.1. Tétel. (*Cauchy-alaptétel*)

Ha D egyszeresen összefüggő tartomány, azaz minden D -beli zárt görbe nullhomotóp (egy pontra összehúzható), és f holomorf D -n, akkor minden D -ben fekvő, szakaszonként C^1 , zárt γ görbén:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

1.2. Tétel. (*Cauchy-formula*)

Legyen f holomorf a $B(c, R)$ -nél valamivel nagyobb körlepton. Ekkor bármely $z \in B(c, R)$ pontban teljesül:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

A $|w - c| = R$ alatt pozitív irányítású kört értünk. A formula általánosabb alakjához úgy jutunk, hogy a baloldalra mint $f^{(0)}(z)$ gondolunk, majd n szerinti indukciót alkalmazunk.

1.3. Tétel. (Deriváltakra vonatkozó Cauchy-formula)

Legyen f holomorf a $B(c, R)$ -nál valamivel nagyobb körlapon. Ekkor $B(c, R)$ belsőjében a körlapon akárhányszor differenciálható, és

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-c|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^{(n+1)}} dw$$

A későbbiekben nem csak holomorf függvénnyel lesz dolgunk, hanem előkerülnek az ún. meromorf függvények is. Azonban ehhez tisztáznunk kell az izolált szingularitás fogalmát.

1.4. Definíció. (Izolált szingularitások)

Az $f(z)$ -nek a c pontban izolált szingularitása van, ha f holomorf a c egy $B(c, r)$ pontozott környezetében, de nem értelmes c -ben. Ezen belül:

Az $f(z)$ -nek a c pontban megszüntethető szingularitása van, ha van olyan, c -ben holomorf $g(z)$ függvény, amelyre (c kivételével) $f(z) = g(z)$

Az $f(z)$ -nek a c pontban m -edrendű pólusa van, ha $f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}$, ahol m pozitív egész, $g(z)$ holomorf c -ben és $g(c) \neq 0$.

Az $f(z)$ -nek a c pontban lényeges szingularitása van, ha c nem megszüntethető szingularitás, és nem is pólus.

1.5. Definíció. (Meromorf)

Az $f(z)$ függvény meromorf a D tartományon, ha izolált szingularitások kivételével holomorf, és minden izolált szingularitás pólus. Adott tartományon meromorf függvények testet alkotnak.

1.6. Definíció. (Reziduum)

Legyen $f(z)$ holomorf a c komplex szám egy pontozott környezetében, és itt a Laurent-sora:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

Ekkor az a_{-1} együtthatót az $f(z)$ függvény c pontbeli reziduumának nevezzük, és $\text{Res}(f, c)$ -vel jelöljük

1.7. Megjegyzés. (Együtthatóformula és következménye)

Laurent-sorba fejtséknél az együtthatók kiszámításához ismert a következő formula:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{(z-c)^{(k+1)}} dz$$

Az együttható-formulát a_{-1} -re alkalmazva kapjuk a következő állítást:

Ha $f(z)$ holomorf a $0 < |z - c| < r_0$ körben, akkor bármely $0 < r < r_0$ esetén

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z) dz = \text{Res}(f, c)$$

Habár létezik precízebb kimondása a Reziduumtételnek, amely körüljárási számot használ és általánosabb, azonban a gyakorlatban jobban használható a következő megfogalmazás:

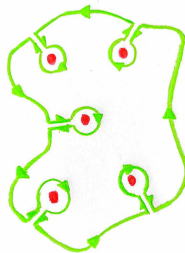
1.8. Tétel. (*Reziduumtétel alkalmazás orientált változata*)

Legyen $f(z)$ $c_1, c_2, \dots, c_n$ izolált szingularitásoktól eltekintve holomorf egy D tartományon, aminek határa egy γ pozitív irányítású Jordan-görbe képe. Ha $f(z)$ γ pontjaiban is holomorf, akkor:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, c_i)$$

Bizonyítás. Válasszunk $\varepsilon > 0$ -t úgy, hogy bármelyik két izolált szingularitás távolsága nagyobb legyen nála, valamint a $C_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c_i| < \varepsilon\}$ ($i = 1, \dots, n$) nyílt körlemezek mind a D tartományba essenek. Jelöljük γ_0 -val a pozitív irányítású γ Jordan-görbe azon módosítottját, amely az izolált szingularitásokat a lenti ábrán látható módon ε -sugarú körívek mentén kikerüli.

Egyrészt a γ_0 görbe már nem ütközik topológiai akadályba, így nullhomotóp. Másrészt a γ_0 görbe felbontható γ görbe és n db negatív irányítású ε -sugarú kör uniójaként, amiből az együtttható-formula ismeretével azonnal adódik az állítás.



□

1.9. Megjegyzés. Megjegyezendő, hogy egy Jordan-görbe belsejének meghatározása korántsem triviális feladat, azonban a későbbiekben ez nem fog problémát okozni.

1.2. A Reziduumtétel alkalmazása $\cos\theta$ és $\sin\theta$ racionális függvényeire

Ha trigonometrikus függvények integrálására kerül sor, akkor a bennünk élő reflex nagy eséllyel az univerzális trigonometrikus helyettesítés irányába sodor minket, ami habár működik, nem biztos, hogy egyszerű algebrai számításokhoz vezet. Ebben a fejezetben a tangens θ -feles helyettesítés méltó kihívójával szélesítjük a repertoárt, amely egy elegánsabb utat kínál $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ alakú integrálok kiszámításához. ([2],[3],[4])

Ha $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ szakaszonként folytonosan differenciálható görbe, és γ képen $f(z)$ folytonos, akkor fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) dt.$$

Az egyenlet jobb oldalát a vonalintegrál paraméterezésének nevezzük. A méltó kihívó arra a kérdésre keresi a választ, hogy melyik vonalintegrál paraméterezése a megadott $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ integrál. Ha megtaláljuk a paraméterezéshez tartozó vonalintegrált, akkor a Reziduumtétel alkalmazásával könnyen kiszámítható annak értéke.

Precízebbé téve és kifejtve az eddigieket, vizsgáljuk a következő alakú integrálokat:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

ahol:

(1) $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ racionális törtfüggvény

(2) az egység körvonal pontjaiban $Q \neq 0$

Vegyük észre, hogy az alábbi körintegrál paraméterezéséről van szó:

$$\int_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz,$$

ahol a paraméterezés nem más, mint:

$$z(\theta) = e^{i\theta} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

hiszen ekkor:

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta, \quad \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta,$$

amely helyettesítéssel valóban visszkapjuk az eredeti integrált.

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos\theta + 2\sin\theta} d\theta$$

Megoldás: Ez az integrál a következő vonalintegrál paraméterezése:

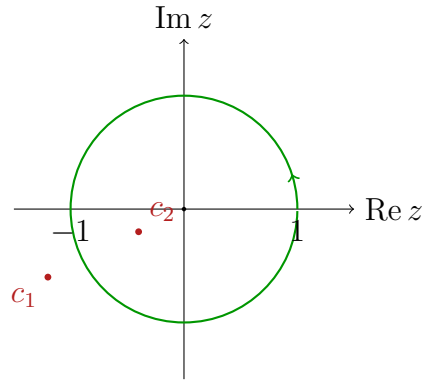
$$\int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{z+z^{-1}}{2} + 2 \cdot \frac{z-z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{1}{iz} dz$$

Hozzuk az integrandust szebb alakra:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3 + \frac{z+z^{-1}}{2} + 2 \cdot \frac{z-z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{1}{iz} = \frac{-i}{3z + \frac{z^2+1}{2} - iz^2 + i} = \frac{-2i}{6z + z^2 + 1 - 2iz^2 + 2i} = \\ &= \frac{-2i}{(1-2i)z^2 + 6z + 1 + 2i} = \frac{-2i}{(1-2i)(z + (1+2i))(z + \frac{1}{5}(1+2i))}, \end{aligned}$$

Ebből már megállapítható, hogy az integrandusnak két elsőrendű pólusa van:

$$c_1 = -2 - i \quad c_2 = \frac{-2-i}{5}$$



Azonban csak a c_2 esik az egységkör belsejében, így elég csak ebben a pontban megnézni a reziduumot, ami:

$$\text{Res}(f, c_2) = \left. \frac{-2i}{(1-2i)(z + (1+2i)) \left(z + \frac{1}{5}(1+2i)\right)'} \right|_{z=c_2} = -\frac{2i}{4}$$

Vagyis:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \cos\theta + 2\sin\theta} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{z+z^{-1}}{2} + 2 \cdot \frac{z-z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{1}{iz} dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{2i}{4}\right) = \pi$$

1.3. A Reziduumtétel alkalmazása valós improprius integrálokra

Ebben a fejezetben olyan reziduum-alapú integrálási módszerünkkel ismerkedünk meg, melyek különböző esetekben alkalmazhatók, de közös gondolatuk, hogy a valós improprius integrálra úgy tekintenek, mint komplex vonalintegrál, abból a megfontolásból, hogy a Reziduumtételt alkalmazva mindössze néhány reziduum kiszámítására egyszerűsödjön a probléma, amely már egy gyors, algoritmikus művelet. ([2],[3],[4],[5],[6])

Mindegyik módszer ismertetése után alkalmazzuk is a módszert egy konkrét példán, hogy a mintamegoldás közelebb vigye az olvasót a módszer lényegének megértéséhez, valamint a technika magabiztos alkalmazásához.

Az izolált szingularitások döntő többségben valahányad rendű pólusok lesznek, ezért a számolások érdekében elevenítsük fel most azt a formulát, amely m -edrendű pólusoknál számítja ki a reziduumot:

$$\text{Res}(f, c) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow c} [(z-c)^m \cdot f(z)]^{(m-1)}$$

A képlet a következő gondolatmenetet sűríti magába. Ha az f meromorf függvénynek a c pontban m -edrendű pólusa van, akkor a megfelelő feltételek mellett a következő alakba írható:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}$$

A $g(z)$ függvény hatványsorba fejthető, így $f(z)$ c körüli Laurent-sora a $-m$. tagtól indul, és a -1 . tag együtthatóját szeretnénk megtudni. Ehhez először is definiáljunk egy h segédfüggvényt.

$$h_0(z) = (z-c)^m \cdot f(z)$$

Legyen $h_0(z)$ holomorffá tétele $h_1(z)$, amelynek c körüli hatványsorának $(m-1)$. tagjának együtthatója épp a $\text{Res}(f, c)$. A $h_1(z)$ hatványsor $(m-1)$. tagjának együtthatóját úgy kapjuk, ha $(m-1)$ -szer deriváljuk a sort, majd korrigáljuk a $\frac{1}{(m-1)!}$ tényezővel.

1.3.1. Első metódus: félkörön vett integrál

Az első metódus az alábbi típusú improprius integrálokra használható

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx$$

ahol:

- (1) f két polinom hányadosa: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- (2) $Q(x)$ polinom foka legalább kettővel nagyobb, mint $P(x)$ polinom foka
- (3) $Q(x)$ polinomnak nincsen valós gyöke.

Segédfüggvényt két szempont alapján választunk a pozitív irányítású felső félkörhöz. Az első, hogy olyat szeretnénk választani, amelynek a félköríven vett vonalintegrálja eltűnik, amint R -rel tartunk végtelenbe. A második, hogy a valós integrandus "látható" maradjon benne. Ennek a mércének habár $f(z)$ még megfelel, de az $f(z)\cos z$ és az $f(z)\sin z$ már nem, mivel $\operatorname{Im}(z)$ -re mindkét trigonometrikus függvény abszolútértéke exponenciálisan elszáll. Ezért az első típusra $f(z)$ -t, a másik két típusra viszont a $g(z) = f(z) \cdot e^{iz}$ függvényt választjuk, mivel e^{iz} már lecseng $\operatorname{Im}(z) \rightarrow \infty$ esetén, és a "láthatóságnak" is eleget tesz: $\operatorname{Re}(e^{iz}) = \cos z$, $\operatorname{Im}(e^{iz}) = \sin z$

Az $f(z)$ és a $g(z) = f(z) \cdot e^{iz}$ függvénynek is véges sok izolált szingularitása van, melyek egyike sem esik a valós tengelyre. A (2) feltétel garantálja, hogy az R -sugarú, pozitív irányítású γ felső félkör jó választás görbének, mivel a Γ -val jelölt félkörív részén $R \rightarrow \infty$ esetén mindkét segédfüggvénnyel vett vonalintegrál eltűnik.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{konstans}}{R^2} \right) R\pi = 0$$

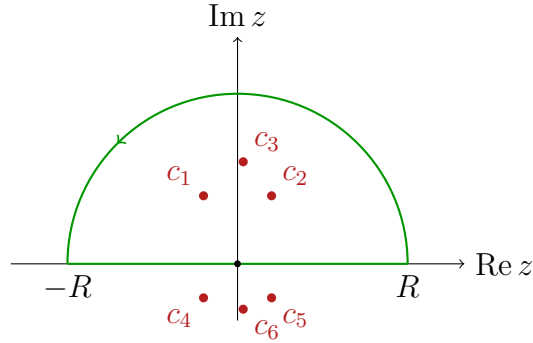
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} g(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{konstans}}{R^2} \cdot |e^{iz}| \right) R\pi = 0$$

És így a valós tengelyre koncentrálódik a vonalintegrál értéke, ami épp az improprius integrál. A Reziduúmtételt e mellé véve adódik, hogy:

$$2\pi i \sum_{\substack{c \in \mathbb{C} \\ Q(c)=0 \\ \operatorname{Im}(c)>0}} \operatorname{Res}(f, c) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

$$2\pi i \sum_{\substack{c \in \mathbb{C} \\ Q(c)=0 \\ \text{Im}(c)>0}} \text{Res}(g, c) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx$$

A módszer szemlélete, hogy a zöld félkör R függvényében növekedve bekebelezi az összes felső félsíkba eső pólust, és közben a félköríven vett vonalintegrál értéke eltűnik:



1.10. Megjegyzés. Ha $f(x)$ az első módszerben tárgyalt integrandus még páros is, akkor:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

egyenlőséget kihasználva visszavezethető a $\int_0^{\infty}$ alakú integrál $\int_{-\infty}^{\infty}$ alakú integrálra.

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi két integrált!

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 - 2x + 2} dx \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 - 2x + 2} dx$$

Megoldás: Legyen a segédfüggvényünk:

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 2z + 2}$$

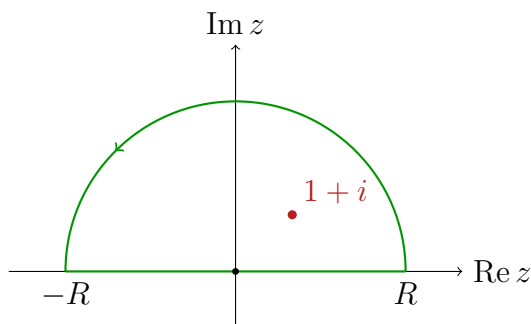
És legyen a γ görbe az R sugarú, pozitív irányítású felső félkör, aminek félkörívét részét jelöljük Γ -val. A Γ -n eltűnik az integrál értéke $R \rightarrow \infty$ esetén:

$$\forall z \in \Gamma \quad |f(z)| \leq \frac{1}{R^2 - 2R - 2} \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^2 - 2R - 2} \cdot R\pi = 0$$

Így a valós tengelyre koncentrálódik a vonalintegrál értéke:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 - 2x + 2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2 - 2x + 2} dx$$

A felső félsíkra eső pólus: $1 + i$



Reziduúmtétel:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(g, 1 + i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{i(1+i)}}{2(1+i) - 2} = \pi \cdot e^{-1+i} = \frac{\pi}{e} (\cos 1 + i \sin 1)$$

Vagyis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx = \frac{\pi}{e} \cos 1 + i \frac{\pi}{e} \sin 1$$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi I integrált!

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2 + 1} dx$$

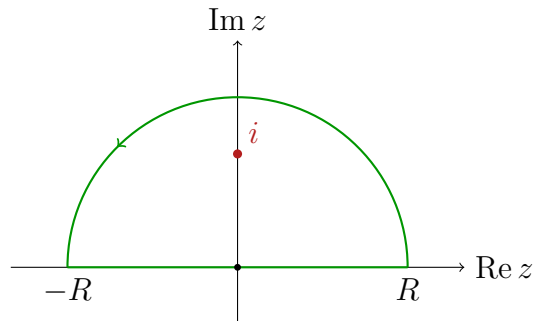
Megoldás: Az integrálás során gyakran használt, $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$, összefüggést kihasználva válasszuk a $g(z) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2iz}}{z^2 + 1}$ -t segédfüggvénynek. És legyen a γ görbe az R sugarú, pozitív irányítású felső félkör, aminek félkörív részét jelöljük Γ -val. A Γ -n eltűnik a vonalintegrál $R \rightarrow \infty$ esetén:

$$\forall z \in \Gamma \quad |g(z)| \leq \frac{1}{R^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} g(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^2 - 1} \cdot R\pi = 0$$

Így a vonalintegrál értéke a valós tengelyre koncentrálódik:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} g(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)}{x^2 + 1} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\sin(2x)}{x^2 + 1} dx$$

A felsőfélsíkra eső pólus: i



Reziduúmtétel:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(g, i) = 2\pi i \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}}{2i} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2})$$

Vagyis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)}{x^2 + 1} dx - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\sin(2x)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2}) + i \cdot 0$$

Azaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2})$$

1.3.2. Második metódu: módosított félkörön vett integrál

A második metódu az elsőnek az általánosítása. Az alábbi típusú integrálokra alkalmazható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos^k x \, dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin^k x \, dx$$

ahol:

- (1) f két polinom hányadosa: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- (2) $Q(x)$ polinom fok legalább kettővel nagyobb, mint $P(x)$ polinom fok
- (3) $Q(x)$ minden valós gyöke legfeljebb k -szoros és egyúttal a $\cos x$ ($\sin x$) gyöke is.

Az első metódunál láttuk, hogy a trigonometrikus függvények helyett e^{iz} -t kell bevetnünk a félköríven való viselkedés okán, ez most sem lesz másképp. A $\cos^k x$ ($\sin^k x$) Fourier-sora segítségével fogjuk $g(z) = f(z) \cdot \sum_{n=0}^k a_n e^{inz}$ segédfüggvény szumma tényezőjének együtthatóit meghatározni. A $g(z)$ nem csak, hogy eltűnik a félköríven, hanem "látható" marad benne a valós integrandus.

Tehát a segédfüggvény az alábbi alakokat ölti:

$$\cos^k x \text{ esetén: } g(z) = f(z) \cdot \sum_{j=0}^k \widehat{\cos^k}(j) e^{ijz}$$

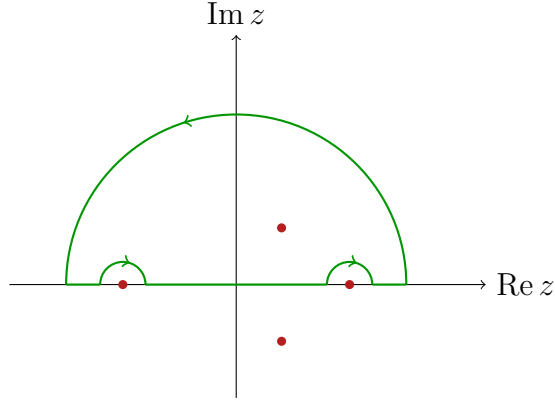
$$\sin^k x \text{ esetén: } g(z) = f(z) \cdot \sum_{j=0}^k \widehat{\sin^k}(j) e^{ijz}$$

A $g(z)$ függvénynek véges sok izolált szingularitása van, a valós tengelyre eső izlált szingularitásai legfeljebb k -adrendű pólusok. A γ R -sugarú, pozitív irányítású felső félkört annyival módosítjuk, hogy a valós izolált szingularitásokat kis ε -sugarú félkörívvel kikerüljük, amire azért van szükség, hogy értelmes legyen $g(z)$ vonalintegrálja. A módosított görbét jelöljük γ' -vel.

A (2) feltétel garantálja, hogy $R \rightarrow \infty$ esetén γ' görbe félkörív részén eltűnik a $g(z)$ vonalintegrálja.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma'} g(z) \, dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{konstans}}{R^2} \cdot \sum_{j=0}^k |a_n| \right) R\pi = 0$$

Ami az ε -sugarú félkörívket illeti nem a $g(z)$ függvényt integráljuk ki rajtuk, hanem $g(z)$ -nek az adott valós pólus körüli Laurent-sorát, aminek felírása kellően mechanikus. Ennek részleteit majd egy konkrét példán keresztül nézzük meg.



1.11. Megjegyzés. A segédfüggvény előállításához szükséges Fourier- sorfejtés:

$$\begin{aligned}\cos^k x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^k \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} e^{ix(2j-k)} \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\cos((2j-k)x) + i \sin((2j-k)x))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos^k x = \begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ páratlan}}}^k \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{j} \cos(jx), & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ páros}}}^k \frac{1}{2^{k-1}} \binom{k}{j} \cos(jx), & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sin^k x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^k \\ &= \frac{1}{(2i)^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} e^{ix(2j-k)} \\ &= \frac{1}{(2i)^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (\cos((2j-k)x) + i \sin((2j-k)x))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin^k x = \begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ páratlan}}}^k \frac{2}{(2i)^k} \binom{k}{j} (-1)^{\frac{j-1}{2}} \sin(jx), & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ páros}}}^k \frac{2}{(2i)^k} \binom{k}{j} (-1)^{\frac{j}{2}} \cos(jx), & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}$$

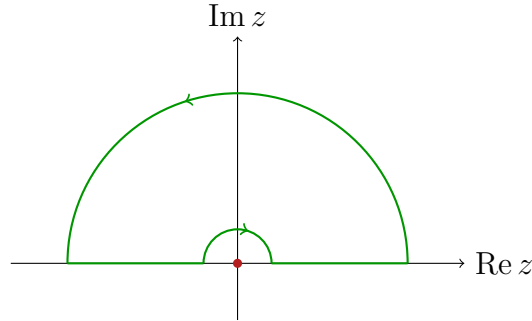
4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$$

Megoldás: A $g(z)$ segédfüggvényünk itt a következő:

$$g(z) = \frac{\frac{3}{4}e^{iz} - \frac{1}{4}e^{i3z}}{z^3},$$

amelynek csak a $c = 0$ ponban van izolált szingularitása, így a γ pozitív irányítású R -sugarú felső félkörívet úgy módosítjuk γ' -vé, hogy a valós pólust egy kis ε -sugarú negatív irányítású félkörívvel kikerüljük.



Mivel nincs több szingularitása $g(z)$ -nek:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma'} \frac{\frac{3}{4}e^{iz} - \frac{1}{4}e^{i3z}}{z^3} dz = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\frac{3}{4}e^{iz} - \frac{1}{4}e^{i3z}}{z^3} dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\frac{3}{4}e^{ix} - \frac{1}{4}e^{i3x}}{x^3} dx + \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{\frac{3}{4}e^{iz} - \frac{1}{4}e^{i3z}}{z^3} dz + \int_{\varepsilon}^R \frac{\frac{3}{4}e^{ix} - \frac{1}{4}e^{i3x}}{x^3} dx \end{aligned}$$

A Γ félköríven $R \rightarrow \infty$ esetén eltűnik a $g(z)$ vonalintegrálja

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\Gamma} g(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^3} R\pi = 0 \implies \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} g(z) dz = 0$$

A Γ_{ε} félköríven $g(z)$ helyett a $g(z)$ 0 körüli Laurent-sorát integráljuk ki, ami a számláló rendezése után:

$$\frac{3}{4}e^{iz} - \frac{1}{4}e^{i3z} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}i - \frac{3}{4}i\right)z + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{(i)^2}{2!} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(3i)^2}{2!}\right)z^2 + h(z) \cdot z^3$$

a következő alakot ölti:

$$\frac{\frac{3}{4}e^{iz} - \frac{1}{4}e^{i3z}}{z^3} = \frac{1}{2z^3} + \frac{3}{4z} + h(z),$$

ahol $h(z)$ holomorf függvény. A Laurent-sort használva:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\frac{3}{4}e^{iz} - \frac{1}{4}e^{i3z}}{z^3} dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2z^3} dz + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{3}{4z} dz + \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z) dz$$

Parametrizáció segítségével azt kapjuk, hogy:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2z^3} dz = -\frac{1}{2\varepsilon^3} \int_0^\pi e^{-3i\theta} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = -\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^\pi \cos 2\theta - \sin 2\theta d\theta = 0$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{3}{4z} dz = -\frac{3i}{4} \int_0^\pi 1 d\theta = -\frac{3i\pi}{4}$$

Valamint a 0 egy kis környezetében $h(z) < K$ konstans, amiből adódik, hogy:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z) dz \right| < \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K\pi\varepsilon = 0 \implies \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} h(z) dz = 0$$

Vagyis:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} g(z) dz = 0 - \frac{3i\pi}{4} + 0 = -\frac{3i\pi}{4}$$

Mindezekből következik, hogy $\varepsilon \rightarrow 0$ és $R \rightarrow \infty$ esetén:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\frac{3}{4}e^{ix} - \frac{1}{4}e^{i3x}}{x^3} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\frac{3}{4}e^{ix} - \frac{1}{4}e^{i3x}}{x^3} dx \longrightarrow \frac{3i\pi}{4}$$

Ami azzal ekvivalens $\operatorname{Im} \left(\frac{\frac{3}{4}e^{ix} - \frac{1}{4}e^{i3x}}{x^3} \right) = \frac{\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}{x^3}$ miatt, hogy:

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}{x^3} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}{x^3} dx \longrightarrow \frac{3\pi}{4}$$

Azaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x}{x^3} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{4}$$

1.3.3. Harmadik metódu: szögtartományon vett integrál

A harmadik metóduban az alábbi alakú integrálokkal dolgozunk:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} \cdot \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

ahol:

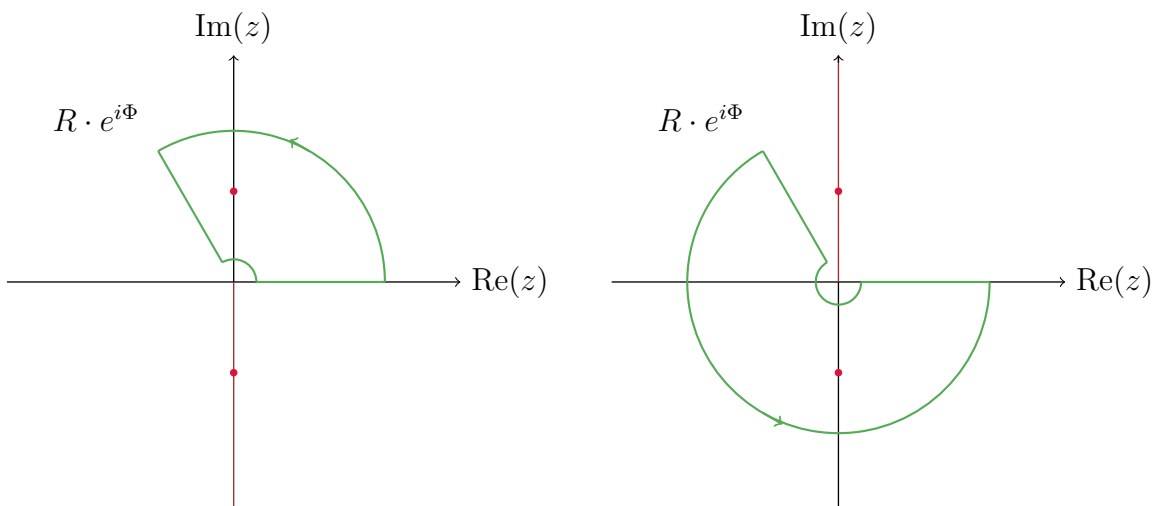
(1) $-1 < \alpha < 0$ valós szám

(2) $P(x)$ és $Q(x)$ polinomok, valamint $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$

A metódual egy konkrét példán keresztül ismerkedünk meg. Fontos észben tartanunk, hogy az argumentumot nem tudjuk az egész komplex síkon folytonosan értelmezni, így a komplex logaritmus értéke függ az adott nullát nem tartalmazó, egyszeresen összefüggő tartománytól.

5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{-1/5}}{1+x^2} dx$$



$$f_1(z) = \frac{z^{-1/5}}{1+x^2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}\right) \quad f_2(z) = \frac{z^{-1/5}}{1+x^2} \quad \left(\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{5\pi}{2}\right)$$

A Φ szöget úgy választjuk, hogy a 0-ból induló $R \cdot e^{i\Phi}$ -be érkező szakasz ne menjen át a nevező zérushelyein. Jelöljük a baloldali görbét γ_1 -gyel, a jobboldali görbét pedig γ_2 -vel. Reziduumszámítás alapján:

$$\int_{\gamma_1} f_1(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, i) = 2\pi i \frac{i^{-\frac{1}{5}}}{2i} = \pi e^{-\frac{1}{5}(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})} = \pi e^{-i\frac{\pi}{10}}$$

$$\int_{\gamma_2} f_2(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -i) = 2\pi i \frac{(-i)^{-\frac{1}{5}}}{-2i} = -\pi e^{-\frac{1}{5}(\ln 1 + i\frac{3\pi}{2})} = -\pi e^{-i\frac{3\pi}{10}}$$

Legyen Γ_1 , illetve Γ_2 a görbék ferde egyenes részei, a következő összefüggésből:

$$\int_{\Gamma_1} f_1(z) dz + \int_{\Gamma_2} f_2(z) dz = 0$$

következik az alábbi egyenlőség:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f_1(z) dz + \int_{\gamma_2} f_2(z) dz &= \int_{\epsilon}^R f_1(z) dz - \int_{\epsilon}^R f_2(z) dz + \int_{\Gamma_R^1} f_1(z) dz + \int_{\Gamma_{\epsilon}^1} f_1(z) dz \\ &\quad + \int_{\Gamma_R^2} f_2(z) dz + \int_{\Gamma_{\epsilon}^2} f_2(z) dz \end{aligned}$$

Az eddigiekhez hasonlóan a triviális becslés segítségével belátható, hogy a Γ_R^1 , Γ_R^2 , Γ_{ϵ}^1 és Γ_{ϵ}^2 görbéken az integrálok eltűnnek, amint $R \rightarrow \infty$ vagy $\epsilon \rightarrow 0$. Ez azt jelenti, hogy:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^R f_1(x) dx - \int_{\epsilon}^R f_2(x) dx \right] &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^R f_1(x) - f_2(x) dx \right] = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^R \frac{1}{1+x^2} \left(e^{-\frac{1}{5} \ln x} - e^{-\frac{1}{5}(\ln x + 2\pi i)} \right) dx \right] = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^R \frac{x^{-\frac{1}{5}}}{1+x^2} dx \right] \cdot (1 - e^{-\frac{2\pi i}{5}}) = \pi e^{-i\frac{\pi}{10}} + (-\pi e^{-i\frac{3\pi}{10}}) \end{aligned}$$

Majd az utolsó egyenlőségből egy osztás és egy technikai szorzótényező odacsempészése után:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{5}}}{1+x^2} dx = \frac{\pi e^{-i\frac{\pi}{10}} + -\pi e^{-i\frac{3\pi}{10}}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{5}}} \cdot \frac{e^{\frac{\pi i}{5}}}{e^{\frac{\pi i}{5}}} = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

1.3.4. Negyedik módszer: kulcslyukon vett integrál

A negyedik módszer az alábbi típusú integrálokra alkalmazható:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx, \quad \int_0^{\infty} f(x) \cdot \log^k(x) dx \quad k = 1, 2, \dots$$

ahol:

- (1) Véges sok izolált szingularitás kivételével, melyek egyike sem fekszik a nemnegatív valós félegyenesen, $f(z)$ holomorf az egész komplex síkon; és
- (2) $z \rightarrow \infty$ esetén:

$$f(z) = O(z^{-2})$$

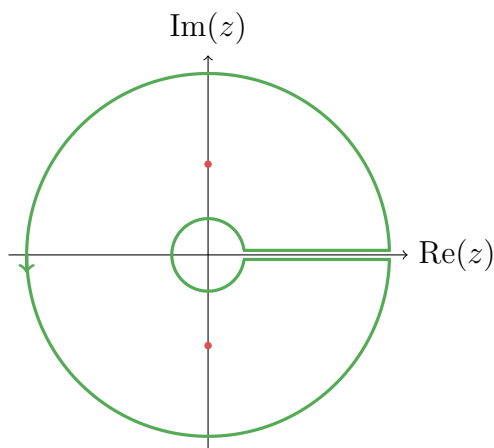
Ez a két feltétel garantálja az integrál abszolút konvergenciáját.

6. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált!

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log^k(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Megoldása: Az ábrán látható γ kulcslyuk görbén fogunk integrálni, amely választásra azért kerül sor, hogy a logaritmus függvényt folytonosan tudjuk értelmezni. A γ kulcslyukgörbe négy egymás után illesztett görbéből áll:

$\Gamma_p(t) = t,$	$t \in [\varepsilon, R]$	(pozitív valós tengely mentén kifelé)
$C_R(t) = R \cdot e^{it},$	$t \in [0, 2\pi]$	(nagy körív az origó körül)
$\Gamma_n(t) = R - t,$	$t \in [0, R - \varepsilon]$	(vissza a valós tengely alatt)
$C_\varepsilon(t) = \varepsilon \cdot e^{-it},$	$t \in [0, 2\pi]$	(kis körív, visszaindulás az átvágás alatt)



Nézzük meg a $k = 1$ esetet, majd annak általánosításra vonatkozó megérzésünket csak utána igazoljuk. Ebben az esetben az integrandus komplex kiterjesztésére a reflexszerű jelöltünk:

$$f(z) = \frac{\log(z)}{(z^2 + 1)^2}$$

függvény, amivel ha a Γ_p és Γ_n görbéken vett vonalintegrál összeget nézzük, akkor nem jelenik meg benne a valós integrandus számlálója:

$$\int_{\Gamma_p} \frac{\log(z)}{(z^2 + 1)^2} dz + \int_{\Gamma_n} \frac{\log(z)}{(z^2 + 1)^2} dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{\log(x)}{(x^2 + 1)^2} dx + \int_R^{\varepsilon} \frac{\log(x) + i \cdot 2\pi}{(x^2 + 1)^2} dx = -i \int_{\varepsilon}^R \frac{2\pi}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Így új jelölt után kell nézzünk. Az nem kérdés, hogy amentén kell ötletelnünk, hogy a $\log(x)$ valamilyen jól kezelhető formában jelenjen meg a számlálóban, amikor Γ_p és Γ_n görbéken vett vonalintegrálokat összeadjuk. Így jön szóba tehát az:

$$f(z) = \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2}$$

integrandus jelölt, amellyel tehát megjelenik a $\log(x)$ a számlálóban:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_p} \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2} dz + \int_{\Gamma_n} \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2} dz &= \int_{\varepsilon}^R \frac{\log^2(x)}{(x^2 + 1)^2} dx + \int_R^{\varepsilon} \frac{(\log(x) + i \cdot 2\pi)^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \\ &= -4\pi i \int_{\varepsilon}^R \frac{\log(x)}{(x^2 + 1)^2} dx + -4\pi^2 \int_{\varepsilon}^R \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \end{aligned}$$

Mielőtt rátérnénk a reziduum kiszámítására, lássuk be, hogy a C_R és C_{ε} kontúrokon eltűnik a vonalintegrál, amint $R \rightarrow \infty$ és $\varepsilon \rightarrow 0$. Mert ha ez igaz, akkor:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_p} \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_n} \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2} dz = \\ &= 2\pi i \cdot (\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i)) \end{aligned}$$

Kezdjük a C_R kontúrral. Keresünk egy $M(R)$ konstanst, ami C_R kontúr pontjaiban majorálja az integrandust.

$$\forall z \in C_R : \quad \left| \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2} \right| \leq M(R) \implies \left| \int_{C_R} \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \leq M(R) \cdot 2\pi R$$

A számláló szuprénumát és a nevező alsóbecslését véve kapjuk:

$$M(R) = \frac{\log^2(R) + (2\pi)^2}{(R^2 - 1)^2}$$

ráadásul $R \rightarrow \infty$ esetén $2\pi R \cdot M(R) \rightarrow 0$, amiből következik az eltűnés. A C_ε kontúron való eltűnés belátása teljesen mechanikus. Akarjuk, hogy:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2} dz = 0$$

Ami az alábbi becslésből azonnal látszik:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\varepsilon} \frac{\log^2(z)}{(z^2 + 1)^2} dz \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\log^2(\varepsilon \cdot e^{-it})}{(\varepsilon^2 \cdot e^{-i2t} + 1)^2} \cdot (-i\varepsilon) \cdot e^{-it} \right| dt = \varepsilon \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(\log \varepsilon)^2 + (-t)^2}{|1 + \varepsilon^2 e^{2it}|^2} dt \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \int_0^{2\pi} \frac{(\log \varepsilon)^2 + t^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} dt \rightarrow 0 \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Az $f(z)$ izolált szingularitásai i és $-i$, mindketten másodrendű pólusok, így a már megismert képletünket használva:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \frac{1}{(2-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow i} [(z-i)^2 \cdot f(z)]^{(2-1)} \Big|_{z=i} = \lim_{z \rightarrow i} \left[(z-i)^2 \frac{\log^2(z)}{(z+i)^2 \cdot (z-i)^2} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\left(\frac{\log(z)}{(z+i)} \right)^2 \right]' = \lim_{z \rightarrow i} 2 \cdot \left(\frac{\log(z)}{(z+i)} \right) \cdot \frac{\frac{1}{z} \cdot (z+i) - \log(z)}{(z+i)^2} = 2 \cdot \left(\frac{i \cdot \frac{\pi}{2}}{(i+i)} \right) \cdot \frac{\frac{1}{i} \cdot (i+i) - i \cdot \frac{\pi}{2}}{(i+i)^2} \\ &= -\frac{\pi}{4} + i \frac{\pi^2}{16} \end{aligned}$$

Ugyanezzel a képlet segítségével megkapjuk a másik reziduumot is:

$$\text{Res}(f, -i) = \frac{3\pi}{4} + i \frac{9\pi^2}{16}$$

Vagyis:

$$-4\pi i \int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2 + 1)^2} dx + -4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i \cdot \left(\left(-\frac{\pi}{4} + i \frac{\pi^2}{16} \right) + \left(\frac{3\pi}{4} + i \frac{9\pi^2}{16} \right) \right)$$

Két komplex szám egyenlő, ha a valós és a képzetes részük megegyezik:

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$$

Térjünk rá a feladat k szerinti általánosítására. Vezessük be a következő jelölést:

$$I_k = \int_0^{\infty} \frac{\log^k(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Ha az I_k valós improprius integrált szeretnénk kiszámolni, akkor az

$$f(z) = \frac{\log^{(k+1)}(z)}{(x^2 + 1)^2}$$

függvényre lesz szükségünk. Azaz a számlálóban lévő $\log(z)$ kitevője $k + 1$ kell legyen, ha I_k értékét akarjuk kiszámolni.

$$2\pi i ((\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i))) = \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{\log^{k+1}(z)}{(z^2 + 1)^2} dz =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\log^{k+1}(x)}{(x^2 + 1)^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{(\log(x) + i2\pi)^{k+1}}{(x^2 + 1)^2} dx + 0 + 0 = - \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} (2\pi i)^j \int_0^{\infty} \frac{\log(x)^{k+1-j}}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Amiből a következő rekurziós képletet nyerjük:

$$I_k = \frac{-1}{(k+1)(2\pi i)} \cdot \left[2\pi i ((\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, -i))) + \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} (2\pi i)^j \int_0^{\infty} \frac{\log(x)^{k+1-j}}{(x^2 + 1)^2} dx \right]$$

1.3.5. Fresnel-integrálok

Azonban vannak olyan integrálok, amelyeket az eddig megismert metódusok egyikével sem tudunk kiszámítani. A következő integrálpár ilyen lesz, amely ráadásul a fényinterferencia jelenség vizsgálatakor is előbukkant. Nevét Augustin-Jean Fresnelről kapta.

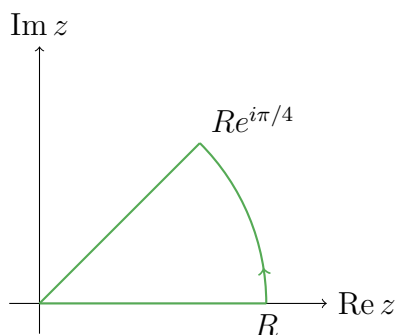
7. Feladat. Számítsuk ki a híres Fresnel-integrálokat!

$$I_1 = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx \quad I_2 = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$$

A komplex síkon azok a $z = t \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ pontok, amelyekre teljesül, hogy $z^2 = it^2$, a 45 fokos egyenesen helyezkednek el.

Használjuk az $f(z) = e^{-z^2}$ egész síkon holomorf függvényt! A γ görbe γ_1, γ_2 és γ_3^- egymás után fűzéséből álljon, ahol:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t, & t &\in [0, R], \\ \gamma_2(t) &= Re^{it}, & t &\in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \gamma_3(t) &= te^{i\frac{\pi}{4}}, & t &\in [0, R] \end{aligned}$$



Bontsuk fel a vonalintegrált:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_3} f(z) dz.$$

A Cauchy-alaptétel szerint:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Számoljuk ki a három integrált, majd tartsunk R -rel a végtelenbe! A γ_1 -re vett integrál $R \rightarrow \infty$ esetén a Gauss-integrál:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(z) dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Számítsuk ki γ_2 -re vett integrált:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} f(z) dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(\gamma_2(t))^2} \cdot \gamma_2'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos(2t)+i\sin(2t))} \cdot iRe^{it} dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2t)} \cdot e^{i(-R^2 \sin(2t)+t)} \cdot iR dt. \end{aligned}$$

Az abszolútérték-bebecslés:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2t)} \cdot e^{i(-R^2 \sin(2t)+t)} \cdot iR dt \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} R \cdot e^{-R^2 \cos(2t)} \cdot \left| e^{i(-R^2 \sin(2t)+t)} \right| dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} R \cdot e^{-R^2 \cos(2t)} dt. \end{aligned}$$

Habár kínálkozik a L'Hospital szabály, de vegyük észre, hogy nem lehet a határértéket az integrállal felcserélni, mivel az integrandus nem egyenletesen folytonos a $[a, \frac{\pi}{4}]$ intervallumon. A következőt becsléssel orvosoljuk a fennálló problémát:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} R \cdot e^{-R^2 \cos(2t)} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot e^{-R^2 \cos(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot e^{-R^2 \sin(\theta)} d\theta \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cdot e^{-R^2 \frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{R^2} R \cdot e^{-u} \cdot \frac{\pi}{2R^2} du = \frac{\pi}{4R} \int_0^{R^2} e^{-u} du \leq \frac{\pi}{4R} \end{aligned}$$

így:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} R \cdot e^{-R^2 \cos(2t)} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4R} = 0$$

ami azt jelenti, hogy:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$$

Számítsuk ki γ_3 -re vett integrált:

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_0^R e^{-(\gamma_3(t))^2} \cdot \gamma_3'(t) dt = \int_0^R e^{-t^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} dt = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \int_0^R e^{-it^2} dt$$

Határértéket véve:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} f(z) dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-it^2} dt$$

Cauchy-alaptételt és a görbe menti integrálokat összerakva:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_3} f(z) dz = 0 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-it^2} dt \end{aligned}$$

Egy osztás után a Fresnel-integrálok értéke:

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

1.4. A Reziduumtétel következményei

1.12. Definíció. (Logaritmikus derivált)

Legyen $f(z)$ meromorf egy D tartományon. Ekkor az f logaritmikus deriváltja alatt a következőt értjük:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

1.13. Megjegyzés. A logaritmikus derivált jól kezelhető.

- Ha f holomorf c -ben és $f(c) \neq 0$, akkor $\frac{f'(z)}{f(z)}$ holomorf c -ben, így $\text{Res}(\frac{f'}{f}, c) = 0$
- Ha f -nek m -szeres gyöke van c -ben, akkor $\frac{f'(z)}{f(z)}$ -nek c -ben elsőrendű pólusa van, és $\text{Res}(\frac{f'}{f}, c) = m$
- Ha f -nek m -szeres pólusa van c -ben, akkor $\frac{f'(z)}{f(z)}$ -nek c -ben elsőrendű pólusa van, és $\text{Res}(\frac{f'}{f}, c) = -m$

1.14. Tétel. (Argumentumelv)

Legyen $f(z)$ meromorf a D tartományon, és legyen γ pozitív irányítású, szakaszonként C^1 egyszerű zárt görbe, amely a belsejével együtt D -ben fekszik úgy, hogy nem megy át $f(z)$ gyökeinek és pólusain. Jelöljük Z -vel és P -vel $f(z)$ gyökeinek és pólusainak számát γ belsejében multiplicitással.

Ekkor:

$$Z - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Bizonyítás. A logaritmikus derivált szép tulajdonsága miatt $Z - P$ semmi más, mint γ belsejében lévő pontokban vett reziduumok összege, amivel az integrál is egyenlő a Reziduumtétel miatt. $\square$

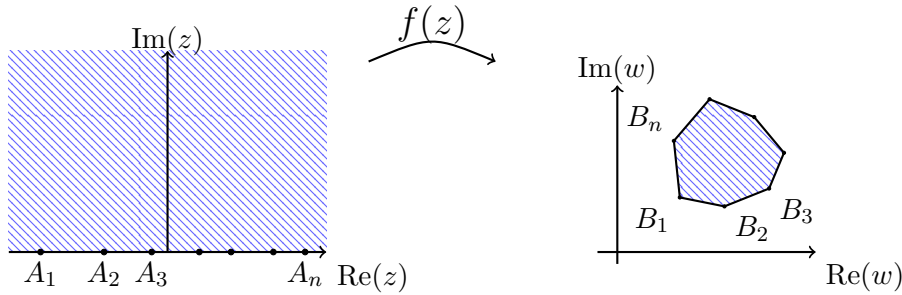
1.15. Tétel. (Lokális értékelosztás tétel)

Legyen $f(z)$ holomorf az a pontban, és tegyük fel, hogy $f^{(j)}(a) = 0$ minden $j = 0, 1, \dots, k-1$ esetén, továbbá $f^{(k)}(a) \neq 0$. Ekkor létezik $\delta_0 > 0$ úgy, hogy minden $0 < \delta \leq \delta_0$ esetén létezik $\varepsilon > 0$, amelyre teljesül, hogy az $f(z) = b$ egyenletnek pontosan egy megoldása van a $B(a, \delta)$ környezetben, mégpedig $z = a$, és ez k -szoros gyök, és bármely $w \in \dot{B}(b, \varepsilon)$ esetén az $f(z) = w$ egyenletnek pontosan k különböző megoldása van a $B(a, \delta)$ környezetben, és ezek mind egyszeres gyökök.

2. Schwarz-Christoffel formula

Az alábbi jegyzetekre támaszkodunk: [7], [8], [9]

A Riemann-alaptétel következménye, hogy bármely két, a teljes komplex síktól különböző, egyszeresen összefüggő tartomány konform ekvivalens, azaz konform módon leképezhető egyik a másikra. Sok tartomány elemi függvények kompozíciójaként ráképezhető az egységgörre, ellenben a sokszögtartományra való leképezés már összetettebb konstrukciót igényel. A most következőkben megismerkedünk a Schwarz-Christoffel formulával, melynek segítségével a felső félsík egy sokszögtartományra képezhető le konform módon.



A formula részletes leírása megtalálható Halász Gábor Bevezető a komplex függvénytan jegyzetében, így célunk nem egy precíz másolat, hanem annak nagyvonalakban történő összefoglalása, rálátást segítő értelmezése. A Schwarz-tükrözési elv központi szerepet játszik majd a formula meghatározásában, ezért elevenítsük fel, mielőtt belevágnánk a levezetésbe.

2.1. Tétel. (Schwarz-tükrözési elv)

Legyen D tartomány a felső félsíkban, amelynek a határa tartalmazza az I intervallumot, és legyen D' a D tükrösképe a valós tengelyre. Tegyük fel, hogy f holomorf D -n, folytonos $D \cup I$ -n, és I pontjaiban teljesül, hogy $\text{Im } f = 0$. Ekkor f holomorf módon kiterjeszthető a $D_1 := D \cup I \cup D'$ tartományra úgy, hogy $\forall z \in D'$ esetén

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Azt az esetet nézzük, amikor az $f(\infty)$ nem csúcsba megy, tehát ekkor a sokszögtartomány csúcsainak $f(z)$ általi ősképei mind valós számok, melyek a valós tengely egy felosztását adják. A felosztás tetszőleges nyílt intervallumát jelöljük I -vel. Az $f(z)$ függvény a tükrözési elv természetes általánosítása segítségével holomorfán kiterjeszthető az alsó félsíkra külön-külön mindegyik I intervallumon át a sokszög pontjainak $f(I)$ egyenesére való tükrözésével. Majd a kiterjesztést az alsó félsíkra megszorítva újra kiterjesztjük bármelyik másik I intervallumon át a felső félsíkra, és ezt az eljárást addig folytatjuk, amíg meg nem kapjuk a különböző bemetszett síkokon holomorf $f_j(z)$ függvények mindegyikét.

Az $f_j(z)$ függvények legyártása után teszünk egy kulcsfontosságú észrevételt, miszerint az $f'_j(z)$ függvény logaritmikus deriváltja a felső félsíkra szorítkozva - és ezzel analóg módon az alsóra

szorítkozva is - egyetlen közös $g(z)$ függvényhez vezet, amely az egész síkon holomorf leszámítva a végtelent és a sokszög csúcsainak ősképeit.

Ezt követően lokálisan vizsgálódunk egy tetszőlegesen választott α szögű B csúcs és annak A ősképe körül. Az f -nek A pont δ -sugarú felső félkörnyezetére vett megszorítására látszólag túlbonyolítva gondolunk, azonban a későbbiekben ezt fel tudjuk használni. A függvény képét eltoljuk $-B$ -vel, majd egy hatványozással az α nyílásszögű szögtartományt kiegyenesítjük egy félsíkká, majd megint "visszanyomorgatjuk" szögtartománnyá és visszatoljuk B -vel a helyére. (A hatványozás egyértelmű értelmezéséhez szükségünk van a szögtartományon holomorfan értelmezett komplex logaritmusra.) Mindezt képletbe sűrítve:

$$f(z) = \left(e^{\frac{\pi}{\alpha} \log(f(z)-B)} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} + B = h(z)^{\frac{\alpha}{\pi}} + B$$

A $h(z)$ függvény az A teljes δ sugarú környezetére kiterjed holomorfan. A deriválások után azt kapjuk, hogy:

$$g(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \left(\frac{\alpha}{\pi} - 1 \right) \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{h''(z)}{h'(z)} \quad (\forall z \in B(A, \delta) \cap \{Im(z) > 0\})$$

Mivel a jobb oldal és a baloldal holomorfan értelmezett a $\dot{B}(A, \delta)$ pontozott környezeten is, az Unicitás tétel szerint a képlet az egész pontozott környezeten is igaz lesz. A lokális vizsgálódás során látható, hogy $g(z)$ -nek elsőrendű pólusa van az A pontban, amely megfigyeléssel teljesen leírtuk a függvény szingularitásait.

Ha találunk egy olyan függvényt, amelynek pontosan ugyanazokon a helyeken ugyanilyen szingularitások vannak és korlátos, akkor a két függvény különbségét véve, egy egész síkon holomorf, korlátos függvényt kapnánk, ami Liouville tétele szerint konstans függvényt eredményezne.

$$g(z) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\pi} - 1 \right) \frac{1}{z - A_i} = konstans$$

mivel mindkét függvény ∞ -ben vett értéke nulla, így a konstans értéke is nulla, ami szerint:

$$g(z) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i}{\pi} - 1 \right) \frac{1}{z - A_i}$$

Ha ezt a "frissített" $g(z)$ függvényt a felső félsíkra szorítkozva vizsgáljuk, akkor belőle két integrálással visszafejthető a formula.

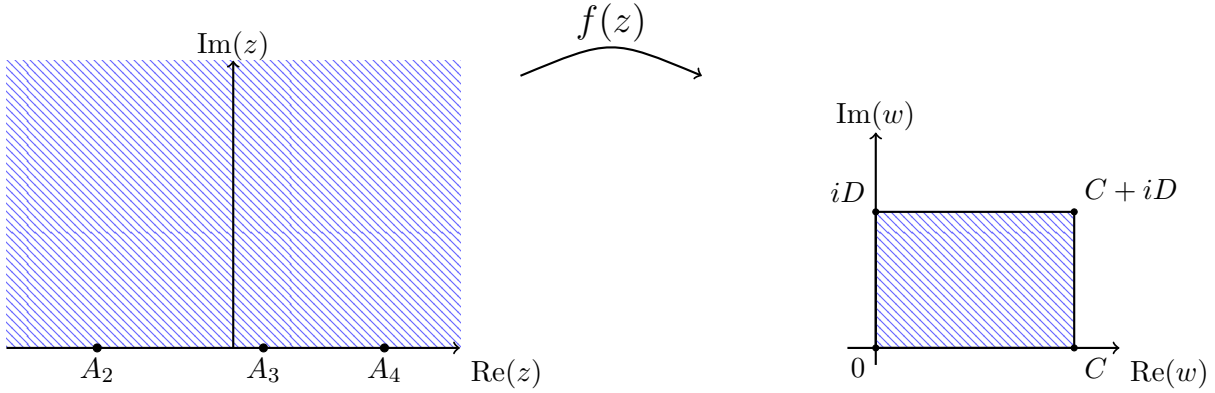
$$f(z) = e^a \int_{z_0}^z \prod_{i=1}^n (\xi - A_i)^{\frac{\alpha_i}{\pi} - 1} d\xi + b$$

2.2. Megjegyzés. Ha az egyik $A_i = \infty$, akkor a képletünket azzal kell módosítanunk, hogy kivesszük azt a tényezőt a szorzatból. A képlet hiányossága mindössze annyi, hogy az A_i -ket nem ismerjük. A határon 3 pontot akárhogyan előírhatunk.

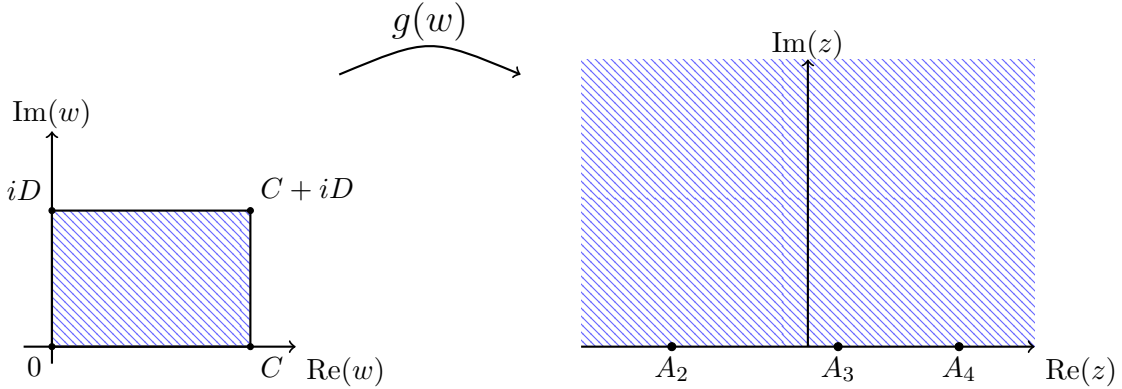
2.1. Téglalap esetén az inverz kiterjesztése

Az egyszerűség kedvéért a felső félsíkot az ábrán látható téglalap belsejébe szeretnénk leképezni az $f(z)$ Schwarz-Christoffel formula segítségével, melyre:

$$f(\infty) = 0, \quad f(A_2) = C, \quad f(A_3) = C + iD, \quad f(A_4) = iD$$



Ekkor az f leképezés inverz függvénye, $g(w)$ holomorfan definiálható nem csak a téglalap belsejében hanem annak határán is az origó kivételével.



Jelöljük az eredeti g függvényt $g_{0,0}$ -val és a hozzátartozó nyílt téglalapot $T_{0,0}$ -val. Terjesztjük ki a $T_{0,0}$ téglalapot a $(0, C)$ szakasz mentén a valós tengelyre vett $T_{0,-1}$ tükörképére holomorfan, ami a Schwarz-tükrözési elv szerint megtehető és a $g_{0,0}$ függvény $g_{0,0}^*$ holomorf folytatásának értelmezése az alábbi:

$$\forall w \in T_{0,-1} \quad g_{0,0}^*(w) = \overline{g_{0,0}(\overline{w})}$$

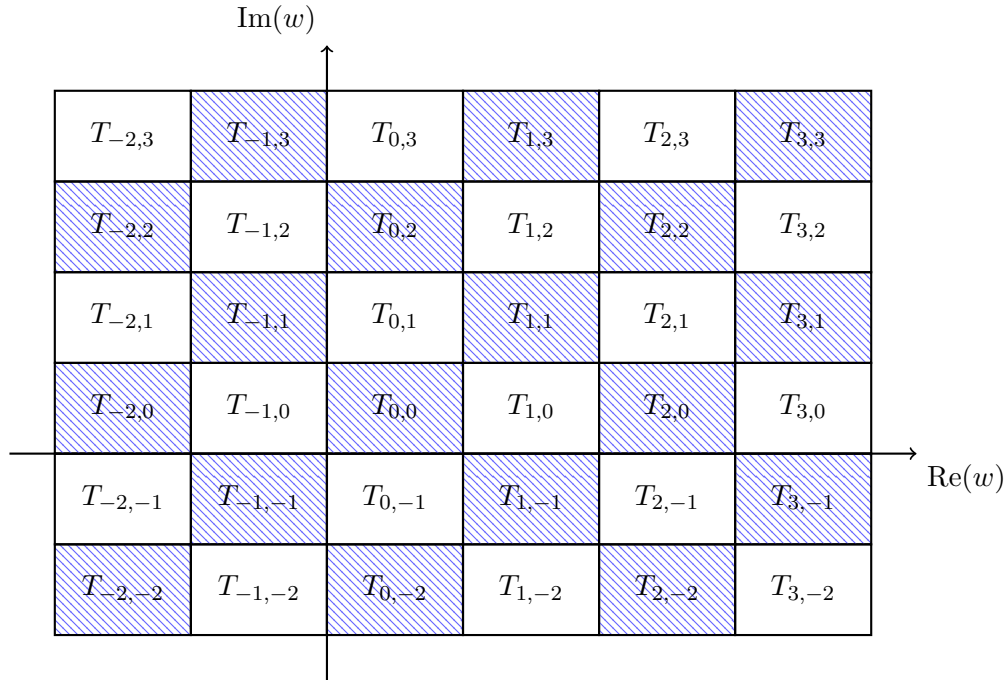
A $g_{0,0}^*$ kiterjesztés $T_{0,-1}$ nyílt téglalpra történő megszorítását jelöljük $g_{0,-1}$ -val, ami tehát az alsó félsíkra képez. Ezt követően a Schwarz-tükrözési elv általános alakját használva legyártható az összes ilyen $g_{n,m}$ és $T_{n,m}$ pár. Ahol az index első koordinátája azt mondja meg, hogy a vízszintes irányú

tükrözések összegzéseként (pl 3 jobbra tükrözés és 1 balra tükrözés összegzése 2 jobbra tükrözés) $T_{0,0}$ -tól balra vagy jobbra leszünk, a második index pedig azt mondja meg, hogy a függőleges tükrözések összegzéseként $T_{0,0}$ -tól feljebb vagy lejjebb leszünk. Egyszerű geometriai meggondolás után láthatjuk, hogy szét lehet szedni a tükrözések sorozatát vízszintes és függőleges esetekre, és valóban csak a kétféle eset összegzése a mérvadó egy pont tükrözésének tekintetében.

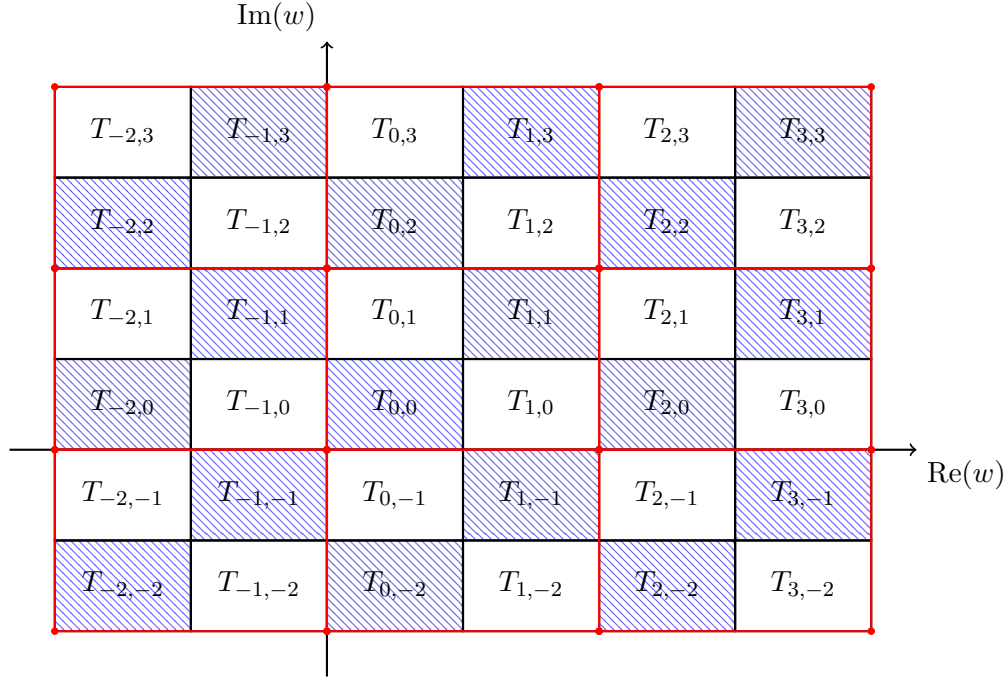
A jóldefiniáltság meggondolása után adjunk formulát a $T_{n,m}$ téglalapokon értelmezett $g_{n,m}$ függvények kiszámítására:

$$g_{n,m}(w) = g_{0,0}(w - nC - miD) \cdot \mathbf{1}_{\{n+m \equiv 0(2)\}} + g_{0,-1}(w - nC - (m+1)iD) \cdot \mathbf{1}_{\{n+m \equiv 1(2)\}}$$

Az alábbi ábrán kék satírozással jelöltük azokat az indexű téglalapokat, melyeken értelmezett $g_{n,m}$ függvények a felső félsíkra, és fehérén hagytuk azokat, amelyeken értelmezettek az alsó félsíkba képeznek.



Jelöljük G -vel az egész síkra kiterjesztett g függvényt, ami $g_{n,m}$ függvényekre szorítható meg. Az ábrán jól látható G függvény kettős periodikussága. Periodikus egyrészt vízszintesen a $v_1 = 2C$ vektor szerint, másrészt pedig függőlegesen a $v_2 = i2D$ vektor szerint is. Ami az izolált szingularitásokat illeti, a $k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2$ alakú pontokban vannak másodrendű pólusai G -nek, $(k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$ melyek által alkotott téglalaprácsot a lenti ábrán piros színnel emelünk ki.



A G függvény reziduuma a másodrendű pólusokban zérusak, valamint megfigyelhető, hogy a piros téglalap középpontjára szimmetrikus pontpárokon ugyanazt az értéket veszi fel a G , amiből következik a függvény párossága. Ha egy piros téglalapba bele vesszük a baloldalt és az alsó oldalt is, akkor azt mondhatjuk, hogy három olyan hely van, ahol a függvény kétszeres értéket vesz fel: a baloldal felezőpontja, az alsó oldal felezőpontja, illetve az átlók metszéspontja. Azaz G függvény egy olyan meromorf egészfüggvény, amely periodikus a rácsot generáló v_1, v_2 komplex számok szerint, és csak a rádspontokban van másodrendű pólusa.

Ha a $G(z)$ függvényt megfelelő paraméterekkel látjuk el, azaz ha az origó mellett még két másik csúcsnak jól választjuk meg az ősképet, akkor egy nevezetes függvényt kapunk, a Weierstrass-féle $\wp$ függvényt, amit majd a következő fejezetben vizsgálunk meg alaposabban. Viszont igen értékes összefüggést nyerünk a Weierstrass-féle $\wp$ függvény és deriváltja kapcsolatára az alábbi gondolatmenettel.

Mivel $A_1 = \infty$ -nek választottuk, és a téglalap minden szöge derékszög, így az $f(z)$ Schwarz-Christoffel formula ebben az esetben a következő alakba írható fel:

$$f(z) = c \cdot \int_{z_0}^z \frac{1}{\sqrt{(\xi - A_2)(\xi - A_3)(\xi - A_4)}} d\xi,$$

amit ha deriválunk:

$$f'(z) = c \cdot \frac{1}{\sqrt{(\xi - A_2)(\xi - A_3)(\xi - A_4)}}$$

majd felírjuk $f^{-1}(z) = G(z)$ deriváltját:

$$G'(z) = \frac{1}{f'(G(z))} = \frac{1}{c} \sqrt{(G(z) - A_2)(G(z) - A_3)(G(z) - A_4)},$$

akkor egy fontos összefüggést kapunk, miszerint:

$$(G'(z))^2 = \frac{1}{c^2} \cdot (G(z) - A_2)(G(z) - A_3)(G(z) - A_4)$$

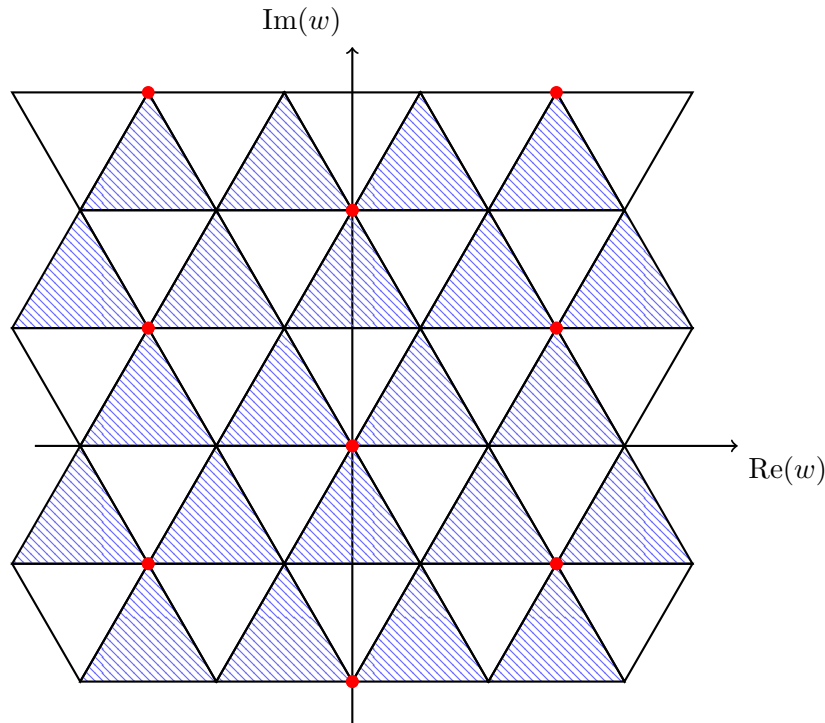
Azaz jó paraméterezés mellett:

$$(\wp'(z))^2 = konstans \cdot (\wp(z) - A_2)(\wp(z) - A_3)(\wp(z) - A_4)$$

2.2. Szabályos háromszög esetén az inverz kiterjesztése

Az origó ősképe ebben az esetben is legyen végtelen. A Schwarz-tükrözési elvet használó iteratív eljárás teljesen analóg módon történik, mint az előző esetben. Végeredményeként egy szabályos háromszög rácsot kapunk, amelynek satírozott háromszögei mennek a felső félsíkba, az üresek pedig az alsóba. A rácsszerkezet 120° -ra forgásszimmetrikus, azaz a harmadik egységgyökkel való szorzásra érzéketlen a rács. Ennek a szimmetriának az a következménye, hogy az ábrán pirossal jelölt izolált szingularitásokból álló parallelogrammarács egy parallelogrammájában minden érték multiplicitással véve háromszor vétetik fel. Az izolált szingularitások ennek értelmében harmadrendű pólusok. Az inverz egészsíkra való kiterjesztése ebben az esetben is egy duplán periodikus meromorf függvény, amelynek csak a pirossal jelölt rácspontokban vannak pólusai.

Megfelelő paraméterek mellett a kiterjesztett inverz függvény itt nem más lesz, mint a Weierstess-féle $\wp$ függvény deriváltja. A következő fejezetből visszatekintve láthatjuk majd, hogy ez annak köszönhető, hogy itt a rácsszerkezet invariáns a harmadik egységgyökkel való szorzásra.



Tehát az izolált szingularitások által alkotott parallelogrammarács ebben az esetben olyan rombuszokból áll, melynek szögei 60° és 120° . Azt már láttuk az előző esetben, hogy téglalapok is alkotják a rácsot. Viszont ezeken kívül szimmetriai okokból semmilyen más parallelogramma típusra nem épülhet rács az inverz kiterjesztés során.

A megérzésünk azt sugallja, hogy a kiterjesztett inverz függvényekkel rátapintottunk a duplán periodikus egészfüggvények építőköveire. Azonban ez egyből felvet két kérdést:

Az első kérdés, hogy létezik-e nemkonstans holomorf, tetszőleges ω_1 és ω_2 az egész komplex síkot kifesztő komplex számpár szerint periodikus egészfüggvény. Ez esetben az egészfüggvény korlátos lenne, hiszen a periodusparallelogrammán, ami egy kompakt halmaz, felvenné a függvény az értékkészletét. Liouville tételéből következik, hogy ekkor konstans lenne a függvény, ami nem lehetséges.

A második kérdés, hogy létezik-e olyan meromorf duplán periodikus függvény, amelynek csak a rácsponthokban van elsőrendű pólusa. Nézzük az origóra szorítkozva az esetet. Legyen γ az eltolt periodusparallelogramma, aminek belsejében van az origó. Ekkor a Reziduúmtétel alapján a $\text{Res}(f, 0) = 0$ egyenlőség kéne fennálljon, mivel mindkét oldal egyenlő a $f(z)$ függvény γ görbén vett vonalintegráljával. Tehát ilyen sem létezik.

A kérdések megválaszolás után kanyarodjunk rá a megérzésünk helyességének kiderítésére.

2.3. Elliptikus függvények

2.3. Definíció. (Parallelogrammarács)

Legyen ω_1 és ω_2 két olyan komplex szám, melyek hányadosa nem tisztán valós szám. Ekkor az általuk kifeszített rács:

$$\Omega = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Két számot kongruensnek nevezünk Ω modulo szerint, ha a különbségük Ω eleme. Egy z_0 ponthoz illesztett rácsparallelogrammán pedig a következő halmazt értjük:

$$Q = \{z_0 + u_1\omega_1 + u_2\omega_2 \mid u_1, u_2 \in [0, 1)\}$$

2.4. Definíció. (Elliptikus függvények)

Az egész síkon meromorf $f(z)$ függvényt elliptikus függvénynek nevezzük az Ω rácsra nézve, ha periodikus a rácsot generáló ω_1 és ω_2 szerint.

2.5. Tétel. (Tórusz Reziduum Tétele)

Elliptikus függvény reziduumainak a pólusaira (mod Ω) kiterjesztett összege 0.

Bizonyítás. Válasszunk olyan z_0 -t, hogy a hozzá illesztett rácsparallelogramma határa ne menjen át $f(z)$ izolált szingularitásain. Jelöljük ezt a határt γ -val!

A Reziduomtétel szerint a szóban forgó összeg nem más, mint $f(z)$ γ görbén vett vonalintegrálja. Azonban ha γ görbére úgy gondolunk, mint $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ és γ_4 görbék egymás után fűzése, ahol ezek a görbék a rácsparallelogramma oldalai, és a periodikusságot sem feledjük, akkor egyből látszik, hogy a szemközti oldalakon vett vonalintegrálok egymás ellentettjei, így valóban 0 a reziduumok összege. $\square$

2.6. Megjegyzés. Ha a rácsparallelogramma ekvivalens oldalpárjait összeragasztjuk, akkor topológiailag egy tóruszfelületet kapunk, innen az elnevezés.

Ha $f(z)$ elliptikus függvény és nem tűnik el azonosan, akkor a logaritmikus deriváltja is elliptikus függvény. A periodicitás és a meromorf-ság megőrződését kell hozzá meggondolni.

2.7. Tétel. (Függvény rendje)

Nemkonstans elliptikus függvény minden véges vagy végtelen értéket multiplicitással számolva (mod Ω) ugyanannyiszor vesz fel. A közös értéket a függvény rendjének nevezzük.

Bizonyítás. Az $f(z)$ logaritmikus deriváltja segítségével, az Argumentumelvet használva kihozzuk, hogy a periodusparallelogrammában a gyökök és a pólusok száma multiplicitással véve megegyezik. Könnyen belátható, hogy minden $f(z) = a$ függvényérték multiplicitással vett száma is megegyezik a pólusok multiplicitással vett számával. A $g(z) = f(z) - a$ függvény segítségével visszavezetjük a problémát az előző esetre. Tehát a közös érték nem más, mint a pólusok multiplicitással vett száma. $\square$

2.4. A Weierstrass-féle $\wp$ függvény

2.8. Definíció. (*Weierstrass-féle $\wp$ függvény*)

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \left[\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

2.4.1. Konvergenciája

Két részben fogjuk belátni a konvergenciát. Első körben bevezetjük az S segédsummát, aminek a konvergenciája egyszerűbb geometriai megfontolást igényel [5]. Majd S -sel majoráljuk a $\wp$ függvényt. Legyen S az alábbi segédsumma:

$$S = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega^3|}$$

Szeretnénk S -et olyan szummára cserélni, ami 0-tól ∞ -ig fut, ezért minden rácspontot az origó kivételével jelölünk valamilyen sorrendben. $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ Tehát a szummánkat "frissíthetjük":

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega^3|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n^3|}$$

Válasszuk azt a sorrendet, hogy a legkisebb rácsparallelogramma az $a_1, a_2, \dots, a_8$, a második rácsparallelogramma az $a_9, a_{10}, \dots, a_{24}$, és ezt a mintát követve az r . rácsparallelogramma az

$$a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_{j+8r} \quad \text{ahol } j = \frac{8(r-1)+8}{2} \cdot (r-1)$$

pontokból rajzolódjon ki. A bővülő rácsparallelogramma sorozat partícionálja az (a_n) sorozatunkat. Az r . partícióhoz tartozó szelet felülről becsülhető a következőképp:

$$\sum_{k=j+1}^{j+8r} \frac{1}{|a_k|^3} < 8r \cdot \frac{1}{(rd)^3} \quad \text{ahol } d = \min\{|\omega_1|, |\omega_2|\}$$

Ezt felhasználva:

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega^3|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n^3|} < \sum_{r=1}^{\infty} 8r \cdot \frac{1}{(rd)^3} = \frac{8}{d^3} \cdot \frac{\pi^2}{6} < \infty,$$

amivel az S segédsumma konvergenciáját beláttuk.

Hátra van még a majorálás, ami nagyobb falat lesz. Legyen $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, és válasszunk hozzá úgy $\varepsilon > 0$ számot, hogy:

$$\overline{B(z_0, \varepsilon)} \subset \mathbb{C} \setminus \Omega.$$

Ha rögzítünk egy $z \in \overline{B(z_0, \varepsilon)}$ pontot, akkor egyenletesen konvergens lesz a $\overline{B(z_0, \varepsilon)}$ zárt körlemezen az alábbi szumma:

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right|$$

Ennek belátásához tagonként nézzük a szummát. Vagyis adott $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ esetén becsüljük felül a tagjainkat:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &= \left| \frac{\omega^2 - (z - \omega)^2}{(z - \omega)^2 \omega^2} \right| = \left| \frac{-z^2 + 2z\omega}{(z - \omega)^2 \omega^2} \right| \leq \left| \frac{-z^2}{(z - \omega)^2 \omega^2} \right| + \left| \frac{2z}{(z - \omega)^2 \omega} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{(|z_0| + \varepsilon)^2}{(z - \omega)^2 \omega^2} \right| + \left| \frac{2(|z_0| + \varepsilon)}{(z - \omega)^2 \omega} \right| = M \end{aligned}$$

A nevezőben zavaró a $(z - \omega)^2$ tényező, sokkal kezelhetőbb lenne, ha ω^2 állna. Ha van olyan $L > 0$ konstans, hogy

$$\frac{1}{|(z - \omega)^2|} \leq \frac{L}{|\omega^2|},$$

akkor a becslésünk tovább "tisztulna". Szerencsére van ilyen $L > 0$ konstans. Ezt két esetre bontva fogjuk igazolni.

Első esetben tegyük fel, hogy $|\omega| \geq 2(|z_0| + \varepsilon)$, amiből következik, hogy: $\forall z \in \overline{B(z_0, \varepsilon)} : |\omega| \geq 2|z|$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$|z - \omega|^2 \geq (|\omega| - |z|)^2 \geq \frac{|\omega|^2}{4}$$

Reciprokot véve látjuk, hogy $L \geq 4$ jó választás ebben az esetben.

Második esetben tegyük fel, hogy $|\omega| \leq 2(|z_0| + \varepsilon)$. Ez véges sok ω -ra teljesül. Nézzük egy ilyen ω -ra a $|z - \omega|$ függvényt a $\overline{B(z_0, \varepsilon)}$ zárt körlemezen! Mivel a függvény folytonos, a zárt körlemez pedig kompakt, ezért Weierstrass tétele szerint a függvény felveszi a minimumértékét, ami legyen d_ω . Vegyük ezek minimumát és jelöljük d -vel!

$$d := \min\{d_\omega : |\omega| \leq 2(|z_0| + \varepsilon)\} \geq 0$$

Ekkor a számlálót felülről, a nevezőt pedig alulról becsülve egy konstans értéket kapunk.

$$\left| \frac{\omega^2}{(z - \omega)^2} \right| \leq \frac{(2|z_0| + 2\varepsilon)^2}{d^2}$$

Ebben az esetben $L \geq \frac{(2|z_0| + 2\varepsilon)^2}{d^2}$ jó választás.

Most már tudunk adni olyan $L > 0$ konstans, ami mindkét esetben jó választás:

$$L := \max \left\{ 4, \frac{(2|z_0| + 2\varepsilon)^2}{d^2} \right\}$$

Vagyis a nevezőben zavaró $(z - \omega)^2$ tényezőt kiiktatva a becslésünk:

$$M = \left| \frac{(|z_0| + \varepsilon)^2}{(z - \omega)^2 \omega^2} \right| + \left| \frac{2(|z_0| + \varepsilon)}{(z - \omega)^2 \omega} \right| \leq \frac{(|z_0| + \varepsilon)^2 \cdot L}{|\omega|^4} + \frac{2(|z_0| + \varepsilon)L}{|\omega|^3}$$

Azaz:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| &\leq \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \left(\frac{(|z_0| + \varepsilon)^2 \cdot L}{|\omega|^4} + \frac{2(|z_0| + \varepsilon)L}{|\omega|^3} \right) = \\ &= (|z_0| + \varepsilon)^2 L \cdot \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega|^4} + 2(|z_0| + \varepsilon)L \cdot \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega|^3} < \infty \end{aligned}$$

Mivel a köbös változattal analóg módon belátható, hogy:

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{|\omega|^4} < \infty$$

Így azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| < \infty$$

2.4.2. Periodikussága

A $\wp(z)$ függvény periodikusságát két megfigyelés következményeként látjuk be. Az egyik, hogy $\wp(z)$ páros függvény, a másik, hogy $\wp'(z)$ periodikus. Ha mindkét megfigyelésünk helytálló, akkor definiáljunk egy $f(z) = \wp(z + \omega) - \wp(z)$ segédfüggvényt, amiről ha belátjuk, hogy azonosan 0, akkor készen vagyunk.

Mivel $\wp'(z)$ periodikus, azonnal adódik, hogy:

$$f'(z) = \wp'(z + \omega) - \wp'(z) = 0,$$

amiből az következik, hogy $f(z)$ egy konstans függvény, tehát mindenütt ugyanazt a c értéket veszi fel. Azzal sáfárkodhatunk, hogy olyan pontot választunk, hogy azzal $\wp(z)$ párosságát ki lehessen használni. A $-\frac{\omega}{2}$ ilyen:

$$f\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(-\frac{\omega}{2} + \omega\right) - \wp\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega}{2}\right) = 0$$

azaz ez a konstans c érték semmi más nem lehet, mint a 0.

A két megfigyelésünk belátásával adósak vagyunk még. A parallelogrammarács origóra való szimmetrikussága következtében a $\wp(z)$ függvény párossága és a $\wp'(z)$ derivált függvény periodikussága látható. Amikor $\wp(-z)$ -t vetjük össze $\wp(z)$ -vel, vagy amikor $\wp'(z + \omega)$ -t $\wp'(z)$ -vel, akkor ugyanazt a sort kapjuk, csak más sorrendben, ami az abszolút konvergencia miatt nem okoz problémát.

2.4.3. Differenciálegyenlete

A párosság és periodikusság alapján: $\wp(z) = \wp(-z) = \wp(-z + \omega)$, amiből $z = \frac{\omega}{2} + t$ helyettesítéssel a következőt kapjuk:

$$\wp\left(\frac{\omega}{2} + t\right) = \wp\left(\frac{\omega}{2} - t\right)$$

Tegyük fel, hogy $\frac{\omega}{2} \notin \Omega$. A $\wp(z)$ függvény rendje 2, ezért ilyen $\wp(\frac{\omega}{2})$ értéket a függvény csak egy helyen vesz fel (mod Ω) 2 multiplicitással. Három darab ilyen pont van, ezeket kritikus pontoknak nevezzük:

$$z_1 = \frac{\omega_1}{2}, \quad z_2 = \frac{\omega_2}{2}, \quad z_3 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Tegyük egy észrevételt $\wp(z)$ kritikus pontokban felvett értékeiről. Mindhárom kritikus pontban felvett kétszeres érték különböző és sehol máshol nem vétetik fel (mod Ω). Az, hogy a kritikus pontokban $\wp'(z) = 0$, egyenságon következik abból, hogy a parallelogrammarács középpontosan szimmetrikus ezekre a pontokra. Viszont ezzel a harmadrendű $\wp'(z)$ mindhárom zérushelyét megtaláltuk a periodusparallelogrammában.

Nézzük az alábbi függvényt:

$$f(z) = \frac{(\wp'(z))^2}{(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3)}$$

Az $f(z)$ függvénynek minden pontban megszüntethető szingularitása van. A kritikus pontokban a számláló és a nevező is másodrendben tűnik el. Ha $\wp(z)$ függvényt Taylor-sorba fejtjük az adott kritikus pont körül és nem feledjük, hogy $\wp'(z) = 0$ minden kritikus pontban, akkor jól látszódik ez:

$$\begin{aligned} \wp(z) - \wp(z_i) &= \wp(z_i) - \wp(z_i) + \wp'(z_i)(z - z_i) + \frac{1}{2}\wp''(z_i)(z - z_i)^2 + \frac{1}{6}\wp'''(z_i)(z - z_i)^3 + \dots = \\ &= 0 + \wp'(z_i)(z - z_i) + \frac{1}{2}\wp''(z_i)(z - z_i)^2 + \frac{1}{6}\wp'''(z_i)(z - z_i)^3 + \dots = \\ &= \frac{1}{2}\wp''(z_i)(z - z_i)^2 + \frac{1}{6}\wp'''(z_i)(z - z_i)^3 + \dots \end{aligned}$$

A rácspontokban a számlálónak és a nevezőnek is hatodrendű pólusa van, tehát azokban a pontokban is megszüntethető a szingularitás. Vagyis $f(z)$ mindenütt holomorffá tehető elliptikus függvény, ami azt jelenti, hogy konstans. Ha konstans, akkor viszont csak 4 lehet az értéke, mivel $z \rightarrow 0$ esetén $\wp(z) \approx \frac{1}{z^2}$ és $\wp'(z) \approx -\frac{2}{z^3}$.

Ezzel rávilágítottunk $\wp(z)$ és $\wp'(z)$ közötti összefüggésre, amit rendezve az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3),$$

Az előző fejezetben már találkoztunk ezzel az összefüggéssel, de ott még nem tudtuk, hogy a konstans értéke 4.

2.9. Tétel. (*Generátorság*)

Adott Ω rácsra nézve az $f(z)$ elliptikus függvények testet alkotnak, és minden $f(z)$ elliptikus függvény egyértelműen előállítható $f(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z)R_2(\wp(z))$ alakban, ahol R_1 és R_2 racionális törtfüggvények

2.5. Kitekintés

A Schwarz-Christoffel formula inverzének kiterjesztésénél mindkét esetben volt egy feltételünk, még hozzá, hogy az $f(\infty) = 0$, aminek következményeként a parallelogrammarács izolált szingularitásai épp a rácspontokba estek. Ezen az eseten keresztül jutottunk el a Weierstrass-féle $\wp$ függvényig. Az elliptikus függvények kapcsán természetes módon jönnek elő a komplex elliptikus görbék. Az elliptikus görbéknek, különösképpen a racionálisoknak igen komoly elméletük van.

Andrew Wiles 1994-ben az elliptikus görbék felhasználásával látta be a modularitási tételt vagy más néven Taniyama–Shimura–Weil sejtést, amiből már következett a nagy Fermat-tétel.

Ha a nagy Fermat-tételben szereplő egyenlőség megoldható lenne, akkor azzal tudnánk konstruálni egy olyan elliptikus görbét, amely nem moduláris. Azonban a modularitási tétel szerint minden racionális együtthatós elliptikus görbe moduláris. [10]

Hivatkozások

- [1] Géza Kós, *Komplex függvénytan*, 2024. ELTE jegyzet.
- [2] Dragoslav S. Mitrinović and J. H. Michael, *Calculus of Residues*, Tutorial Texts, vol. 4, P. Noordhoff, Groningen, 1966. Chapters 2 and 3.
- [3] Joseph Bak and Donald J. Newman, *Complex Analysis*, 3rd ed., Springer, 2010. Chapter 11.
- [4] Ruel V. Churchill and James Ward Brown, *Complex Variables and Applications*, 9th ed., McGraw-Hill Education, 2021. Chapter 7.
- [5] Béla Szőkefalvi-Nagy, *Komplex függvénytan: Egységes jegyzet természettudományi karok részére*, 4th ed., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005. 123. és 162–163. oldal.
- [6] Serge Lang, *Complex Analysis*, 4th ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Springer, 1999. Chapter 6.
- [7] Gábor Halász, *Bevezető komplex függvénytan*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1998. 62–64. oldal.
- [8] Tobin A. Driscoll and Lloyd N. Trefethen, *Schwarz–Christoffel Mapping*, Cambridge University Press, 2002. pages 10–11.
- [9] Gábor Halász, *Speciális függvények*, 2007. ELTE TTK Matematikai Intézet jegyzet, 19–24. oldal.
- [10] https://hu.wikipedia.org/wiki/Elliptikus_grbe,.

MI eszközök használatáról szóló nyilatkozat

Alulírott Korompay Ábel nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Ábra készítés	GPT-4o	az elsőt leszámítva az összes ábra	TikZ kódokat generáltam
Formázás	GPT-4o	teljes dolgozat	nincs

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.