



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKAI INTÉZET

Speciális sztochasztikus folyamatok

Témavezető:

Hoffmann Balázs

PhD hallgató

Szerző:

Varga Dániel

Matematikus BSc

Budapest, 2025

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Hoffmann Balázsnak, aki folyamatosan irányt mutatva, páratlan segítőkészséggel kísért végig szakdolgozatom elkészítését. Témakörben való jártassága, felém gyakorolt türelme és lelkesedése nagyban hozzájárultak munkám sikeréhez.

Hálás vagyok továbbá a családomnak, akik tanulmányaim során mindvégig támogattak; a páromnak, aki minden nap motivál; és nem utolsósorban a barátaimnak, akiknek egyetemi éveim alatt bármikor számíthattam a szakmai segítségére.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Definíciók	5
3. AR, MA, ARMA és ARIMA folyamatok	11
3.1. Idősorok	11
3.2. AR modellek	12
3.3. MA modellek	14
3.4. ARMA és ARIMA modellek	16
4. ARCH folyamatok	17
4.1. Az ARCH(∞) folyamat erős stacionaritása	18
5. GARCH folyamatok	22
5.1. Az ARCH(1) és a GARCH(1, 1) modellek erős stacionaritása	22
5.2. A GARCH(p, q) modell gyenge stacionaritása	26
5.3. A GARCH(p, q) modell erős stacionaritása	28
6. Speciális GARCH folyamatok	33
Irodalomjegyzék	39

1. fejezet

Bevezetés

A gazdasági matematika célja a pénzügyi piacok leírása és elemzése matematikai módszerekkel. Napjaink legfontosabb pénzügyi termékei közé tartoznak az értékpapírok, amelyekkel való kereskedés egészen 1531-ig nyúlik vissza - ekkor jelent meg ugyanis az első tőzsde Antwerpenben. Ezt követően azonban még évszázadokat kellett várni az első pénzügyi matematikai modellek felállítására. A XX. század elején Bachelier és Wiener munkáikban a Brown-mozgást alkalmazták gazdasági trajektóriák leírására. Az 1930-as években Kolmogorov megreformálta a valószínűségszámítást, és olyan új fogalmak bevezetésével, mint például a feltételes várható érték, lefektette a származtatott ügyletek árazásának alapjait. Az amerikai pénzügyi piacok deregularizációját követően a '80-as és '90-es években a gazdasági matematika rohamos fejlődésnek indult. Ezt tovább gyorsította az adattudomány párhuzamos térnyerése és a komplex modellek gyors futtatására képes számítógépes platformok megjelenése.

Amint arról Robert Engle is beszámol [1], az alkalmazott matematika egyik igáslova gazdasági területeken minden bizonnyal a legkisebb négyzetek módszere (*least squares method*). Ez egy természetes választás, hiszen a szakemberek feladata legtöbbször megjósolni, hogy egy változó értékének megváltozása milyen hatással van különböző más változókra. Azonban a terület fejlődésével egyre többször merült fel az igény, hogy a modell hibájának nagyságát előrejelezzék és elemezzék. Ebben az esetben a kérdések a volatilitásra irányulnak, amelynek vizsgálatakor a standard eszközökké a Robert Engle és Tim Bollerslev által bevezetett *ARCH* (*autoregressive conditional heteroskedasticity*) és *GARCH* (*generalized ARCH*) modellek váltak. Bár jelen dolgozat célja éppen ezen modellek bemutatása, ha az olvasó részletesebben

szeretne tájékozódni első megjelenésükről, akkor javasoljuk a [2] és [3] cikkeket.

A least squares modell feltételezi, hogy a hibatagok négyzeteinek várható értéke minden pontban azonos. Ezt a feltételt *homoszkedaszticitásnak* hívjuk, és ennek kiküszöbölése az ARCH/GARCH modellek fő célja. Azon adatsorokat, ahol a hibatagok szórása nem azonos; amelyekben észszerűen elvárható, hogy egyes pontokban vagy intervallumokban nagyobb hibák fordulnak elő, *heteroszkedasztikusnak* nevezzük. Heteroszkedaszticitás jelenlétében az OLS regresszió becsült regressziós együtthatói továbbra is torzítatlanok, de a standard hibák és a konfidenciaintervallumok túl szűkek lesznek, így hamis pontosságérzetet keltenek. Az ARCH és GARCH modellek azonban nem problémaként tekintenek a heteroszkedaszticitásra; céljuk modellezni azt. Ezzel nemcsak kijavítják az OLS modell hiányosságait, de predikciót is adnak minden hibatag szórására. Mitöbb, ez az előrejelzés sokszor önmagában is különösen érdekes, főként pénzügyi területeken. Ilyenkor ugyanis kulcskérdés a modellünk pontossága; mekkora a hibatagok szórása, és mi okozza ezt. Sokszor ez a helyzet áll elő gazdasági alkalmazásokban, amikor a szóban forgó változó egy jószág vagy portfólió hozama, és a hozamok szórása a kockázatot jelenti. Ezekben az idősoros alkalmazásokban is gyakran megfigyelhető a heteroszkedaszticitás jelenléte. Pénzügyi adatokra csupán egy futó pillantást vetve is könnyedén megállapíthatjuk, hogy vannak időszakok, amelyek sokkal kockázatosabbak másoknál, vagyis a hibatagok nagysága időben változik. Ráadásul ezek a kockázatosabb időszakok nem véletlenszerűen helyezkednek el az adatsorunkban. Ehelyett bizonyos mértékű autokorrelációt vehetünk észre a hozamok kockázatában. A hozamok nagyságábanban időközönként megfigyelt kilengéseket volatilitás-klasztereződésnek nevezzük. Az ARCH és GARCH modellek pontosan ezen problémák megoldására hivatottak. Ezek mára a legelterjedtebb eszközökké váltak a heteroszkedasztikus idősorok kezelésére. A modellek célja egyfajta volatilitás-mutató biztosítása (akárcsak a szórás), amely felhasználható pénzügyi döntések során, például kockázatelemzésben, portfólió választásához vagy termékek árazásakor.

Jelen dolgozat célja a GARCH modell bemutatása és tulajdonságainak vizsgálata. A 2. fejezetben megismerkedünk a sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatos alapfogalmakkal. A 3. fejezetben foglalkozunk idősorokkal, illetve a GARCH folyamatokkal szorosan összefüggő alapvető modellekkel, majd rátérünk közvetlen elődjére és egyszerűbb alakjára, az ARCH folyamatra, amelynek egy speciális esetéről állításokat fogalmazunk meg [4] alapján a 4. fejezetben. Az elmélet felépítését köve-

tően az 5. fejezetben végül rátérhetünk a GARCH modellekre. Először a gyakorlati alkalmazásoknál széles körben elterjedt GARCH(1,1) folyamatot vizsgáljuk meg, feldolgozva [5] ide vonatkozó részét, ezután pedig tételeket mondunk ki a GARCH(p,q) folyamat gyenge és erős stacionaritásával kapcsolatban, bemutatva az [5] és [6] cikkek eredményeit. Az utolsó, 6. fejezetben, a GARCH modell néhány speciális típusát és ezek gazdasági alkalmazását ismertetjük [7] gondolatmenetét követve.

2. fejezet

Definíciók

Ebben a fejezetben megismerkedünk a dolgozat témájával kapcsolatos alapvető fogalmakkal, egyszerű állításokkal. Általánosságban tárgyaljuk a sztochasztikus folyamatokat, és vizsgálódunk a stacionaritás fogalmával kapcsolatban. Ezután kimondjuk a dolgozat lényegi részét képező speciális sztochasztikus folyamatok definícióit, amelyekre vonatkozó tételeket későbbi fejezetekben majd részletesen tárgyalunk. Jelen fejezet számos később említett cikk, valamint az egyetemi tananyag alapján megfogalmazott definíciókat, állításokat tartalmaz.

1. Definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Ekkor az $(X_t)_{t \in T}$ folyamatot **sztochasztikus folyamatnak** nevezzük, ha $\forall t \in T$ esetén X_t valószínűségi változó.

Diszkrét paraméterű sztochasztikus folyamatról beszélünk, ha $T = \mathbb{Z}; \mathbb{N}$.

Folytonos paraméterű sztochasztikus folyamatról beszélünk, ha $T = \mathbb{R}; \mathbb{R}^+$.

2. Definíció. Az $X : \Omega \rightarrow T^{\mathbb{R}}$ folyamatnak az eseménytér egy fix $\omega \in \Omega$ eleméhez tartozó megvalósulását **trajektóriának** nevezzük.

3. Definíció. Legyen $T = \mathbb{Z}$ vagy $\mathbb{R}$. Az $(X_t)_{t \in T}$ folyamat **erősen stacionárius**, ha teljesül rá az úgynevezett *időinvariáns tulajdonság*, azaz tetszőleges $s, t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, értékek és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$$

együttes eloszlása megegyezik

$$(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \dots, X_{t_n+s})$$

együttes eloszlásával.

4. Definíció. Legyen $T = \mathbb{Z}$ vagy $\mathbb{R}$. Az $(X_t)_{t \in T}$ folyamat **gyengén stacionárius**, ha teljesíti az alábbi feltételeket:

1. $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty \forall t \in T$.
2. $\mathbb{E}[X_{t_1}] = \mathbb{E}[X_{t_2}] \forall t_1, t_2 \in T$.
3. $\text{cov}(t_1, t_2) = \text{cov}(t_1 + s, t_2 + s) \forall s, t_1, t_2 \in T$.

5. Definíció. Az $(X_t)_{t \in T}$ gyengén stacionárius folyamat **kovariancia függvénye**:

$$R_x(t - s) = \text{cov}(X_t, X_s),$$

ahol $s, t \in T$.

1. Tétel. Legyen $T = \mathbb{Z}$. Ekkor:

1. $R_x(k) = \text{cov}(X_0, X_k) \forall k \in \mathbb{Z}$.
2. $R_x(k) = R_x(-k) \forall k \in \mathbb{Z}$. Azaz a kovariancia függvény páros.
3. $R_x(0) = D^2(X_t) \forall t \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás. A három állítás bizonyításai a következők:

1. $R_x(k) = \text{cov}(X_{t+k}, X_t) = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \text{cov}(X_0, X_k)$.
2. $R_x(k) = \text{cov}(X_0, X_k) = \text{cov}(X_{0-k}, X_{k-k}) = \text{cov}(X_{-k}, X_0) = R_x(-k)$.
3. $R_x(0) = \text{cov}(X_0, X_0) = \text{cov}(X_{0+t}, X_{0+t}) = \text{cov}(X_t, X_t) = D^2(X_t)$.

□

2. Tétel. $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gyengén stacionárius folyamat kovariancia függvénye korlátos. Pontosabban $\forall k \in \mathbb{Z}$ esetén $|R_x(k)| \leq R_x(0)$.

Bizonyítás.

$$|R_x(k)| = |\text{cov}(X_0, X_k)| \leq D(X_0)D(X_k) = D^2(X_0) = R_x(0)$$

□

3. Tétel. $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gyengén stacionárius folyamat kovariancia függvénye pozitív szemidefinit. Azaz $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén, tetszőleges $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ és $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{C}$ értékekre:

$$\sum_{i,j=1}^n R_x(k_i - k_j) z_i \bar{z}_j \geq 0.$$

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbb{E}(X_t) = 0$. Ekkor:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n R_x(k_i - k_j) z_i \bar{z}_j &= \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(X_{k_i}, X_{k_j}) z_i \bar{z}_j = \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{k_i} z_i X_{k_j} \bar{z}_j \right) = \mathbb{E}^2 \left(\left| \sum_{i=1}^n X_{k_i} z_i \right|^2 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

□

6. Definíció. Jelölje $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gyengén stacionárius folyamat kovariancia függvényét $R_x(k)$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor a $\Phi_x(u) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} R_x(k) e^{-iuk}$ sort a folyamat **spektrális sűrűségfüggvényének** nevezzük, amennyiben ez a sor konvergens.

4. Tétel. A spektrális sűrűségfüggvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. $\Phi_x(u) \geq 0$. Azaz a spektrális sűrűségfüggvény nemnegatív.
2. $\Phi_x(u) = \Phi_x(-u)$. Azaz a spektrális sűrűségfüggvény páros.

Bizonyítás. A tulajdonságok bizonyításai a következők:

1. $R_x(k) \sim \sigma^2 \geq 0$ és $e^{-ix} \geq 0$, tehát $\sum_{u \in \mathbb{Z}} R_x(k) e^{-iuk} \geq 0$.
2. $\Phi_x(u) = \sum_{u \in \mathbb{Z}} R_x(k) e^{-iuk} = \sum_{u \in \mathbb{Z}} R_x(-k) e^{-iuk} =$
 $= \sum_{u \in \mathbb{Z}} R_x(-k) e^{-i(-u)(-k)} = \Phi_x(-u)$.

□

7. Definíció. Egy $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gyengén stacionárius folyamatot **ergodikusnak** nevezzük, ha $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_t}{t}$ tart $\mathbb{E}(x_0)$ -hoz L^2 értelemben, azaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_t}{t} - \mathbb{E}(x_0) \right)^2 \right) = 0.$$

8. Definíció. Egy $\{X_t\}_{t \in T}$ számsorozatot **idősornak** nevezünk, amennyiben az idő függvényében rögzített adatokat tartalmaz. $T = \mathbb{Z}, \mathbb{N}_0$ esetén diszkrét, $T = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ esetén folytonos idősorról beszélünk.

9. Definíció. Független, azonos eloszlású valószínűségi változók által alkotott $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat **fehér zaj**, ha a sorozat tagjai korrelálatlanok, illetve tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathbb{E}w_n = 0$ és $D^2(w_n) = \sigma_w^2 < \infty$ állandó.

10. Definíció. Az $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gyengén stacionárius folyamatot *p-ad rendű autoregresszív folyamatnak* nevezzük, ha előáll

$$X_t = w_t + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i}$$

alakban, ahol $\phi_i \in \mathbb{R}$ a sorozat paraméterei, és w_t fehér zaj folyamat.

Jelölése: **AR(p)** folyamat.

11. Definíció. Az $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gyengén stacionárius folyamatot *q-ad rendű mozgóátlag folyamatnak* nevezzük, ha előáll

$$X_t = w_t + \sum_{j=1}^q \theta_j w_{t-j}$$

alakban, ahol $\theta_j \in \mathbb{R}$ a sorozat paraméterei, és w_t fehér zaj folyamat.

Jelölése: **MA(q)** folyamat.

12. Definíció. Az $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ gyengén stacionárius folyamatot **ARMA(p, q)** folyamatnak nevezzük, ha előáll egy AR(p) és egy MA(q) folyamat kombinációjaként, azaz

$$X_t = w_t + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j w_{t-j}$$

alakú.

13. Definíció. Legyen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sztochasztikus folyamat. Ekkor azt a B operátort, amely a sorozat egy adott eleméhez az azt megelőző elemet rendeli hozzá, **backshift operátornak** nevezzük. Azaz B backshift operátor, ha:

$$BX_t = X_{t-1} \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

14. Definíció. Legyen $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sztochasztikus folyamat. Ekkor azt a $F = B^{-1}$ operátort, amely a sorozat egy adott eleméhez az azt követő elemet rendeli hozzá, **forward-shift operátornak** nevezzük. Azaz F forward-shift operátor, ha $FB = B^{-1}B = 1$, azaz:

$$FX_{t-1} = B^{-1}X_{t-1} = B^{-1}BX_t = X_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

15. Definíció. Az $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ folyamat d -ed rendű differenciáltja: $\Delta^d X_t = (1 - B)^d X_t$.

16. Definíció. Az $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ folyamatot **ARIMA(p, d, q)** folyamatnak nevezzük, ha a

$$\Delta^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

folyamat ARMA(p, q).

17. Definíció. Egy x_t folyamatot **GARCH(p, q)** folyamatnak nevezzük, ha létezik az első két feltételes momentuma, valamint teljesíti a következő két feltételt:

$$\mathbb{E}(x_t \mid x_u, u < t) = 0$$

$\forall t \in \mathbb{Z}$ esetén, és léteznek olyan $\omega, \alpha_i, i = 1, \dots, p$, valamint $\beta_j, j = 1, \dots, q$ konstansok, melyekre

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(x_t \mid x_u, u < t) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenletet egyszerűbben is leírhatjuk:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B)x_t^2 + \beta(B)\sigma_t^2 \quad (t \in \mathbb{Z}),$$

ahol B az ismert backshift operátor, azaz $B^i x_t^2 = x_{t-i}^2$ és $B^i \sigma_t^2 = \sigma_{t-i}^2$, továbbá

$$\alpha(B) = \sum_{i=1}^p \alpha_i B^i, \quad \beta(B) = \sum_{j=1}^q \beta_j B^j.$$

Ha $\beta(z) = 0$, akkor

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-1}^2.$$

Ekkor **ARCH(p)** folyamatot kapunk.

18. Definíció. Legyen (ϵ_t) független, azonos ϵ eloszlású sorozat.

Ekkor (x_t) **erős GARCH(p, q)** folyamat, ha $x_t = \sigma_t \epsilon_t$, valamint

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

ahol α_i, β_j nemnegatívak és ω pozitív.

Mivel a két különböző fogalom bevezetése csupán a precíz elméleti háttér felépítését szolgálta, innentől a GARCH folyamatok alatt erős GARCH folyamatokat értünk.

19. Definíció. Egy GARCH(p, q) folyamatot **kauzálisnak** nevezünk, ha σ_t mérhető az $\{\epsilon_{t-h}\}_{h \in \mathbb{N}}$ által generált σ -algebrára. Azaz kauzális GARCH folyamatról beszélünk, ha az aktuális érték csak a múltbeli információktól függ.

20. Definíció. Egy $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ folyamat **homoszkedasztikus**, ha

$$\text{Var}(X_t) = \sigma^2 \quad \forall t \in T,$$

ahol $\sigma^2 \geq 0$ állandó. Ha egy folyamat nem homoszkedasztikus, azaz időben változó szórással rendelkezik, akkor **heteroszkedasztikusnak** nevezzük.

21. Definíció. Egy $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ folyamat **feltételesen homoszkedasztikus**, ha $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(\{X_s\}_{s \leq t-1})$ esetén

$$\text{Var}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2 \quad \forall t \in T,$$

ahol $\sigma^2 \geq 0$ állandó. Ha egy folyamat nem feltételesen homoszkedasztikus, azaz időben változó feltételes varianciával rendelkezik, akkor **feltételesen heteroszkedasztikusnak** nevezzük.

3. fejezet

AR, MA, ARMA és ARIMA folyamatok

Ebben a fejezetben bemutatjuk az ARCH és GARCH folyamatok megértéséhez szükséges alapvető modelleket. Mivel jelen dolgozat kiemelt témája sztochasztikus folyamatok stacionaritásának vizsgálata, megmutatjuk két egyszerű folyamat gyenge stacionaritását, és ezek feltételeit. A következő modellek és tételek kiemelt fontosságuk révén, számos hivatkozott cikkben megtalálhatók, így az áttekinthetőség és a precizitás céljából összehangolt bemutatásuk jelenik meg az alábbiakban.

3.1. Idősorok

Egy $\{X_t\}$ számsorozatot idősrornak nevezünk, amennyiben az idő függvényében rögzített adatokat tartalmaz, és célja valamilyen változó alakulásának nyomon követése időben. A t időindex lehet diszkrét vagy folytonos. Jellemzően diszkrét időpontokban rögzítik őket (például óránként, naponta vagy havonta), ezért a dolgozat további részében mi is erre az esetre fogunk koncentrálni. Idősorok elemzése során az a célunk, hogy megértsük az időbeli mintázatokat, trendeket, és lényegretörő statisztikákat vonhassunk ki belőlük.

Egy idősor viselkedését jellemzően négy komponens befolyásolja; ezek a *trend*, a *szezonalitás*, a *ciklikusság* és a *véletlenszerű ingadozások*. A *trend* hosszútávú tendenciát jelent az adatsorunkban, ez lehet növekedés, csökkenés vagy stagnálás. Trendet figyelhetünk meg például az élelmiszerárak növekedésében. *Szezónális hatásnak* nevezzük, ha az idősorunkban rendszeresen ismétlődő rövidebb időszakhoz köthető

változások vannak. Ez a rövidebb időszak lehet egy hónap vagy egy évszak, és a változást jellemzően a környezeti hatások, az időjárás vagy az időszakhoz fűződő tradíciók okozzák. Könnyen érthető példa erre egy gyógyszergyártó cég bevétele, amely értelemszerűen a hidegebb, nyirkosabb hónapokban megnő. A *ciklikusság* hosszabb távú, de nem szabályos ismétlődésű mozgásokat ír le, amelyeket gyakran gazdasági ciklusok okoznak, és amelyek időtartama nem kötött, de jellemzően években mérhető. Amikor előre nem látható események következnek be (politikai válságok, háborúk, természeti katasztrófák), akkor az idősorunkban *véletlenszerű ingadozásokat* figyelhetünk meg. Az idősorelemzés célja ezen komponensek felismerése, szétválasztása, modellezése, és ezek alapján a jövőbeli értékek prediktálása. Előrejelzésre általánosságban két különböző típusú modellt használhatunk. *Additív modell* esetén a komponenseket összegezzük, feltételezve, hogy függetlenek egymástól. *Multiplikatív modell* használatakor a komponensek szorzatát vesszük, azzal a feltételezéssel élve, hogy az egyes hatások erősíthetik vagy gyengíthetik egymást.

Többféle módon is próbálhatunk jóslást adni idősorokra, mi most a sztochasztikus folyamatokat fogjuk erre a célra használni.

3.2. AR modellek

Az *autoregresszív modellek* alapötlete, hogy egy sztochasztikus folyamat jelenlegi tagja kifejezhető p darab múltbeli érték és egy véletlen hibatag lineáris kombinációjaként. Emlékezzünk vissza az előző fejezetben definiált *backshift operátorra*, amelyre $BX_t = X_{t-1}$. Ezzel tetszőleges X_t előtti tagot fel tudunk írni, az $X_{t-k} = B^k X_t$ kifejezés segítségével.

Elevenítsük fel az AR(p) modell definícióját:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + w_t$$

Írjuk fel ezt a formulát a backshift operátort használva:

$$\begin{aligned} X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} &= w_t. \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) X_t &= w_t. \end{aligned}$$

Vezessünk be egy autoregresszív operátort a következő definícióval:

$$\phi(B) := 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j B^j.$$

Ennek segítségével egy sokkal tömörebb alakban is felírhatjuk az AR(p) modellt:

$$\phi(B)X_t = w_t.$$

A legegyszerűbb AR folyamat az AR(0), amelynek tagjai függetlenek egymástól, ezért lényegében ez csak egy fehér zaj folyamat. Az AR(1) folyamat $X_t = \phi_1 X_{t-1} + w_t$ alakban áll elő. Amennyiben $|\phi_1|$ 0-hoz közeli érték, a folyamat továbbra is csak fehér zajnak tűnik. Ha $\phi_1 < 0$, akkor X_t legtöbbször pozitív és negatív értékek között oszcillál. Továbbá ha $\phi_1 = 1$, egy véletlen bolyongást kapunk, ami nem stacionárius. Az AR(1) folyamatot az alábbi módon is reprezentálhatjuk:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + w_t \\ &= \phi_1 (\phi_1 X_{t-2} + w_{t-1}) + w_t \\ &= \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 w_{t-1} + w_t \\ &\vdots \\ &= \phi_1^k X_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \phi_1^j w_{t-j}. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy ha $k \rightarrow \infty$ és $|\phi_1| < 1$, akkor $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j w_{t-j}$.

5. Tétel. Ha $|\phi_1| < 1$, akkor az $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ AR(1) folyamat gyengén stacionárius, és kauzális megoldása:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j w_{t-j}.$$

Bizonyítás. Nézzük meg, miért teljesíti a gyenge stacionaritás feltételeit az X_t AR(1) folyamat:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_t &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j w_{t-j} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \mathbb{E}(w_{t-j}) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \\ \mathbb{E}(X_t^2) &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} \mathbb{E}(w_{t-j}^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} \sigma_w^2 = \sigma_w^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j} = \frac{\sigma_w^2}{1 - \phi_1^2} \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A második sor végén szereplő hányados véges, hiszen $|\phi_1| < 1 \Rightarrow 0 \leq \phi_1^2 < 1$, és a fehér zaj definíciója alapján $\sigma_w^2 < \infty$. Ezzel beláttuk, hogy az első két tulajdonság teljesül.

Az utolsó tulajdonság vizsgálatakor használjuk fel a kovariancia linearitását, illetve, hogy $k > 0$ esetén $\text{Cov}(w_t, X_{t-k}) = 0$:

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X_t, X_{t-k}) &= \text{Cov}(\phi_1 X_{t-1} + w_t, X_{t-k}) = \phi_1 \text{Cov}(X_{t-1}, X_{t-k}) = \dots \\ &= \phi_1^k \text{Cov}(X_{t-k}, X_{t-k}) = \phi_1^k \text{Var}(X_t) = \phi_1^k \mathbb{E}(X_t^2) = \phi^k \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}.\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy ez a kifejezés csupán k -tól függ, azaz a folyamat valóban gyengén stacionárius. $\square$

Megjegyezzük, hogy amennyiben $|\phi_1| > 1$, kiterjeszthetnénk a fenti jelölésrendszert, hogy az $X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \phi_1^{-j} w_{t+j}$ felírást kapjuk. Ez a gyakorlatban azonban nem sok hasznot hordozna, hiszen jövőbeli értékeket kéne ismernünk, hogy a jelenlegit kiszámoljuk, azaz ennek megoldása semmiképpen sem lenne kauzális.

3.3. MA modellek

Az AR modellek egy lényeges problémája, hogy figyelmen kívül hagyják az esetleges korrelációt a sorozat hibatagjai között, miközben a valóságban ezek a tagok gyakran függenek egymástól. Ezt orvosolják a *mozgóátlag modellek*, amelyek egy véletlen hibatag mellett, q darab múltbeli hibatag segítségével írják fel a sztochasztikus folyamat jelenlegi tagját. Emlékezzünk vissza az MA(q) folyamat korábbi definíciójára:

$$X_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \dots + \theta_q w_{t-q}.$$

Hasonlóan az autoregresszív operátorhoz, definiálhatunk egy *mozgóátlag operátort* is:

$$\theta(B) := 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q,$$

ahol B a backshift operátor, azaz $B(w_t) = w_{t-1}$. Ekkor a következő módon is felírhatjuk az MA(q) modellt:

$$\begin{aligned}X_t &= w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \dots + \theta_q w_{t-q} \\ &= (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) w_t \\ &= \theta(B) w_t.\end{aligned}$$

6. Tétel. Minden $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ MA(q) folyamat gyengén stacionárius.

Bizonyítás. Nézzük meg, miért teljesíti a gyenge stacionaritás feltételeit az X_t MA(q) folyamat:

$$\mathbb{E}X_t = \mathbb{E} \left(w_t + \sum_{j=1}^q \theta_j w_{t-j} \right) = \mathbb{E}w_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \mathbb{E}w_{t-j} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Már látjuk, hogy a sorozat minden tagjának megegyezik a várható értéke. Most vizsgáljuk meg, véges-e a második momentumuk. Ehhez felhasználjuk, hogy q és a θ_j együtthatók végesek, $\mathbb{E}(w_i w_j) = 0$, ha $i \neq j$, különben pedig $\mathbb{E}(w_i w_i) = \sigma_w^2 < \infty$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^2) &= \mathbb{E} \left(\left(w_t + \sum_{j=1}^q \theta_j w_{t-j} \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(w_t^2 + 2 \sum_{j=1}^q \theta_j w_{t-j} w_t + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q \theta_j \theta_k w_{t-j} w_{t-k} \right) \\ &= \mathbb{E}(w_t^2) + \sum_{j=1}^q \theta_j^2 \mathbb{E}(w_{t-j}^2) \\ &= \sigma_w^2 + \sigma_w^2 \sum_{j=1}^q \theta_j^2 < \infty. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbb{E}X_t = 0$, a kovarianciát az alábbi alakban írhatjuk:

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) = \mathbb{E} \left(\left(w_t + \sum_{j=1}^q \theta_j w_{t-j} \right) \left(w_{t+h} + \sum_{k=1}^q \theta_k w_{t+h-k} \right) \right).$$

Ismét felhasználjuk, hogy $\mathbb{E}(w_i w_j) = 0$, ha $i \neq j$, különben pedig $\mathbb{E}(w_i w_i) = \sigma_w^2$, ezért a fenti összegből sok tag ki fog esni. Csupán azok fognak megmaradni, amelyekre $t-j = t+h-k$, azaz $k = j+h$. Ez hasznos lesz, amikor szeretnénk majd egyindexűvé alakítani az összeget, és azt is tartsuk fejben, hogy $q \geq k = j+h \Rightarrow j \leq q-h$. Így végül az alábbi formulát kapjuk a fenti egyenletből:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) &= \mathbb{E}(w_t^2) + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q \theta_{t-j} \theta_{t+h-k} \mathbb{E}(w_{t-j} w_{t+h-k}) \\ &= \sigma_w^2 + \sum_{j=1}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h} \sigma_w^2 = \sigma_w^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h} \right). \end{aligned}$$

Látjuk, hogy ez a kifejezés csupán h -tól függ, azaz a folyamat valóban gyengén

stacionárius. □

3.4. ARMA és ARIMA modellek

Az AR(p) és MA(q) modellek kombinálásával egy ARMA(p, q) folyamatot kaphatunk:

$$X_t = w_t + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j w_{t-j}.$$

Ezt a korábban bevezetett autoregresszív- és mozgóátlag operátorokkal sokkal tömörebben is felírhatjuk:

$$\phi(B)X_t = \theta(B)w_t.$$

Definíció szerint az ARMA modelleknek gyengén stacionáriusnak kell lenniük. Ez problémákat vet fel, hiszen egy idősor általában nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Sok esetben viszont egy idősor előáll egy nem stacionárius trendsorozat, és egy nulla várható értékű gyengén stacionárius folyamat összegeként: $X_t = \mu_t + Y_t$. A trendsorozatot modellezhetjük egy drifttel rendelkező véletlen bolyongásként, $\mu_t = \delta + \mu_{t-1} + w_t$ alakban. Ezt beillesztve az idősor fenti alakjába, az elsőrendű differenciáltat tekintve, a trendsorozat tagjai kiesnek a kifejezésből:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu_t - \mu_{t-1} + Y_t - Y_{t-1} = \delta + w_t + \Delta Y_t.$$

A differenciálást gyakran a backshift operátor segítségével fejezzük ki. Például:

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= X_t - X_{t-1} = X_t - BX_t = (1 - B)X_t \\ \Delta^2 X_t &= \Delta(\Delta X_t) = \Delta(X_t - X_{t-1}) = (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = X_t - 2BX_t + B^2X_t = (1 - 2B + B^2)X_t \\ &= (1 - B)^2 X_t. \end{aligned}$$

És így tovább, általában egy folyamat d-ad rendű differenciáltját $\Delta^d X_t = (1 - B)^d X_t$ alakban írjuk. Emlékezzünk vissza rá, hogy egy folyamatot akkor nevezünk ARIMA(p, d, q)-nak, ha a d-ad rendű differenciáltja ARMA(p, q) folyamat volt. Ezért az ARIMA(p, d, q) modellt az eddigiek alapján legegyszerűbben a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)w_t$$

4. fejezet

ARCH folyamatok

Jelen fejezetben elkezdjük az ARCH folyamatok bemutatását. Az ARCH modellt Robert Engle vezette be 1982-ben [2]. Hamar széles körben elterjedtté vált, hiszen ez volt az első olyan modell, amely alkalmas volt heteroszkedasztikusnak feltételezett folyamatok kezelésére. Az ARCH modellben a hibatagok szórásnégyzete autoregresszív (AR) folyamatot követ, kapcsolódási pontot teremtve az előző fejezetben bemutatott egyszerű- és a most következő fejlettebb idősoros modellek között. Mivel az ARCH(p) a később tüzetesen megvizsgált GARCH(p,q) modell speciális esete, ebben a fejezetben a [4] cikket feldolgozva kifejezetten az ún. ARCH(∞) folyamat-tal foglalkozunk. Most emlékezzünk vissza a korábban definiált ARCH(p) modellre:

$$x_t = \epsilon_t \sigma_t \quad (4.1a)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2 \quad (4.1b)$$

Giraitis, Kokoszka, és Leipus (1998) elégséges feltételeket találtak az ARCH(∞) folyamat erős stacionaritására [8]. Ebben szerepel a GARCH folyamatok legáltalánosabb felírása, amely a szórásnégyzetet az alábbi alakban fejezi ki:

$$\sigma_t^2 = \tau + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k x_{t-k}^2, \quad \text{m.m., és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k < \infty, \quad (4.2)$$

ahol $\tau \geq 0$, illetve $\psi_k \geq 0$. Ezt az ARCH(∞) modellt Robinson (1991) vezette be [9]. Ebből a GARCH(p, q) modellt úgy állíthatjuk elő, ha exponenciálisan viselkedő ψ_k -kat választunk. Például GARCH(1, 1) folyamatot kapunk, ha $\tau = \omega / (1 - \beta_1)$ és $\psi_j = \alpha_1 \beta_1^{j-1}$ beállításokkal dolgozunk. Az ARCH(p) modellt úgy nyerhetjük ki a

fenti felírásból, ha $\tau = \omega$ és $\psi_j = 0$, amennyiben $j > p$. Habár az itt szereplő ψ_j együtthatóknak megengedjük, hogy hiperbolikusan viselkedjenek, Giraitis, Kokoszka és Leipus erős stacionaritásra vonatkozó feltétele,

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^2) \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k < 1, \quad (4.3)$$

magával vonja az x_t folyamat második momentumának korlátosságát. A (4.3) feltétel GARCH(1, 1) folyamat esetén ekvivalens az $\mathbb{E}(\beta_1 + \alpha_1 \epsilon_t^2) < 1$ kifejezéssel, amely jól ismert, Bollerslev által adott feltétele a folyamat erős stacionaritásának [3], amint majd az ezutáni fejezetben azt látni fogjuk. A soron következő részben azonban azzal foglalkozunk, milyen feltételek mellett lesz erősen stacionárius az ARCH(∞) folyamat.

4.1. Az ARCH(∞) folyamat erős stacionaritása

Az ARCH(∞) folyamat szórásnégyzete a (4.1a) és (4.3) összefüggések rekurzív használatával az alábbi alakra hozható:

$$\sigma_t^2 = \tau \sum_{l=0}^{\infty} M_l(t), \quad \text{m.m.}, \quad (4.4)$$

ahol $M_0(t) := 1$ és

$$M_l(t) := \sum_{j_1, \dots, j_l=1}^{\infty} \psi_{j_1} \dots \psi_{j_l} \epsilon_{t-j_1}^2 \dots \epsilon_{t-j_1-\dots-j_l}^2, \quad l \geq 1. \quad (4.5)$$

Vegyük észre, hogy $M_l(t) = M_l(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots)$, ha $l \geq 1$, azaz minden $M_l(t)$ előáll az öt megelőző összes ϵ_t függvényeként.

Azonban σ_t^2 -nek létezik más nemlineáris mozgóátlag reprezentációja is. Ahogyan azt később majd látjuk még, Nelson (1990) főként a GARCH(1, 1) folyamatot kutatva [10], az alábbi összefüggést írta fel:

$$\sigma_t^2 = \omega \sum_{k=0}^{\infty} N_k(t), \quad \text{m.m.}, \quad (4.6)$$

ahol

$$N_k(t) := \prod_{j=1}^k (\beta_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-j}^2), \quad k \geq 0, \quad (4.7)$$

azzal a megszokott feltétellel élve, hogy $\prod_{i=a}^b c_i = 1$, ha $a > b$, bármely $\{c_i\}$ sorozat esetén. Könnyen látszik, hogy ellentétben $M_l(t)$ -vel, $N_k(t) = N_k(\epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_{t-k})$, ahol $(k \geq 1)$, azaz $N_k(t)$ az öt megelőző legfeljebb k darab ϵ_j érték függvényeként írható fel.

Általánosítva a (4.6)-ot és (4.7)-et, az ARCH(∞) modell egy új reprezentációját kapjuk. Ezt adja meg a következő tétel.

7. Tétel. *Tekintsük az ARCH(∞) folyamat (4.3) szerinti felírását. Ekkor amennyiben $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j < \infty$, akkor*

$$\sigma_t^2 = \omega \sum_{k=0}^{\infty} N_k(t), \quad m.m., \quad (4.8)$$

ahol $\omega := \tau / (\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i)$, és $k \geq 0$ esetén

$$N_k(t) = \psi_{k+1} + \nu_k. \quad (4.9)$$

Itt a ν_k jelölés alatt a

$$\sum_{l=1}^k \left(\sum_{j_1=1}^{k-l+1} \sum_{j_2=1}^{k-l+2-j_1} \cdots \sum_{j_l=1}^{k-j_1-\dots-j_{l-1}} \psi_{j_1} \psi_{j_2} \cdots \psi_{j_l} \psi_{k-j_1-\dots-j_l+1} \epsilon_{t-j_1}^2 \cdots \epsilon_{t-j_1-\dots-j_l}^2 \right)$$

kifejezést értjük, feltéve, hogy $\sum_{i=a}^b c_i = 0$, ha $a > b$, bármely $\{c_i\}$ sorozat esetén.

Vegyük észre, hogy ezzel ekvivalensen, amennyiben $\psi_1 > 0$, választhatnánk $N_0(t) := 1$, és $\omega := \psi_1 \tau / (\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i)$ beállításokat, és a (4.9)-ben szereplő minden $N_k(t)$ -t eloszthatnánk ψ_1 -gyel (ha $k \geq 1$). Ekkor visszakapnánk a (4.7)-ben GARCH(1, 1)-hez használt Nelson-féle paraméterezést.

Kibontva (4.9)-et $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ esetén a következőt látjuk:

$$\begin{aligned} N_0(t) &= \psi_1 \\ N_1(t) &= \psi_2 + \psi_1^2 \epsilon_{t-1}^2 \\ N_2(t) &= \psi_3 + \psi_1 \psi_2 (\epsilon_{t-1}^2 + \epsilon_{t-2}^2) + \psi_1^3 \epsilon_{t-1}^2 \epsilon_{t-2}^2 \\ N_3(t) &= \psi_4 + (\psi_1 \psi_3 \epsilon_{t-1}^2 + \psi_2^2 \epsilon_{t-2}^2 + \psi_1 \psi_3 \epsilon_{t-3}^2) \\ &\quad + \psi_1^2 \psi_2 (\epsilon_{t-1}^2 \epsilon_{t-2}^2 + \epsilon_{t-1}^2 \epsilon_{t-3}^2 + \epsilon_{t-2}^2 \epsilon_{t-3}^2) + \psi_1^4 \epsilon_{t-1}^2 \epsilon_{t-2}^2 \epsilon_{t-3}^2 \\ N_4(t) &= \psi_5 + \dots \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy $N_k(t)$ -ben szereplő tagok a következőképpen néznek ki: az első együttható mellett nincs ϵ_{t-i}^2 , majd következnek az egyes ϵ_{t-i}^2 tagok, azután az $\epsilon_{t-i}^2 \epsilon_{t-j}^2$ ($i \neq j$) párok, és így tovább. Ha ezeket összeadjuk, majd elosztjuk $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$ -vel, akkor rendre a (4.4)-ből ismert $M_0(t), M_1(t), M_2(t), \dots$ összegeket kapjuk. Egyedül ARCH(p) folyamat esetén esik egybe a (4.1b) és (4.8) reprezentáció, ugyanis pontosan ilyenkor igaz $\psi_j = 0$, ha $j > p$, ami miatt $M_l(t) = N_l(t)$ teljesül minden $l \geq 1$ esetén.

A megfelelő nemlineáris mozgóátlag felírás használata kritikusnak bizonyul az ARCH(∞) tulajdonságainak vizsgálatakor. A (4.9)-et használva most felírjuk az ARCH(∞) folyamat erős stacionaritásának és ergodicitásának elégséges feltételeit.

Tegyük fel, hogy $\gamma := \mathbb{E}(\log \epsilon_t^2)$ jóldefiniált. Legyen

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\gamma}{2}, & \gamma < 0 \\ \frac{3(\gamma+\delta)}{2}, & \gamma \geq 0 \end{cases}$$

tetszőleges $\delta > 0$ konstansra.

8. Tétel. *Legyen $0 < \tau < \infty$ és $\psi_k > 0$ legalább egy $k \geq 1$ esetén. Ha*

$$e^\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i < 1, \tag{4.10}$$

akkor a (4.3)-ben definiált ARCH(∞) modellre teljesül, hogy bármely t -re

$$\tau \leq \sigma_t^2 < \infty \quad m.m.,$$

és σ_t^2 erősen stacionárius és ergodikus egy jóldefiniált, nem triviális valószínűségi mérték szerint a $[\tau, \infty)$ intervallumon.

Exponenciálisan csökkenő ψ_j -k mellett, például GARCH(p, q) folyamat esetén, ahol

$$\psi_j \leq A\rho^{j-1} \quad (j \geq 1),$$

valamely $0 < A < \infty$ és $0 < \rho < 1$ konstansokra, (4.10) az alábbi alakban írható:

$$\rho + Ae^\lambda < 1.$$

Ekkor kihasználva a ψ_j -k exponenciálisan csökkenő természetéből adódó speciális struktúrát, akár (4.10)-nél gyengébb feltételt is adhatunk az erős stacionaritásra.

9. Tétel. *Legyen $0 < \tau < \infty$ és $\psi_j \leq A\rho^{j-1}$ ($j \geq 1$) valamely $0 < \alpha \leq A < \infty$ és $0 < \rho < 1$ esetén, ahol $\psi_j \sim \alpha\rho^{j-1}$ ahogyan $j \rightarrow \infty$. Ha*

$$\rho + Ae^\lambda < 2,$$

illetve

$$\mathbb{E}[\log(\rho + \alpha\epsilon_t^2)] < 0,$$

akkor a (4.3)-ben definiált ARCH(∞) modellre teljesül, hogy bármely t -re

$$\tau \leq \sigma_t^2 < \infty \quad m.m.,$$

és σ_t^2 erősen stacionárius és ergodikus egy jóldefiniált, nem triviális valószínűségi mérték szerint a $[\tau, \infty)$ intervallumon.

5. fejezet

GARCH folyamatok

Jelen fejezetben rátérünk a dolgozat központi témájaként feltüntetett GARCH folyamatok elemzésére. A GARCH modellt Tim Bollerslev alkotta meg 1986-ban [3], általánosítva az addigra népszerűvé vált ARCH folyamatokat. A GARCH modellben, elődjével ellentétben, a hibatagok szórásnégyzete ARMA folyamatot követ. Először megvizsgáljuk a gyakorlati alkalmazásokban gyakran előforduló ARCH(1) és GARCH(1,1) modell stacionaritását, majd karakterizáljuk a GARCH(p,q) modell gyenge stacionaritását. Mindezt az [5] cikk alapján tesszük. Ezután bizonyítással együtt ismertetünk egy fontos, a [6] cikkben leírt eredményt, amely a GARCH(p,q) folyamat erős stacionaritására vonatkozik. Ebben a fejezetben a **GARCH(p, q)** modell alábbi alakját fogjuk használni:

$$\begin{cases} x_t = \epsilon_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \end{cases} \quad (5.1)$$

ahol $\omega > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q, \{\epsilon_t\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, 0 várható értékkel és 1 szórással, és ϵ_t független x_{t-s} -től, $s > 0$.

5.1. Az ARCH(1) és a GARCH(1, 1) modellek erős stacionaritása

Tegyük fel, hogy $(p, q) = (1, 1)$ vagy $(p, q) = (1, 0)$. Ekkor rendre egy **GARCH(1, 1)** vagy **ARCH(1)** folyamatot kapunk, amelyekre teljesül, hogy:

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \epsilon_{t-1}^2 = \omega + (\beta_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2) \sigma_{t-1}^2, \quad (5.2)$$

ahol $\beta_1 = 0$ ha $q = 0$. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$A_t = \beta_1 + \alpha_1 \epsilon_t^2, \quad B_t = \omega, \quad Y_t = \sigma_{t+1}^2. \quad (5.3)$$

Ebből felírhatjuk, hogy $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}} = (\sigma_{t+1}^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ nem más, mint az

$$Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t$$

véletlen rekurzív egyenlet megoldása, ahol $(A_t, B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. Látni fogjuk, hogy (5.2) minden $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ -vel jelölt erősen stacionárius megoldása előáll $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ egy megfelelő függvényeként, így $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ stacionaritásából következik $(\sigma_t^2, \varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stacionaritása, ezáltal (X_t, σ_t) stacionaritása is. Tehát a GARCH(1, 1) modellekhez tartozó erősen stacionárius megoldás létezésének kérdését visszavezethetjük a (5.2) egyenlet erősen stacionárius megoldásainak tanulmányozására.

Mivel később szükségünk lesz többváltozós véletlen rekurzív egyenletekre a magasabbrendű GARCH folyamatok kezeléséhez, ezért már most $\mathbb{R}^d$ -ben definiáljuk őket. Legyen tehát $d \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy $(A_t, B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. valószínűségi változók sorozata, ahol A_t egy $(d \times d)$ -es véletlen mátrix, és B_t egy d -dimenziós vektorváltozó. Ekkor a következő egyenletet *véletlen rekurzív egyenletnek* nevezzük:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{Y}_{t-1} + B_t \quad (t \in \mathbb{Z}). \quad (5.4)$$

Ennek megoldása, $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, d -dimenziós vektorváltozók sorozata. Minden ilyen megoldás kielégíti az alábbi egyenletet:

$$\begin{aligned} Y_t &= A_t Y_{t-1} + B_t \\ &= A_t A_{t-1} Y_{t-2} + A_t B_{t-1} + B_t = \dots \\ &= \left(\prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) Y_{t-k-1} + \sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$\forall k \in \mathbb{N}_0$ esetén, azzal az általános megjegyzéssel, hogy $\prod_{j=0}^{-1} A_{t-j} = 1$, amennyiben egy üres halmazon vesszük a produktumot. Ha $k \rightarrow \infty$, akkor joggal remélhetjük azt, hogy az egyenlet stacionárius megoldást ad, illetve hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) Y_{t-k-1} = 0$ majdnem biztosan, és hogy $\sum_{i=0}^k \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i}$ majdnem biztosan konvergens, ha $k \rightarrow \infty$.

A GARCH(1, 1) és az ARCH(1) esetekben valóban fennállnak ezek az állítások. Legyen A_t, B_t, Y_t (5.3) szerint definiálva. Ekkor (5.5) alapján:

$$\sigma_{t+1}^2 = Y_t = \left(\prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) \sigma_{t-k}^2 + \omega \sum_{i=0}^k \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}.$$

Mivel ez egy nemnegatív tagokból álló összeg, $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j}$ majdnem biztosan konvergens $\forall t$ esetén, ezáltal $\prod_{i=0}^k A_{t-i}$ majdnem biztosan konvergál a 0-hoz, amint $k \rightarrow \infty$.

Ha $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ erősen stacionárius, akkor $\left(\prod_{i=0}^k A_{t-i} \right) \sigma_{t-k}^2$ konvergál eloszlásban, emiatt sztochasztikusan is a 0-hoz, amint $k \rightarrow \infty$. Tehát az ARCH(1) és GARCH(1,1) esetekben legfeljebb egy erősen stacionárius megoldás, $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}} = (Y_{t-1})_{t \in \mathbb{Z}}$, létezik, amit az alábbi módon határozhatunk meg:

$$Y_t := \sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (5.6)$$

Másrészt egyértelmű, hogy ha (5.6) majdnem biztosan konvergál néhány, ezáltal minden $t \in \mathbb{Z}$ -re, ahol $(A_t, B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ i.i.d. $\mathbb{R}^d$ -beli együtthatók a (5.4) véletlen rekurzív egyenletből, akkor a (5.6)-ben definiált Y_t (5.4) egy erősen stacionárius megoldását határozza meg.

Ezzel beláttuk, hogy a GARCH(1,1)/ARCH(1) folyamatok erősen stacionárius megoldásának létezéséből következik, hogy $\prod_{i=0}^k A_{t-i} \rightarrow 0$ majdnem biztosan, amint $k \rightarrow \infty$. Ezen állítás megfordítása is igaz, az alábbi tétel következményeként:

10. Tétel. *Legyen $d = 1$ és $(A_t, B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -beli i.i.d. sorozat. Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(B_0 = 0) < 1$, $\mathbb{P}(A_0 = 0) = 0$, hogy $\prod_{i=0}^n A_{t-i}$ majdnem biztosan konvergál a 0-hoz, ha $n \rightarrow \infty$, továbbá azt is, hogy*

$$\int_{(1, \infty)} \frac{\log q}{T_A(\log q)} \mathbb{P}_{|B_0|}(dq) < \infty, \quad (5.7)$$

ahol $\mathbb{P}_{|B_0|}$ jelölje $|B_0|$ eloszlását, és $T_A(y) := \int_0^y \mathbb{P}(|A_0| < e^{-x}) dx$, minden $y \geq 0$. Ekkor $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i}$ majdnem biztosan abszolút konvergens, bármely $t \in \mathbb{Z}$ esetén.

A GARCH(1,1)/ARCH(1) modellek esetén $B_0 = \alpha_0 > 0$, ezért (5.7) nyilvánvalóan teljesül. Vegyük észre, hogy $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{i-1} A_{t-j} \right) B_{t-i}$ triviálisan majdnem biztosan konvergens, ha $\mathbb{P}(A_0 = 0) > 0$, ebben az esetben $\prod_{i=0}^{\infty} A_{t-i} = 0$ majdnem biz-

tosan. Ezért látjuk, hogy a GARCH(1,1)/ARCH(1) erősen stacionárius megoldása pontosan akkor létezik, ha $\prod_{i=0}^k A_{-i} \rightarrow 0$ majdnem biztosan, amint $k \rightarrow \infty$. Ez nyilvánvalóan fennáll, amennyiben $\mathbb{P}(A_0 = 0) > 0$, tehát tegyük fel, hogy $\beta_1 > 0$ vagy $\mathbb{P}(\epsilon_0^2 > 0) = 1$. Legyen $W_t := \log A_t, \prod_{i=0}^{\infty} A_{-i}$. Ekkor $W_t = 0$ majdnem biztosan pontosan akkor, ha a $S_n := \sum_{i=0}^n W_{-n}$ véletlen bolyongás majdnem biztosan divergál a $-\infty$ -be. Ha $\mathbb{E}W_0^+ < \infty$, akkor köztudott, hogy $S_n \rightarrow -\infty$ akkor, és csak akkor, ha $\mathbb{E}W_0^+ < \mathbb{E}W_0^- \leq \infty$; azaz vagy $\mathbb{E}W_0^- = \infty$, vagy $\mathbb{E}|W_0| < \infty$, ahol $\mathbb{E}W_0 < 0$. Továbbá S_n nem tarthat majdnem biztosan a $-\infty$ -be $n \rightarrow \infty$ esetén, ha $\mathbb{E}W_0^- < \mathbb{E}W_0^+ = \infty$.

Vegyük észre, hogy a GARCH(1,1) modellnél $\beta_1 > 0$, ezért $W_0 \geq \log \beta_1 > -\infty$, tehát $\mathbb{E}W_0^- < \infty$, amiből következik, hogy a GARCH(1,1) folyamatnak pontosan akkor létezik erősen stacionárius megoldása, ha $\mathbb{E} \log(\beta_1 + \alpha_1 \epsilon_0^2) < 0$.

ARCH(1) modell esetén azonban $\mathbb{E}W_0^- = \infty$ előállhat. Ebben az esetben Kesten és Maller (1996), illetve Erickson (1973) munkái alapján tudjuk, hogy $S_n \rightarrow -\infty$ majdnem biztosan akkor, és csak akkor, ha

$$\int_{(0,\infty)} \frac{x}{\mathbb{E}(W_0^- \wedge x)} d\mathbb{P}(W_0^+ \leq x) < \infty$$

Mivel $W_0 = \log \alpha_1 + \log \epsilon_0^2$, ez a feltétel könnyen látszik, hogy független $\alpha_1 > 0$ -tól. A következőkben összegzésképp látni fogunk egy tételt a GARCH(1,1) és az ARCH(1) modellek erősen stacionárius megoldásainak karakterizációjára. GARCH(1,1) esetén, illetve ha az ARCH(1) modellnél $\mathbb{E} \log^+(\epsilon_0^2) < \infty$ teljesül, akkor Nelsen (1990) eredményére támaszkodunk. Klüppelberg (2004) tette teljessé a képet, és egészítette ki az állítást a $\mathbb{E} \log^+(\epsilon_0^2) = \infty$ esettel. A tételben szokásos módon $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\log^+(x) = \log(\max(1, x))$ jelölést használjuk, amivel $\log^+(\epsilon_0^2) = (\log \epsilon_0^2)^+$.

11. Tétel. (a) Egy GARCH(1,1) folyamatnak $\omega, \alpha_1, \beta_1 > 0$ esetén pontosan akkor létezik erősen stacionárius megoldása, ha

$$-\infty < \mathbb{E} \log(\beta_1 + \alpha_1 \epsilon_0^2) < 0. \quad (5.8)$$

Ez a megoldás egyértelmű, és szórásnégyzetét az alábbi egyenlet adja meg:

$$\sigma_t^2 = \omega \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{i-1} (\beta_1 + \alpha_1 \epsilon_{t-1-j}^2). \quad (5.9)$$

(b) Egy ARCH(1) folyamat, melyben $\beta_1 = 0$ és $\omega, \alpha_1 > 0$, pontosan akkor rendelkezik erősen stacionárius megoldással, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

1. $\mathbb{P}(\epsilon_0 = 0) > 0$.
2. $\mathbb{E}|\log \epsilon_0^2| < \infty$ és $\mathbb{E} \log \epsilon_0^2 < -\log \alpha_1$, azaz (5.8) fennáll.
3. $\mathbb{E}(\log \epsilon_0^2)^+ < \infty$ és $\mathbb{E}(\log \epsilon_0^2)^- = \infty$.
4. $\mathbb{E}(\log \epsilon_0^2)^+ = \mathbb{E} \log \epsilon_0^2 = \infty$ és

$$\int_0^\infty x \left(\int_0^x \mathbb{P}(\log \epsilon_0^2 < -y) dy \right)^{-1} d\mathbb{P}(\log \epsilon_0^2 \leq x) < \infty.$$

Mindegyik esetben a kapott erősen stacionárius megoldás egyértelmű, és szórásnégyzetét szintén (5.9) határozza meg.

Zárásként röviden tegyünk még említést a GARCH(1, 1) folyamat magasabb momentumairól. Az (5.2) által meghatározott GARCH(1, 1) modellnek akkor, és csak akkor létezik $2r$ -edik momentuma, ha $\sum_{j=0}^r \binom{r}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{r-j} < 1$, ahol $a_0 = 1$ és $a_j = \prod_{i=1}^j (2i - 1)$, ha $j = 1, 2, \dots$. Bollerslev (1986) megadott egy rekurzív formulát x_t páros momentumainak meghatározására, ha $p = q = 1$. A normális eloszlás szimmetriájának következményeként, a páratlan momentumok értéke nulla, ha léteznek. A GARCH(1,1) modell negyedik momentumát, amennyiben létezik, a következő kifejezés adja meg:

$$\mathbb{E}(x_t^4) = \frac{3\mathbb{E}(x_t^2)(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2}.$$

5.2. A GARCH(p, q) modell gyenge stacionaritása

Bár a GARCH(p, q) modell erős stacionaritásával egy későbbi fejezetben részletesen foglalkozunk, most szeretnénk a gyenge stacionaritás vizsgálatához egy, az ottanitól különböző feltételeket tartalmazó tételt kimondani.

Ha a GARCH(p, q) modell ϵ_t zajsorozatának véges a szórása, Bollerslev adott egy praktikus elégséges feltételt arra, hogy a GARCH-folyamatnak létezzen erősen stacionárius megoldása – ez a következő tétel (a) részében szerepel, és könnyen ellenőrizhető. Bougerol és Picard megmutatták, hogy ebben a feltételben a határesetek

bizonyos körülmények között szintén elérhető, és emellett adtak egy szükséges feltételt is az erősen stacionárius megoldások létezésére [11].

12. Tétel. *Legyen $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ egy $GARCH(p, q)$ folyamat zajsorozata, és tegyük fel, hogy $0 < \mathbb{E}(\epsilon_0^2) < \infty$. Ekkor teljesülnek a következő állítások:*

(a) *Ha $\mathbb{E}(\epsilon_0^2) \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$, akkor a $GARCH(p, q)$ folyamatnak létezik erősen stacionárius megoldása. Sőt, ez a megoldás egyértelmű.*

(b) *Ha $\mathbb{P}(\epsilon_0 = 0) = 0$, ϵ_0 -nak nem korlátos a tartója, $p, q \geq 2$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_p > 0$, $\beta_1, \dots, \beta_q > 0$, illetve $\mathbb{E}(\epsilon_0^2) \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$, akkor a $GARCH(p, q)$ folyamatnak létezik erősen stacionárius megoldása. Sőt, ez a megoldás egyértelmű.*

(c) *Ha $\sum_{j=1}^q \beta_j \geq 1$, akkor a $GARCH(p, q)$ folyamatnak nem létezik erősen stacionárius megoldása.*

Valós adatok esetén gyakran olyan α_i és β_j paramétereket becsülünk, amelyekre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j$ közel van az 1-hez, feltételezve, hogy a zaj szórása 1. Az *integrált ARMA*, másnéven *ARIMA* folyamatok analógiájára Engle és Bollerslev azokat a GARCH folyamatokat, amelyekre $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$ fennáll, *integrált GARCH* folyamatoknak, röviden *IGARCH*(p, q) folyamatoknak nevezték [12]. Egy későbbi fejezetben az ehhez hasonló speciális GARCH folyamatokkal majd részletesebben is foglalkozunk. Egyelőre figyeljük meg, hogy az iménti tétel (b) része azt mutatja, hogy az IGARCH folyamatoknak lehet erősen stacionárius megoldása, míg egyébként az ARIMA folyamatoknál ez nem volt egyértelműen megoldott probléma.

Idézzük fel, hogy egy $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vektorváltozókából álló $\mathbb{R}^d$ -beli idősort *gyengén stacionáriusnak* nevezünk, ha $\mathbb{E}\|Z_t\|^2 < \infty \forall t \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}(Z_t) \in \mathbb{R}^d$ megegyezik $\forall t \in \mathbb{Z}$ esetén, és a kovariancia mátrixok kielégítik az alábbi egyenlőséget:

$$Cov(Z_{t_1+h}, Z_{t_2+h}) = Cov(Z_{t_1}, Z_{t_2}),$$

$\forall t_1, t_2, h \in \mathbb{Z}$. Nyilvánvaló, hogy minden erősen stacionárius megoldás, amelyre teljesül, hogy $\mathbb{E}\|Z_0\|^2 < \infty$, egyben gyengén stacionárius is. Látni fogjuk, hogy kauzális GARCH folyamatoknál ezen állítás megfordítása is igaz, azaz ekkor minden gyengén stacionárius folyamat egyben erősen stacionárius is.

Legyen (X_t, σ_t) egy GARCH folyamat, ahol σ_t független ϵ_t -től, ami automatikusan teljesül, amennyiben kauzális GARCH folyamatról beszélünk. Ekkor ha $\mathbb{P}(\epsilon_0 = 0) < 1$, akkor az 5.1 egyenletből, illetve σ_t és ϵ_t függetlenségéből következik, hogy adott $r \in (0, \infty)$, $\mathbb{E}|X_t|^r < \infty$ pontosan akkor, ha $\mathbb{E}|\epsilon_t|^r < \infty$ és $\mathbb{E}\sigma_t^r < \infty$.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\epsilon_0^2 \in (0, \infty)$, illetve, hogy (X_t, σ_t) egy GARCH(p, q) folyamat, amelyre $\mathbb{E}\sigma_t^2 = \mathbb{E}\sigma_{t'}^2 < \infty$ minden $t, t' \in \mathbb{Z}$ esetén. Ekkor szintén 5.1 alapján:

$$\mathbb{E}(\sigma_0^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbb{E}(\sigma_0^2) \mathbb{E}(\epsilon_0^2) + \sum_{j=1}^q \beta_j \mathbb{E}(\sigma_0^2).$$

Ebből látjuk, hogy egy kauzális gyengén stacionárius megoldás létezésének szükséges feltétele, hogy $\mathbb{E}(\epsilon_0^2) \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Még többet mond ennél Bollerslev (1986) következőkben ismertetett eredménye [3], amely szükséges és elégséges feltételt ad a keresett megoldás létezésére:

13. Tétel. Vegyünk egy (5.1) szerint definiált $(X_t, \sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ GARCH(p, q) folyamatot, és legyen $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ olyan, hogy $\mathbb{E}(\epsilon_0^2) < \infty$. Ekkor a GARCH(p, q) folyamatnak pontosan akkor létezik kauzális gyengén stacionárius megoldása, ha

$$\mathbb{E}(\epsilon_0^2) \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1.$$

Ez a kauzális gyengén stacionárius megoldás egyértelmű, és egybeesik az egyértelmű erősen stacionárius megoldással. Fennáll továbbá, hogy:

$$\mathbb{E}(\sigma_t^2) = \frac{\omega}{1 - \mathbb{E}(\epsilon_0^2) \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j}, \quad \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(\sigma_t^2) \mathbb{E}(\epsilon_0^2).$$

5.3. A GARCH(p, q) modell erős stacionaritása

Ebben az alfejezetben [6]-ot feldolgozva bizonyítással együtt megmutatjuk a jelen dolgozatban szereplő egyik legerősebb állítást, mely szükséges és elégséges feltételt ad az általános GARCH(p, q) modell erősen stacionárius megoldásának létezésére.

Vezessünk be új jelöléseket. Jelölje $\{x_t\}$ az (5.1) modellt. Legyen $y_t = x_t^2$, $\eta_t = \epsilon_t^2$, $h_t = \sigma_t^2$, $\mathbf{Y}_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1}, h_t, \dots, h_{t-q+1})^T$, $B_t = (\omega \eta_t, 0, \dots, 0, \omega, 0, \dots, 0)^T$, ahol $'T'$ egy mátrix transzponáltját jelöli, továbbá legyen

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 \eta_t & \cdots & \alpha_{p-1} \eta_t & \alpha_p \eta_t & \beta_1 \eta_t & \cdots & \beta_{q-1} \eta_t & \beta_q \eta_t \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p & \beta_1 & \cdots & \beta_{q-1} & \beta_q \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}_t$ mátrix várható értéke elemenként van definiálva, ezért nyilvánvaló, hogy $\mathbb{E}\mathbf{A}_t$ egy konstans mátrix, és

$$\mathbb{E}\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p & \beta_1 & \cdots & \beta_{q-1} & \beta_q \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{p-1} & \alpha_p & \beta_1 & \cdots & \beta_{q-1} & \beta_q \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}.$$

Hasonlóan, $\mathbb{E}B_t = B \equiv (\omega, 0, \dots, 0, \omega, 0, \dots, 0)^T$. Ekkor az (5.1) egyenletből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} x_t^2 &= \epsilon_t^2 \left(\omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_t^2 x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \epsilon_t^2 h_{t-j} + \omega \epsilon_t^2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

ezt továbbírva:

$$y_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i \eta_t y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \beta_j \eta_t h_{t-j} + \omega \eta_t. \quad (5.11)$$

Tehát $\{y_t\}$ akkor és csak akkor megoldása az (5.10) egyenletnek, ha $\{\mathbf{Y}_t\}$ megoldása a következő egyenletnek:

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{Y}_{t-1} + B_t. \quad (5.12)$$

14. *Lemma.* Ha $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$, akkor a vektorváltozókól álló

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_{t-j} \right) B_{t-k}$$

sorozat majdnem biztosan konvergens. Továbbá, ha

$$\mathbf{Y}_t = B_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_{t-j} \right) B_{t-k}, \quad (5.13)$$

akkor $\{\mathbf{Y}_t\}$ egy erősen stacionárius folyamat, amely kielégíti (5.12)-t.

Bizonyítás. $\mathbf{A}_t$ és B_t definíciójából könnyen látszik, hogy mind $\{\mathbf{A}_t\}$, mind $\{B_t\}$ független, nemnegatív, vektorváltozók sorozata, és $\mathbf{A}_{t-j}$ független B_{t-k} -től, ha $k \neq j$. Ebből következik, hogy

$$\mathbb{E} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_{t-j} \right) B_{t-k} = \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbb{E} \mathbf{A}_{t-j} \right) \mathbb{E} B_{t-k} = \mathbf{A}^k B.$$

Könnyen igazolható, hogy $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja előáll a következő alakban: $\det(\lambda \mathbf{A} - I) = 1 - \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \lambda^i$, ahol $m = \max\{p, q\}$, és $\alpha_i = 0, \forall i > p$, $\beta_i = 0, \forall i > q$. Legyen $\rho(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ mátrix spektrálsugara, ekkor $\rho(\mathbf{A}) < 1$ akkor, és csak akkor, ha $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Ha $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$, akkor tudjuk, hogy:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^k < \infty.$$

Ebből adódik, hogy:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_{t-j} \right) B_{t-k} < \infty.$$

Tehát:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_{t-j} \right) B_{t-k} < \infty, \quad \text{m.m..}$$

Most már nyilvánvaló, hogy a (5.13)-ben definiált $\{\mathbf{Y}_t\}$ vektorértékű sztochasztikus folyamat erősen stacionárius. Mitőbb, látjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= B_t + \mathbf{A}_t \left[B_{t-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_{t-j} \right) B_{t-k} \right] \\ &= B_t + \mathbf{A}_t \left[B_{t-1} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{l-1} \mathbf{A}_{t-1-j} \right) B_{t-1-l} \right] \\ &= B_t + \mathbf{A}_t \mathbf{Y}_{t-1}. \end{aligned}$$

□

15. *Lemma.* Ha a (5.12) egyenletnek létezik véges első momentummal rendelkező, erősen stacionárius megoldása, akkor $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Sőt, ekkor ez az erősen stacionárius megoldás egyértelmű.

Bizonyítás. (5.12) alapján:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_0 &= \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_{-1} + B_0 \\
 &= B_0 + \mathbf{A}_0 B_{-1} + \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_{-1} \mathbf{Y}_{-2} \\
 &\vdots \\
 &= B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_{-j} \right) B_{-k} + \left(\prod_{j=0}^{n-1} \mathbf{A}_{-j} \right) \mathbf{Y}_{-n}.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Vegyük észre, hogy $\mathbf{A}_n, B_n$ és $\mathbf{Y}_n$ nemnegatívak; $\{\mathbf{A}_t\}$ független, véletlen mátrixok sorozata; $\mathbf{A}_{n-j}$ és B_{n-k} függetlenek, ha $k \neq j$; továbbá $\mathbb{E} \mathbf{Y}_0 < \infty$. Most vegyük a 5.14 egyenlet mindkét oldalának várható értékét:

$$\mathbb{E} \mathbf{Y}_0 \geq \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_{-j} \right) B_{-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{A}^k B.$$

Ebből látszik, hogy

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{A}^k B < \infty.$$

Ezáltal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n B = 0. \tag{5.15}$$

Legyen $\{\delta_i, i = 1, \dots, p+q\}$ az $\mathbb{R}^{p+q}$ tér standard bázisa, azaz $\delta_i = (\delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,p+q})^T$, ahol $\delta_{ij} = 0$, ha $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$. Ha be tudjuk látni, hogy $1 \leq i \leq p+q$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n \delta_i = 0, \tag{5.16}$$

akkor (5.16)-ból következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = 0$, amiből tovább következik, hogy $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Ahogyan korábban megmutattuk, ez utóbbi állítás ekvivalens azzal, hogy $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$, ami jelen lemma első állítása.

Történetesen, mivel $B = \omega (\delta_1 + \delta_{p+1})$ és $0 < \omega < \infty$, így (5.15) és az $\mathbf{A}$ mátrix definíciója alapján, (5.16) fennáll $i = 1$ és $i = p+1$ esetén. Szintén $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$, definíciója alapján: $\mathbf{A} \delta_{p+q} = \beta_q (\delta_1 + \delta_{p+1})$. Ha $\beta_q = 0$, akkor $\mathbf{A} \delta_{p+q} = 0$, tehát (5.16) teljesül. Ha $\beta_q > 0$, akkor a fenti egyenlőségek alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n \delta_{p+q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^{n-1} \beta_q (\delta_1 + \delta_{p+1}) = 0.$$

Könnyen látszik, hogy $2 \leq i < p$ esetén:

$$\mathbf{A}\delta_i = \alpha_i\delta_1 + \delta_{i+1} + \alpha_i\delta_{p+1}.$$

Mivel (5.16) teljesül $i = 1$ és $i = p + 1$ esetén, rekurzióval (5.16) fennáll $i = p, p - 1, \dots, 1$, esetén is. Hasonlóan, ha $p + 1 < i < p + q$:

$$\mathbf{A}\delta_i = \beta_i(\delta_1 + \delta_{p+1}) + \delta_{i+1}.$$

Vegyük észre, hogy (5.16) teljesül, ha $i = p + q$, így szintén rekurzióval megkapjuk, hogy (5.16) fennáll $i = p + q - 1, p + q - 2, \dots, p + 2$ esetén is. Ezzel bebizonyítottuk, hogy (5.16) igaz $\forall i = 1, 2, \dots, p + q$.

Az egyértelműség bizonyítása indirekt módon történik. Legyen $\{\mathbf{U}_t\}$ az (5.12) egyenlet egy $\{\mathbf{Y}_t\}$ -től különböző erősen stacionárius megoldása. Ekkor $\{\mathbf{U}_t\}$ szintén kielégít egy (5.14)-hoz hasonló egyenletet. Itt az utolsó sor jobb oldalán lévő harmadik tag sztochasztikusan tart a 0-hoz. Ebből az egyértelműség azonnal következik. $\square$

16. Tétel. *Az (5.1)-ben ismertetett $\mathbf{GARCH}(p, q)$ modellnek pontosan akkor létezik erősen stacionárius megoldása véges varianciával, ha $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$. Ez az erősen stacionárius megoldás egyértelmű.*

Bizonyítás. A kívánt eredményt a (14) és (15) lemmák kombinálásával kapjuk. $\square$

6. fejezet

Speciális GARCH folyamatok

Zárófejezetünkben említés szintjén ismertetni fogjuk a GARCH modell egyes változatait, melyek megjelenését különböző gazdasági jelenségek motiválták. A fejezet szerkezete a [7] cikket követi, a szóban forgó modellek bevezetésénél megjelölve azok eredeti forrását, ahol részletes bemutatását is megtalálhatjuk ezen folyamatoknak.

A GARCH folyamatokat azért alkották meg, hogy modellezni tudják velük a gazdasági adatokban megfigyelt empirikus törvényszerűségeket. A pénzügyi adatokat tartalmazó idősorok rengeteg közös tulajdonsággal rendelkeznek. Elsőként, a jóságok ára általában nem stacionárius, gyakran rendelkeznek egységgyökkel, miközben a hozamok jellemzően stacionáriusak. Másodszor, a hozamsorozatok legtöbbször nem vagy alig mutatnak autokorrelációt. A tagok négyzeteinek sorozata azonban sok esetben nem független, ami arra utal, hogy nemlineáris összefüggések állhatnak fent az egymást követő tagok között. A hozamok volatilitása klasztereződést mutat. Hosszabb ideig tartanak a nagyobb ingadozások, kis hozamokat jellemzően szintén kicsi értékek követnek. Ez a jelenség rámutat, hogy a feltételes variancia időben változó lehet. Harmadszor, a normalitást gyakran el kell vetni, és helyette valamilyen erőteljesebb farokeloszlást kell favorizálni. A túlzott kurtózis jelenlétét szintén magyarázhatjuk az időben változó feltételes varianciával. Negyedszer, néhány sorozatban megfigyelhető az úgynevezett leverage-hatás, azaz az árfolyamváltozások negatívan korrelálnak a volatilitás változásával. Egyes sorozatok feltétel nélküli empirikus eloszlásai ferdeséget mutatnak, amely szintén cáfolja a normális eloszlás jelenlétét. Végül pedig, a különböző értékpapírok volatilitása gyakran együtt mozog, ami annak az indikátora, hogy a piacok között léteznek kapcsolatok, és néhány közös tényező magyarázhatja a feltételes második momentumokban tapasztalt ide-

iglenes változásokat. Ebben a fejezetben olyan modellekkel fogunk megismerkedni, amelyek figyelembe veszik a feltételes variancia időbeli függését, illetve kezelik az idősor ferdeségét és túlzott kurtózisát.

Mint már korábban említettük, amikor $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j = 1$, akkor integrált GARCH, vagy rövidebb nevén IGARCH folyamatról beszélünk [12]. Az (5.1)-beli GARCH(p, q) modellt az alábbi alakra hozhatjuk a definícióknál bevezetett operátorok használatával:

$$[1 - \alpha(B) - \beta(B)]x_t^2 = \omega + [1 - \beta(B)]v_t,$$

ahol $v_t = x_t^2 - \sigma_t^2$ és $\alpha(B) = \sum_i^p \alpha_i B^i$ and $\beta(B) = \sum_{j=1}^q \beta_j B^j$. A *fractionally integrated GARCH* (avagy *FIGARCH*(p, d, q)) modellt Baillie, Bollerslev és Mikkelsen javasolta [13]. Ez akkor alkalmazható, ha a B backshift operátor fenti polinomja, $1 - \alpha(B) - \beta(B)$, faktorizálható a következő alakban:

$$\phi(L)(1 - L)^d,$$

és $\phi(z) = 0$ gyökei az egységkörön kívülre esnek, továbbá $0 \leq d \leq 1$. A FIGARCH modell magában foglalja a GARCH(p,q) modellt, amikor $d = 0$, és az IGARCH(p,q) modellt is leírja, ha $d = 1$. Amennyiben a d értéknek megengedjük, hogy 0 és 1 közötti értékeket is felvegyen, rugalmasabb modellt kapunk, amely a feltételes variancia hosszútávú összefüggéseinek leírására is alkalmas.

Az empirikus pénzügyi adatelemzések során a GARCH(1,1) és GARCH(1,2) modelleket rendszerint alkalmasnak találták a feltételes heteroszkedaszticitás megfelelő kezelésére. Ez a megfigyelés hasonló ahhoz, miszerint az alacsonyabb rendű ARMA folyamatok gyakran meglepően jól írják le a feltételes várható érték dinamikáját gazdasági idősorokban.

Fontos észrevételeznünk, hogy az eddig tekintett modellekben a sorozat korábbi értékei, függetlenül attól, hogy pozitív vagy negatív értékekről beszélünk, ugyanolyan hatást gyakorolnak a feltételes varianciára. A gyakorlatban azonban legtöbbször nem ez a helyzet. Sok gazdasági életből vett idősor durván aszimmetrikus; a negatív részvényhozamokat jóval nagyobb volatilitásnövekedés szokta követni, mint az azonos értékű pozitív részvényhozamokat. Black ezt a jelenséget 1976-os cikkében *leverage-hatásnak* nevezte [14]. Értelmezése szerint a részvények nagy áreséseit nem követi arányosan az adósság értékének csökkenése, ami növeli az idegen- és saját

tőke arányát (innenről D/E arány), ez pedig magasabb volatilitáshoz vezet. Nelson (1991) az *exponenciális GARCH* (röviden $EGARCH(p, q)$) bevezetésével ezt próbálta orvosolni [15]. Az EGARCH mellett továbbá Sentana (1991) *négyzetes (quadratic) GARCH* (avagy $QGARCH$), illetve Zakoian (1994) *küszöb (threshold) GARCH* (avagy $TGARCH$) modelljei is figyelembe veszik az aszimmetriát, és alkalmasak ilyen tulajdonsággal rendelkező idősorok kezelésére [16] [17].

Nelson a következő alakban írta fel EGARCH modelljét:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \beta_i \ln \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (\varphi \epsilon_{t-i} + \phi |\epsilon_{t-i}| - \phi E |\epsilon_{t-i}|), \quad (6.1)$$

ahol az $\omega, \alpha_i, \beta_i$ paramétereknek nem kell nemnegatívnak lenniük, szemben a korábbi modellekkel. A hozamokat érintő negatív sokk esetén nőne a D/E arány, ezáltal növekedne a jövőbeli hozamok bizonytalansága. Az EGARCH képes ezt leírni, $\alpha_i > 0$ és $\varphi < 0$ választásokkal.

A Sentanától származó QGARCH modell a következő:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \psi y_{t-q} + y_{t-q} A y_{t-q} + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2, \quad (6.2)$$

ahol $y_{t-q} = (x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-q})$. A lineáris kifejezés lehetővé teszi az aszimmetria kezelését. A főatlón kívüli elemei felelnek a múltbeli x_t értékek közötti interakciók megjelenítéséért a feltételes varianciában. A (6.2) QGARCH modell képes a szakirodalomban megjelenő különféle négyzetes variancia függvények leírására. A Bera és Lee (1989) által alkotott *augmented GARCH* modell feltételezi, hogy $\psi = 0$ [18]. Az eredeti ARCH modellben $\psi = 0, \beta_i = 0$, továbbá azzal a megszorítással is élünk, hogy A diagonális. Engle és Ng (1990) *aszimmetrikus GARCH* modellje szerint A diagonális [19]. Robinson (1991) lineáris modellt készített a szórás kiszámítására [9], ezért a $\beta_i = 0, \sigma^2 = \rho^2, \psi = 2\rho\varphi$ megkötéseket alkalmazta, továbbá feltételezte, hogy $A = \varphi\varphi^T$ és rangja 1. Ekkor a feltételes variancia az alábbi alakban áll elő:

$$\sigma_t^2 = (\rho + \varphi^T y_{t-q})^2.$$

A TGARCH modellben Zakoian (1994) az alábbi formulát adta a szórásnégyzet-re:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p (\alpha_i^+ x_{t-i}^+ + \alpha_i^- x_{t-i}^-), \quad (6.3)$$

ahol $x_t^+ = \max\{x_t, 0\}$ és $x_t^- = \min\{x_t, 0\}$. Ez a modell úgy veszi figyelembe az előforduló aszimmetriát, hogy külön α_i^+ és α_i^- együtthatókat vezet be.

Hentschel (1994) megmutatta [20], hogy a GARCH modellek családjának számos tagja (amikor $p = q = 1$) beágyazható az *abszolút GARCH (AGARCH)* modell egy Box-Cox transzformációjába:

$$(\sigma_t^\lambda - 1) / \lambda = \omega + \alpha_1 \sigma_{t-1}^\lambda f^\nu(\epsilon_{t-1}) + \beta (\sigma_{t-1}^\lambda - 1) / \lambda, \quad (6.4)$$

ahol $f(\epsilon_t) = |\epsilon_t - b| - c(\epsilon_t - b)$ a Pagan és Schwert (1990) által bevezetett, úgynevezett *news impact curve* [21]. Ha $\lambda > 1$, a Box-Cox transzformáció konvex, ha $\lambda < 1$, akkor konkáv. Amennyiben $\lambda = \nu = 1$ és $|c| \leq 1$, a (6.4) kifejezés az AGARCH modellt adja. Schwert (1989) által javasolt feltételes szórás kifejező modell akkor áll elő, ha $\lambda = \nu = 1$ és $b = c = 0$ [22]. A (6.1)-ben megismert exponenciális GARCH modell EGARCH(1,1) esete úgy fejezhető ki (6.4)-ből, ha $\lambda = 0$, $\nu = 1$ és $b = 0$. Az eredeti (5.1) is felírható (6.4) segítségével, $\lambda = \nu = 2$ és $b = c = 0$ helyettesítéssel. Engle (1993) nemlineáris aszimmetrikus GARCH-jához a $\lambda = \nu = 2$ és $c = 0$ értékek tartoznak. Glosten-Jagannathan-Runkle (1993) modelljéről beszélünk, ha $\lambda = \nu = 2$, $b = 0$ [23]. Higgings és Bera (1992) nemlineáris modellje λ értékét nem specifikálja, csupán a $\nu = \lambda$ és $b = c = 0$ feltételeket tartalmazza [24]. A Ding, Gringer és Engle által bevezetett *APARCH (asymmetrical power ARCH)* modell szintén nem határozza meg λ értékét, de $\nu = \lambda$, $b = 0$ és $|c| \leq 0$ megkötésekkel dolgozik [25]. Crouhy és Rockinger (1994) terjesztették elő a *hysteresis GARCH* (másképpen *HGARCH*) modellt, amely egy TGARCH tag mellett lehetőséget biztosít a hozamok rövidtávú (pár nap) és hosszútávú (pár hét) hatásainak megjelenítésére a volatilitás modellezésében [26]. Sajnos, a fenti esetekkel ellentétben, például Santana (1991) QGARCH modellje nem fejezhető ki (6.4)-ből. Hentschel arról is beszámol, hogy a meglévő GARCH modellek beágyazása egy (6.4)-hez hasonló általános formulába kiemeli és érthetőbbé teszi a modellek közötti kapcsolatot.

Irodalomjegyzék

- [1] Robert Engle. „GARCH 101: The use of ARCH/GARCH models in applied econometrics”. *Journal of economic perspectives* 15.4 (2001), 157–168. old.
- [2] Robert F Engle. „Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation”. *Econometrica: Journal of the econometric society* (1982), 987–1007. old.
- [3] Tim Bollerslev. „Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”. *Journal of econometrics* 31.3 (1986), 307–327. old.
- [4] Paolo Zaffaroni. „Stationarity and memory of ARCH (∞) models”. *Econometric theory* 20.1 (2004), 147–160. old.
- [5] Alexander M Lindner. „Stationarity, mixing, distributional properties and moments of GARCH (p, q)–processes”. *Handbook of financial time series*. Springer, 2009, 43–69. old.
- [6] Min Chen és Hong Zhi An. „A note on the stationarity and the existence of moments of the GARCH model”. *Statistica Sinica* (1998), 505–510. old.
- [7] Franz C Palm. „7 GARCH models of volatility”. *Handbook of statistics* 14 (1996), 209–240. old.
- [8] Liudas Giraitis, Piotr Kokoszka és Remigijus Leipus. „Stationary ARCH models: dependence structure and central limit theorem”. *Econometric theory* 16.1 (2000), 3–22. old.
- [9] Peter M Robinson. „Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression”. *Journal of Econometrics* 47.1 (1991), 67–84. old.
- [10] Daniel B Nelson. „Stationarity and persistence in the GARCH (1, 1) model”. *Econometric theory* 6.3 (1990), 318–334. old.

- [11] Philippe Bougerol és Nico Picard. „Stationarity of GARCH processes and of some nonnegative time series”. *Journal of econometrics* 52.1-2 (1992), 115–127. old.
- [12] Robert F Engle és Tim Bollerslev. „Modelling the persistence of conditional variances”. *Econometric reviews* 5.1 (1986), 1–50. old.
- [13] Richard T Baillie, Tim Bollerslev és Hans Ole Mikkelsen. „Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”. *Journal of econometrics* 74.1 (1996), 3–30. old.
- [14] Fischer Black. „Studies of stock price volatility changes”. *Proceedings from the American statistical association, business and economic statistics section*. 1976, 177. old.
- [15] Daniel B Nelson. „Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach”. *Econometrica: Journal of the econometric society* (1991), 347–370. old.
- [16] Enrique Sentana. „Quadratic ARCH models”. *The Review of Economic Studies* 62.4 (1995), 639–661. old.
- [17] Jean-Michel Zakoian. „Threshold heteroskedastic models”. *Journal of Economic Dynamics and control* 18.5 (1994), 931–955. old.
- [18] Anil K Bera és Sangkyu Lee. „On the formulation of a general structure for conditional heteroskedasticity”. *BEBR faculty working paper; no. 1563* (1989).
- [19] Robert F Engle, Victor K Ng és Michael Rothschild. „Asset pricing with a factor-ARCH covariance structure: Empirical estimates for treasury bills”. *Journal of econometrics* 45.1-2 (1990), 213–237. old.
- [20] Ludger Hentschel. „All in the family nesting symmetric and asymmetric garch models”. *Journal of financial economics* 39.1 (1995), 71–104. old.
- [21] Adrian R Pagan és G William Schwert. „Alternative models for conditional stock volatility”. *Journal of econometrics* 45.1-2 (1990), 267–290. old.
- [22] G William Schwert. „Why does stock market volatility change over time?”: *The journal of finance* 44.5 (1989), 1115–1153. old.
- [23] Lawrence R Glosten, Ravi Jagannathan és David E Runkle. „On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks”. *The journal of finance* 48.5 (1993), 1779–1801. old.

- [24] Matthew L Higgins és Anil K Bera. „A class of nonlinear ARCH models”. *International Economic Review* (1992), 137–158. old.
- [25] Zhuanxin Ding, Clive WJ Granger és Robert F Engle. „A long memory property of stock market returns and a new model”. *Journal of empirical finance* 1.1 (1993), 83–106. old.
- [26] Michel Crouhy és Michael Rockinger. „Volatility clustering, asymmetry and hysteresis in stock returns: International evidence”. *Financial engineering and the Japanese markets* 4 (1997), 1–35. old.

Alulírott Varga Dániel nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Irodalomjegyzék megjelenítéséhez LaTeX kód generálása	GPT-4o	Irodalomjegyzék	BibTeX formátumú hivatkozások kezelése
Kötelező melléklet elkészítése	GPT-4o	Jelen melléklet	Melléklet LaTeX kódjának generálása

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.