

Borel-determináltság

Szakdolgozat

Kempf Alex

Matematika Bsc

Témavezető:

Bursics Balázs

Analízis Tanszék



Eötvös Loránt Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2025

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Előkészületek	4
2.A. Játék fák	4
2.B. Borel halmazok	8
3. Bizonyítás	10
3.A. Gale-Stewart és a bizonyítás muzsikája	10
3.B. Tabus játékok	11
3.C. Fedések	12
3.D. Konstruktív lemma	17
3.E. Utolsó lépések	22
4. Alkalmazások	24
4.A. Előkészületek	24
4.B. Körmentes n -reguláris Borel gráf, ami nem Borel n -színezhető.	27
4.C. "Kontinuumhipotézis" Borel halmazokra	31
4.D. Wadge-rendezés és játék	33
4.E. Hurewicz-Tétel és az oda vezető út	34
Hivatkozások	39

Köszönet

Ezúton is szeretném kifejezni hálámat témavezetőmnek, Bursics Balázsnak, hogy a matematika ezen területére kalauzolt, és különösen, amiért az utolsó pillanatokig számíthattam rá mindenben.

Nélküle e szakdolgozat aligha jöhetett volna létre.

Szeretném még megköszönni családomnak, barátaimnak, akik tűrték a rájuk csapódó feszültségem és lélekben támogattak.

Nem utolsó sorban szeretném megköszönni mindazoknak, akik közvetett módon lehetővé tették, hogy ezt megírhattam.

1. Bevezetés

Szakdolgozatomban végtelen játékokról és azok eldöntöttségéről lesz szó, bebizonyítjuk, hogy a Borel játékok eldöntöttek, és mutatunk néhány alkalmazást is. A játékaikat mindig két játékos fogja játszani, **I** és **II**. A játékot **I** kezdi és felváltva lépnek, amíg véget nem ér a játék, ami lehet, hogy csak végtelen sok lépés után következik be.

A véges játékoknál már megszokhattuk (és a definícióból is könnyen látszik), hogy eldöntöttek, azaz az egyik játékosnak mindig van nyerő stratégiája, a végtelen játékoknál ez már nem mindig áll fenn, erre a 2. fejezetben mutatunk példát.

Nyerő stratégiák létezését sok bizonyításban használhatjuk, például, hogy az analitikus halmazok Baire-mérhetőek lengyel terekben.

Tehát érdekes kérdés, hogy mikor eldöntött egy végtelen játék. Gale és Stewart klasszikus tétele szerint, ha egy játék nyerő halmaza nyílt vagy zárt, akkor a játék eldöntött. Ezt követően ha azt mondjuk, hogy egy játék valamilyen topologikus tulajdonsággal rendelkezik, akkor ezalatt azt értjük, hogy a játékhoz tartozó nyerő halmaz rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Szakdolgozatom célja a következő fontos tétel bizonyításának és néhány alkalmazásának a bemutatása.

1.1. Tétel: (Martin, 1975,[5])

A Borel játékok eldöntöttek.

A 2. fejezetben bevezetjük a szükséges alapfogalmakat és mutatunk példát nem eldöntött játéokra.

A 3. fejezetben felépítjük a szükséges eszközöket, és bebizonyítjuk a fő állításunkat.

A 4. fejezetben mutatunk alkalmazásokat a Borel kombinatorika és a leíró halmazelmélet területén:

- Minden n -re létezik körmentes n -reguláris Borel gráf, ami nem Borel n -színezhető.
- Lengyel terekben Borel halmazokra igaz a kontinuum-hipotézis (azaz a számosságuk megszámlálható vagy kontinuum).
- Wadge-rendezés, egy finomítása a Borel-hierarchiának.
- Hurewicz-Tétel.

2. Előkészületek

2.A. Játék fák

Mielőtt bevezetjük a szükséges definíciókat, említsük meg, hogy jelölésrendszerünkben sokszor a halmazelméleti konvenciókat követjük, tehát $n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $\mathbb{N}^{<\omega} = \{f \mid n < \omega, f : n \rightarrow \mathbb{N}\}$ (véges természetes sorozatok), a függvény megszorítást $\upharpoonright$ -vel jelöljük, és a függvényekre, mint halmazokra gondolunk, amikor azt írjuk, hogy $f \subseteq g$.

2.1. Definíció:

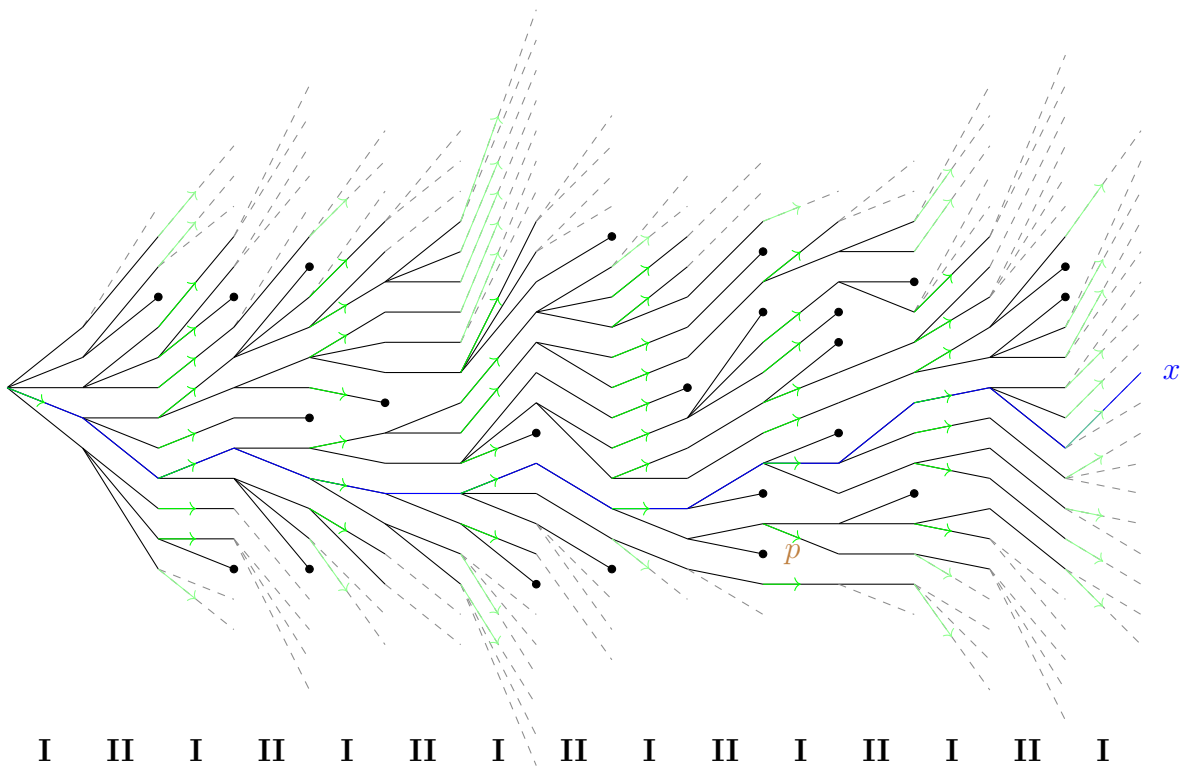
Játék fa: $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} : p \in T \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad p \upharpoonright k \in T$

Úgy gondolunk a játék fára, hogy ezen fog **I** és **II** játszani felváltva egy-egy természetes számot mondva.

2.2. Definíciók:

- **Összefűzés:** Ha $p : n \rightarrow \mathbb{N}$, $q : k \rightarrow \mathbb{N}$, akkor legyen $p \hat{\ } q : n + k \rightarrow \mathbb{N} : (p \hat{\ } q) \upharpoonright n = p \wedge \forall i (p \hat{\ } q)(n + i) = q(i)$ (egymás mellé írjuk a két sorozatot), továbbá $p \hat{\ } \{(0, a)\}$ ($a \in \mathbb{N}$) helyett csak $p \hat{\ } a$ -t írunk. (a sorozat mögé a -t írunk)
- $p \in T$ terminált $\Leftrightarrow \nexists q \in T : p \subsetneq q$ ($\Leftrightarrow \nexists a \in \mathbb{N} : p \hat{\ } a \in T$)
- **Megengedett lépés** $p \in T$ -ben: $a \in \mathbb{N} : p \hat{\ } a \in T$
- **Végtelen játékok:** $[T] := \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N} \quad x \upharpoonright k \in T\}$
- **Játékok:** $\lceil T \rceil := [T] \cup \{p \in T \mid p \text{ terminált}\}$
- $p \in T$ hossza: $lh(p) := |p|$
- $x \in [T]$ hossza végtelen: $lh(x) := \infty$
- **Stratégia I-nek:** $\sigma : \{p \in T \mid 2 \mid lh(p) \wedge p \text{ nem terminált}\} \rightarrow \mathbb{N} : \forall p \sigma(p)$ megengedett lépés p -ben
- **Stratégia II-nek:** $\tau : \{p \in T \mid 2 \nmid lh(p) \wedge p \text{ nem terminált}\} \rightarrow \mathbb{N} : \forall p \tau(p)$ megengedett lépés p -ben
- **I stratégiái:** $\mathcal{S}_I := \{\sigma \mid \sigma \text{ stratégia I-nek}\}$
- **II stratégiái:** $\mathcal{S}_{II} := \{\tau \mid \tau \text{ stratégia II-nek}\}$

- *Stratégiák:* $\mathcal{S} := \mathcal{S}_I \cup \mathcal{S}_{II}$
- $p \in T \cup [T]$ konzisztens $\sigma \in \mathcal{S}_I$ -el: $\Leftrightarrow \forall 2 \mid n : p(n) = \sigma(p \upharpoonright n)$
- $p \in T \cup [T]$ konzisztens $\tau \in \mathcal{S}_{II}$ -el: $\Leftrightarrow \forall 2 \nmid n : p(n) = \tau(p \upharpoonright n)$
- *Játék:* $G(A, T) : A \subseteq [T]$
- **I** nyeri $x \in [T]$ -et: $\Leftrightarrow x \in A$
- **II** nyeri $x \in [T]$ -et: $\Leftrightarrow x \notin A$
- $\sigma \in \mathcal{S}_I$ nyerő stratégia **I**-nek $G(A, T)$ -ban: $\Leftrightarrow \forall x \in [T] \quad x \text{ konzisztens } \sigma\text{-val} \Rightarrow x \in A$ (**I**-es nyer)
- $\tau \in \mathcal{S}_{II}$ nyerő stratégia **II**-nek $G(A, T)$ -ban: $\Leftrightarrow \forall x \in [T] \quad x \text{ konzisztens } \tau\text{-al} \Rightarrow x \notin A$ (**II**-es nyer)
- $G(A, T)$ eldöntött, ha van nyerő stratégia (**I**-nek vagy **II**-nek)
A definícióból könnyen látszik, hogy legfeljebb az egyik játékosnak lehet nyerő stratégiája.
- Ha $p \in T$, akkor legyen $T_p := \{q \in T \mid q \subseteq p \vee q \supseteq p\} \subseteq T$ egy részfa, amiben megkötjük a lépéseket p -ig.
- $[T]$ -n azt a topológiát tekintjük, aminek bázisa $\{[T_p] \mid p \in T\}$.



1. ábra. Játék fa (részlet)

Az ábrán egy játékfá egy részlete látható, amelyen $x \in [T]$ egy $\sigma \in \mathcal{S}_I$ -val konzisztens játék, míg $p \in T$ egy terminált pozíció, ami nem konzisztens σ -val.

2.3. Példa: Nem eldöntött játéokra

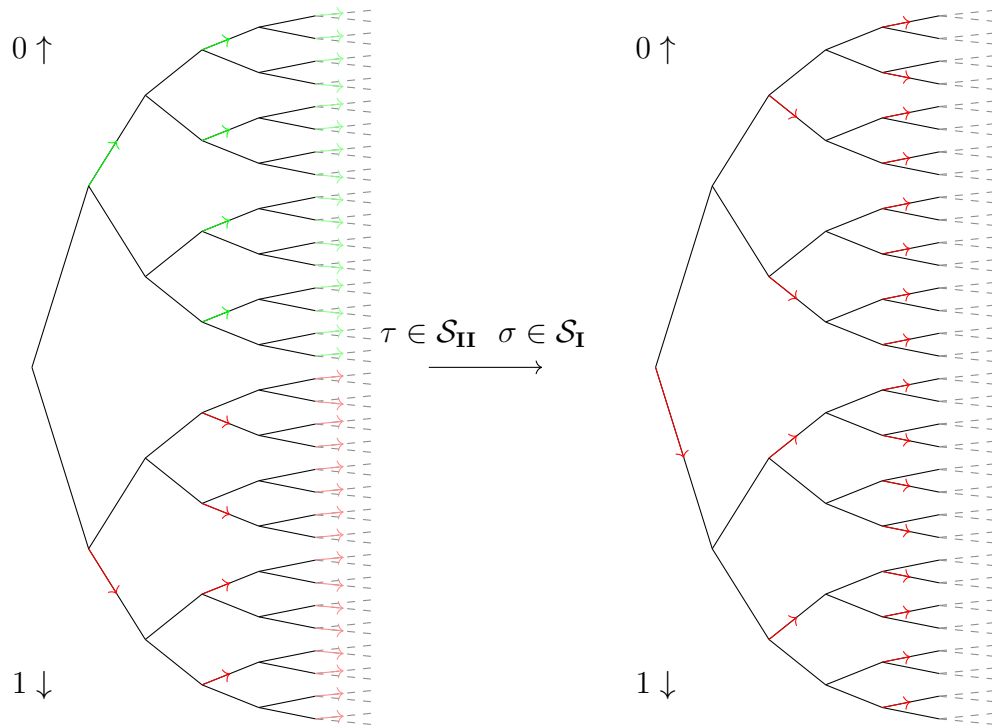
$T := 2^{<\omega}$ (véges 0, 1 sorozatok). Legyen $f : 2^\omega \rightarrow 2$ kapcsoló függvény, azaz, ha $x, y \in 2^\omega$ és csak véges sok helyen különböznek, akkor $f(x) - f(y)$ paritása megegyezik az ilyen helyek számának paritásával. Legyen $A := f^{-1}(0)$.

2.4. Állítás:

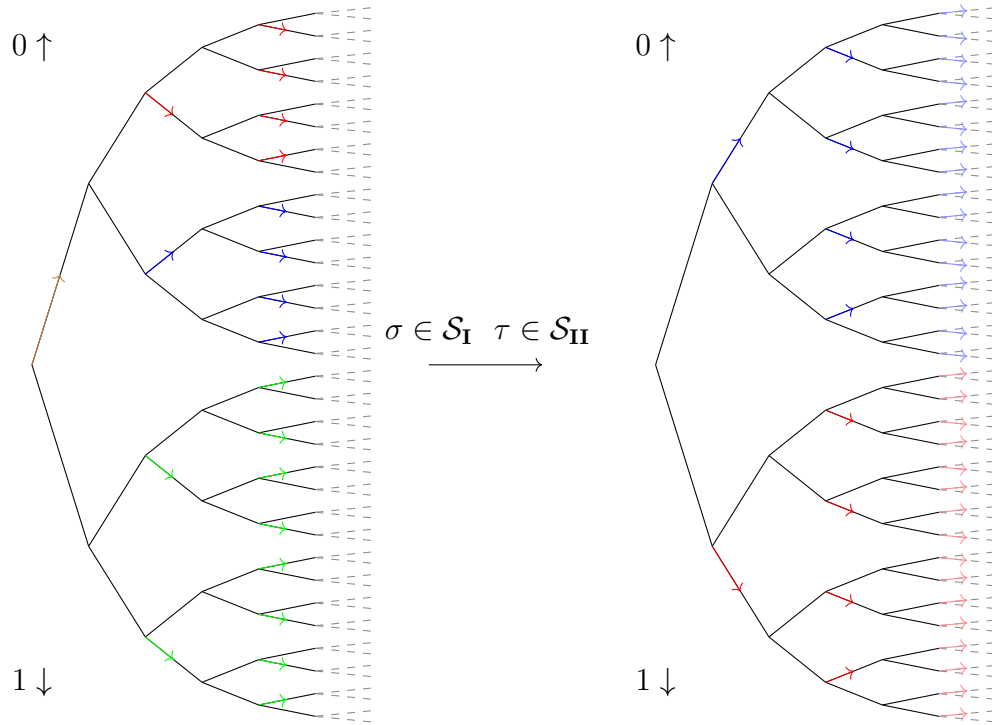
$G(A, T)$ nem eldöntött.

Bizonyítás: Belátjuk, hogy ha az egyik játékosnak van nyerő stratégiája, akkor a másiknak is tudunk csinálni. Tegyük fel, hogy τ nyerő stratégiája **II**-nek, ekkor ez megad T_I -en (**I** 1-est lép először) egy nyerőstratégiát, ha ebből a részfából elhagyjuk az első lépést, akkor visszakapjuk T -t, és τ -ból pedig **I** egy stratégiáját. Mivel tetszőleges $x \in [T]$ -re $x \in A \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow f(1 \wedge x) = 1 \Leftrightarrow 1 \wedge x \notin A$, így a stratégia nyerő stratégia lesz **I**-nek. A konstrukció a másik irányba nagyon hasonló,

II-nek elég nyerő stratégiát megadni T_0 -án és T_1 -en, ezeket megkaphatjuk **I** nyerő stratégiáiból T_{01} -en és T_{00} -án, ha **I** 0-át lép először vagy T_{10} -án és T_{11} -en, ha 1-et lép. $\square$



2. ábra. Nyerő stratégia készítése **I**-nek



3. ábra. Nyertő stratégia készítése **II**-nek (Ha **I** a nyertő stratégiájában 0-val kezd.)

2.B. Borel halmazok

2.5. Definíció: Borel hierarchia az (X, τ) topologikus téren, $\alpha \geq 1$ rendszámra

- $\Sigma_1^0 := \tau$ (nyíltak)
- $\Pi_\alpha^0 := \{A \subseteq X \mid (X \setminus A) \in \Sigma_\alpha^0\}$ (a halmazok komplementerei)
- $\Sigma_\alpha^0 := \{A \subseteq X \mid \forall i \in \mathbb{N} \exists \beta_i < \alpha, \exists B_i \in \Pi_{\beta_i}^0 : A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\}$
(A hierarchia kisebb fokain álló Π_β^0 -beli elemek megszámlálható uniója)
- $\Delta_\alpha^0 := \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0$
- Egy halmaz Borel, ha ahhoz a legkisebb osztályhoz tartozik, ami tartalmazza a nyílt halmazokat, zárt a megszámlálható unióra, és a komplementer képzésre.

2.6. Lemma: Borel hierarchia tulajdonságai $[T]$ -ban.

- (a) $\forall \alpha \geq 1 \forall \beta > \alpha \quad \Sigma_\alpha^0 \cup \Pi_\alpha^0 \subseteq \Delta_\beta^0$
- (b) $\forall \alpha \geq 1 \quad \Sigma_\alpha^0$ zárt a megszámlálható unióra és a véges metszetre
- (c) $\forall \alpha \geq 1 \quad \Pi_\alpha^0$ zárt a megszámlálható metszetre és a véges unióra

(d) A Borel $\Leftrightarrow A \in \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0$, ahol ω_1 a legkisebb nem megszámlálható rendszám

Bizonyítás: (a) Az állítás ekvivalens az alábbi 4-gyel $\forall \alpha \geq 1 \forall \beta > \alpha$: (1) $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \Sigma_\beta^0$ (2) $\Pi_\alpha^0 \subseteq \Pi_\beta^0$ (3) $\Pi_\alpha^0 \subseteq \Sigma_\beta^0$ (4) $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \Pi_\beta^0$

$\Pi_\alpha^0, \Pi_\beta^0$ definíciója miatt (1) ekvivalens (2)-vel és (3) ekvivalens (4)-gyel. Σ_β^0 definíciója miatt (3) igaz. Tehát már csak (1) kell, ha $1 < \alpha < \beta$, akkor $\Sigma_\alpha^0, \Sigma_\beta^0$ definíciója miatt kész vagyunk, ha $1 \leq \alpha$, $\alpha + 1 < \beta$, akkor (4), majd (3) miatt vagyunk kész, vagyis, ami még kell, hogy $\Sigma_1^0 \subseteq \Sigma_2^0$.

Ehhez már ki kell használnunk $\lceil T \rceil$ topológiáját, ha $A \in \Sigma_1^0$, akkor $A = \{T_p \mid p \in T \wedge \lceil T \rceil \subseteq A\}$

$A_n := \{T_p \mid p \in T \wedge \ell h(p) = n \wedge \lceil T \rceil \subseteq A\}$

A_n zárt, vagyis $A_n \in \Pi_1^0$

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, tehát $A \in \Sigma_2^0$

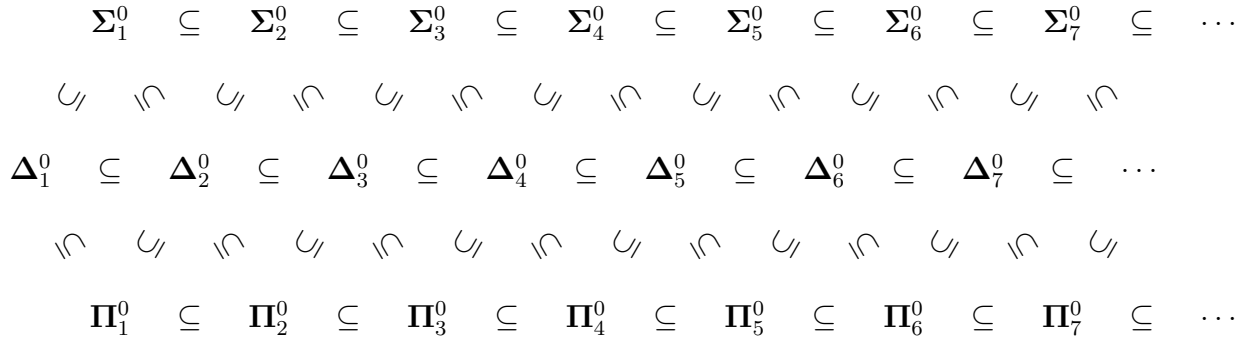
(b), (c) ekvivalensek Π_α^0 definíciója miatt. (b) A definícióból látszik, hogy zárt megszámlálható unióra. Tehát elég két elem metszetét vizsgálni.

Legyen $A, C \in \Sigma_\alpha^0$, vagyis $\forall i \in \mathbb{N} \exists \beta_i, \delta_i < \alpha, \exists B_i \in \Pi_{\beta_i}^0, \exists D_i \in \Pi_{\delta_i}^0 : A = \bigcup_i B_i, C = \bigcup_j D_j$,

akkor $A \cap C = \bigcup_i \bigcup_j (B_i \cap D_j)$, itt persze a dupla unió még mindig megszámlálható, és $B_i \cap D_j \in \Pi_{\max(\beta_i, \delta_j)}^0$, (a) miatt.

(d) $\Leftarrow$ egyértelmű a definícióból. A másik irányt úgy bizonyítjuk, hogy belátjuk, hogy $\bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0$ zárt a komplementerre és a megszámlálható unióra.

$\bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0 = \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Pi_\alpha^0$, (a) miatt, mivel ω_1 limesz rendszám, azaz $\forall \alpha < \omega_1 \exists \beta > \alpha : \beta < \omega_1$, tehát zárt a komplementerre. Legyen $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0$ megszámlálható, ekkor (mivel ω_1 kofinalitása $> \omega$) $\exists \delta : \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{1 \leq \alpha < \delta} \Sigma_\alpha^0 \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{1 \leq \alpha \leq \delta} \Pi_\alpha^0 \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \Sigma_{\delta+1}^0 \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \bigcup_{1 \leq \alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0$. $\square$



4. ábra. Borel hierarchia

3. Bizonyítás

3.A. Gale-Stewart és a bizonyítás muzsikája

3.1. Lemma: (Gale-Stewart, [1])

Ha $A \subseteq [T]$ nyílt, akkor $G(A, T)$ eldöntött.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy **I**-nek nincs nyerő stratégiája, ekkor azt fogjuk belátni, hogy **II**-nek van.

Indirekten tegyük fel, hogy **I**-nek létezik a lépése, hogy **II**-nek minden b lépésére a -ban igaz, hogy $G(A \cap [T_{a \sim b}], T_{a \sim b})$ -ban **I**-nek van nyerő stratégiája, ekkor azok uniója nyerő stratégia lenne **I**-nek $G(A, T)$ -ben, ami ellentmondás, hisz feltettük, hogy **I**-nek nincs nyerő stratégiája.

Tehát **I**-nek minden a lépésére létezik **II**-nek b lépése a -ban, hogy $G(A \cap [T_{a \sim b}], T_{a \sim b})$ -ban **I**-nek nincs nyerő stratégiája. Ekkor **II** nyerő stratégiáját építsük fel úgy szintenként, hogy megtartsuk azt a tulajdonságot, hogy **II** lépését követően **I**-nek ne legyen nyerő stratégiája. (Persze csak a konzisztens helyeken, ahova nem juthatunk a stratégiánkat követve, ott definiálhatjuk tetszőlegesen)

Már csak azt kell belátnunk, hogy az így kapott stratégia nyerő **II**-nek. Ehhez azt a trivialitást használjuk, hogy ha $G(A \cap [T_p], T_p)$ -ben **I**-nek nincs nyerő stratégiája, akkor létezik $x \in [T_p] : x \notin A$.

Vegyünk egy a stratégiánkkal konzisztens $x \in [T]$ -t, ekkor ha x véges, akkor $\ell h(x)$ -től függően **I**-nek nincs üres nyerő stratégiája x -ből, vagy **I**-nek nincs egy lépésből álló nyerő stratégiája $x \upharpoonright \ell h(x) - 1$ -ből, tehát $x \notin A$, ha x végtelen, akkor $\forall p \subseteq x \quad 2 \mid \ell h(p) \Rightarrow G(A \cap [T_p], T_p)$ -ben **I**-nek nincs nyerő stratégiája, tehát az előző alapján $\exists x_p \in [T_p] : x_p \notin A$. Tegyük fel indirekten, hogy $x \in A$, ekkor mivel A nyílt, létezik $x \in [T_q] \subseteq A$, ami ellentmondás, ha olyan p -t veszünk, amire $\ell h(p) > \ell h(q)$, ezzel beláttuk, hogy **II**-nek van nyerő stratégiája, és ezzel az eldöntöttséget is. $\square$

A bizonyítás muzsikája a következő: Először bevezetjük, majd áttérünk a tabus játékok világába. Másodszor bevezetjük a fedés eszközét, definiáljuk a megfelelő fedés fogalmát, bebizonyítjuk a fedés néhány alaptulajdonságát, például, hogy megfelelő fedés esetén a játék eldöntött, majd mutatunk módszert új fedések létrehozására. Harmadszor konstruálunk megfelelő fedést zártakra és nyíltakra. Negyedszer transzfinit indukcióval végigmegyünk a Borel-hierarchián, és az előző speciális fedést használva konstruálunk minden halmazhoz megfelelő fedést. Ötödször tetszőleges Borel halmaz esetén van megfelelő fedésünk, amiből következik, hogy a játékunk eldöntött.

3.B. Tabus játékok

3.2. Definíció:

Tabus játék fa: $\mathbf{T} := (T, \mathcal{T}_I, \mathcal{T}_{II})$, ahol $\mathcal{T}_I \dot{\cup} \mathcal{T}_{II} = \{p \in T \mid p \text{ terminált}\} = [T] \setminus [T]$

Itt $\mathcal{T}_I$ pozíciók tabuk **I**-nek és $\mathcal{T}_{II}$ pozíciók tabuk **II**-nek. Egy $\mathbf{T}$ tabus játék fában minden pozíció, lépés, játék, stratégia a hozzá tartozó T -ben értendő, és ha $A \subseteq [T]$, akkor a $G(A, \mathbf{T})$ játék kimentele ugyanaz, mint a $G(A \cup \mathcal{T}_{II}, T)$ játéké.

3.3. Lemma:

Ha $A \subseteq [T]$ nyílt, akkor $G(A, \mathbf{T})$ eldöntött.

Bizonyítás: A bizonyításhoz T egy megfelelő részfáját fogjuk megkonstruálni, amiben az A -nak megfelelő halmaz nyílt és nincsenek terminált pozíciók. Indirekten tegyük fel, hogy $G(A, \mathbf{T})$ nem eldöntött.

Ha $G([T] \setminus \mathcal{T}_I, T)$ -ben **II**-nek lenne nyerő stratégiája, akkor az $G(A, \mathbf{T})$ -ben is az lenne, tehát nincs, ekkor vegyük **I** nem veszítő kvázistratégia részfáját, vagyis:

$$R := \{p \in T \mid G([T] \setminus \mathcal{T}_I \cap [T_p], T_p)\text{-re } \mathbf{II}\text{-nek nincs nyerő stratégiája}\}$$

Megjegyzés: R -en amikor **II**-es jön, akkor mindent ugyanúgy léphet mintha T -n lenne.

Ha $G(\mathcal{T}_{II} \cap [R], R)$ -ben **I**-nek lenne nyerő stratégiája, akkor az $G(A, \mathbf{T})$ -ben is az lenne, tehát nincs, ekkor vegyük **II** nem veszítő kvázistratégia részfáját, vagyis:

$$S := \{p \in R \mid G(\mathcal{T}_{II} \cap [T_p], T_p)\text{-re } \mathbf{I}\text{-nek nincs nyerő stratégiája}\} \quad (S \subseteq R)$$

Ekkor S -ben már nem lehetnek terminált pozíciók, így $[S] \subseteq [T]$, $G(A \cap [S], S)$ eldöntött (3.1.

Lemma), hisz $A \cap \lceil S \rceil \subseteq \lceil S \rceil$, nyílt (az altér topológia megegyezik a játék fákon definiált topológiával). És így $G(A, \mathbf{T})$ is eldöntött, hisz ha a $G(A \cap \lceil S \rceil, S)$ beli nyerő stratégiákkal játszanak, akkor egyedül úgy lehetne baj, ha a másik játékos lelépne S -ről, de ez a definíció miatt szintén a veszttét okozná. $\square$

3.C. Fedések

3.4. Definíció: Fedés

Ha $\mathbf{T}$ egy tabus játék fa, akkor $(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \pi, \phi, \Psi)$ egy fedése, ahol:

(a) $\tilde{\mathbf{T}}$ egy tabus játék fa

(b) $\pi : \tilde{T} \rightarrow T, \quad \forall \tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{T}:$

(i) $\ell h(\pi(\tilde{p})) = \ell h(\tilde{p})$

(ii) $\tilde{p} \subseteq \tilde{q} \Rightarrow \pi(\tilde{p}) \subseteq \pi(\tilde{q})$

(iii) $\pi(\tilde{p}) \in \mathcal{T}_{\mathbf{I}} \Rightarrow \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{I}}$

(iv) $\pi(\tilde{p}) \in \mathcal{T}_{\mathbf{II}} \Rightarrow \tilde{p} \in \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{II}}$

(c) $\phi = \phi_{\mathbf{I}} \cup \phi_{\mathbf{II}}$

(i) $\phi_{\mathbf{I}} : \mathcal{S}_{\mathbf{I}}(\tilde{T}) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{I}}(T)$

(ii) $\phi_{\mathbf{II}} : \mathcal{S}_{\mathbf{II}}(\tilde{T}) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{II}}(T)$

(iii) $\phi_{\mathbf{I}}(\tilde{\sigma}) \upharpoonright \{p \in T \mid \ell h(p) < n\}$ csak $\tilde{\sigma} \upharpoonright \{\tilde{p} \in \tilde{T} \mid \ell h(\tilde{p}) < n\}$ -től függ (Lipschitz)

(iv) $\phi_{\mathbf{II}}(\tilde{\tau}) \upharpoonright \{p \in T \mid \ell h(p) < n\}$ csak $\tilde{\tau} \upharpoonright \{\tilde{p} \in \tilde{T} \mid \ell h(\tilde{p}) < n\}$ -től függ (Lipschitz)

(d) $\Psi = \Psi_{\mathbf{I}} \cup \Psi_{\mathbf{II}}$

(i) $\Psi_{\mathbf{I}} : \{(\tilde{\sigma}, x) \in \mathcal{S}_{\mathbf{I}}(\tilde{T}) \times [T] \mid x \text{ konzisztens } \phi_{\mathbf{I}}(\tilde{\sigma})\text{-val}\} \rightarrow [\tilde{T}]$

(ii) $\Psi_{\mathbf{II}} : \{(\tilde{\tau}, x) \in \mathcal{S}_{\mathbf{II}}(\tilde{T}) \times [T] \mid x \text{ konzisztens } \phi_{\mathbf{II}}(\tilde{\tau})\text{-val}\} \rightarrow [\tilde{T}]$

(iii) $\Psi_{\mathbf{I}}(\tilde{\sigma}, x)$ konzisztens $\tilde{\sigma}$ -val

(iv) $\Psi_{\mathbf{II}}(\tilde{\tau}, x)$ konzisztens $\tilde{\tau}$ -val

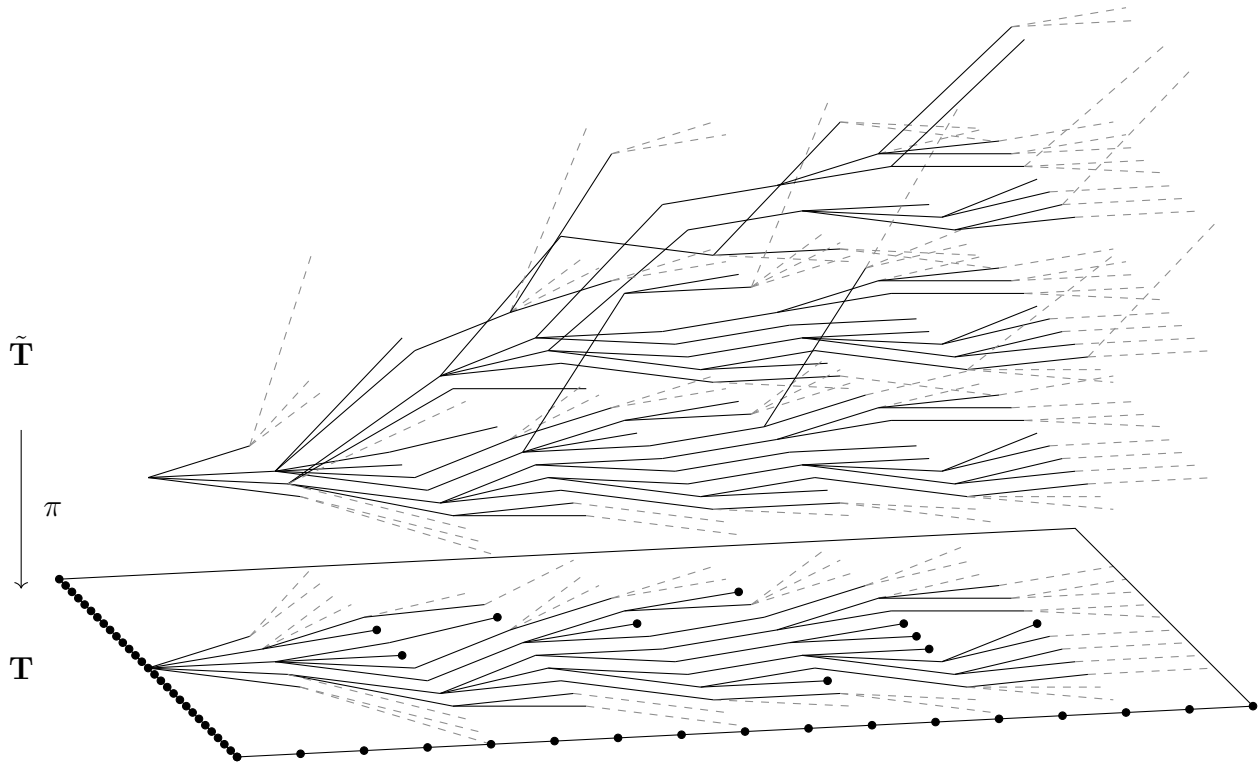
(v) $\pi(\Psi_{\mathbf{I}}(\tilde{\sigma}, x)) = x$ Vagy $\pi(\Psi_{\mathbf{I}}(\tilde{\sigma}, x)) \subseteq x$, terminált és $\in \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{I}}$

(vi) $\pi(\Psi_{\mathbf{II}}(\tilde{\tau}, x)) = x$ Vagy $\pi(\Psi_{\mathbf{II}}(\tilde{\tau}, x)) \subseteq x$, terminált és $\in \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{II}}$

3.5. Megfigyelés:

π (ii)-miatt indukál egy $[\tilde{T}] \rightarrow [T]$ függvényt, amit szintén π -vel fogunk jelölni (és azzal jelöltük Ψ definíciójában, ez folytonos és Lipschitz).

Egy fedésre érdemes úgy gondolni, hogy először elképzeljük T -t, majd fölé $\tilde{T}$ -t, π -nek megfelelően (π egy vetítés), majd elképzeljük a tabukat először T -n, majd $\tilde{T}$ -n, ez utóbbin sokszor nincs választásunk, lévén, hogy tabu felemeltje ugyanolyan tabu, ám lehet, hogy egy terminált pozíció vetülete nem terminált. Amikor ϕ -re gondolunk, akkor talán a legjobb a Lipschitzségén keresztül elképzelni, a képzett stratégia egy ponton a bemeneti stratégiának addig a pontig vett viselkedésétől függ. Egyes olvasóink megsejthették, hogy Ψ egy tanú függvény, azaz a létezésével biztosítjuk, hogy konzisztens játékokat felemelhetünk úgy, hogy konzisztensek maradjanak. Persze ezt megtehettük volna azzal is, hogy feltesszük, hogy van ilyen, mivel a létezésén kívül nem fogunk semmit érdemben használni, de így van annyi előnyünk, hogy sok esetben van egy egyértelmű választásunk Ψ -re, amit ezzel szintén tárolunk. Emellett egyes olvasóinkban felmerülhet a kérdés, hogy miért vacakolunk a ϕ, Ψ szétbontásával vagy összerakásával. Nos, a szétbontással ígyekeztünk hangsúlyozni, hogy amikor ezeket a függvényeket építjük, tulajdonképpen két-két hasonló, de ugyanakkor eltérő függvényeket konstruálunk és ezekben az esetekben van, hogy külön-külön le kell ellenőrizni a feltételeket, mert nem analóg a két eset, másrészt viszont amikor már meglévő fedésekből csinálunk újat, akkor ezek teljesen azonosan működnek, és így szerencsésebb egy-egy függvényként gondolni rájuk.

5. ábra. $(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \pi)$ szemléltetése

3.6. Definíció: Megfelelő fedés

Egy $(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \pi, \phi, \Psi)$ fedés megfelelő $A \subseteq [T]$ -re nézve, ha $\pi^{-1}(A)$ nyílt-zárt $[\tilde{T}]$ -ben (azaz $\pi^{-1}(A) \in \Delta_1^0([\tilde{T}])$).

3.7. Lemma:

Legyen $\mathbf{T}$ egy tabus játék fa, ekkor ha létezik megfelelő fedése $A \subseteq [T]$ -ra nézve, akkor $G(A, \mathbf{T})$ eldöntött.

Bizonyítás: Legyen $(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \pi, \phi, \Psi)$ megfelelő fedés A -ra nézve, vagyis $\pi^{-1}(A) \subseteq [\tilde{T}]$ nyílt-zárt, tehát nyílt, így a 3.3. lemma miatt $G(\pi^{-1}(A), \tilde{\mathbf{T}})$ eldöntött, tehát valamelyik játékosnak van nyerő stratégiája. Nevezzük ezt a játékost jó játékosnak, a másik játékost pedig rossz játékosnak, és ennek megfelelően jelöljük a stratégiákat és tabukat. Legyen $B \subseteq [T]$ a jó játékos nyerőhalmaza T -ben ($B = A$ vagy $B = [T] \setminus A$). Legyen $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{\mathbf{J}}(\tilde{T})$ nyerő stratégia a jó játékosnak $\tilde{\mathbf{T}}$ -ben, ekkor azt állítjuk, hogy $\sigma := \phi(\tilde{\sigma}) \in \mathcal{S}_{\mathbf{J}}(T)$ is nyerő stratégia. Ehhez legyen $x \in [T]$ konzisztens játék σ -val, ekkor $\tilde{x} := \Psi(\tilde{\sigma}, x) \in [\tilde{T}]$ konzisztens $\tilde{\sigma}$ -mal, ami nyerő stratégia, így $\tilde{x} \in \pi^{-1}(B)$

vagy $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{R}}$, tehát $x \in B$ vagy $x \in \mathcal{T}_{\mathbf{R}}$, mivel Ψ csak úgy rövidíthetne a játékon felemeléskor, hogy az $\tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{J}}$ -be essen, így $\pi(\tilde{x}) = x$ és ha x terminált volt, akkor π definíciója miatt lent és fent is megegyeznek a tabuk. $\square$

3.8. Definíció:

$${}_kT := \{p \in T \mid \ell h(p) \leq k\}$$

3.9. Definíció: k -fedés

Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor egy $\mathcal{C} = (\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \pi, \phi, \Psi)$ fedés, k -fedés, ha

$$(i) \quad {}_k\tilde{T} = {}_kT, \quad {}_k\tilde{T} \cap \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{I}} = {}_kT \cap \mathcal{T}_{\mathbf{I}}, \quad {}_k\tilde{T} \cap \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{II}} = {}_kT \cap \mathcal{T}_{\mathbf{II}}$$

$$(ii) \quad \pi \upharpoonright {}_k\tilde{T} \text{ az identitás}$$

$$(iii) \quad \phi \upharpoonright \mathcal{S}({}_k\tilde{T}) \text{ az identitás}$$

3.10. Definíció: Fedések kompozíciója

Legyenek $\mathcal{C}_{2,1} = (\mathbf{T}_2, \mathbf{T}_1, \pi_{2,1}, \phi_{2,1}, \Psi_{1,2})$, $\mathcal{C}_{3,2} = (\mathbf{T}_3, \mathbf{T}_2, \pi_{3,2}, \phi_{3,2}, \Psi_{2,3})$ fedések, ekkor a kompozíciójuk $\mathcal{C}_{2,1} \circ \mathcal{C}_{3,2} := (\mathbf{T}_3, \mathbf{T}_1, \pi_{2,1} \circ \pi_{3,2}, \phi_{2,1} \circ \phi_{3,2}, (\sigma, x) \mapsto \Psi_{2,3}(\sigma, \Psi_{1,2}(\phi_{3,2}(\sigma), x)))$.

Ψ -ben azért vannak felcserélve az indexek, hogy ezzel is jelezzük, hogy ő felemeli a játékokat.

3.11. Lemma:

Ha $\mathcal{C}_{2,1}$ k_1 -fedés és $\mathcal{C}_{3,2}$ k_2 -fedés, akkor $\mathcal{C}_{2,1} \circ \mathcal{C}_{3,2}$ $\min(k_1, k_2)$ -fedés.

A lemma rutin bizonyításától megkíméljük olvasóinkat.

A következő lemma elégséges feltételt ad, hogy fedések határértékét vehessük, látni fogjuk, hogy ezért vezettük be a k -fedések fogalmát.

3.12. Lemma:

Legyen $k \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{T}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tabus játék fák és $(k_{j,i}, \pi_{j,i}, \phi_{j,i}, \Psi_{i,j})_{i \leq j \in \mathbb{N}}$ olyanok, hogy

$$(1) \quad \mathcal{C}_{j,i} = (\mathbf{T}_j, \mathbf{T}_i, \pi_{j,i}, \phi_{j,i}, \Psi_{i,j}) \text{ } k_{j,i}\text{-fedés} \quad (i \leq j),$$

$$(2) \mathcal{C}_{\ell,i} = \mathcal{C}_{j,i} \circ \mathcal{C}_{\ell,j} \quad (i \leq j \leq \ell),$$

$$(3) \forall i \leq j \quad k_{j,i} \geq k,$$

$$(4) \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{j' \geq j} k_{j',j} = \infty.$$

Ekkor létezik $\mathbf{T}_\infty$ ($|T_\infty| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |T_i|$) és $(\pi_{\infty,i}, \phi_{\infty,i}, \Psi_{i,\infty}) \forall i \in \mathbb{N}$ úgy, hogy

- $\mathcal{C}_{\infty,i} = (\mathbf{T}_\infty, \mathbf{T}_i, \pi_{\infty,i}, \phi_{\infty,i}, \Psi_{i,\infty})$ k -fedés,
- $\mathcal{C}_{\infty,i} = \mathcal{C}_{j,i} \circ \mathcal{C}_{\infty,j} \quad (i \leq j).$

Bizonyítás: A (4)-es feltétel a lényege a bizonyításnak, emiatt tetszőlegesen hosszú pozíciókban egy idő után már nem változik a fedés. Minden $n \in \mathbb{N}$ -re legyen i_n a legkisebb olyan, hogy minden $\ell \geq j \geq i$ -re $k_{\ell,j} \geq n$, így minden $j \geq i_n$ ${}_nT_j$, ${}_nT_j \cap (\mathcal{T}_j)_\mathbf{I}$, ${}_nT_j \cap (\mathcal{T}_j)_\mathbf{II}$ független j -től. $T_\infty := \{p \in \mathbb{N}^{<\omega} \mid p \in T_{i_{\ell h(p)}}\}$, $(\mathcal{T}_\infty)_\mathbf{I} := \{p \in \mathbb{N}^{<\omega} \mid p \in (\mathcal{T}_{i_{\ell h(p)}})_\mathbf{I}\}$, $(\mathcal{T}_\infty)_\mathbf{II} := \{p \in \mathbb{N}^{<\omega} \mid p \in (\mathcal{T}_{i_{\ell h(p)}})_\mathbf{II}\}$ $\mathbf{T}_\infty$ játék fa és $|T_\infty| \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |T_i|$. (3) miatt $i_k = 0$, így a k -fedés (i) része megvan.

Legyen $p \in {}_nT_\infty$, ekkor

$$\pi_{\infty,j}(p) := \begin{cases} p & \text{ha } j \geq i_n \\ \pi_{i_n,j}(p) & \text{ha } j < i_n. \end{cases}$$

Legyen $\sigma \in \mathcal{S}({}_nT_\infty)$, ekkor

$$\phi_{\infty,j}(\sigma) := \begin{cases} \sigma & \text{ha } j \geq i_n \\ \phi_{i_n,j}(\sigma) & \text{ha } j < i_n. \end{cases}$$

Ezek nyilván jóldefiniáltak és teljesítik a szükséges feltételeket, mind a fedéshez, mind a k -fedéshez.

Legyen $\sigma \in \mathcal{S}(T_\infty)$ és $x \in [T_j]$ konzisztens $\phi_{\infty,j}(\sigma)$ -val, ekkor

$$\Psi_{j,\infty}(\sigma, x) \upharpoonright n := \begin{cases} x \upharpoonright n & \text{ha } j \geq i_n \\ \Psi_{j,i_n}(\sigma, x) \upharpoonright n & \text{ha } j < i_n. \end{cases}$$

$\Psi_{j,\infty}(\sigma, x) \in [T_\infty]$ és jóldefiniált, hisz ha $n < m$, akkor $\Psi_{j,\infty}(\sigma, x) \upharpoonright n \subseteq \Psi_{j,\infty}(\sigma, x) \upharpoonright m$. Persze $\pi_{\infty,j}(\Psi_{j,\infty}(\sigma, x)) \subseteq x$, és ha nem egyenlő, akkor tabu a megfelelő játékos számára, mivel π egy játékot pozícióként vetít, és mivel ezt is elegendő a pozíciókon ellenőrizni, így konzisztens lesz σ -val.

Tehát $(\mathbf{T}_\infty, \mathbf{T}_j, \pi_{\infty,j}, \phi_{\infty,j}, \Psi_{j,\infty})$ k -fedés. $\mathcal{C}_{\infty,i} = \mathcal{C}_{j,i} \circ \mathcal{C}_{\infty,j}$ következik a definícióból és a (2)-es feltételből.

□

3.D. Konstruktív lemma

3.13. Lemma:

Legyen $\mathbf{T}$ tabus játék fa, ha $A \subseteq [T]$ nyílt vagy zárt és $k \in \mathbb{N}$, akkor $\mathbf{T}$ -nek van megfelelő k -fedése A -ra nézve.

Bizonyítás: A definícióból következik, hogy ha egy halmaznak van megfelelő fedése, akkor az megfelelő a komplementerére is, tehát feltehető, hogy $A \subseteq [T]$ zárt. Mivel egy $k+1$ -fedés egyben k -fedés is, ezért elég páros k -ra ilyen konstruálnunk. Defináljuk $\mathcal{C} = (\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \pi, \phi, \Psi)$ -t, megmutatjuk, hogy k -fedés és megfelelő A -ra nézve.

$\tilde{\mathbf{T}}$ és π konstrukciója:

Mivel k -fedést akarunk, így az elején nincs választásunk, ${}_k\tilde{T} = {}_kT$, ${}_k\tilde{T} \cap \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{I}} = {}_kT \cap \mathcal{T}_{\mathbf{I}}$, ${}_k\tilde{T} \cap \tilde{\mathcal{T}}_{\mathbf{II}} = {}_kT \cap \mathcal{T}_{\mathbf{II}}$.

Azt, hogy hogy néz ki $\tilde{\mathbf{T}}$ a többi helyen, úgy fogjuk megérteni, hogy tetszőleges $p \in T$ -re, amire $\ell h(p) = k$ és nem terminált, megmondjuk a T_p fellett lévő $\tilde{T}_p$ -t. Mivel k páros, így p -ben $\mathbf{I}$ jön, egy ilyen p ág úgy fog kinézni $\tilde{T}_p$ -ben, hogy minden lenti lépéshez $\mathbf{I}$ -nek több opciója is lesz, majd $\mathbf{II}$ -nek hasonlóan. Viszont ezt a lépésváltást követően a fa vagy majdnem úgy néz ki, mint ami alatta van (néhány esetleg később induló ág hiányzik) vagy csak egy ilyen ág és az oda vezető út marad felette.

Legyen a megengedett lépés p -ben T -ben, ekkor legyen Z az a halmaz ahonnan biztosan $\mathbf{II}$ nyerne ($r \in T$):

$$(i) \ p \hat{^} a \subsetneq r$$

$$(ii) \ r \text{ nem terminált}$$

$$(iii) \ [T_r] \cap A = \emptyset, \text{ de } \forall r \ (p \hat{^} a \subsetneq q \subsetneq r \Rightarrow [T_q] \cap A \neq \emptyset)$$

(q a legelső ilyen hely)

A pontos konstrukcióhoz képzeljük el, hogy **I** és **II** épp az eredeti játékot játsszák, de **I**-es fair ajánlatot tesz a játék módosítására $p \hat{a}$ -ban, a mellett mondhat még egy $X \subseteq Z$ halmazt és azt **II** elfogadhatja vagy kihívhatja.

Ha **II** elfogadja X -et, akkor annyiban változik a játék, hogy ha Z -beli helyre érnek, akkor a játék véget ér, ha a megállás helye X -beli akkor **I** nyer, ha nem, akkor **II**.

Ha **II** kihívja X -et, vagyis úgy gondolja, hogy X elfogadásával romlanának az esélyei (ezt csak akkor teheti meg, ha $X \neq \emptyset$), akkor mond egy $r \in X$ -et, mondván, hogy ott ő nyerne, ezt követően csak onnan játszásk le a játékot. Ezt persze a vetítés miatt úgy csináljuk $\tilde{T}$ -ben, hogy csak az r -hez vezető utat engedjük meg, és már **II**-nek is azt a b megengedett lépését kellett mondania, amire $b \subseteq r$. Megjegyzés: ez a játék teljesen képzeletbeli és csupán a $\tilde{T}$ szerkezetének megértésére szolgál, látható rajta, hogy ha $X \neq \emptyset$ akkor **II** kiválasztva egy elemét nyer (amennyiben sikerül elkerülnie a tabuit), de ez számunkra még nem fontos.

Formálisabban $\tilde{T}$ a $k + 2$. lépéstől azon $p \hat{a}(X) \hat{b}(v) \hat{s}$ sorozatokból áll, amikre

- $p \hat{a} \hat{b} \hat{s} \in T$
- $\ell h(p) = k$, $a, b \in \mathbb{N}$
- $v = 1$ vagy $v = (2, r)$, ahol $r \in X$
- ha $v = 1$, akkor $\forall z \in Z \neg(z \subsetneq p \hat{a} \hat{b} \hat{s})$
- ha $v = (2, r)$, akkor $b \subseteq r \wedge p \hat{a} \hat{b} \hat{s} \in T_r$

Megjegyzés: olvasóinknak feltűnhetett, hogy a definícióval ellentétben itt nem csak természetes számokat lépünk, viszont a lehetséges lépések száma mindig megszámlálható, így ezek elkódolhatók természetes számokkal, de ettől eltekintünk.

Azt állítjuk, hogy $\pi^{-1}(A)$ nyílt-zárt.

$\tilde{A} := \{\tilde{x} \in [\tilde{T}] \mid \ell h(\tilde{x}) \geq k + 2 \wedge \text{II elfogadja I által javasolt } X\text{-et}\}$, ez a halmaz nyílt-zárt.

$\tilde{A} \cap [\tilde{T}] = \pi^{-1}(A)$. Mivel, ha $\tilde{x}$ egy végtelen játék $\tilde{T}$ -ben, ahol **II** elfogadta az **I** által javasolt X -et, akkor mivel végtelen így nem mehet át Z egyik pontján se, hiszen azok tabuk, tehát minden $q \subseteq \pi(\tilde{x})$ -re $[T_q] \cap A \neq \emptyset$ és mivel A zárt így $\pi(\tilde{x}) \in A$. Ha pedig **II** kihívta X -et, akkor mivel végtelen, így nem kerülhet tabuba és tudjuk létezik $r \subseteq \pi(\tilde{x})$, hogy $[T_r] \cap A = \emptyset$, tehát $\pi(\tilde{x}) \notin A$. Tehát $\pi^{-1}(A)$ is nyílt-zárt, hisz $[\tilde{T}]$ zárt.

$\phi_I : \mathcal{S}_I(\tilde{T}) \rightarrow \mathcal{S}_I(T)$ és

$\Psi_{\mathbf{I}} : \{(\tilde{\sigma}, x) \in \mathcal{S}_{\mathbf{I}}(\tilde{T}) \times [T] \mid x \text{ konzisztens } \phi_{\mathbf{I}}(\tilde{\sigma})\text{-val}\} \rightarrow [\tilde{T}]$ konstrukciója:

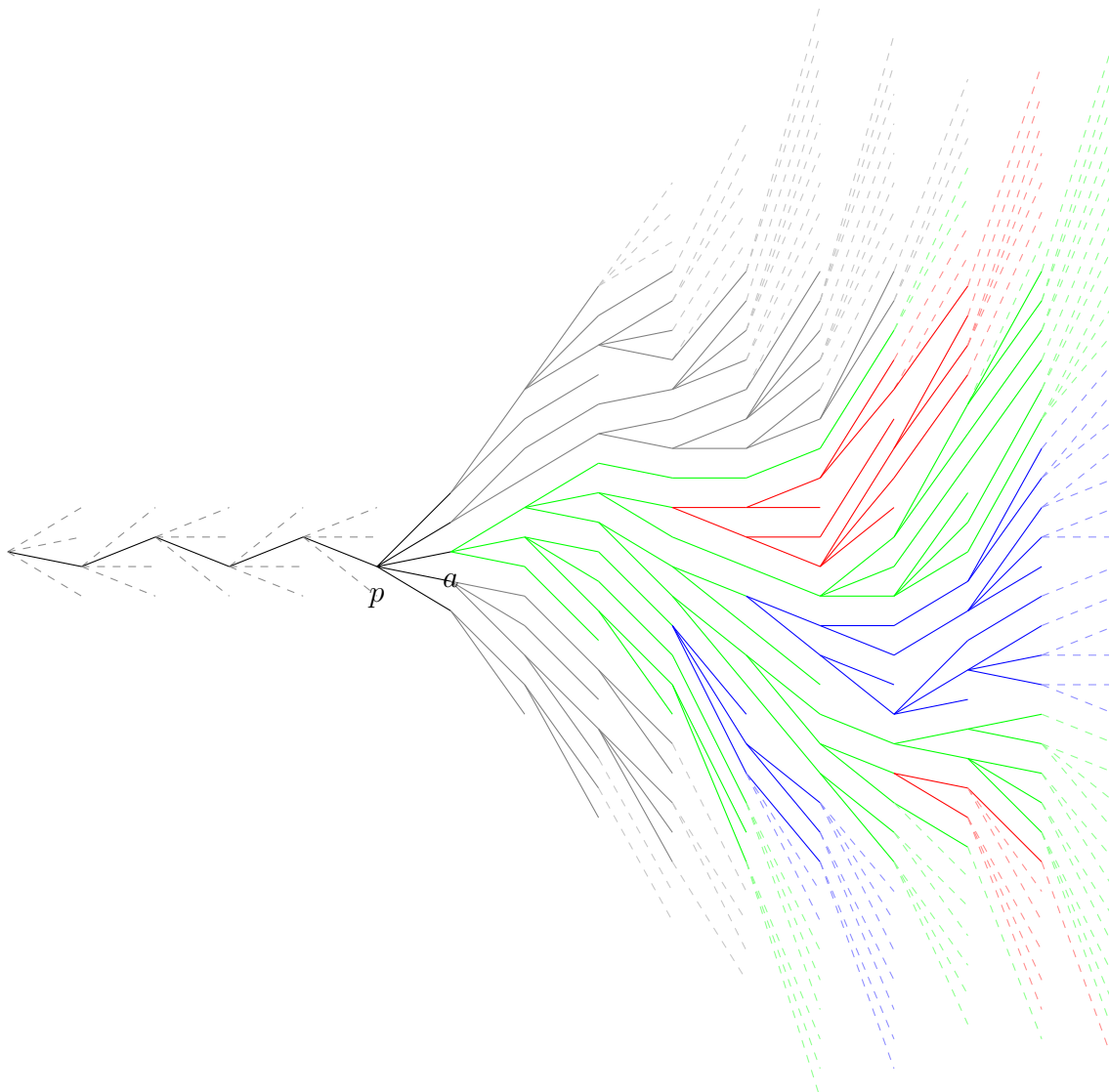
A tervünk, az hogy amikor meg akarjuk mondani a stratégiát T egy részén, akkor keresünk egy hasonló részt $\tilde{T}$ -ben és lemásoljuk, majd ellenőrizzük, hogy egy tetszőleges játékot felemelhetünk-e a feltételeknek megfelelően. A $\tilde{T}$ konstrukciójához hasonlóan, most is egy tetszőleges $p \in T \wedge \ell h(p) = k$ -ra értjük meg, hogy mi történik T_p -n, mivel ${}_k T$ -n a k -fedés miatt $\phi_{\mathbf{I}}$ az identitás és persze ott még a felemeléssel sincs gond. Vegyünk egy tetszőleges $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{\mathbf{I}}(\tilde{T})$, ennek kell megmondanunk a képét. Mivel k páros így $\tilde{\sigma}$ meghatározza, hogy $\mathbf{I}$ mit lépjen $\tilde{p}$ -ben, (a, X) -et, ekkor $\phi_{\mathbf{I}}(\tilde{\sigma}) =: \sigma$ szerint p a -t lépünk. A T_p fa azon q elemei, amikre $\ell h(q) > k$, a következő 4 részbe sorolhatók:

$$(1) \quad q \notin T_{p \hat{~} a}$$

$$(2) \quad \forall r \in Z \quad q \not\supseteq r$$

$$(3) \quad \exists r \in X : q \supseteq r$$

$$(4) \quad \exists r \in Z \setminus X : q \supseteq r$$

6. ábra. T_p kiemelve

Az ábrán példa látható egy T játék fára, ahol kiemeltük T_p -t és színeztük annak különböző részeit az előzőek alapján.

Ezen a négy részen fogjuk megmondani $\tilde{\sigma}$ segítségével, hogy mi legyen σ , majd rögtön ellenőrizni, hogy felelhetők-e megfelelően a játékok.

$$(1) \quad q \notin T_{p^{\wedge}a}$$

Itt σ legyen tetszőleges. (Egyedül $\phi_{\mathbf{I}}$ Lipschitzségére kell figyelni, ez megoldható, vehetünk egy az egész T -n előre rögzített stratégiát). Itt nem érhet véget semmilyen σ -val konzisztens játék, hiszen p -ben nem léphetünk a -t.

$$(2) \quad \forall r \in Z \quad q \not\supseteq r$$

Vegyük a $\tilde{T}_{p^{\wedge}(a,X)^{\wedge}(b,1)}$ alakú részfákat $\tilde{T}$ -ben, ezek pont fedik ezt a részt (és egyformák ezen a részen), σ csinálja azt, mint ott $\tilde{\sigma}$. Ha van egy konzisztens játékunk, felelhetjük.

$$(3) \quad \exists r \in X : q \supseteq r$$

Ezek felett a részek felett vannak a $\tilde{T}_{\tilde{r}}$ fák "lombjai" ($\{q \in T_r \mid r \subseteq q\}$), vegyük onnan σ -t. Ha van egy konzisztens játékunk, akkor az átmegy egy $r \in X$ -en, de mivel ez egy fa, ezért ezt csak egyféleképpen teheti meg, úgy ahogy $\tilde{T}_{\tilde{r}}$ -ben jutunk el $\tilde{r}$ -ig, tehát felelhető.

$$(4) \quad \exists r \in Z \setminus X : q \supseteq r$$

Itt is definiáljuk σ -t tetszőlegesen. Ha van egy konzisztens játékunk, akkor az átmegy $r \in Z \setminus X$ -en, tehát felelhetjük odáig egy $\tilde{T}_{p^{\wedge}(a,X)^{\wedge}(b,1)}$ fában és mivel itt a definíció az volt, hogy ha $r \in Z$, akkor terminált és $r \in X \Leftrightarrow \tilde{r} \in \tilde{T}_{\mathbf{II}}$, így ez a játék $\tilde{T}_{\mathbf{I}}$ -beli, ami megfelel a felelítés feltételének.

$$\phi_{\mathbf{II}} : \mathcal{S}_{\mathbf{II}}(\tilde{T}) \rightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{II}}(T) \text{ és}$$

$$\Psi_{\mathbf{II}} : \{(\tilde{\tau}, x) \in \mathcal{S}_{\mathbf{II}}(\tilde{T}) \times [T] \mid x \text{ konzisztens } \phi_{\mathbf{II}}(\tilde{\tau})\text{-val}\} \rightarrow [T] \text{ konstrukciója:}$$

A konstrukció az előzőhöz nagyon hasonló lesz, legyen $\tilde{\tau}$ a stratégia amiből kiindulunk, csupán ezúttal $\tilde{\tau}$ nem határozza meg, hogy mit lépünk p -ben, így nem kapjuk meg az X -et, hanem nekünk kell kiválasztani egy megfelelőt. $\mathbf{II}$ lépésekor a $k+1$. lépés le van fixálva, lévén, hogy az övé a stratégia, ezúttal tetszőleges $p^{\wedge}a \in T \wedge \ell h(p) = k$ -ra értjük meg, hogy mi történik $T_{p^{\wedge}a}$ -ban:

$$Z \setminus Y := \{r \in Z \mid \exists X \subseteq Z : \tilde{\tau}(p^{\wedge}(a, X)) = (b, 2, r)\}$$

azaz azon Z -beliek halmaza amelyre tudunk olyan $\tilde{r}$ -et tartalmazó X -et mondani, hogy arra $\mathbf{II}$ kihívja r -t $\tilde{\tau}$ alapján.

Ekkor $T_{p^{\wedge}a}$ fa azon q elemei, amikre $\ell h(q) > k$, a következő 3 részre oszthatók:

$$(1) \quad \forall r \in Z \quad q \not\supseteq r$$

Itt pontosan ugyanaz történik, mint σ -nál (2)-ben, csak X helyett Y -nal.

(2) $\exists r \in Y : q \supseteq r$

Itt pontosan ugyanaz történik, mint σ -nál (4)-ben, csak X helyett Y -nal, és persze itt a felemeléshez rövidülés esetén a másik tabu kell.

(3) $\exists r \in Z \setminus Y : q \supseteq r$

definíció szerint minden $r \in Z \setminus Y$ -ra létezik X_r , hogy azt választva a stratégia r -et hívja ki, tehát ezek a fák fednek, és ugyanúgy megy minden, mint σ -nál (3)-ban.

□

3.E. Utolsó lépések

3.14. Tétel: (Martin, 1985)[6, 2.1.8. Tétel]

Legyen $\mathbf{T}$ tabus játék fa, ha $A \subseteq [T]$ Borel és $k \in \mathbb{N}$, akkor $\mathbf{T}$ -nek van megfelelő k -fedése A -ra nézve.

Bizonyítás: A következő állítást bizonyítjuk transzfinit indukcióval $\alpha \geq 1$ megszámlálható rendszámra:

$(\dagger)_\alpha$ Minden $\mathbf{T}$ -re, minden $A \subseteq [T]$ -ra, minden $k \in \mathbb{N}$ -ra, ha $A \in \Sigma_\alpha^0$, akkor $\mathbf{T}$ -nek létezik megfelelő k -fedése A -ra nézve.

$(\dagger)_1$ következik a 3.13. lemmából.

Tegyük fel, hogy $\alpha > 1$ és minden $1 \leq \beta < \alpha$ -ra $(\dagger)_\beta$ igaz.

Legyen $k \in \mathbb{N}$, $A \in \Sigma_\alpha^0$ ekkor létezik $(\beta_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}} : \bigcup B_n = A$, $B_n \in \Pi_{\beta_n}^0$, $\beta_n < \alpha$.

Legyen $\mathbf{T}_0 := \mathbf{T}$, indukcióval fogjuk definiálni $(\mathbf{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ -t és $\mathcal{C}_{\ell,i} = (\mathbf{T}_\ell, \mathbf{T}_i, \pi_{\ell,i}, \phi_{\ell,i}, \Psi_{i,\ell})$ $j \leq \ell$ -t, ahol $\mathcal{C}_{\ell,i} = \mathcal{C}_{j,i} \circ \mathcal{C}_{\ell,j}$ ($i \leq j \leq \ell$), $\mathcal{C}_{\ell,j}$ $(k+j)$ -fedés, és $\mathcal{C}_{\ell,0}$ megfelelő fedése minden $j < \ell$ -re B_j -nek.

Tegyük fel, hogy minden $\ell < n$ -re már megvan $\mathbf{T}_\ell$ és $\mathcal{C}_{\ell,j}$.

$\pi_{n,0}$ folytonos és $B_n \in \Pi_{\beta_n}^0(\mathbf{T}_0)$, így $\pi_{n,0}^{-1}(B_n) \in \Pi_{\beta_n}^0(\mathbf{T}_n)$. $(\dagger)_{\beta_n}$ miatt van $\mathcal{C}_n = (\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{T}_n, \pi, \phi, \Psi)$ $(k+n)$ -fedés, ami megfelelő $\pi_{n,0}^{-1}([T] \setminus B_n) \in \Sigma_{\beta_n}^0(\mathbf{T}_n)$ -ra, és így megfelelő $\pi_{n,0}^{-1}(B_n) \in \Pi_{\beta_n}^0(\mathbf{T}_n)$ -re is. Legyen $\mathbf{T}_{n+1} := \tilde{\mathbf{T}}$, $j \leq n$ -re legyen $\mathcal{C}_{n+1,j} = \mathcal{C}_{n,j} \circ \mathcal{C}_{n+1,n}$ ($\mathcal{C}_{n+1,n+1}$ triviális fedés), ez kielégíti a kívánt feltételeket.

3.12. lemma feltételei teljesülnek $k_{j,i} := k+i$ választással, legyen tehát $\mathbf{T}_\infty$ és $\mathcal{C}_{\infty,i} = (\mathbf{T}_\infty, \mathbf{T}_i, \pi_{\infty,i}, \phi_{\infty,i}, \Psi_{i,\infty})$. Ekkor $\pi_{\infty,0}^{-1}(B_n)$ nyílt-zárt minden n -re, mivel $\pi_{\infty,n+1}$ folytonos, ezért $\pi_{\infty,0}^{-1}(A)$ nyílt.

A 3.13. lemma miatt van $\tilde{\mathcal{C}}$ $\mathbf{T}_\infty$ -re megfelelő k -fedés $\pi_{\infty,0}^{-1}(A)$ -ra nézve, így $\mathcal{C}_{\infty,0} \circ \tilde{\mathcal{C}}$ k -fedés és megfelelő A -ra nézve.

□

1.1.-es Tétel: (Martin, 1975, [5])

Ha $A \subseteq [T]$ Borel, akkor $G(A, T)$ eldöntött.

Bizonyítás: Egészítsük ki a terminált pozíciókat végtelen utakká,

legyen $T' := T \cup \{p \hat{\ } s \mid p \text{ terminált} \wedge s : n \rightarrow \{0\}, n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor $[T] \cong [T'] = [T']$, így természetes módon kapunk egy $A' \subseteq [T']$ Borel halmazt. Legyen $\mathbf{T}' = (T', \mathcal{T}_\mathbf{I} = \emptyset, \mathcal{T}_\mathbf{II} = \emptyset)$ tabus játék fa. Ekkor a 3.14. tétel alapján létezik megfelelő fedés A -ra és a 3.7. lemma miatt $G(A', \mathbf{T}')$ eldöntött, tehát $G(A', T')$ eldöntött, és ebből adódóan $G(A, T)$ is. □

4. Alkalmazások

4.A. Előkészületek

4.1. Definíció: lengyel tér

Az (X, τ) topologikus tér lengyel tér, ha szeparábilis és teljesen metrizable, azaz, ha létezik megszámlálható sűrű részhalmaza és megadható rajta olyan metrika, ami teljes és az eredeti topológiát generálja.

Felmerülhet a kérdés, hogy a lengyel tereket miért nem metrikus térként kezeljük, hisz megadható rajtuk metrika. Nos, egy lengyel térre több teljes metrika is tehető, ami ugyanazt a topológiát generálja, nekünk azonban nincs szükségünk arra, hogy kiemeljünk egyet közülük.

4.2. Lemma:

Legyen X lengyel tér, ekkor $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.

Bizonyítás: Definíció szerint van $A \subseteq X$ megszámlálható, sűrű halmaz, ekkor $A^{\mathbb{N}}$, az A elemeiből képzett sorozatok elemszáma legfeljebb kontinuum és X minden x pontjához hozzá tudunk rendelni egy ilyen sorozatot, ami x -hez tart. Mivel A sűrű. Tehát létezik egy injekció X -ből $A^{\mathbb{N}}$ -be, így $|X| \leq |A^{\mathbb{N}}| \leq 2^{\aleph_0}$. $\square$

4.3. Lemma:

Legyen X lengyel tér, ekkor X -nek van megszámlálható bázisa.

Bizonyítás: Legyen $A \subseteq X$ megszámlálható sűrű halmaz, rögzítsünk egy d kompatibilis metrikát, Legyen $\mathcal{B} := \{B(a, \frac{1}{n}) \subseteq X \mid a \in A, n \in \mathbb{Z}^+\}$, persze $\mathcal{B}$ megszámlálható. Azt állítjuk, hogy bázis is, vagyis, ha $U \subseteq X$ nyílt, akkor $U = \bigcup \{B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U\}$. $\supseteq$ nyilvánvaló a definícióból. $\subseteq$ -hez tegyük fel indirekten, hogy létezik $x \in U$ ellenpélda, ekkor mivel U nyílt létezik $\varepsilon > 0$ (feltehető, hogy $\varepsilon < 1$), hogy $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Mivel A sűrű, így létezik $a \in A$, hogy $a \in B(x, \frac{\varepsilon}{4})$ és persze létezik $n \in \mathbb{Z}^+$, hogy $\frac{\varepsilon}{4} < \frac{1}{n} < \frac{3\varepsilon}{4}$, ekkor $x \in B(a, \frac{1}{n}) \subseteq U \wedge B(a, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$, ellentmondás. $\square$

4.4. Lemma:

Ha X lengyel tér, akkor teljesíti a 2.6. Lemma által kimondottakat.

Bizonyítás: A 2.6. Lemma bizonyításában a $[T]$ topológiáját elég volt arra használni, hogy belássuk, hogy $\Sigma_1^0 \subseteq \Sigma_2^0$, vagyis, hogy minden nyílt előáll megszámlálható sok zárt uniójaként. Ennek igazolására a 4.3. érvelése kis módosítással használható, $\mathcal{B} := \{\overline{B(a, \frac{1}{n})} \subseteq X \mid a \in A, n \in \mathbb{Z}^+\}$. $\square$

4.5. Lemma:

Legyen X olyan topologikus tér, amely teljesíti a 2.6. Lemma által kimondott tulajdonságokat és $C \subseteq X$ zárt. Tekintsük C -n az altértopológiát, ekkor $\forall A \subseteq C$

$$\forall \alpha \geq 1 \quad (A \in \Pi_\alpha^0(X) \Leftrightarrow A \in \Pi_\alpha^0(C))$$

$$\forall \alpha \geq 2 \quad (A \in \Sigma_\alpha^0(X) \Leftrightarrow A \in \Sigma_\alpha^0(C))$$

Bizonyítás: Az állítást indukcióval fogjuk igazolni $\alpha \geq 1$ -re.

Az altértopologia definíciójából és C zártóságából következik, hogy $A \in \Pi_1^0(X) \Leftrightarrow A \in \Pi_1^0(C)$

Tegyük fel, hogy $\alpha \geq 2 \wedge \forall \beta < \alpha$ -ra igaz az állítás.

$A \in \Sigma_\alpha^0(X) \Leftrightarrow A \in \Sigma_\alpha^0(C)$, következik a Σ_α^0 definíciójából és az indukciós feltételünkből.

Ha $A \in \Pi_\alpha^0(C) \Rightarrow (C \setminus A) \in \Sigma_\alpha^0(C) \Rightarrow (C \setminus A) \in \Sigma_\alpha^0(X)$

$$X \setminus C \in \Sigma_1^0(X) \subseteq \Sigma_\alpha^0(X)$$

$$X \setminus A = (X \setminus C) \cup (C \setminus A) \Rightarrow (X \setminus A) \in \Sigma_\alpha^0(X) \Rightarrow A \in \Pi_\alpha^0(X)$$

Ha $A \in \Pi_\alpha^0(X) \Rightarrow (X \setminus A) \in \Sigma_\alpha^0(X)$

$$C \text{ zárt} \Rightarrow C \in \Pi_1^0(X) \subseteq \Sigma_\alpha^0(X)$$

$$C \setminus A = (X \setminus A) \cap C \Rightarrow (C \setminus A) \in \Sigma_\alpha^0(X) \Rightarrow A \in \Pi_\alpha^0(C) \quad \square$$

4.6. Megjegyzés:

Legyen X lengyel tér, $C \subseteq X$. Ekkor C -t Cantor-halmaznak hívjuk, ha homeomorf a klasszikus $\mathcal{C} \subseteq [0, 1]$ Cantor-halmazzal. Cantor-séma alatt, pedig egy olyan $(A_s)_{s \in 2^{\mathbb{N}}}$ részhalmaz családot értünk, amire:

$$\bullet A_{s \smallfrown 0} \cap A_{s \smallfrown 1} = \emptyset \quad \forall s \in 2^{<\omega}$$

- $\overline{A_{s \smallfrown i}} \subseteq A_s \quad \forall s \in 2^{<\omega}, i \in \{0, 1\}$
- $\text{diam}(A_s) < 2^{-\ell h(s)}$

akkor $\bigcap_n \left(\bigcup_{s \in 2^n} A_s \right)$ a Cantor-sémához tartozó Cantor-halmaz.

4.7. Lemma:

Legyen X perfekt nemüres lengyel tér, ekkor létezik $C \subseteq X$ Cantor-halmaz.

Bizonyítás: A bizonyítás lényege a következő, egy perfekt nem üres halmaznak legalább 2 pontja van és, hogy egy perfekt halmaz és egy nyílt metszete perfekt. Így X -nek van 2 pontja, ezek köré írhatunk elég kicsi diszjunkt nyílt halmazokat, majd minden körben ismét van 2 pont, ezt folytatva Cantor-sémát kapunk, és mivel X teljes így tartalmazni fogja a séma által meghatározott Cantor-halmazt. $\square$

4.8. Tétel: [2, 3.11 Tétel]

X lengyel tér, $Y \subseteq X$. Ekkor Y lengyel $\Leftrightarrow Y \in \Pi_2^0$

4.9. Definíció: perfekt halmaz

Legyen X lengyel tér, $A \subseteq X$. Ekkor A perfekt $:\Leftrightarrow A$ zárt és nincs izolált pontja.

(Az egész tér perfekt, ha nincs izolált pontja.)

4.10. Jelölés: diszjunkt unió

$$X = A \dot{\cup} B \Leftrightarrow X = A \cup B \wedge A \cap B = \emptyset$$

4.11. Tétel:

Legyen X lengyel tér, ekkor egyértelműen létezik P perfekt és U megszámlálható, nyílt részhalmaz, hogy $X = P \dot{\cup} U$.

Bizonyítás: Egyértelműség: Legyen $X = P_0 \dot{\cup} U_0 = P_1 \dot{\cup} U_1$, ekkor, ha $Y = P_i \cap U_j \neq \emptyset$ ($i \neq j$), akkor $Y \neq \emptyset$ nyílt, tehát örökli P_i perfektségét, emellett egy nyílt és egy zárt halmaz metszete,

így $Y \in \Pi_2^0$, Tehát Y lengyel a 4.8. Tétel miatt nemüres, azaz tartalmaz Cantor halmazt a 4.7. Lemma miatt, így a számossága nem lehet megszámlálható, ellentmondás.

Létezés: Legyen $\mathcal{B}$ megszámlálható bázis a 4.3. Lemma miatt van ilyen. Legyen $U := \bigcup \{B \in \mathcal{B} \mid |B| \leq \aleph_0\}$, ekkor világos, hogy U megszámlálható és nyílt, legyen $P := X \setminus U$. Indirekten tegyük fel, hogy P nem perfekt, ekkor létezik izolált pontja, vagyis létezik nyílt P -ben, ami csak 1 pontot tartalmaz. Ekkor viszont van egy ennek megfelelő nyílt X -ben, ami P -ből ezt az egy pontot tartalmazza, tehát az elemszáma megszámlálható, mivel U megszámlálható, ami ellentmondás. $\square$

4.B. Körmentes n -reguláris Borel gráf, ami nem Borel n -színezhető.

4.12. Definíció: Cayley gráf

Legyen Γ egy csoport S generátor halmazzal. Ekkor a Cayley-gráfján, azt a gráfot értjük, aminek csúcshalmaza Γ és x -ből y -ba $s \in S$ -el címkézett irányított él fut, ha $y = xs$.

4.13. Definíció: Szabad hatás

Legyen $\Gamma \curvearrowright X$ csoporthatás (balról). Ez szabad, ha minden $x \in X$ -re és $\gamma \in \Gamma$ -ra, ha $x = \gamma \cdot x$, akkor $\gamma = 1$.

4.14. Definíció: Borel gráf

Legyen X lengyel tér, $G \subseteq X \times X$ szimmetrikus irreflexív reláció és Borel, akkor az (X, G) Borel gráf, csúcsai X elemei, élei G elemei. Gyakran azonosítjuk a gráfot a G relációval.

4.15. Definíció: Borel színezhetőség

Ha (X, G) egy Borel gráf Borel $|A|$ -színezhető, ha létezik $c : X \rightarrow A$ Borel függvény, ami színezés, vagyis, ha xGy , akkor $c(x) \neq c(y)$.

4.16. Definíció: Borel kromatikus szám

Legyen G Borel gráf, ekkor legyen $\chi_{\mathcal{B}}$ a legkisebb olyan számosság, amire G Borel $\chi_{\mathcal{B}}$ -színezhető.

4.17. Példa:

Legyen $\alpha \in [0, \pi]$ olyan, hogy $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, jelöljük F_α -val az S^1 kör α szögű forgatását. Definiáljuk G_α gráfot, úgy, hogy a csúcshalmaza S^1 és $xG_\alpha y \Leftrightarrow F_\alpha(x) = y \vee F_\alpha(y) = x$.

G_α 2-reguláris, körmentes.

4.18. Állítás:

$2 = \chi(G_\alpha) < \chi_B(G_\alpha) = 3$, ahol χ a kromatikus szám és χ_B a Borel kromatikus szám.

Bizonyítás: G_α összefüggőségi komponensei mindkét irányban végtelen útgráfok, tehát 2-színezhető.

Belátjuk, hogy G_α Borel 3-színezhető. Ehhez vegyünk egy I intervallumot S^1 -en, aminek a hossza kisebb, mint α . Legyen $c(x) = 2 \Leftrightarrow x \in I$ és legyen $c(x)$ a paritása, annak, hogy legkevesebb hány α -ás forgatással vihető x I -be. Ez jó Borel színezés.

Indirekten tegyük fel, hogy Borel 2-színezhető, ekkor léteznek $B_0 \dot{\cup} B_1 = S^1$ Borelek, gy $c(B_0) = 0$, $c(B_1) = 1$. Tehát B_0 , B_1 Lebesgue-mérhetőek, feltehető, hogy $\lambda(B_0) > 0$. Ekkor létezik $I \subseteq S^1$, hogy $\lambda(B_0 \cap I) > 0.99 \cdot \lambda(I)$. Viszont, mivel $\frac{\alpha}{\pi}$ irracionális, így létezik n , hogy $\lambda(F_\alpha^{2n+1}(I) \cap I) > 0.99 \cdot \lambda(I)$. Ám $\lambda(B_1 \cap F_\alpha^{2n+1}(I)) > 0.99 \cdot \lambda(I)$, ebből $\lambda(B_1 \cap F_\alpha^{2n+1}(I) \cap I \cap B_0) > 0.96 \cdot \lambda(I)$, ami ellentmondás, hisz B_0, B_1 diszjunktak. $\square$

4.19. Lemma:

Legyen G lokálisan véges (minden fokszáma véges) Borel gráf. Ekkor G Borel $\aleph_0$ -színezhető.

Bizonyítás: Mivel definíció szerint X lengyel, így van megszámlálható bázisa $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Minden $x \in X$ -re van egy legkisebb indexű bázis elem, ami őt tartalmazza, de a szomszédait nem. Legyen $c(x)$ ennek a bázis elemnek az indexe. Világos, hogy ez $\aleph_0$ -színezés, megmutatható, hogy Borel. $\square$

4.20. Lemma:

Legyen G Borel gráf, amiben minden foksám legfeljebb d . Ekkor G Borel $d + 1$ -színezhető.

Bizonyítás: Használva a 4.19. Lemmát, van $c : X \rightarrow \aleph_0$ Borel színezésünk. Ekkor ezt módosítva konstruálunk megfelelő színezést ω lépésben. Egy lépésben a legkisebb d -nél nagyobb színű

pontokat színezzük át, a legkisebb természetes számra, ami nem szerepel a szomszédjaik között, ez persze legfeljebb d . Világos, hogy ez $d + 1$ színezés, megmutatható, hogy Borel. (Minden csúcs új színe csak egy lokális környezetének a régi színétől függ.) $\square$

Eddig láthattuk, hogy a Borel kromatikus szám van, hogy nagyobb, mint a klasszikus, viszont reguláris gráfokra maximum eggyel rosszabb, mint a foksám. A következő tétel igazolja, hogy ez a becslés éles. A tétel bizonyításában használni fogjuk a [3, 7.3. Lemma] -át.

4.21. Tétel:(Marks, [4])

Minden $n \in \mathbb{Z}^+$ -re létezik körmentes n -reguláris Borel gráf, ami nem Borel n -színezhető.

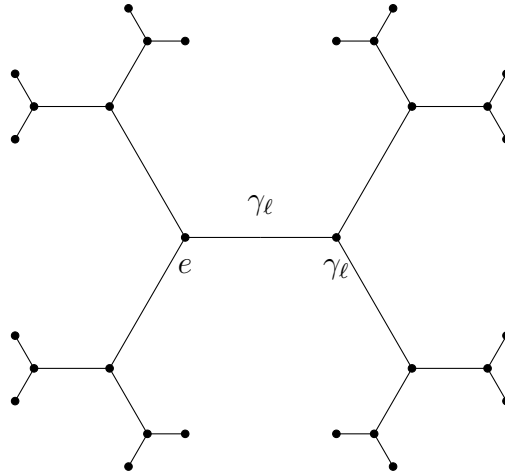
Bizonyítás: Rögzítsük $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ -t. Tekintsük a $\mathbb{Z}_2^{*n_0} = \langle \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n_0-1} \mid \gamma_i^2 = e \rangle$ csoportot és a Cayley-gráfját ($\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n_0-1}$ generátorokkal), ez n_0 -reguláris (nem ez lesz a gráfunk). Legyen $X := \{x \in \mathbb{N}_2^{*n_0} \mid \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2^{*n_0}, \forall i \ x(\alpha) \neq x(\alpha\gamma_i)\}$, azaz olyan természetes számokkal történő számozásai a gráfnak, hogy a szomszédos csúcsoknak ne legyen azonos számuk. Legyen $\tilde{G}$ gráf X csúcshalmazon, x, y között pontosan akkor fusson él, ha $\exists i \ \gamma_i \cdot x = y$, ahol $\mathbb{Z}_2^{*n_0}$ balról hat X -en, azaz $\alpha \cdot x(\beta) = x(\alpha\beta)$. Megjegyzés: $\tilde{G}$ nem körmentes, csak azon az $Y \subseteq X$ halmazon, ahol $\mathbb{Z}_2^{*n_0}$ szabadon hat, azt fogjuk megmutatni, hogy $G = \tilde{G} \upharpoonright Y$ számunkra megfelelő.

Először megmutatjuk, hogy $\tilde{G}$ -ben tetszőleges $c : X \rightarrow n_0$ Borel színezésre létezik $\ell \in n_0$ és $\tilde{x} \in X$, hogy $c(\tilde{x}) = \ell = c(\gamma_\ell \cdot \tilde{x})$. Rögzítsünk egy $c : X \rightarrow n_0$ Borel színezést.

Minden $i \in n_0, j \in \mathbb{N}$ -re tekintsük a következő $G_{i,j}$ játékot, amiben a játékosok egy $x \in X$ -t építenek. Legyen $x(e) = j$, az n . lépésében **I**-nek definiálnia kell a γ_i -vel kezdődő redukált n hosszú szavakon x értékét, **II**-nek peddig a nem γ_i -vel kezdődő redukált n hosszú szavakon kell definiálnia x értékét. Eközben mindkettőjüknek tartania kell magát X definíciójához, azaz nem lehet két szomszédos csúcson ugyanaz x értéke. **I** nyer $\Leftrightarrow c(x) \neq i$.

Mivel a játék Borel, a 1.1. Tétel alapján a játék eldöntött. Belátjuk, hogy minden j -re létezik i , hogy $G_{i,j}$ -re **II**-nek van nyerő stratégiája. Indirekten tegyük fel, hogy adott j -re minden i -re **I**-nek van nyerőstratégiája, ekkor ezeket a nyerőstratégiákat alkalmazhatjuk párhuzamosan a gráf különböző ágaiban és így azt kapjuk, hogy $c(x) \neq i$, minden i -re, ami ellentmondás. Tehát minden j -re létezik i , hogy $G_{i,j}$ -re **II**-nek van nyerő stratégiája, ebből skatulyaelv miatt következik, hogy létezik $\ell \in n_0, j_0, j_1 \in \mathbb{N}$, hogy G_{ℓ,j_0} -ra és G_{ℓ,j_1} -ra is **II**-nek van nyerőstratégiája, ezek segítségével fogunk olyan $\tilde{x}$ -t építeni, amire $c(\tilde{x}) = \ell = c(\gamma_\ell \cdot \tilde{x})$. Ezt megtehetjük úgy, hogy $\tilde{x}(e) = j_0$,

$\tilde{x}(\gamma_\ell) = j_1$ definiálással kezdünk, majd párhuzamosan alkalmazzuk a két nyerőstratégiát a γ_ℓ él által elválasztott két fára.



7. ábra. $\tilde{x}$ építése

Legyen $Y \subseteq X$ a $\mathbb{Z}_2^{*n_0}$ balról hatásának szabad része, ekkor $G = \tilde{G} \upharpoonright Y$ nyilván n_0 -reguláris és körmentes. Konstruálunk egy $c^* : X \setminus Y \rightarrow n$ Borel függvényt, amire $\forall x \in X \setminus Y, i \in n \quad c^*(x) \neq i \vee c^*(\gamma_i) \neq i$. Ez elegendő, mert ha $d : Y \rightarrow n$ Borel színezés, akkor $c := d \cup c^*$ választással a korábbiak alapján létezik $\ell \in n_0$ és $\tilde{x} \in X$, hogy $c(\tilde{x}) = \ell = c(\gamma_\ell \cdot \tilde{x})$. A c^* -ra tett feltétel miatt $X \setminus Y$ -ben nincs ilyen, tehát Y -ban van, ezért d nem lehet n_0 -színezés.

A következőkben megkonstruáljuk c^* -ot:

Az, hogy $\mathbb{Z}_2^{*n_0}$ nem hat szabadon $Y \subseteq X$ -en, azt $(x_0, x_1, \dots, x_{m+1})$ alakú körök ($x_0 = x_{m+1} \wedge \forall 0 \leq j, j' \leq m \quad j \neq j' \Rightarrow x_j \neq x_{j'}$) és az ezekhez tartozó $(\gamma_{k_0}, \gamma_{k_1}, \dots, \gamma_{k_m})$ -ák jelzik, amikre $\gamma_{k_j} \cdot x_j = x_{j+1}$ és persze $\gamma_{k_j} \neq \gamma_{k_{j+1}}$. Legyen A Borel halmaz, ami tartalmaz legalább egy ilyen kört minden összefüggőségi komponensből $\tilde{G} \upharpoonright (X \setminus Y)$ -ban. Ilyen létezik [3, 7.3 Lemma] miatt, és $(x_0, x_1, \dots, x_{m+1})$ sorrendje elkódolja egy ilyen kör irányítását is. Ekkor minden körbeli elemre legyen $c^*(x_j) := k_j$, persze ekkor, ha $c^*(x) = i$, akkor $c^*(\gamma_i \cdot x) \neq i$. Ezt megőrizve terjesszük ki c^* -ot. Ez megtehető, ha veszünk egy $i_0, i_1, \dots$ olyan sorozatot, ami végtelenszer vesz fel minden n_0 beli elemet, ugyanis ekkor az n . lépésben, ha $x \in X \setminus Y$ -ra már definiáltuk c^* -ot és $\gamma_{i_m} \cdot x$ -re még nem, akkor $c^*(\gamma_{i_m} \cdot x) := i_m$. $\square$

4.C. "Kontinuumhipotézis" Borel halmazokra

4.22. Definíció: *-játékok

Legyen $X \neq \emptyset$ perfekt lengyel tér, d kompatibilis teljes metrikával. Rögzítsük $\mathcal{B} := \{V_n\}$ bázist nemüres nyíltakból. Ha $A \subseteq X$, akkor a $G^*(A)$ *-játék alatt a következőt értjük:

$$\mathbf{I} \quad (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}) \quad (U_0^{(1)}, U_1^{(1)})$$

...

$$\mathbf{II} \quad i_0 \quad i_1$$

ahol $U_i^{(n)} \in \mathcal{B}$ bázisnyílt, úgy, hogy $\text{diam}(U_i^{(n)}) < 2^{-n}$, $\overline{U_0^{(n)}} \cap \overline{U_1^{(n)}} = \emptyset$, $i_n \in \{0, 1\}$, $\overline{U_0^{(n+1)}} \cup \overline{U_1^{(n+1)}} \subseteq U_{i_n}^{(n)}$. Legyen $\{x\} := \bigcap_n U_{i_n}^{(n)}$. Ekkor $\mathbf{I}$ nyer $:\Leftrightarrow x \in A$.

Itt $\mathbf{I}$ mindig mond két bázisnyíltat, majd $\mathbf{II}$ választ, $\mathbf{I}$ -nek olyanokat kell mondania, amik elég kicsik, lezártjaik részei a $\mathbf{II}$ által előzőleg választott halmaznak, és lezártjaik metszete üres, ez így meghatároz egy egyértelmű $x \in X$ -et.

4.23. Tétel:

Legyen $X \neq \emptyset$ perfekt lengyel tér és $A \subseteq X$. Ekkor:

(i) $\mathbf{I}$ -nek van nyerő stratégiája $G^*(A)$ -ban $\Leftrightarrow A$ tartalmaz Cantor-halmazt.

(ii) $\mathbf{II}$ -nek van nyerő stratégiája $G^*(A)$ -ban $\Leftrightarrow A$ megszámlálható.

Bizonyítás: (i) $\Rightarrow$: $\mathbf{I}$ nyerő stratégiája lényegében egy Cantor-séma $(U_s)_{s \in 2^{<\omega}}$, ekkor $\forall y \in 2^\omega \quad \{x_y\} := \bigcap_n U_{y \upharpoonright n} \Rightarrow x_y \in A$, tehát A tartalmaz Cantor-halmazt ($\{x_y \mid y \in 2^\omega\} \subseteq A$).

(i) $\Leftarrow$: Itt a Cantor-halmaz perfektsége miatt $\mathbf{I}$ mindig tud a feltételeknek megfelelően úgy választani, hogy választott halmazai metsszék a Cantor-halmazt, így ez nyerő stratégia lesz.

(ii) $\Leftarrow$: Ha A megszámlálható, akkor könnyen látszik a stratégia: $A = \{x_0, x_1, \dots\}$, $\mathbf{II}$ úgy lép az n . körben, hogy $x_n \notin U_{i_n}^{(n)}$.

(ii) $\Rightarrow$: Legyen σ nyerő stratégia $\mathbf{II}$ -nek, ekkor $x \in A$ -ra nevezzük

$$p = ((U_0^{(0)}, U_1^{(0)}), i_0, \dots, (U_0^{(n-1)}, U_1^{(n-1)}), i_{n-1})$$

pozíciót jónak, ha p konzisztens σ -val és $x \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)}$. Létezik egy maximális jó p x -re, hisz ellenkező esetben x konzisztens lenne σ -val és **I** nyerne, ami nem lehet, mivel σ **II**-nek nyerő stratégia. Legyen egy ilyen maximális jó p -re:

$$A_p := \{y \in U_{i_{n-1}}^{(n-1)} \mid \text{minden, a feltételeknek megfelelő } (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}) \text{ párra } y \notin U_i^{(n)},$$

ahol i a σ -nak megfelelő lépés},

akkor $x \in A_p$, vagyis $A \subseteq \bigcup_p A_p$ és ami a lényeg, hogy A_p legfeljebb egy elemű, hisz, ha $y_0 \neq y_1 \in A_p$, akkor **I** léphet olyan $(U_0^{(n)}, U_1^{(n)})$ -t, hogy $y_i \in U_i^{(n)}$, ami ellentmondás. Mivel a játék fa megszámlálható, így $\bigcup_p A_p$ is és így A is. $\square$

4.24. Következmény: "Kontinuumhipotézis" Borelekre

Legyen Y lengyel tér és $B \subseteq Y$ Borel. Ekkor $|B| \leq \aleph_0 \vee |B| = 2^{\aleph_0}$.

Bizonyítás: A 4.11. Tétel miatt $Y = X \dot{\cup} U$, ahol X perfekt, U megszámlálható, így $A := B \cap X$ Borel Y -ban, így a 4.4. Lemma és a 4.5. Lemma miatt A Borel X -ben. Ha $X = \emptyset$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $X \neq \emptyset$, akkor, mivel X zárt, így lengyel tér, és használhatjuk a 4.23. Tételt. Mivel a függvény, ami $[T]$ -ből X -be képez, folytonos és $A \subseteq X$ Borel, így a játék a 1.1. Tétel alapján eldöntött és ha $|B| \not\leq \aleph_0$, akkor $|A| \not\leq \aleph_0$ (mivel U megszámlálható), tehát a 4.23. Tétel alapján **II**-esnek nem lehet nyerő stratégiája, tehát mivel a játék eldöntött így **I**-esnek van, azaz A tartalmaz Cantor-halmazt, aminek az elemszáma $2^{\aleph_0}$. Tehát $|B| \geq |A| \geq 2^{\aleph_0}$, ekkor mivel Y lengyel tér a 4.2. Lemma miatt $|Y| \leq 2^{\aleph_0}$ és $B \subseteq Y$, tehát $|B| = 2^{\aleph_0}$. $\square$

4.D. Wadge-rendezés és játék

4.25. Definíció:

Legyenek X, Y topologikus terek és $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. A Wadge redukáltja B -nek, ha létezik $f : X \rightarrow Y$ folytonos, hogy $f^{-1}(B) = A$. Jel.: $A \leq_W B$, persze, ha a terek nem egyértelműek a szövegkörnyezetből, akkor $(X, A) \leq_W (Y, B)$.

A Wadge rendezéssel megadható a Borel-hierarchia egy finomítása (ld. [2, 21.E]). Azt már a definícióból is láthatjuk, hogy tranzitív, reflexív, és hogy ha A, B Borel halmazokra $A \in \Sigma_\alpha^0 \cup \Pi_\alpha^0 \wedge B \leq_W A$, akkor $\exists \beta \leq \alpha : B \in \Sigma_\beta^0 \cup \Pi_\beta^0$. A következő tétel azt mutatja, hogy két Borel halmaz mindig összehasonlítható egymással vagy egymás komplementerével, legalábbis a megadott terekben.

4.26. Tétel: (Wadge-lemma)

Legyenek S, T nemüres játék fák terminált pozíciók nélkül és $A \subseteq [S]$, $B \subseteq [T]$ Borelek. Ekkor $A \leq_W B$ vagy $B \leq_W [S] \setminus A$.

Bizonyítás: A bizonyításhoz vezessük be a Wadge játékot ($WG(A, B)$):

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x(0) \quad \quad x(1) \\ & \quad \quad \quad \dots \\ \text{II} & y(0) \quad \quad y(1) \end{array}$$

ahol $x(i), y(i) \in \mathbb{N}$, $x \in [S]$, $y \in [T]$, **II** nyer $\Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow y \in B)$.

Mivel A, B Borelek, így a játék is az, és így az 1.1. Tétel miatt eldöntött.

Tegyük fel, hogy **II**-nek van nyerő stratégiája, erre tekinthetünk úgy, mint egy folytonos Lipschitz $\varphi : S \rightarrow T$ függvényre, amire $\ell h(\varphi(s)) = \ell h(s)$, ez persze kiterjed: $\varphi^* : [S] \rightarrow [T]$ folytonos függvényre. Mivel φ **II** nyerő stratégiája volt, így $x \in A \Leftrightarrow \varphi^*(x) \in B$, tehát $A \leq_W B$.

Ha **I**-nek van nyerő stratégiája, akkor hasonlóan $(x \notin A \Leftrightarrow y \in B)$, vagyis $B \leq_W [S] \setminus A$. $\square$

4.E. Hurewicz-Tétel és az oda vezető út

Ez az alfejezet a Hurewicz-Tétel bizonyításáról és következményeiről szól. Ehez bevezetünk néhány új fogalmat és bizonyítás nélkül elfogadunk pár állítást.

4.27. Definíció: analitikus halmaz

Legyen X lengyel tér és $A \subseteq X$, A analitikus, ha folytonos képe egy lengyel térnek, vagyis létezik Y lengyel tér és $f : Y \rightarrow X$ folytonos függvény, hogy $f(Y) = A$. (Jel: $A \in \Sigma_1^1$)

4.28. Definíció: koanalitikus halmaz

Legyen X lengyel tér és $B \subseteq X$, B koanalitikus, ha $X \setminus B$ analitikus.

4.29. Definíció: $\mathcal{N}$

$\mathcal{N} := [T]$, ahol $T = \mathbb{N}^{<\omega}$,

vagyis $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ azzal a topológiával, amit a fákon definiáltunk.

4.30. Tétel: (Hurewicz)

Legyen X lengyel tér, $A \subseteq X$ analitikus, ha $A \notin \Sigma_2^0$, akkor létezik $C \subseteq X$ Cantor-halmaz, amelyre $C \setminus A$ megszámlálható és sűrű C -ben, tehát $C \cap A$ relatív zárt A -ban és homeomorf $\mathcal{N}$ -el.

4.31. Következmény:

Legyen X lengyel tér $B \subseteq X$ koanalitikus, ekkor $B \in \Pi_2^0$ (vagyis lengyel tér) vagy létezik egy relatív zárt részhalmaza, ami homeomorf $\mathbb{Q}$ -val.

Bizonyítás: (Köv.) $A := X \setminus B$, ekkor tudjuk, hogy $B \in \Pi_2^0$ vagy $B \cap C$ relatív zárt, megszámlálható és sűrű C -ben. Mivel [2, 7.12. Feladat] szerint $\mathbb{Q}$ az egyetlen nemüres, megszámlálható, metrizálható, perfekt tér (homeomorfizmus erejéig), tehát ez a részhalmaza C -nek homeomorf $\mathbb{Q}$ -val. $\square$

4.32. Lemma: [2, 4.14. Tétel]

Legyen X lengyel tér, ekkor X beágyazható $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ -be, ami kompakt.

4.33. Következmény:

Legyen X lengyel tér. Ekkor X tartalmaz zárt részhalmazt, ami homeomorf $\mathcal{N}$ -el $\Leftrightarrow X$ nem áll elő, mint megszámlálható sok kompakt részhalmazának uniója.

Bizonyítás: Ha X előáll, mint megszámlálható sok kompakt részhalmazának uniója, akkor nem tartalmazhatja $\mathcal{N}$ -t zárt részhalmazként, hisz az nem áll elő, mint megszámlálható sok kompakt részhalmazának uniója. Ellenkező esetben legyen $\tilde{X}$ egy kompakt lengyel tér, ami tartalmazza X -et (ilyen van a 4.32. Lemma miatt). Ekkor $X \notin \Sigma_2^0$, így tartalmazza $\mathcal{N}$ -et zárt részhalmazként.

□

4.34. Definíció:

C elválasztja A -t B -től $:\Leftrightarrow A \subseteq C \wedge C \cap B = \emptyset$

Láttuk, milyen erős a Hurewicz-Tétel, bizonyításához egy még általánosabb tételt bizonyítunk.

4.35. Tétel: (Kechris-Louveau-Woodin)

Legyen X lengyel tér, $A \subseteq X$ analitikus és B tetszőleges, amikre $A \cap B = \emptyset$. Ha nem létezik Σ_2^0 halmaz, ami elválasztja A -t B -től, akkor létezik egy Cantor-halmaz $C \subseteq A \cup B$, hogy $C \cap B$ megszámlálható és sűrű C -ben. Tehát $C \cap B$ homeomorf $\mathbb{Q}$ -val és $C \cap A$ homeomorf $\mathcal{N}$ -el.

Bizonyítás: (Hurewicz-Tétel (4.30.))

Következik a Kechris-Louveau-Woodin Tételből (4.35.), $B := X \setminus A$ választással. □

A Kechris-Louveau-Woodin-Tételt 2 lépésben fogjuk bizonyítani, először visszavezetjük az alábbi lemmára, majd belátjuk a lemmát.

4.36. Lemma:

$A, B \subseteq \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ a Cantor-halmaz), A analitikus és $A \cap B = \emptyset$. Ha nem létezik Σ_2^0 , ami elválasztja A -t B -től, akkor létezik egy zárt halmaz $K \subseteq \mathcal{C}$, hogy $K \subseteq A \cup B$, emellett $K \cap A$, $K \cap B$ sűrű K -ban és $K \cap B$ megszámlálható.

4.37. Lemma: [2, 14.4. Állítás]

Legyen X, Y lengyel terek. Ha $f : X \rightarrow Y$ Borel és $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ analitikusak, akkor $f(A) \subseteq Y$, $f^{-1}(B) \subseteq X$ is analitikusak.

4.38. Tétel: [2, 4.18. Tétel]

Minden $X \neq \emptyset$ kompakt metrizable tér a Cantor-halmaz folytonos képe.

Bizonyítás: (Kechris-Louveau-Woodin Tétel (4.35.))

4.32. miatt X beágyazható kompakt térbe, és ha kompakt térben igaz a tétel, akkor az eredetiben is. Tegyük fel, hogy X kompakt. így 4.38. miatt $\pi : \mathcal{C} \rightarrow X$ folytonos szürjekció, ekkor legyenek $A' := \pi^{-1}(A)$, $B' := \pi^{-1}(B)$, így A' analitikus (4.37.), $A' \cap B' = \emptyset$. Ekkor teljesülnek a 4.36. alapfeltételei. Ha létezik $F' \in \Sigma_2^0(\mathcal{C})$, akkor ez nem csak zártak megszámlálható uniója, hanem kompaktoknak is, hisz $\mathcal{C}$ kompakt, így folytonos képe továbbra is kompaktak megszámlálható uniója, tehát $\pi(F') \in \Sigma_2^0(X)$ és persze $\pi(F')$ elválasztja A -t B -től. Tehát létezik $K' \subseteq \mathcal{C}$ zárt, perfekt, amire $K' \subseteq A' \cup B'$, $K' \cap A'$, $K' \cap B'$ sűrű K' -ben és $K' \cap B'$ megszámlálható. Ennek a képét tekintve $K := \pi(K') \subseteq X$ zárt (X -ben), $K \subseteq A \cup B$, $K \cap A$, $K \cap B$ sűrű K -ban és $K \cap B$ megszámlálható. Tehát K perfekt. Ekkor már csak meg kell adnunk egy $D \subseteq K$ Cantor-halmazt, amire $D \cap B$ sűrű D -ben, ez megtehető. $\square$

A következő játék a Wadge-játék általánosítása és szükségünk lesz rá a 4.36. Lemma bizonyításánál.

4.39. Definíció: Szétválasztó játék

Legyenek S, T nemüres játék fák, terminált pozíciók nélkül. $A \subseteq [S]$, $B_0, B_1 \subseteq [T]$, $B_0 \cap B_1 = \emptyset$, ekkor szétválasztó játéknak hívjuk, és $SG(A; B_0, B_1)$ -el jelöljük a következőt:

I $x(0)$ $x(1)$ $\dots$

II $y(0)$ $y(1)$
ahol $x \in [S]$, $y \in [T]$ és **II** nyer $:\Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow y \in B_0) \wedge (x \notin A \Rightarrow y \in B_1)$
 $(WG(A, B) = SG(A; B, [T] \setminus B))$

4.40. Lemma:

Ha **I**-nek van nyerő stratégiája az indukál egy $f : [T] \rightarrow [S]$ folytonos függvényt, amire $(y \in B_0 \Rightarrow f(y) \notin A) \wedge (y \in B_1 \Rightarrow f(y) \in A)$, tehát $f^{-1}(A)$ elválasztja B_1 -et B_0 -tól.

Ha **II**-nek van nyerő stratégiája az indukál egy $g : [S] \rightarrow [T]$ folytonos függvényt, amire $g(A) \subseteq B_0 \wedge g([S] \setminus A) \subseteq B_1$.

A bizonyítás ugyanaz, mint amit a Wadge-játéknál alkalmaztunk. (4.26.)

4.41. Lemma: [2, 14.3. Feladat]

Legyen X lengyel tér. A analitikus $\Leftrightarrow$ létezik $G \in \mathbf{\Pi}_2^0(X \times \mathcal{C})$, ahol $\mathcal{C}$ a Cantor-halmaz, hogy $A = \text{proj}_X(G)$

4.42. Tétel: (Baire kategória tétel, [2, 8.4. Tétel])

Teljes metrikus terekben, megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete sűrű.

Bizonyítás: (4.36. Lemma)

Legyen $\pi_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ vetítés az első koordinátára. Ekkor 4.41. miatt létezik $G \in \mathbf{\Pi}_2^0(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$, amire $\pi_1(G) = A$. Legyen $U_0 := \bigcup \{U \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid U \text{ nyílt} \wedge \text{létezik } \Sigma_2^0\text{-beli halmaz, ami elválasztja } \pi_1(U \cap G)\text{-t } B\text{-től}\}$. Legyen $G_0 := G \setminus U_0$. $G_0 \neq \emptyset$, mivel, ha U_0 tartalmazná G -t, akkor $\pi_1(G) = A$ is elválasztható lenne B -től Σ_2^0 -beli halmazzal, hisz Σ_2^0 -beli halmazok megszámlálható uniója Σ_2^0 -beli és $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ -n van megszámlálható bázis. $G_0 \in \mathbf{\Pi}_2^0$, hisz U_0 nyílt vagyis $(\mathcal{C} \times \mathcal{C} \setminus U_0) \in \mathbf{\Pi}_1^0 \subseteq \mathbf{\Pi}_2^0$ és $G_0 = G \cap (\mathcal{C} \times \mathcal{C} \setminus U_0)$. Rögzítsünk egy $\{W_n \neq \emptyset\}$ bázist G_0 -án a részhalmaz-topológiában. $\overline{\pi_1(W_n)} \cap B \neq \emptyset$, mivel különben létezik U'_n nyílt $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ -ben, hogy $U'_n \cap G_0 = W_n$ és ekkor $\pi(U'_n \cap G)$ elválasztható B -től $\overline{\pi_1(W_n)}$ -al ($\pi_1(W_n) \in \mathbf{\Pi}_1^0 \subseteq \Sigma_2^0$).

Legyen $x_n \in \overline{\pi_1(W_n)} \cap B$ és legyen $B_0 := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ekkor azt állítjuk, hogy G_0 és $B_0 \times \mathcal{C}$

metszete üres és nem létezik $\Sigma_2^0(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ -beli halmaz, ami elválasztaná őket.

Indirekten tegyük fel, hogy $G_0 \subseteq \bigcup F_n$, $\bigcup F_n \cap B_0 \times \mathcal{C} = \emptyset$, ekkor a Baire kategória tételt (4.42.) G_0 -ra, mint lengyel térre alkalmazva ($G_0 \in \Pi_2^0$ és 4.8.) kapjuk, hogy létezik n, m , hogy $W_m \subseteq F_n$, de ekkor $\overline{\pi_1(W_m)} \subseteq \pi_1(F_n)$, mivel $\pi_1(F_n)$ zárt, de ekkor $x_m \in \pi_1(F_n)$, ami ellentmondás ($x_m \in B_0 \wedge F_n \cap B_0 \times \mathcal{C} = \emptyset$).

Most, hogy ezt is beláttuk, alkalmazhatjuk az elválasztó játékot, vegyük az $SG(Q; B_0 \times \mathcal{C}, G_0)$ játékot, ahol $Q \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ megszámlálható, sűrű halmaz.

Ekkor **II** nyer $\Leftrightarrow x \in (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) : (x_1 \in Q \Rightarrow x_2 \in B_0 \times \mathcal{C}) \wedge (x_1 \notin Q \Rightarrow x_2 \in G_0)$, ez véges kombinációja Borel halmazoknak, tehát Borel. Így a 1.1. Tétel alapján a játék eldöntött. 4.40. miatt, ha **I**-nek lenne nyerő stratégiája, akkor $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ folytonos függvény és $f^{-1}(Q)$ elválasztja G_0 -t $B_0 \times \mathcal{C}$ -től, ami ellentmondás, hiszen $Q \in \Sigma_2^0$, $f^{-1}(Q) \in \Sigma_2^0$. Tehát **II**-nek van nyerő stratégiája, ami indukál egy $g : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ folytonos függvényt, amire $g(Q) \subseteq B_0 \times \mathcal{C}$ és $g(\mathcal{C} \times \mathcal{C} \setminus Q) \subseteq G_0$. Legyen $K' := g(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$, ekkor $K' \subseteq \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ zárt, $K' \subseteq B_0 \times \mathcal{C} \cup G_0$, $K' \cap B_0 \times \mathcal{C}, K' \cap G_0$ sűrű K' -ben és $K' \cap B_0 \times \mathcal{C}$ megszámlálható. Legyen $K := \pi_1(K') \subseteq \mathcal{C}$ zárt, $K \subseteq A \cup B$, ekkor $K \cap B, K \cap A$ sűrű K -ban és $K \cap B$ megszámlálható, hisz $A \cap B = \emptyset$ és $K \subseteq A \cup B_0$.

□

Hivatkozások

- [1] D. Gale and F. M. Stewart. Infinite games with perfect information. *Contributions to the Theory of Games*, 2(245-266):2–16, 1953.
- [2] A. S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156. Springer, 2012.
- [3] A. S. Kechris and B. D. Miller. *Topics in orbit equivalence*. Number 1852. Springer, 2004.
- [4] A. S. Marks. A determinacy approach to Borel combinatorics. *Journal of the American Mathematical Society*, 29(2):579–600, 2016.
- [5] D. A. Martin. Borel determinacy. *Annals of Mathematics*, 102(2):363–371, 1975.
- [6] D. A. Martin. Determinacy of infinitely long games. *Book draft dated March*, 2020.

Alulírott Kempf Alex nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Helyesírási hibák felkutatása	ChatGPT	Teljes dolgozat	

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.