

Neumann-reguláris gyűrűk

Szakdolgozat

Metzger Ábris András

Matematika Bsc

Témavezető:

Dr. Ágoston István

egyetemi docens

Algebra és Számelmélet Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2025

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek Ágoston István Tanár Úrnak a tartalmas konzultációkat, melyek során nagyon sok érdekes dolgot tanultam, nemcsak a matematikáról, és a szakdolgozatom elkészítéséhez nyújtott töretlen segítséget. Köszönettel tartozom még a családomnak, barátaimnak és mindazoknak akik segítettek utamon. Nélkülük nem jutottam volna el idáig.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. Neumann-reguláris gyűrűk tulajdonságai	5
1.1. Példák Neumann-reguláris gyűrűkre	5
1.2. Ideálok Neumann-reguláris gyűrűkben	8
1.3. Egyéb gyűrűelméleti fogalmak	11
2. Speciális Neumann-reguláris gyűrűk	14
2.1. Az egységreguláris gyűrűk	14
2.2. Abel-reguláris és erősen reguláris gyűrűk	18
2.3. Szabályosan majdnem Neumann-reguláris gyűrűk	19
3. Modulusok Neumann-reguláris gyűrűk felett	22
3.1. Előkészítő tételek	22
3.2. Endoreguláris modulusok	24
3.3. Egység-endoreguláris modulusok	34
Hivatkozások	41

Bevezetés

Szakdolgozatom célja, hogy megismerkedjünk a Neumann-reguláris gyűrűkkel, rávilágítunk, hogy egy egyszerű definícióval megadott gyűrűosztály mennyi kérdést és lehetőséget rejt magában. A Neumann-reguláris gyűrűk fogalmát Neumann János vezette be 1936-ban, kvantummechanikai motivációt által vezérelve, és többek között a dolgozatomban szereplő 1.2.1.-es Tételt bizonyította.

Az első fejezetben először példákat mutatunk ezekre a gyűrűkre. Majd nevezetes gyűrűelméleti fogalmak és tulajdonságok segítségével kerülünk közelebb a megértésükhöz.

A második fejezetben a Neumann-reguláris gyűrűk speciális eseteivel és lehetséges általánosításaival fogunk foglalkozni.

Végül pedig a 3. a modulusok szemszögéből vizsgáljuk a gyűrűk Neumann-regularitását. Ebben a fejezetben olyan modulusokat vizsgálunk melyekben a skalárok Neumann-reguláris gyűrűkből kerülnek ki.

Dolgozatomban főként a megjelölt hivatkozásokban szereplő tételek bizonyításainak gondolatmeneteit követem végig. De előfordulnak köztük más, esetenként saját magam által adott bizonyítások is. Legjobb tudomásom szerint a 2. fejezetben szereplő fogalmak közül a szabályosan majdnem Neumann-reguláris gyűrűket, és az idempotens osztógyűrűket én definiáltam.

Az első fejezethez, valamint a 2.2 alfejezethez [4] Ken Goodearl Neumann-reguláris gyűrűk című könyvét vettem alapul, de egy-egy gondolat erejéig más helyeken is előjön.

A 2.1. alfejezetben [2] Grigore Călugăreanu egységreguláris gyűrűkről szóló

cikkét használtam.

A 2.3. alfejezetben definiált szabályosan majdnem Neumann-reguláris gyűrűk definícióját, a majdnem Neumann-reguláris gyűrűk definíciója ihlette, melyről a [10] cikk bevezetőjében olvastam.

A 3.2. alfejezetet a [8] endoreguláris modulusokról szóló cikk alapján írtam, de a 3.2.22. Tétel bizonyításának gondolatmenetét a [5] cikkből merítettem.

A 3.3. alfejezet pedig a [11] egység-endoreguláris modulusokról szóló cikket dolgozza fel, de a 3.3.10-es Lemma bizonyításához [9] Rickart-modulusokról szóló cikket használjuk.

Ezekén kívül bizonyos Neumann-reguláris gyűrűkhöz kapcsolódó állítások feladatként szerepeltek [7] T.Y. Lam által és [1] Anderson-Fuller által írt tankönyvekben. Ezek a könyvek a fogalmi keret elsajátításában is segítséget nyújtottak.

A szakdolgozatom feltételez némi algebrai előismeretet. Alapvető fogalmakat (mint például: gyűrű, ideál, modulus, homomorfizmus, képter, magtér) nem definiálunk, ezek [6] Kiss Emil tankönyvében megtalálhatóak.

Megegyezés szerint dolgozatomban a transzformációkat alapvetően balról írjuk, és bal modulusokkal foglalkozunk, amennyiben a feltételek között más nem szerepel. Valamint általában feltesszük, hogy egységelemes gyűrűvel foglalkozunk, kivéve ha ezt a feltételek között előre jelezzük.

1. fejezet

Neumann-reguláris gyűrűk tulajdonságai

Definíció: Egy R gyűrű Neumann-reguláris, ha $\forall x \in R$ esetén $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$.

Az x -ekhez tartozó ilyen y elemeket kváziinverznek nevezzük. Tehát egy gyűrű Neumann-reguláris, ha minden elemnek létezik kváziinverze.

1.1. Példák Neumann-reguláris gyűrűkre

Most bevezetünk egy definíciót, amellyel a Neumann-reguláris gyűrűk vizsgálatánál sokat fogunk találkozni.

1.1.1. Definíció. Legyen R egy gyűrű, ekkor $e \in R$ elem idempotens, ha $e^2 = e$.

1.1.2. Definíció. Egy R gyűrű Boole-gyűrű, ha minden eleme idempotens.

1.1.3. Példa. Világos hogy a Boole-gyűrűk Neumann-regulárisak, hiszen ha R Boole-gyűrű, akkor $a \in R$ esetén, $a^3 = a$.

1.1.4. Példa. Ha egy gyűrűben minden elemnek van inverze, akkor világos, hogy Neumann-reguláris, hiszen ekkor $aa^{-1}a = a$. Emiatt például az összes test Neumann-reguláris.

A következő példához bevezetünk egy pár definíciót.

1.1.5. Definíció. Legyen R gyűrű, és M egy R -modulus, ekkor M egyszerű ha nincsen nemtriviális részmodulusa. (Vagyis a részmodulusai csak saját maga és a 0 -modulus).

1.1.6. Definíció. Legyen R gyűrű, valamint M_1, M_2 R -modulusok. Ekkor $M = M_1 \oplus M_2$, ha $M_1, M_2 \leq M$ és $\forall m \in M$ -re $\exists! m_1 \in M_1$ és $m_2 \in M_2$, hogy $m = m_1 + m_2$. Ekkor azt mondjuk, hogy M az M_1 és M_2 modulusok direkt összege.

1.1.7. Állítás. $M_1 \oplus M_2 = M$ esetén $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Bizonyítás. Legyen $x \in M_1 \cap M_2$, ekkor $x = x + 0 = 0 + x$, hiszen M_1, M_2 modulusok, tehát $0 \in M_1, M_2$ de a felírás egyértelmű, tehát $x = 0$. $\square$

1.1.8. Definíció. Legyen R gyűrű, M egy R -modulus, ekkor M féligegyszerű, ha egyszerű modulusok direkt összege.

1.1.9. Állítás. Legyen R gyűrű, M egy R -modulus. M akkor és csak akkor féligegyszerű, ha minden részmodulusa direkt összeadandó M -ben.

1.1.10. Definíció. Legyen R gyűrű, M egy R -modulus, ekkor az $f : M \rightarrow M$ R -modulushomomorfizmusok gyűrűjét az M endomorfizmusgyűrűjének nevezzük, és $End_R(M)$ -el jelöljük.

1.1.11. Példa. Féligegyszerű modulusok endomorfizmusgyűrűje Neumann-reguláris.

Bizonyítás. Legyen R egy gyűrű, M egy féligegyszerű R -modulus, valamint $\varphi \in End_R(M)$. Az állítás belátásához mutatunk egy $\psi \in End_R(M)$ modulushomomorfizmust, hogy $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$. Jól ismert állítás, hogy ilyen φ esetén $Ker \varphi \leq M$, tehát az 1.1.9. állítás alapján direkt összeadandó benne. Így létezik direkt kiegészítője. A modulusok homomorfizmus tétele miatt erre az L direkt kiegészítőre igaz, hogy $L \cong Im \varphi$. Ekkor ezt az izomorfizmust a φ leképezés határozza meg úgy, hogy $\varphi|_L = \psi_0$, az izomorfizmus. Továbbá, mivel $Im \varphi \leq M$ szintén teljesül, így ennek is létezik egy N direkt kiegészítője. Legyen $\psi \in End_R(M)$ a következő: $m = x + y, x \in Im \varphi, y \in N$ esetén

$\psi(x+y) = \psi_0^{-1}(x)$. Tehát $Im\psi$ direkt kiegészítőjén legyen azonosan 0. $Im\varphi$ -n pedig az ψ_0 izomorfizmus inverze. Ekkor $m = x+y, x \in L, y \in Ker\varphi$ esetén $\varphi\psi\varphi(x+y) = \varphi\psi(\varphi(x)) = \varphi(\psi_0^{-1}(x)) = \varphi(x)$ $\square$

1.1.12. Megjegyzés. Az előző példa speciális eseteként megkapjuk, hogy, ha K test V pedig egy K -vektortér, akkor $End_K(V)$ (amit $End_R(M)$ -hez hasonlóan definiálunk) szintén Neumann-reguláris.

Ebből pedig következik, hogy a test feletti véges dimenziós mátrixgyűrűk (illetve oszlopvéges mátrixgyűrűk) is Neumann-regulárisak.

Végül megmutatjuk, hogyan lehet Neumann-reguláris gyűrűkből, újabb Neumann-reguláris gyűrűket létrehozni. Ehhez egy új fogalmat kell bevezetnünk.

1.1.13. Definíció. Legyenek I egy megszámlálható indexhalmaz, és R_i gyűrű $\forall i \in I$ -re, ekkor $\prod R_i = \{(r_i)_i \mid r_i \in R_i\}$ Ez a megadott gyűrűk direkt szorzata.

1.1.14. Megjegyzés. Ez szintén gyűrű, ha a műveleteket koordinátánként értelmezzük.

1.1.15. Példa. Ha I egy indexhalmaz, és R_i Neumann-reguláris $\forall i \in I$ esetén, akkor $\prod R_i$ szintén Neumann-reguláris.

Mivel R_i Neumann-reguláris, ezért $a_i \in R_i$ esetén $\exists x_i \in R_i$, hogy $a_i x_i a_i = a_i$, ekkor az $(a_i)_i \in \prod R_i$ elemre az $(x_i)_i$ elem megfelelő lesz a Neumann-regularitás igazolásához.

1.1.16. Definíció. Legyen I egy megszámlálható indexhalmaz, és R_i gyűrűk $\forall i \in I$ -re. Ekkor $\bigoplus R_i := \{(r_i)_i \mid r_i = 0 \text{ véges sok } i \text{ kivételével}\}$ A megadott gyűrűk direkt összege.

1.1.17. Megjegyzés. A direkt szorzathoz hasonlóan ez is gyűrű a koordinátánként vett műveletekre, sőt $\bigoplus R_i \leq \prod R_i$.

1.1.18. Megjegyzés. A direkt szorzathoz hasonlóan, ha R_i -k Neumann-regulárisak, akkor a direkt összeg is Neumann-reguláris, a bizonyítás ugyanaz mint a direkt szorzat esetén.

1.2. Ideálok Neumann-reguláris gyűrűkben

A következőkben egy nagyon fontos gyűrűelméleti fogalom Neumann-regularitáshoz tartozó vonatkozásait nézzük meg. Rögtön egy kategorizációval kezdünk, ami az ideálokon keresztül történik.

1.2.1. Tétel. *R gyűrűre ekvivalensek a következők:*

- (1) *R Neumann-reguláris.*
- (2) *R -ben minden jobboldali (baloldali) főideál generálható idempotens elemmel.*
- (3) *R -ben minden végesen generált jobboldali (baloldali) generálható idempotens elemmel.*

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2) : Mivel R Neumann-reguláris, így $\forall x \in R$ esetén $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$, ekkor xy elem idempotens $((xyx)y = xy)$. Be fogjuk látni, hogy $xR = xyR$.

Világos, hogy ehhez elegendő belátni, hogy $x \in xyR$, illetve $xy \in xR$, hiszen ezek pont az $xR \subseteq xyR$, illetve $xyR \subseteq xR$, tartalmazásokat jelentik. $xy \in xR$, nyilvánvaló, és $x = xyx$, tehát $x = xyx \in xyR$. Tehát $xR = xyR$, ahol xy idempotens.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Először belátjuk, hogy $xR + yR$ generálható idempotens elemmel. Tudjuk, hogy $\exists e \in R$ idempotens, hogy $xR = eR$, a feltevésünkéből. Ekkor $ey \in xR$, tehát $y - ey \in xR + yR$. Belátjuk, hogy $xR + yR = eR + (y - ey)R$.

Tetszőleges $r_1, r_2 \in R$ esetén tekintük az $er_1 + (y - ey)r_2$ $r_1, r_2 \in R$ elemet.

Mivel, $e, ey \in xR$, így $\exists d_1, d_2 \in R$, hogy $xd_1 = e$ és $xd_2 = ey$, ekkor $er_1 + (y - ey)r_2 = x(d_1r_1 - d_2r_2) + yr_2 \in xR + yR$. Tehát $eR + (y - ey)R \subseteq xR + yR$.

A másik tartalmazás: Legyen $r_1, r_2 \in R$ és nézzük az $xr_1 + yr_2$ $r_1, r_2 \in R$ elemet. Mivel $x \in eR$ tehát $\exists d \in R$, hogy $x = ed$, ekkor

$$xr_1 + yr_2 = e(dr_1 + yr_2) + (y - ey)r_2 \in eR + (y - ey)R, \text{ tehát}$$

$$xR + yR \subseteq eR + (y - ey)R, \text{ vagyis } xR + yR = eR + (y - ey)R.$$

(2) alapján $\exists f \in R$ idempotens, hogy $fR = (y - ey)R$, ekkor $f = (y - ey)k$ valamilyen $k \in R$ esetén. Így $ef = e(y - ey)k = (ey - e^2y)k = (ey - ey)k = 0$.

Legyen $g = f - fe$. Vegyük észre, hogy $eg = ef - efe = 0$, valamint $ge = fe - fe^2 = fe - fe = 0$, továbbá $fg = (f - fe)f = f^2 - f^2e = f - fe = g$, illetve $gf = (f - fe)f = f^2 - fef = f^2 = f$. Melyekből látszik, hogy $fR = gR$. Így $xR + yR = eR + gR$.

Most belátjuk, hogy $eR + gR = (e + g)R$. $(e + g)R \subseteq eR + gR$ világos. $er_1 + gr_2$ $r_1, r_2 \in R$ esetén

$$(e + g)(er_1 + gr_2) = e^2r_1 + egr_2 + ger_1 + g^2r_2 = e^2r_1 + g^2r_2 = er_1 + gr_2$$

vagyis, $eR + gR \subseteq (e + g)R$, tehát $eR + gR = (e + g)R$, ráadásul $e + g$ egy idempotens elem, hiszen $(e + g)^2 = e^2 + eg + ge + g^2 = e^2 + g^2 = e + g$, vagyis a két elem által generált jobbideálokra beláttuk a (3)-as állítást.

Most alkalmazzunk teljes indukciót a generátorok száma szerint. $n = 1$ eset triviális, $n = 2$ esetet az előbb láttuk.

Tegyük fel, hogy $x_1R + \dots + x_kR$ jobbideál generálható idempotens elmmel tetszőleges $x_1, \dots, x_k \in R$ gyűrűelemek és $k \leq n - 1$ pozitív egész szám esetén.

Ekkor az indukciós feltételt alkalmazva $x_1R + \dots + x_{n-1}R + x_nR = yR + x_nR$, ahol y idempotens. Most az $n = 2$ esetet alkalmazva: $yR + x_nR = zR$, ahol z idempotens.

(3) $\Rightarrow$ (1) : $x \in R$ esetén $\exists e \in R$ idempotens, hogy $xR = eR$, tehát $\exists r, y \in R$, hogy $x = er$, illetve $xy = e$. Ekkor $ex = e^2r = er = x$, így $x = ex = xyx$, tehát R Neumann-reguláris. $\square$

Az 1.2.1 Tétel ekvivalens feltételt ad a Neumann-regularitásra, ami azt jelenti, hogy akár ki is cserélhetnénk a definíciót. Ezt a gyűrűosztályt már az idempotencia és az ideál fogalmak meghatározzák, épp úgy ahogy az eredeti definíció magával hordozza az idempotenciát.

1.2.2. Definíció. Legyen $A, B \triangleleft R$ két ideál R -ben. Ekkor ezen ideálok szorzatán az $A \cdot B = \{\sum r_i a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, r_i \in R\}$ halmazt értjük.

1.2.3. Megjegyzés. A fent definiált halmaz ideál R -ben a gyűrű műveleteivel.

1.2.4. Állítás. Legyen R Neumann-reguláris gyűrű, ekkor $\forall I \triangleleft R$ ideál idempotens (azaz $I^2 = I$).

Bizonyítás. Világos, hogy I^2 szintén ideál, így elegendő a halmazelméleti egyenlőséget belátni.

$I^2 \subseteq I$, hiszen $z \in I^2$ esetén $z = \sum x_i y_i$ ahol $x_i, y_i \in I$, de ekkor $x_i y_i \in I$, $\forall i$ -re. Valamint ezek összege $\sum x_i y_i = z \in I$, hiszen I ideál.

$I \subseteq I^2$, hiszen $x \in I$ esetén R Neumann-regularitása miatt $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$, ekkor $xy \in I$, mivel I ideál, emiatt $xyx = x \in I^2$ $\square$

1.2.5. Definíció. Legyen R gyűrű, és $I \triangleleft R$ ideál. Ekkor R/I elemei $a+I$ $a \in R$ típusú mellékosztályok, és ezért $a+I = b+I \iff a-b \in I$, R/I -n elvégezhetjük az R gyűrű műveleteit:

$$(a+I) + (b+I) = a+b+I$$

$$(a+I)(b+I) = ab+I.$$

1.2.6. Megjegyzés. Ez szintén gyűrű ezekre a műveletekre

1.2.7. Állítás. Neumann-reguláris gyűrű faktorgyűrűje Neumann-reguláris.

Bizonyítás. Legyen R Neumann-reguláris gyűrű, melyben $I \triangleleft R$ egy ideál. Mivel R Neumann-reguláris, így $\forall x \in R$ -hez $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$. Mivel a szorzás jóldefiniált a mellékosztályokon, így $x+I \in R/I$ -hez $y+I$ megfelelő elem lesz, hiszen $(x+I)(y+I)(x+I) = xyx+I = x+I$. $\square$

1.2.8. Tétel. Legyen R Neumann-reguláris gyűrű, $I \triangleleft R$ egy ideál. Ekkor R akkor és csak akkor Neumann-reguláris ha I , és R/I egyaránt Neumann-reguláris.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Ahogy azt az 1.2.7. Állítás során láttuk, ha R Neumann-reguláris, akkor R/I szintén az. Megmutatjuk, hogy I is az. $x \in I$ esetén $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$, ekkor $xy \in I$, hiszen I ideál. Ekkor $xyxyx = xyx = x \in I$, tehát xy jó választás x -hez I Neumann-regularitásának igazolására.

$\Leftarrow$: $x \in R$ esetén $x+I$ -hez R/I Neumann-regularitása miatt $\exists y+I \in R/I$, hogy $(x+I)(y+I)(x+I) = x+I$, azaz $xyx+I = x+I$, tehát $x-xyx \in I$. De I -ről tudjuk, hogy Neumann-reguláris, így $\exists z \in I$, hogy $(x-xyx)z(x-xyx) = x-xyx$, ekkor:

$$(x - xyx)z(x - xyx) = xzx - xyxzx - xzxyx + xyxzyx = x - xyx \Rightarrow \\ x(z - yxz - zxy + yxzy + y)x = x$$

Vagyis a $w = z - yxz - zxy + yxzy + y$ választás megfelelő x -hez R Neumann-regularitásának igazolásához. $\square$

1.2.9. Megjegyzés. *Nem használtuk R egységelemességét.*

Elnevezés: A módszert, amivel w -t megkaptuk, a kétoldali kiemelés módszerének fogjuk nevezni a továbbiakban.

1.3. Egyéb gyűrűelméleti fogalmak

Ebben a fejezetben különféle gyűrűelméleti fogalmakat fogunk vizsgálni Neumann-reguláris gyűrűkről, ezáltal jobban megismerve őket.

Kezdjük a Jacobson radikállal.

1.3.1. Definíció. *Legyen R gyűrű, ekkor R Jacobson radikálja $J(R)$ a következő: $J(R) = \{x \in R \mid xM = 0 \quad \forall M \text{ egyszerű } R\text{-modulusra}\}$*

A fenti definíció tetszőleges gyűrű esetén megállja a helyét. Egységelemes gyűrűkre pedig kimondhatjuk a következő definíciókat.

1.3.2. Tétel. *Legyen R gyűrű, ekkor $z \in R$ elemre ekvivalensek a következők:*

- (1) z benne van R maximális balideáljainak metszetében.
- (2) $z \in \{x \in R \mid 1 - yxw \text{ invertálható } \forall y, w \in R \text{ elemre}\}$
- (3) $z \in J(R)$

A fenti tételt nem bizonyítjuk, csak felhasználjuk a Neumann-reguláris gyűrűk Jacobson radikáljának vizsgálatához.

1.3.3. Lemma. *$J(R)$ ideál R -ben.*

Bizonyítás. Világos, a Jacobson radikál definíciója átfogalmazható arra, hogy az egyszerű modulusok annihilátorainak metszete. Vegyük M -et egy egyszerű R -modulust. Ekkor $\text{ann}_R(M)$ ideál, hiszen $x \in \text{ann}_R(M)$ esetén tetszőleges $r \in R$

elemre: $rxM = r0 = 0$, valamint $xrM \subseteq xM = 0$. Másrészt $x, y \in \text{ann}_R(M)$ esetén $(x + y)M \subseteq xM + yM = 0 + 0 = 0$. Vagyis $\text{ann}_R(M)$ ideál. De ideálok metszete ideál, tehát $J(R)$ ideál. $\square$

1.3.4. Lemma. $J(R)$ egyetlen idempotens eleme a 0.

Bizonyítás. Legyen $x \in J(R)$ idempotens, ekkor 1.3.2 definíció alapján $1 - x$ invertálható. Vegyük észre, hogy $(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 = 1 - x$, tehát

$$1 - x = (1 - x)^{-1}(1 - x)^2 = (1 - x)^{-1}(1 - x) = 1 \text{ amiből } x = 0 \text{ adódik. } \square$$

1.3.5. Tétel. A Neumann-reguláris gyűrűk Jacobson radikálja 0.

Bizonyítás. Legyen R egy Neumann-reguláris gyűrű, $x \in J(R)$. Ekkor mivel R Neumann-reguláris $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$. 1.3.3. alapján $J(R)$ balideál, tehát $yx \in J(R)$, de yx , idempotens, tehát, 1.3.4. alapján a 0, így $x = xyx = 0$. $\square$

1.3.6. Megjegyzés. A tétel visszafelé nem igaz. Hiszen például az egész számok gyűrűjének 0 a Jacobson radikálja, de $\mathbb{Z}$ nem Neumann-reguláris.

1.3.7. Definíció. R gyűrű, ekkor $Z(R) = \{x \in R \mid xr = rx \ \forall r \in R\}$, az R centruma.

1.3.8. Állítás. Neumann-reguláris gyűrűk centruma Neumann-reguláris.

Bizonyítás. $x \in Z(R)$, esetén $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$. Legyen $z = yxy$, ekkor $zxx = xyxyx = xyx = x$. Vegyünk egy tetszőleges $r \in R$ gyűrűelemet, be fogjuk látni, hogy $z \in Z(R)$, ami a fentiek miatt azt jelenti, hogy $Z(R)$ Neumann-reguláris.

$$\begin{aligned} zr &= yxyr = y^2xr = y^2rx = y^2rxyx = y^2xryx = y^2xrx = yxyrxy = \\ &= yxyxry = yxry = yrx \end{aligned}$$

Hasonlóan: $rz = yrx = yxy$

Tehát $zr = rz \ \forall r \in R$ esetén. $\square$

A következő állítást nem bizonyítjuk. A bizonyítás az $(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ irány a Hopkins-Levitzki Tétel segítségével könnyen adódik. A másik irány belátásához pedig a Baer-kritérium használható.

1.3.9. Állítás. R Neumann-reguláris gyűrűre a következők ekvivalensek:

1. R féligegyszerű
2. R jobb (bal) Artin
3. R jobb (bal) Noether

1.3.10. Definíció. Egy R gyűrű Dedekind-véges, ha $a, b \in R$, $ab = 1$ esetén $ba = 1$

A következőkben látni fogjuk egy speciális osztályát a Neumann-reguláris gyűrűknek, amelyben mindig teljesül a Dedekind-végesség. De előtte felmerül a következő:

Kérdés, hogy a Neumann-reguláris gyűrűk mindig Dedekind-végesek-e?

A válasz az, hogy nem, amire két különböző jellegű ellenpéldát fogunk adni.

Először is a definíciónak csak egységelemes gyűrűk esetén van értelme, tehát elegendő adni egy Neumann-reguláris gyűrűt, amely nem egységelemes.

Ehhez a végtelen direkt összeget fogjuk segítségül hívni.

1.3.11. Példa. Tudjuk, hogy $\mathbb{Q}$, a racionális számok teste Neumann-reguláris, hiszen minden nem 0 elemnek van inverze. Most legyen I egy megszámlálhatóan végtelen indexhalmaz, ekkor mint azt láttuk, $\bigoplus_i \mathbb{Q}$ Neumann-reguláris. De nem egységelemes, hiszen az egységelemnek minden koordinátában egységnek kellene lennie, de a direkt összegben csak véges sok elem nem 0, így ez nem lehet a gyűrűben.

Tehát ez a Neumann-reguláris gyűrű nem Dedekind-véges.

Ráadásul még az egységelemesség sem garantálja a Dedekind-végességet Neumann-reguláris gyűrűkben.

1.3.12. Példa. Legyen $R = \text{End}_K(V)$, ahol $\dim_K V = \infty$. Az 1.1.11.-es példában láttuk, hogy R Neumann-reguláris, és nyilván egységelemes, hiszen $\text{id}_V \in R$. Legyen $\varphi \in R$ egy leképezés, amely injektív, de nem szürjektív. Ekkor $\exists \psi \in R$, hogy $\psi\varphi = \text{id}_V$, de $\varphi\psi \neq \text{id}_V$, hiszen φ , és így $\varphi\psi$ nem szürjektív.

2. fejezet

Speciális Neumann-reguláris gyűrűk

Ebben a fejezetben olyan Neumann-reguláris gyűrűket fogunk vizsgálni, amelyekről több dolgot teszünk fel ezáltal részosztályait kapjuk a gyűrűosztálynak. Ezekre be fogunk látni olyan állításokat és tulajdonságokat, amelyeket a Neumann-reguláris gyűrűkre nem tudtunk volna.

2.1. Az egységreguláris gyűrűk

2.1.1. Definíció. Egy R gyűrű egységreguláris, ha $\forall a \in R$ gyűrűelemhez $\exists u \in R$ egység, hogy $aua = a$.

2.1.2. Állítás. Az egységreguláris gyűrűk Dedekind-végesek.

Bizonyítás. Legyen $x, y \in R$, hogy $xy = 1$, be fogjuk látni, hogy $yx = 1$, ekkor nyilván $xyx = y$, illetve $xyx = x$.

Mivel R Neumann-reguláris így $\exists u, v$ egységek, hogy $xux = x, yvy = y$, ekkor

$$yxy = yvy \Rightarrow yxy - yvy = 0 \Rightarrow y(x - v)y = 0 \quad /x \cdot$$

$$(x - v)y = 0 \Rightarrow xy = vy \Rightarrow vy = 1$$

Hasonlóan: $xy = xu = 1$ De u egység, így $\exists k \in R$, hogy $uk = ku = 1$, ekkor $k = xuk = x$, tehát $xu = ux = 1$. Ekkor $y = uxy = u$, tehát $y = u$, valamint az előzőhöz hasonlóan belátható, hogy y egy egység és $vy = yv = 1$, amiből

$x = xyv = v$, vagyis $v = x$ ekkor viszont $xy = vu = uv = yx = 1$. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

A következőkben karakterizálni fogjuk az egységreguláris gyűrűket, [2] Gri-gore Călugăreanu cikke alapján.

Először is bevezetünk egy új definíciót.

2.1.3. Definíció. Legyen R gyűrű, és $e, f \in R$ idempotens elemek. Ekkor e -t és f -et izomorfiknak nevezzük, ha $eR \cong fR$ mint jobboldali R -modulusok.

Most pedig lássunk egy ekvivalens definíciót erre:

2.1.4. Állítás. Legyen R gyűrű, és $e, f \in R$ idempotens elemek, e és f akkor és csak akkor izomorfik, ha $\exists a, b \in R$, hogy $e = ab$, $f = ba$.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Legyen $\varphi : eR \rightarrow fR$ izomorfizmus, valamint ennek

$\varphi^{-1} : fR \rightarrow eR$ inverze. Továbbá legyen $\varphi(e) = b \in fR$. Ekkor $b = fb$, hiszen f idempotens. Illetve $\varphi^{-1}(f) = a \in eR$, ahol $a = ea$.

Ekkor $e = \varphi^{-1}\varphi(e) = \varphi^{-1}(b) = \varphi^{-1}(fb) = \varphi^{-1}(f)b = ab$.

Hasonlóan $f = \varphi\varphi^{-1}(f) = \varphi(a) = \varphi(ea) = \varphi(e)a = ba$.

$\Leftarrow$: Most tegyük fel, hogy létezik $a, b \in R$, hogy $e = ab$, és $f = ba$.

Legyen $\varphi : eR \rightarrow fR$ $\varphi(e) := fb$, és $\varphi(er) = fbr$.

Vizsgáljuk meg, hogy jóldefiniált-e a leképezés. Ehhez legyen $er = es$. Ekkor $\varphi(er) = fbr = babr = ber = bes = babs = fbs = \varphi(es)$. A jobboldali disztributivitás miatt pedig művelettartó a leképezés.

Hasonlóan $\psi : fR \rightarrow eR$, hogy $\psi(f) := ea$, és $\psi(fr) = ear$. Az előzőhöz hasonlóan ez is egy jóldefiniált modulushomomorfizmus.

Most tetszőleges $er \in eR$ esetén

$\psi\varphi(er) = \psi(\varphi(e)r) = \psi(\varphi(e))r = \psi(fb)r = \psi(f)br = eabr = e^2r = er$.

Tehát $\psi\varphi = id_{eR}$. Hasonlóan $\varphi\psi = id_{fR}$. Így φ és ψ izomorfizmusok. Tehát $eR \cong fR$. $\square$

2.1.5. Lemma. Legyen R gyűrű és benne e, f izomorf idempotensek, hogy $e = ab$ és $f = ba$. Ekkor, ha $bab = babubab$, valamely u egységre, valamint

$c = (1 - ufb)u(1 - f)$ és $d = (1 - f)u^{-1}(1 - e)$, akkor $cd = 1 - e$, illetve $dc = 1 - f$

Bizonyítás. Először is vonjunk le pár következtetést a feltételekből.

$$\begin{aligned} bab &= babubab \quad / a \cdot \\ ab &= abab = ababubab = abubab \quad / \cdot a \\ aba &= abubaba = abuba \end{aligned}$$

Amiből:

$$\begin{aligned} e(1 - ufb) &= e - eufb = ab - abubab = 0 \Rightarrow \\ (1 - e)(1 - ufb) &= 1 - ufb - e(1 - ufb) = 1 - ufb, \\ &\text{valamint} \end{aligned}$$

$$(1 - ufb)uf = uf - ufbu f = uba - ubabuba = uba - ubaba = uba - uba = 0$$

Most

$$\begin{aligned} cd &= (1 - ufb)u(1 - f)(1 - f)u^{-1}(1 - e) = (1 - ufb)u(1 - f)u^{-1}(1 - e) = \\ &= (1 - ufb)(1 - ufu^{-1})(1 - e) = (1 - ufb)(1 - e - ufu^{-1}(1 - e)) = \\ &= 1 - e - ufb(1 - e) - (1 - ufb)ufu^{-1}(1 - e) = 1 - e - ufb(1 - e), \text{ hiszen} \\ &\quad (1 - ufb)uf = 0 \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $ufb(1 - e) = ufb - ufb e = ubab - ubabab = ubab - ubab = 0$, vagyis $cd = 1 - e - ufb(1 - e) = 1 - e$.

Hasonlóan:

$$\begin{aligned} dc &= (1 - f)u^{-1}(1 - e)(1 - ufb)u(1 - f) = (1 - f)u^{-1}(1 - ufb)u(1 - f) = \\ &= (1 - f)u^{-1}((1 - ufb)u - (1 - ufb)uf) = (1 - f)u^{-1}(1 - ufb)u = \\ &= (1 - f)(1 - fbu) = 1 - f - fbu + f^2bu = 1 - f - fbu + fbu = 1 - f. \end{aligned}$$

□

2.1.6. Tétel. Legyen R egy Neumann-reguláris gyűrű. R akkor és csak akkor egységreguláris, ha $e \cong f$ izomorf idempotensek esetén $1 - e \cong 1 - f$ szintén izomorf idempotensek.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Mivel e és f izomorf idempotensek, így $\exists a, b \in R$, hogy $e = ab$, illetve $f = ba$, ekkor a feltevés alapján R egységreguláris, így $\exists u \in R$, hogy $bab = babubab$, c -t és d -t válasszuk meg a 2.1.5. Lemma alapján, ekkor a lemma miatt $cd = 1 - e$, valamint $dc = 1 - f$ tehát izomorfak (és idempotensek).

$\Leftarrow$: $x \in R$ esetén $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$, hiszen R Neumann-reguláris. Ekkor $z = yxy$ választással $xzx = xyxyx = xyx = x$, valamint $zxx = yxyxyx = yxyxy = yxy = z$. Ekkor világos a 2.1.4.-es állítás alapján, hogy $xz \cong zx$ izomorf idempotensek, tehát a feltétel miatt $1 - xz \cong 1 - zx$ szintén izomorf idempotensek, vagyis $\exists c, d \in R$, hogy $1 - xz = cd$, és $1 - zx = dc$. Ekkor ha cd -t jobbról x -szel, vagy balról z -vel szorozzuk, megkapjuk, hogy $cdx = 0 = zcd$. Hasonlóan, ha dc -t balról x -szel, vagy jobbról z -vel szorozzuk azt kapjuk, hogy $xdc = 0 = dcx$. Legyen $u = z + dcd$ valamint $v = x + cdc$. Ekkor $xux = x(z + dcd)x = xzx + xdcx = xzx = x$, sőt

$$\begin{aligned} uv &= (z + dcd)(x + cdc) = zx + zcdc + dcdx + dcdcdc = zx + dcdcdc = \\ &= zx + dc = zx + 1 - zx = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{és } vu &= (x + cdc)(z + dcd) = xz + xdc + cdcz + cdcx = xz + cdcx = \\ &= xz + cd = xz + 1 - xz = 1. \end{aligned}$$

Vagyis u egység, tehát R egységreguláris. $\square$

A továbbiakban adunk egy erősebb karakterizációt az egységreguláris gyűrűkre, ahol nem tesszük fel a Neumann-regularitást.

2.1.7. Tétel. *Egy R gyűrű akkor és csak akkor egységreguláris, ha $\forall x \in R$ gyűrűelemhez $\exists u \in R$ egység, hogy $xR \cap (x - u)R = \{0\}$.*

Bizonyítás. Egy segédállításal kezdünk: $e \in R$ idempotens esetén

$$eR \cap aR \subseteq eaR \quad \forall a \in R \text{ gyűrűelemre, ugyanis:}$$

$$\begin{aligned} b \in eR \cap aR \text{ esetén } \exists r_1, r_2 \in R, \text{ hogy } er_1 = b = ar_2 \quad /e \cdot \Rightarrow ear_2 = eb = \\ = e^2r_1 = er_1 = b, \text{ tehát } b \in eaR. \end{aligned}$$

Most térjünk rá a tételre.

$\Rightarrow$: Ha R egységreguláris gyűrű, akkor $\forall x \in R$ esetén $\exists u \in R$ egység, hogy $x = xux$. Ekkor $xu(x - u^{-1}) = xux - x = 0$. De xu egy idempotens elem, így

$xuR \cap (x - u^{-1})R \subseteq xu(x - u^{-1})R = 0R = \{0\}$. Továbbá vegyük észre, hogy $xR = xuu^{-1}R \subseteq xuR$, tehát $xR \cap (x - u^{-1})R \subseteq xuR \cap (x - u^{-1})R = \{0\}$, tehát $xR \cap (x - u^{-1})R = \{0\}$, és mivel u^{-1} szintén egység, így készen vagyunk.

$\Leftarrow$: Most legyen $x \in R$ és $u \in R$ egység, hogy $xR \cap (x - u)R = \{0\}$. Ekkor világos, hogy $xu^{-1}(x - u) \in xR$. De

$$\begin{aligned} xu^{-1}(x - u) &= (x - u + u)u^{-1}(x - u) = (x - u)u^{-1}(x - u) + uu^{-1}(x - u) = \\ &= (x - u)u^{-1}(x - u) + x - u = (x - u)(u^{-1}(x - u) + 1) \in (x - u)R \end{aligned}$$

Tehát $xu^{-1}(x - u) \in xR \cap (x - u)R = \{0\}$, vagyis $xu^{-1}(x - u) = 0 \Rightarrow xu^{-1}x - x = 0 \Rightarrow xu^{-1}x = x$. És u^{-1} szintén egység. $\square$

2.2. Abel-reguláris és erősen reguláris gyűrűk

2.2.1. Definíció. Egy R Neumann-reguláris gyűrű Abel-reguláris, ha minden idempotens eleme centrális (azaz $e \in R$ idempotensre $e \in Z(R)$).

2.2.2. Definíció. Egy R gyűrű erősen reguláris, ha $\forall x \in R$ elemre $\exists y \in R$, hogy $x^2y = x$

Most pedig be fogjuk látni, hogy ez a két gyűrűosztály megegyezik, ehhez egy új fogalmat vezetünk be.

2.2.3. Definíció. Legyen R gyűrű, egy $x \in R$ gyűrűelem nilpotens, ha $\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$, hogy $x^n = 0$.

2.2.4. Lemma. Ha egy Neumann-reguláris gyűrűben nincsen nem nulla nilpotens elem, akkor Abel-reguláris.

Bizonyítás. Legyen R gyűrű, és $e \in R$ idempotens. Ekkor tetszőleges $r \in R$ esetén $(1 - e)re$ nilpotens, hiszen

$$\begin{aligned} ((1 - e)re)^2 &= (1 - e)re(1 - e)re = (1 - e)r(e - e)re = 0. \text{ Hasonlóan } \\ er(1 - e) &\text{ szintén nilpotens. A feltevéseünk alapján ez azt jelenti, hogy mind a } \\ &\text{kettő } 0. \text{ Ekkor } (1 - e)re = re - ere = 0 \Rightarrow re = ere. \text{ Hasonlóan } er(1 - e) = \\ &= er - ere = 0 \Rightarrow er = ere, \text{ vagyis } re = ere = er, \text{ tehát } e \text{ centrális. Tehát ha} \end{aligned}$$

R eredetileg Neumann-reguláris volt, benne minden idempotens centrális, tehát Abel-reguláris. $\square$

2.2.5. Megjegyzés. Valójában ez a Lemma azt mutatja meg, hogy ha egy gyűrűben nincsen nem nulla nilpotens elem, akkor benne minden idempotens elem centrális.

2.2.6. Megjegyzés. Az állítás visszafelé is igaz, tehát egy Abel-reguláris gyűrűben nincsen nem nulla nilpotens elem, de ennek bizonyítását későbbre hagyjuk.

2.2.7. Tétel. Egy R gyűrű akkor és csak akkor erősen reguláris, ha Abel-reguláris.

Bizonyítás. $\Leftarrow$: Legyen R egy Abel-reguláris gyűrű. Ekkor $x \in R$ esetén $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$, de xy idempotens, tehát centrális, vagyis $x = xyx = x^2y$.

$\Rightarrow$: Legyen R egy erősen reguláris gyűrű, és $x \in R$ nilpotens, tehát $\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$, hogy $x^n = 0$. Ekkor $\exists y \in R$, hogy $x = x^2y = x^3y^2 = \dots = x^{n-1}y^{n-2} = x^{n-2}xy^{n-2} = x^{n-2}x^2yy^{n-2} = x^ny^{n-1} = 0$, tehát nincs R -ben nem nulla nilpotens elem, vagyis a 2.2.4.-es Lemma alapján R -ben minden idempotens elem centrális. Már csak a Neumann-regularitást kell igazolni.

Ehhez be fogjuk látni, hogy $x^2y = x$ esetén $x = xyx$. Vegyük észre a következőt: $(x - xyx)^2 = x^2 - xyx^2 + xyx^2yx - x^2yx = x^2 - xyx^2 + xyx^2 - x^2 = 0$. Ekkor $x - xyx$ nilpotens, tehát, mivel R erősen reguláris, így 0. Tehát $x = xyx$, vagyis y az x elem kváziinverze. Így a 2.2.4.-es Lemma miatt R Abel-reguláris. $\square$

2.2.8. Megjegyzés. Ezzel a 2.2.4-es Lemma másik irányát is beláttuk.

2.3. Szabályosan majdnem Neumann-reguláris gyűrűk

A [10] cikk bevezetőjében ismerkedhetünk meg a majdnem Neumann-reguláris gyűrűk definíciójával, ami a következő:

2.3.1. Definíció. Egy R gyűrű majdnem Neumann-reguláris, ha $\forall a, b \in R$ gyűrűelemekre, $\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$, hogy az (a^n, b^n) ideál generálható idempotens elemmel.

Ezt a definíciót, könnyedén átalakíthatjuk az 1.2.1. Tételhez hasonlóan, amivel a következő ekvivalens definíciót kapjuk.

2.3.2. Definíció. Egy R gyűrű majdnem Neumann-reguláris, ha $\forall x \in R$ gyűrűelemre, $\exists y \in R$ és $\exists n \in \mathbb{Z}_{>0}$, hogy $x^n y x^n = x^n$.

Most vezessük be a szabályosan majdnem Neumann-reguláris gyűrűk definícióját, amely a Neumann-regularitás általánosítása, a majdnem Neumann-regularitás megszorítása.

2.3.3. Definíció. Egy R gyűrű n -edrendben szabályosan majdnem Neumann-reguláris ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$), ha $\forall x \in R$ elemhez, $\exists y \in R$ elem, hogy $x^n y x^n = x^n$.

2.3.4. Állítás. Ha R gyűrű szabályosan majdnem Neumann-reguláris n -rendben, akkor szabályosan majdnem Neumann-reguláris nk -rendben tetszőleges k pozitív egészre.

Bizonyítás. Mivel R szabályosan majdnem Neumann-reguláris n rendben, így minden $x \in R$ gyűrűelem n -edik hatványának létezik kváziinverze, azaz $\exists z \in R$, hogy $(x^k)^n z (x^k)^n = (x^k)^n \Rightarrow x^{nk} z x^{nk} = x^{nk}$. $\square$

Felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e olyan gyűrű, amely szabályosan majdnem Neumann-reguláris, de nem Neumann-reguláris. Erre először mutatunk egy ellenpéldacsaládot, majd egy kiemelt ellenpéldát.

2.3.5. Példa. Tekintsük $\mathbb{Z}_{p^n}$ -t, azaz az egész számokat modulo p^n , ahol p prím, és $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. Ekkor $\mathbb{Z}_{p^n}$ n -edrendben szabályosan majdnem Neumann-reguláris, de nem Neumann-reguláris.

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathbb{Z}_{p^n}$ -ben $\forall x \in \mathbb{Z}_{p^n}$ invertálható, ha $p \nmid x$. Továbbá, $n > 1$ miatt $p \in \mathbb{Z}_{p^n}$. világos, hogy $pyp = p$ -nek nincs megoldása, hiszen, ha $pyp = p$ $\mathbb{Z}_{p^n}$ -ben, akkor $p^n | p - pyp = p(1 - py)$ $\mathbb{Z}$ -ben. $1 < n$ miatt $p^2 | p^n$. De

$p^2 \nmid p(1 - py)$, hiszen p és $1 - py$ relatív prímek. Viszont $p^n = 0$, ekkor $0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$, azaz minden p -vel osztható szám n -edik hatványának létezik kváziinverze (hiszen mind 0), és $p \nmid x$ esetén $p \nmid x^n$, hiszen p prím, tehát x^n -nek létezik kváziinverze, ami ráadásul az inverze. $\square$

Most pedig mutatunk egy kiemelt példát olyan szabályosan majden Neumann-reguláris gyűrűre, amely nem Neumann-reguláris, $\mathbb{Z}_4$ -et. Azt már tudjuk, hogy $\mathbb{Z}_4$ ilyen, viszont vegyük észre, hogy $\mathbb{Z}_4$ minden $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ esetén n -edrendben szabályosan majdnem Neumann-reguláris, de nem szabályosan majdnem Neumann-reguláris 1-rendben (azaz nem Neumann-reguláris).

Ezekén kívül tudunk még további általánosításokat adni. Bevezetünk két gyűrűosztályt, melyeknek a Neumann-reguláris gyűrűk speciális esetei.

2.3.6. Definíció. *Egy R gyűrű hatvány-reguláris, ha $\forall x \in R$ esetén*

$$\exists y \in R, n, k, l \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x^n y x^k = x^l.$$

Sajnos ezzel a definícióval nem gazdagodtunk új gyűrűosztállyal, hiszen minden gyűrű hatvány reguláris. Hiszen $xxx = x^3$.

2.3.7. Definíció. *Egy R gyűrű idempotens osztógyűrű, ha $\forall x \in R \setminus \{0\}$ esetén $\exists y \in R$, hogy $xy \neq 0$, idempotens.*

Világos, hogy minden Neumann-reguláris gyűrű idempotens osztógyűrű. Az 1.2.8.-as Tételhez hasonlóan belátható, hogy idempotens osztógyűrűk ideáljai szintén idempotens osztógyűrűk. Továbbá az is könnyedén bizonyítható, hogy ezen gyűrűk Jacobson-radikálja 0 .

Felmerülhet a kérdés, hogy vajon a majdnem Neumann-reguláris gyűrűk idempotens osztógyűrűk-e. Erre a kérdésre nem a válasz, hiszen létezik olyan majdnem Neumann-reguláris gyűrű, mely nem idempotens osztógyűrű. Sőt már a szabályosan majdnem Neumann-reguláris gyűrűk sem feltétlenül idempotens osztógyűrűk. Hiszen $\mathbb{Z}_{p^n}$ -ben p -hez nem létezik y , hogy py nem nulla idempotens (mivel az 1 az egyetlen nem nulla idempotens ebben a gyűrűben).

3. fejezet

Modulusok Neumann-reguláris gyűrűk felett

Modulusokkal az eddigiek során is találkoztunk. Most olyan kérdésekkel fogunk foglalkozni, amely a Neumann-reguláris gyűrűk felett vett modulusok tulajdonságaival kapcsolatosak. Megvizsgáljuk, hogy a Neumann-reguláris gyűrűk fölötti modulusok milyen speciális tulajdonságokkal rendelkeznek. A fejezet későbbi részében pedig speciális modulusokat fogunk vizsgálni.

3.1. Előkészítő tételek

Modulusok direkt felbontásánál fontos szerepet játszanak az idempotens endomorfizmusok. Egy $\bigoplus M_i$ direkt felbontás esetén legyen e_i az M_i -re való vetítés a direkt felbontás alapján. Ekkor $e_i^2 = e_i$, azaz e_i idempotens, továbbá $e_i e_j = 0$, ha $i \neq j$, és végül $e_1 + \dots + e_n = 1$. Idempotensek egy ilyen rendszerét ortogonális idempotensek teljes rendszerének nevezzük.

3.1.1. Lemma. *Legyen R gyűrű, valamint M egy R -modulus.*

Ekkor ha $f \in \text{End}_R(M)$ idempotens (azaz $f^2 = f$), akkor $\text{Im} f$ direkt összeadandó M -ben, sőt $M = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$.

Bizonyítás. Először is vizsgáljuk meg, hogy képezhető-e a direkt összeg.

$x \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$ esetén $f(x) = 0$, illetve $\exists y \in M$, hogy $f(y) = x$. Ekkor $0 = f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$ tehát a metszet csak a 0. Világos, hogy

$Ker f \oplus Im f \subseteq M$, hiszen egyesével részhalmazok, és a modulusok zártak az összeadásra. $M \subseteq Ker f \oplus Im f$, hiszen $x \in M$ esetén $x = (x - f(x)) + f(x)$ és itt $(x - f(x)) \in Ker f$, hiszen $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0$, továbbá $f(x) \in Im f$. $\square$

3.1.2. Definíció. R gyűrűben az $a, b \in R$ elemek ortogonálisak, ha $ab = ba = 0$.

3.1.3. Tétel. Legyen R gyűrű és $e_1, \dots, e_n \in R$ ortogonális idempotensek, melyekre $e_1 + \dots + e_n = 1$. R akkor és csak akkor Neumann-reguláris, ha $\forall x \in e_i Re_j$ esetén $\exists y \in e_j Re_i$, hogy $xyx = x$.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Mivel R Neumann-reguláris, így $x \in e_i Re_j$ -hez $\exists y \in R$, hogy $xyx = x$, de ekkor $e_j y e_i \in e_j Re_i$, és $x e_j y e_i x = xyx = x$

$\Leftarrow$: Most tegyük fel, hogy $x \in e_i Re_j$ esetén $\exists y \in e_j Re_i$, hogy $xyx = x$. Indukciót alkalmazzunk az idempotens elemek száma szerint. Az $n=1$ eset éppen R Neumann-regularitása, hiszen ekkor az idempotens éppen 1.

Nézzük most az $n = 2$ esetet:

Vizsgáljunk először olyan x -et, hogy $e_1 x e_2 = 0$, ekkor

$$1x1 = (e_1 + e_2)x(e_1 + e_2) = e_1 x e_1 + e_1 x e_2 + e_2 x e_1 + e_2 x e_2 = e_1 x e_1 + e_2 x e_1 + e_2 x e_2$$

A feltevésünk alapján $\exists y \in e_1 Re_1, z \in e_2 Re_2$, hogy $e_1 x e_1 y e_1 x e_1 = e_1 x e_1$, $e_2 x e_2 z e_2 x e_2 = e_2 x e_2$.

Ekkor

$$\begin{aligned} x(y + z)x &= (e_1 x e_1 + e_2 x e_1 + e_2 x e_2)(y + z)(e_1 x e_1 + e_2 x e_1 + e_2 x e_2) = \\ &= e_1 x e_1 y e_1 x e_1 + e_2 x e_1 y e_1 x e_1 + e_2 x e_2 z e_2 x e_1 + e_2 x e_2 z e_2 x e_2 = \end{aligned}$$

(az összeg többi tagjánál e_1 , illetve e_2 egymás mellé kerülnek, így 0-k lesznek.) Tovább alakítva:

$$= e_1 x e_1 + e_2 x e_2 + e_2 x e_1 y e_1 x e_1 + e_2 x e_2 z e_2 x e_1 = e_1 x e_1 + e_2 x e_2 + e_2 x(y + z)x e_1.$$

Most vegyük észre, hogy

$$x' = x - x(y + z)x = e_2 x e_1 - e_2 x(y + z)x e_1 = e_2(x - (y + z)x)e_1 \in e_2 Re_1,$$

tehát a feltevésünk miatt $\exists w \in e_1 Re_2$, hogy $x' w x' = x'$.

Ekkor $(x - x(y + z)x)w(x - x(y + z)x) = x - x(y + z)x$ amiből az 1.2.8. tétel bizonyításánál használt kétoldali kiemelés módszerével adódik, hogy

$$x((1 - (y + z)x)w(1 - x(y + z)) - (y + z))x = x, \text{ vagyis } \exists v, \text{ hogy } xvx = x.$$

Most tekintsünk egy tetszőleges $x \in R$ elemet. Ekkor $\exists y \in e_2Re_1$, hogy $e_1xe_2ye_1xe_2 = e_1xe_2$, vagyis $e_1xyxe_2 = e_1xe_2$, tehát $e_1(x - xyx)e_2 = 0$. Alkalmazzuk az előbb belátott speciális esetet, vagyis $\exists z \in R$, hogy

$(x - xyx)z(x - xyx) = x - xyx$, ekkor a kétoldali kiemelés módszerével adódik, hogy $\exists v \in R$, hogy $xvx = x$, amivel az $n=2$ esetet beláttuk.

Most pedig legyen $n > 2$ és tegyük fel, hogy van n alkalmas ortogonális idempotensünk van a feltételnek megfelelő módon. Legyen $f = e_2 + \dots + e_n$, $g = e_1 + e_3 + \dots + e_n$, ekkor fRf és gRg gyűrűk a feltételek alapján Neumann-regulárisak. $x \in e_1Rf$ esetén $\exists y \in e_2Re_1$, hogy $xe_2yxe_2 = xe_2$, vagyis $xyxe_2 = xe_2 \Rightarrow (x - xyx)e_2 = 0 \Rightarrow x - xyx \in gRg$, tehát $\exists z \in gRg$, hogy

$(x - xyx)z(x - xyx) = x - xyx$, ekkor a kétoldali kiemelés módszerével: $\exists w \in R$, hogy $xwx = x$, így $fwe_1 \in fRe_1$ esetén $xfwe_1x = xwx = x$, valamint analóg módon belátható ugyanez $x' \in fRe_1$ elemekre is, tehát $\exists t \in R$, hogy $x'tx' = x'$ (és $e_1tf \in e_1Rf$) majd az $n = 2$ esetet alkalmazzuk az e_1, f 1-összegű idempotensekre. $\square$

3.2. Endoreguláris modulusok

A következőkben egy modulusosztállyal fogunk foglalkozni, azokkal, melyeknek Neumann-reguláris az endomorfizmusgyűrűje. Világos, hogy az ilyen modulusok Neumann-reguláris gyűrű feletti modulusok, hiszen minden modulus, szintén modulus az endomorfizmusgyűrűje felett, illetve az is, hogy minden Neumann-reguláris gyűrű endoreguláris modulus önmaga felett

3.2.1. Definíció. Legyen R gyűrű és M egy R -modulus, ekkor, ha $\text{End}_R(M)$ Neumann-reguláris, akkor M egy endoreguláris modulus.

3.2.2. Tétel. Legyen R gyűrű, M egy R -modulus. Ekkor $\varphi \in \text{End}_R(M)$ elemnek akkor és csak akkor létezik kváziinverze, ha $\text{Ker}\varphi$ és $\text{Im}\varphi$ direkt össze-

adandók M -ben.

Bizonyítás. $\Leftarrow$: Amennyiben $\text{Ker}\varphi$, és $\text{Im}\varphi$ direkt összeadandók M -ben, akkor az 1.1.11-es példánál látott izomorfizmussal adódik φ kváziinverze.

$\Rightarrow$: Most tegyük fel, hogy $\exists \psi \in \text{End}_R(M)$, hogy $\varphi\psi\varphi = \varphi$.

Ekkor $\text{Ker}\varphi \subseteq \text{Ker}\varphi\psi$, hiszen $\varphi(x) = 0$ esetén $\psi(\varphi(x)) = \psi(0) = 0$. De igaz a fordított tartalmazás is: $\text{Ker}\varphi\psi \subseteq \text{Ker}\varphi\psi\varphi = \text{Ker}\varphi$, mivel $\psi\varphi(x) = 0$ esetén $\varphi(\psi\varphi(x)) = \varphi(0) = 0$, így $x \in \text{Ker}\varphi\psi = \text{Ker}\varphi$. Tehát $\text{Ker}\varphi = \text{Ker}\varphi\psi$.

Analóg módon $\text{Im}\varphi\psi \subseteq \text{Im}\varphi$, hisz $y \in \text{Im}\varphi\psi$ esetén $\exists x \in M$, hogy $\varphi\psi(x) = y$, legyen $\psi(x) = z \in M$, ekkor $\varphi(z) = y$, tehát $y \in \text{Im}\varphi$. Hasonlóan $\text{Im}\varphi = \text{Im}\varphi\psi\varphi \subseteq \text{Im}\varphi\psi$, mivel $y \in \text{Im}\varphi\psi\varphi$ esetén $\exists x \in M$, hogy $\varphi\psi\varphi(x) = y$, ekkor $\varphi(x) = z \in M$ -re $\varphi\psi(z) = y$, tehát $y \in \text{Im}\varphi\psi$, ebből pedig $\text{Im}\varphi = \text{Im}\varphi\psi$ adódik.

Igen ám, de $\psi\varphi$, és $\varphi\psi$ egyaránt idempotensek, tehát a 3.1.1 lemma alapján képtereik és magtereik direkt összeadandók M -ben. $\square$

Amiből rögtön adódik a következő:

3.2.3. Állítás. *Legyen R gyűrű, és M R -modulus. M akkor és csak akkor endoreguláris, ha $\forall \varphi \in \text{End}_R(M)$ esetén $\text{Ker}\varphi$, és $\text{Im}\varphi$ direkt összeadandók M -ben.*

3.2.4. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ez az állítás magyarázatot ad az első fejezetben szereplő 1.1.11.-es példára, mivel féligegyszerű modulusban minden részmodulus direkt összeadandó.*

A fenti állítást átfogalmazhatjuk két, irodalomban fellelhető fogalom segítségével:

3.2.5. Definíció. *Legyen R gyűrű, M R -modulus. Ekkor, ha $\text{Ker}\varphi$ direkt összeadandó M -ben $\forall \varphi \in \text{End}_R(M)$ esetén, akkor M egy Rickart-modulus.*

3.2.6. Definíció. *Legyen R gyűrű, M R -modulus. Ekkor, ha $\text{Im}\varphi$ direkt összeadandó M -ben $\forall \varphi \in \text{End}_R(M)$ esetén, akkor M egy d-Rickart-modulus.*

3.2.7. Megjegyzés. *Ezek a definíciók adják a 3.2.3. állítás átfogalmazását ami a következő:*

Legyen R gyűrű, M R -modulus. Ekkor M akkor és csak akkor endoreguláris, ha Rickart-modulus, és d -Rickart-modulus.

3.2.8. Állítás. Endoreguláris modulus direkt összeadandója szintén endoreguláris.

Bizonyítás. Legyen R gyűrű, M pedig egy endoreguláris R -modulus. Legyen N direkt összeadandó M -ben.

Világos, hogy ekkor létezik egy idempotens $e \in \text{End}_R(M)$, hogy $eM = N$. Vegyünk egy tetszőleges $\psi \in \text{End}_R(N)$ elemet. Először is belátjuk, hogy $\text{Ker}\psi e = \text{Ker}\psi \oplus (1-e)M$. Ehhez először nézzük meg, hogy képezhető-e a direkt összeg. $y \in \text{Ker}\psi \cap (1-e)M$ esetén $y \in N$ miatt $y = ey_1$, valamint $y = m - em$, ahonnan $ey_1 = m - em$, alkalmazzuk e -t: $ey_1 = e^2y_1 = em - em = 0$, azaz $y = 0$.

$$\text{Ker}\psi \oplus (1-e)M \subseteq \text{Ker}\psi e:$$

$x \in \text{Ker}\psi \oplus (1-e)M$ esetén $x = a + b$, ahol $a \in \text{Ker}\psi \subseteq N$ emiatt $a = ea_1$ alakú, $b = m - em$, ekkor e -vel történő szorzással (azaz e transzformáció alkalmazásával):

$$ex = ea + em - e^2m = ea + em - em = ea = e^2a_1 = ea_1 = a$$

Most pedig ψ -t alkalmazzuk, ezáltal:

$$\psi ex = \psi a, \text{ de } a \in \text{Ker}\psi \text{ miatt, } \psi ex = 0, \text{ tehát } x \in \text{Ker}\psi e.$$

$$\text{Ker}\psi e \subseteq \text{Ker}\psi \oplus (1-e)M:$$

Legyen $x \in \text{Ker}\psi e$, most pedig alkalmazzuk a következő felírást:

$x = ex + x - ex$ Látható, hogy $x - ex = (1-e)x \in (1-e)M$, valamint $\psi ex = 0$, hiszen $x \in \text{Ker}\psi e$, így $ex \in \text{Ker}\psi$.

Tehát $\text{Ker}\psi e = \text{Ker}\psi \oplus (1-e)M$. De M endoregularitása miatt $\text{Ker}\psi e$ direkt összeadandó M -ben a 3.2.3.-as Tétel alapján. Így $\text{Ker}\psi$ szintén direkt összeadandó M -ben, ráadásul $\text{Ker}\psi \leq N$, tehát N -ben is direkt összeadandó. $N = eM \Rightarrow \text{Im}\psi = \psi N = \psi eM = \text{Im}\psi e$, de M endoregularitása miatt $\text{Im}\psi e$ direkt összeadandó M -ben, tehát $\text{Im}\psi$ is, de $\text{Im}\psi \leq N$, tehát N -ben is direkt összeadandó. Így tehát N Rickart, és d -Rickart, vagyis endoreguláris. $\square$

3.2.9. Megjegyzés. Az előző tétel bizonyításánál az átláthatóbb leírás érdekében az endomorfizmusokat balról történő szorzásnak értelmeztük, amit akadály nélkül

megtehetünk, $m \in M$, $\varphi \in \text{End}_R(M)$ esetén $\varphi m = \varphi(m)$, és a művelettartóság pont ugyanazt jelenti mint a bal oldali disztributivitás.

Felmerülhet a kérdés, hogy egy Neumann-reguláris gyűrű felett vett modulus szükségképpen endoreguláris-e? Erre a következőkben mutatunk egy ellenpéldát, de ehhez először bevezetünk pár definíciót.

3.2.10. Definíció. Egy M modulus $N \leq M$ részmodulusa lényeges, ha $H \leq M$, $H \cap N = 0$ esetén $H = 0$.

3.2.11. Megjegyzés. Ha M egy R -modulus, valamilyen R gyűrűre, és N M -nek lényeges részmodulusa, akkor nem lehet direkt összeadandó M -ben

3.2.12. Állítás. Létezik R Neumann-reguláris gyűrű, és M végesen generált R -modulus, hogy M nem endoreguláris.

Bizonyítás. Legyen F egy test, és legyen R az $D = F \times F \times \dots$ -nek az 1 és $F \oplus F \oplus \dots$ által generált részgyűrű F -ben, ami Neumann-reguláris, mivel testben létezik inverz. Most vegyünk egy $x \in D \setminus R$ elemet, és legyen $B = R + xR$. Ekkor R egységelemessége miatt $x \in R + xR$, tehát $R \neq R + xR$. Legyen az R modulusunk: $M = R \oplus B$.

Legyen $f \in \text{End}_R(M)$, a következő leképezés: tetszőleges $(r, b) \in M$ esetén $f((r, b)) = (0, r)$. Ekkor $\text{Im}(f) = 0 \oplus R$. Ami $0 \oplus B$ -nek lényeges részmodulusa. Hiszen $N \leq B$ esetén vegyünk tetszőleges $y \in N$ elemet. Ha $y \in R$ akkor készen vagyunk. Ha $y \notin R$, akkor létezik egy nem nulla koordinátája. Vegyük azt a $z \in R$ elemet, melynek ezen koordinátája 1 a többi 0. Ekkor $zy \in N$, hiszen N R -modulus, és zy összes koordinátája 0, kivéve azt az egyet ami, z nem nulla koordinátája, tehát $zy \in R$.

Tehát $\text{Im}(f)$ nem direkt összeadandó $0 \oplus B$ -ben, és így nem lehet direkt összeadandó M -ben. Ekkor a 3.2.2.-es Tétel alapján M nem endoreguláris. $\square$

3.2.13. Megjegyzés. Itt 1 és $\bigoplus F$ által generált részgyűrűben, az $(c, c, c, \dots) + a$ alakú elemek lesznek, ahol $a \in \bigoplus F$, tehát olyan elemek, amelyek véges sok helyen térnek el egy megadott c -től.

A következőkben megvizsgálunk pár speciális endoreguláris modulusosztályt nevezetesen az Abel-endoreguláris modulusokat, és a majdnem endoreguláris modulusokat.

3.2.14. Definíció. Legyen R gyűrű, M R -modulus. M Abel-endoreguláris, ha $End_R(M)$ Abel-reguláris.

3.2.15. Tétel. Legyen R gyűrű, M R -modulus. Ekkor ekvivalensek a következők:

- (1) M Abel-endoreguláris modulus.
- (2) $\forall \varphi \in End_R(M)$ esetén $M = Ker\varphi \oplus Im\varphi$

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2): A 3.1.1 Lemma, és 3.2.2 Tétel segítségével leszűrhetjük az alábbiakat:

$\forall \varphi \in End_R(M)$ esetén $Ker\varphi = Ker\psi\varphi$, $Im\varphi = Im\varphi\psi$, ahol $\psi \in End_R(M)$ a φ kváziinverze. Továbbá:

$$M = Ker\psi\varphi \oplus Im\psi\varphi = Ker\varphi \oplus Im\psi\varphi, \text{ valamint } M = Ker\varphi\psi \oplus Im\varphi\psi = Ker\varphi\psi \oplus Im\varphi.$$

Amelyek alapján elegendő bizonyítani, hogy $\varphi\psi = \psi\varphi$.

$\psi\varphi = \psi\varphi\psi\varphi = \psi\varphi\psi\varphi$, hiszen $End_R(M)$ Abel-endoreguláris, tehát minden idempotens centrális, és $\varphi\psi$ idempotens. De mivel $\psi\varphi$ szintén idempotens, így $\psi\varphi\psi\varphi = \varphi\psi\varphi\psi = \varphi\psi$. Tehát $\psi\varphi = \varphi\psi$, azaz $M = Ker\varphi \oplus Im\psi\varphi = Ker\varphi \oplus Im\varphi$.

(2) $\Rightarrow$ (1): A 3.2.2 Tétel miatt M endoreguláris, már csak az Abel-endoregularitás a kérdés. Ehhez legyen $e \in End_R(M)$ idempotens, valamint $\varphi \in End_R(M)$ tetszőleges. Most legyen $\alpha = e\varphi(1-e)$. Ekkor mivel $\alpha \in End_R(M)$, így $M = Ker\alpha \oplus Im\alpha$, valamint $\alpha^2 = e\varphi(1-e)e\varphi(1-e) = e\varphi(e-e^2)\varphi(1-e) = 0$. Tehát $\alpha M = \alpha^2 M = 0$, hiszen $Im\alpha \cap Ker\alpha = 0$, $\alpha^2 M = \alpha(\alpha M)$. Ezekből pedig $\alpha = 0$ adódik. Azaz $e\varphi(1-e) = e\varphi - e\varphi e = 0 \Rightarrow e\varphi = e\varphi e$.

Hasonlóképpen járunk el $\beta = (1-e)\varphi$ esetén. Ebből $\varphi e = e\varphi e$, adódik.

Vagyis $e\varphi = e\varphi e = \varphi e$ tetszőleges e idempotens, és φ esetén. Tehát $End_R(M)$ endoreguláris, és benne minden idempotens centrális, tehát Abel-endoreguláris. $\square$

3.2.16. Definíció. Legyen R gyűrű, M R -modulus. M majdnem endoreguláris, ha $\text{End}_R(M)$ majdnem Neumann-reguláris.

3.2.17. Tétel. Legyen R gyűrű, M R -modulus. Ekkor ekvivalensek a következők:

(1) $\forall \varphi \in \text{End}_R(M)$ esetén $\exists n \in \mathbb{Z}_{>1}$, hogy $\text{Ker}\varphi^n$, és $\text{Im}\varphi^n$ direkt összeadandók M -ben.

(2) M majdnem endoreguláris.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2): A feltétel alapján tetszőleges $\varphi \in \text{End}_R(M)$ esetén $\exists n \in \mathbb{Z}_{>1}$, hogy $\text{Ker}\varphi^n$, és $\text{Im}\varphi^n$ direkt összeadandók M -ben. Tehát a 3.2.2-es Tétel alapján φ^n -nek létezik kváziinverze, így M majdnem endoreguláris.

(2) $\Rightarrow$ (1): A feltétel miatt tetszőleges $\varphi \in \text{End}_R(M)$ elemhez $\exists \psi$, és $n \in \mathbb{Z}_{>1}$, hogy $\varphi^n \psi \varphi^n = \varphi^n$. Tehát a 3.2.2-es tétel miatt $\text{Ker}\varphi^n$ és $\text{Im}\varphi^n$ direkt összeadandók M -ben. $\square$

Most pedig megmutatjuk az endoregularitás egy kiterjesztését.

3.2.18. Definíció. Legyen R gyűrű, M, N R -modulusok. Ekkor $\text{Hom}_R(M, N)$, az $M \rightarrow N$ R -modulushomomorfizmusok halmaza.

3.2.19. Megjegyzés. $\text{Hom}_R(M, N)$ -en értelmezhetjük az összeadás műveletet pontonként.

3.2.20. Definíció. Legyen R gyűrű, M, N R -modulusok. $\varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$ elemnek létezik kváziinverze, hogyha létezik $\psi \in \text{Hom}_R(N, M)$, hogy $\varphi\psi\varphi = \varphi$. Egy $H \subseteq \text{Hom}_R(M, N)$ halmazt regulárisnak nevezünk, ha $\forall \varphi \in H$ elemnek létezik kváziinverze. M modulus N -endoreguláris, ha $\text{Hom}_R(M, N)$ halmaz reguláris.

3.2.21. Megjegyzés. A fenti definíció alapján könnyen átfogalmazható az endoregularitás a következőre: Egy M R -modulus akkor és csak akkor endoreguláris, ha M -endoreguláris.

3.2.22. Tétel. Legyen R gyűrű, M, N R -modulusok. M akkor és csak akkor N -endoreguláris, ha $\forall \varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$ esetén $\text{Ker}\varphi$ direkt összeadandó M -ben, és $\text{Im}\varphi$ direkt összeadandó N -ben.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Legyen R gyűrű, valamint M N -endoreguláris modulus. Tetszőleges $\varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$ -re legyen $\psi \in \text{Hom}_R(N, M)$, hogy $\varphi\psi\varphi = \varphi$.

Ekkor $\psi\varphi \in \text{End}_R(M)$ idempotens, valamint

$(1 - \psi\varphi)^2 = (1 - \psi\varphi) \in \text{End}_R(M)$ szintén idempotens. Be fogjuk látni, hogy $\text{Ker}\varphi = (1 - \psi\varphi)M$.

Tetszőleges $a = (1 - \psi\varphi)m \in (1 - \psi\varphi)M$ esetén $\varphi a = \varphi m - \varphi\psi\varphi m = \varphi m - \varphi m = 0$. Tehát $(1 - \psi\varphi)M \subseteq \text{Ker}\varphi$.

Másrészt $a \in \text{Ker}\varphi$ esetén $(1 - \psi\varphi)a = a - \psi\varphi a = a$. Így $\text{Ker}\varphi \subseteq (1 - \psi\varphi)M$.

Ezek alapján $\text{Ker}\varphi = (1 - \psi\varphi)M = \text{Im}(1 - \psi\varphi)$. A 3.1.1. Lemma alapján pedig $\text{Im}(1 - \psi\varphi)$ direkt összeadandó M -ben, tehát $\text{Ker}\varphi$ direkt összeadandó M -ben.

Továbbá $\text{Im}\varphi = \varphi M = \varphi\psi\varphi M \subseteq \varphi\psi N \subseteq \varphi M$. Tehát minden tartalmazás esetén egyenlőség áll fent. Így $\text{Im}\varphi = \varphi\psi N = \text{Im}\varphi\psi$. De $\varphi\psi$ idempotens, tehát a 3.1.1. Lemma alapján a $\text{Im}\varphi\psi = \text{Im}\varphi$ direkt összeadandó N -ben.

$\Leftarrow$: Most legyenek M, N R -modulusok. Ekkor tetszőleges $\varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$ esetén $\text{Ker}\varphi$ direkt összeadandó M -ben. Ekkor $\text{Ker}\varphi$ direkt kiegészítőjének egy részéről létezik izomorfizmus $\text{Im}\varphi$ -be. Most vegyünk egy $\psi \in \text{Hom}_R(N, M)$ transzformációt, ami $\text{Im}\varphi$ -n φ^{-1} -el egyezik meg, $\text{Im}\varphi$ direkt kiegészítőjén pedig azonosan 0. Ekkor $\varphi\psi\varphi = \varphi$. $\square$

Azt már korábban is tudtuk, hogy test feletti négyzetes mátrixoknak létezik kváziinverze, amely szintén ugyanazon test feletti négyzetes mátrix. A 3.2.22.-es Tétel alapján viszont nem csak a négyzetes mátrixoknak van kváziinverze, hanem tetszőleges $n \cdot k$ -as mátrixnak is létezik $k \cdot n$ -es kváziinverze.

Az előző tétel egyszerű következménye a következő:

3.2.23. Állítás. *Legyen R gyűrű, M, N direkt felbonthatatlan (azaz nem létezik direkt felbontásuk) R -modulusok. Ekkor, ha M N -endoreguláris, akkor $\text{Hom}_R(M, N) = \{0\}$, vagy $M \cong N$*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\text{Hom}_R(M, N) \neq \{0\}$. Ekkor $\exists \varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$, hogy $\varphi \neq 0$. Ekkor M N -endoregularitása miatt $\text{Ker}\varphi$ direkt összeadandó M -ben, és $\text{Im}\varphi$ direkt összeadandó N -ben. De M és N direkt felbonthatatlan

modulusok, és $\varphi \neq 0$, így $\text{Ker}\varphi = 0$, $\text{Im}\varphi = N$. Tehát φ injektív és szürjektív homomorfizmus, azaz izomorfizmus, tehát, $M \cong N$. $\square$

3.2.24. Tétel. *Legyen R gyűrű, valamint M, N R -modulusok. M akkor és csak akkor N -endoreguláris, ha M tetszőleges K direkt összeadandójára, valamint tetszőleges $L \leq N$ esetén K modulus L -endoreguláris.*

Bizonyítás. $\Leftarrow$: Legyen $L = N$, valamint $K = M$. Ezzel a szereposztással a feltétel pont M N -endoregularitását jelenti.

$\Rightarrow$: Mivel K direkt összeadandó M -ben, létezik $e \in \text{End}_R(M)$ idempotens, hogy $eM = K$.

Tetszőleges $\varphi \in \text{Hom}_R(K, L)$ esetén $\varphi e \in \text{Hom}_R(M, L) \subseteq \text{Hom}_R(M, N)$. Ekkor M N -endoregularitása miatt $\text{Ker}\varphi e$ direkt összeadandó M -ben, valamint $\text{Im}\varphi = \text{Im}\varphi e$ direkt összeadandó N -ben.

Ekkor mivel $L \leq N$, és $\text{Im}\varphi \leq L$, $\text{Im}\varphi$ direkt összeadandó L -ben.

Mint ahogy azt a 3.2.8.-as állítás bizonyításánál láttuk (és ennél a részállításnál csak annyit használtunk ki, hogy ezen traszformációk homomorfizmusok) $\text{Ker}\varphi e = \text{Ker}\varphi \oplus (1 - e)M$. Tehát $\text{Ker}\varphi$ direkt összeadandó M -ben, és $K \leq M$, tehát K -ban is direkt összeadandó. Ezzel beláttuk, hogy a K L -endoreguláris. $\square$

3.2.25. Tétel. *Legyen R gyűrű $I = \{1, 2, \dots, n\}$ egy véges indexhalmaz, valamint legyenek M_i, N R -modulusok, minden $i \in I$ esetén. Ekkor teljesülnek a következők:*

(1) $\bigoplus_{i \in I} M_i$ akkor és csak akkor N -endoreguláris, ha M_i N -endoreguláris minden $i \in I$ -re.

(2) N akkor és csak akkor $\bigoplus_{i \in I} M_i$ -endoreguláris, ha N M_i -endoreguláris, minden $i \in I$ esetén.

Bizonyítás. Először is a könnyebb leírás érdekében vezessük be a következő jelöléseket: $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $H = \text{Hom}_R(M, N)$, $T = \text{Hom}_R(N, M)$.

Mivel M_i modulusok direkt összeadandók M -ben, így mindegyikhez létezik $e_i \in \text{End}_R(M)$ idempotens, hogy $e_i M = M_i$. Most viszont nem akármilyen

idempotenst választunk. Legyen e_i az M_i direkt összeadandóra történő identikus vetítés, vagyis, M_i -n az identitás, a direkt kiegészítőjén pedig 0. Vegyük észre, hogy $He_i \cong \text{Hom}_R(e_i M, N)$, valamint $e_i T \cong \text{Hom}_R(N, e_i M)$.

(1): $\Rightarrow$: A 3.2.24 tételt alkalmazzuk $K = M_i$, $L = N$ szereposztással minden $i \in I$ -re.

$\Leftarrow$: Most pedig tegyük fel, hogy M_i N -endoreguláris, minden $i \in I$ -re. Alkalmazzunk teljes indukciót a direkt összeadandók száma, azaz n szerint. $n = 1$ esetén ez a feltétel éppen M N -endoregularitását jelenti.

$n = 2$ esetén tegyük fel, hogy $M = X \oplus Y$. Valamint X, Y N -endoregulárisak. Ez viszont pont azt jelenti, hogy $\varphi \in H$ esetén $\varphi e_1 \in He_1$ elemnek létezik $\psi \in e_1 T$ kváziinverze. Tehát $\varphi e_1 \psi \varphi e_1 = \varphi e_1$. $\psi \in e_1 T$ miatt $e_1 \psi = \psi$. Tehát $\varphi \psi \varphi e_1 = \varphi e_1 \Rightarrow (\varphi \psi \varphi - \varphi) e_1 = 0$.

Legyen $x = \varphi \psi \varphi - \varphi$. Ekkor $x \in H$, tehát Y N -endoregularitása miatt $\exists y \in e_2 T$, hogy $xe_2 y x e_2 = xy x e_2 = x e_2 \Rightarrow (xy x - x) e_2 = 0$. Továbbá $x e_1 = 0 \Rightarrow (xy x - x) e_1 = xy x e_1 - x e_1 = 0$.

Egyrészt $(xy x - x)(e_1 + e_2) = (xy x - x) e_1 + (xy x - x) e_2 = 0$.

Másrészt: Mivel e_1 , és e_2 az X és Y modulusokra történő identikus vetítés, így: $(m_1 \in M_1, m_2 \in Y)$

$m = e_1 m_1 + e_2 m_2 \Rightarrow e_1 m = e_1 m_1 + e_1 e_2 m_2$. De $e_2 m_2 \in e_2 M = Y$, ami X direkt kiegészítője. Tehát $e_1 e_2 m_2 = 0$, vagyis, $e_1 m = e_1 m_1$. Hasonlóan, $e_2 m = e_2 m_2$. Ezek alapján $m = e_1 m + e_2 m = (e_1 + e_2) m \forall m \in M$ esetén. Tehát $e_1 + e_2 = 1$ (az identitás).

Ekkor $(xy x - x)(e_1 + e_2) = xy x - x$.

Tehát $xy x = x$. Most helyettesítsük vissza x értékét, ez alapján

$(\varphi \psi \varphi - \varphi) y (\varphi \psi \varphi - \varphi) = \varphi \psi \varphi - \varphi$. A kétoldali kiemelés módszeréből adódóan φ elemnek létezik kváziinverze. Tehát M N -endoreguláris, vagyis az $n = 2$ eset kész.

Most vizsgáljuk $\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$, M_n modulusokat. Ekkor $e_n M = M_n$, mivel e_i az identikus vetítés minden $i \in I$ -re, így (az $n = 2$ esethez hasonlóan)

$$e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1.$$

Ekkor $(1 - e_n) M = (e_1 + \dots + e_{n-1}) M = e_1 M + \dots + e_{n-1} M$. De ezek

mind direkt összeadandók, tehát $(1 - e_n)M = \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$. Most alkalmazzuk $X = (1 - e_n)M$, $Y = e_n M$ szereposztással az $n = 2$ esetet, valamint indukciót $X = \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ esetre. Az $n = 2$ esetben, pedig e_1 , e_2 identikus vetítéseknek azon tulajdonságát használtuk, hogy 1 összegűek ami $1 - e_n$, e_n idempotensekre is teljesül.

(2): $\Rightarrow$: Mivel a direkt összeadandók egyben részmodulusok ezért a 3.2.24 tételt alkalmazva $K = N$, $L = M_i$ szereposztással minden $i \in I$ -re pont N M -endoregularitását kapjuk.

$\Leftarrow$: Tegyük fel, hogy N M_i -endoreguláris minden $i \in I$ esetén. Teljes indukciót fogunk alkalmazni a direkt összeadandók száma szerint. $n = 1$ esetén az állítás triviális.

$n = 2$ esetén legyen, $M = X \oplus Y$, ahol N X -re, illetve Y -endoreguláris. $\varphi \in T$ esetén a feltételek miatt $e_1 \varphi \in e_1 T$ elemhez létezik $\psi \in He_1$, hogy $e_1 \varphi \psi e_1 \varphi = e_1 \varphi \psi \varphi = e_1 \varphi$. Ebből pedig $e_1(\varphi \psi \varphi - \varphi) = 0$ következik. A másik irányhoz hasonlóan $x = \varphi \psi \varphi - \varphi$ bevezetésével, és megfelelő y kváziinverzrel: $e_2(xyx - x) = 0$. Ekkor e_1 , e_2 identikus vetítés volta miatt

$(e_1 + e_2)(xyx - x) = xyx - x$. De $(e_1 + e_2)(xyx - x) = 0$, tehát $xyx = x$. Ez után x visszahelyettesítésével, majd a kétoldali kiemelés módszerével megkapjuk, hogy φ -nek létezik kváziinverze.

Most tetszőleges n -re: Alkalmazzuk az $n = 2$ esetet $X = (1 - e_n)M = \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$, $Y = e_n M = M_n$ szereposztással, valamint teljes indukciót $X = \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i$ esetre. $\square$

3.2.26. Tétel. Legyen I , J két véges indexhalmaz, és M_i , N_j modulusok, minden $i \in I$, $j \in J$ számok esetén. Ekkor $\bigoplus_{i \in I} M_i$ akkor és csak akkor $\bigoplus_{j \in J} N_j$ -endoreguláris, ha M_i N_j -endoreguláris, minden $i \in I$, $j \in J$ esetén.

Bizonyítás. $\Rightarrow$: A 3.2.24.-es Tételt alkalmazzuk $K = M_i$, $L = N_j$ szereposztással, minden $i \in I$, $j \in J$ párra.

$\Leftarrow$: Először is a 3.2.25. Tétel (1) részállítása miatt $\bigoplus_{i \in I} M_i$ N_j -reguláris minden $j \in J$ esetén. Ekkor a 3.2.25. Tétel (2) részállítása miatt,

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \bigoplus_{j \in J} N_j\text{-reguláris.} \quad \square$$

3.3. Egység-endoreguláris modulusok

Most az endoreguláris modulusok egy osztályát fogjuk vizsgálni. Az egységreguláris gyűrűkkel már találkoztunk. Most a [11] cikk alapján jobban megismerjük az egység-endoreguláris modulusokat. Az eredmények egy részét bizonyítás nélkül közöljük.

3.3.1. Definíció. Legyen R gyűrű, M R -modulus. Ekkor M egység-endoreguláris, ha $\text{End}_R(M)$ egységreguláris.

Világos, hogy a transzformációk esetén egy egység, azaz egy invertálható elem egy izomorfizmus. Tehát az egység-endoregularitás, pont azt jelenti, hogy minden $\varphi \in \text{End}_R(M)$ transzformációnak létezik olyan kváziinverze, amely ráadásul egy izomorfizmus.

Az első karakterizációhoz bevezetünk 3 új fogalmat.

3.3.2. Definíció. Legyen R gyűrű, M R -modulus. Ekkor M rendelkezik a helyettesítési tulajdonsággal, ha $N = A \oplus B = A' \oplus B'$, $A \cong A'$ esetén létezik $C \leq N$, hogy $N = C \oplus B = C \oplus B'$.

3.3.3. Definíció. Legyen R gyűrű, M R -modulus. Ekkor M rendelkezik a egyszerűsítési tulajdonsággal, ha $M \oplus A \cong M \oplus B$, esetén $A \cong B$.

3.3.4. Definíció. Legyen R gyűrű, M R -modulus. Ekkor M rendelkezik a belső egyszerűsítési tulajdonsággal, ha $M = A \oplus B = A' \oplus B'$, $A \cong A'$ esetén $B \cong B'$

3.3.5. Tétel ([11] Lemma 1.2). Legyen R gyűrű, M endoreguláris R -modulus. Ekkor ekvivalensek a következők:

- (1) M egység-endoreguláris.
- (2) M rendelkezik a helyettesítési tulajdonsággal.
- (3) M rendelkezik az egyszerűsítési tulajdonsággal.
- (4) M rendelkezik a belső egyszerűsítési tulajdonsággal.

3.3.6. Definíció. Legyen R gyűrű, A, B, C R -modulusok. Ekkor az $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ sorozat egzakt B -nél. Ha $\text{Im} f = \text{Ker} g$.

Egy $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_n$ sorozat egzakt, ha egzakt A_i -nél minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén.

3.3.7. Definíció. Legyen R gyűrű, A, B R -modulusok. Az $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} 0$ egzakt sorozat felhasad, ha $\exists g \in \text{Hom}_R(B, A)$, hogy $fg = \text{id}_B$.

3.3.8. Lemma. Legyen R gyűrű, A, B R -modulusok. Ekkor az $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} 0$ egzakt sorozat akkor és csak akkor hasad fel, ha $\text{Ker } f$ direkt összeadandó A -ban.

3.3.9. Definíció. Legyen R gyűrű, M R -modulus. M SIP, ha bármely két direkt összeadandójának metszete direkt összeadandó.

Emlékezzünk vissza, hogy egy M modulust akkor mondunk Rickart-modulusnak, ha minden endomorfizmus magja direkt összeadandó M -ben.

3.3.10. Lemma. Legyen R gyűrű, M egy R feletti Rickart-modulus. Ekkor M SIP.

Bizonyítás. Legyen M modulus a feltételeknek megfelelő módon. Legyen L, N az M modulus két direkt összeadandója, valamint $e, f \in \text{End}_R(M)$ idempotensek, hogy $eM = L$, $fM = N$. Világos, hogy $N = fM = \text{Ker}(1-f)$, hiszen $m \in \text{Ker}(1-f)$ esetén $(1-f)m = 0 \Rightarrow m = fm$, azaz $m \in fM$. A másik tartalmazás: $m \in fM$ esetén $m = fd$ valamilyen $d \in M$ elemre. Ekkor $fm = f^2d = fd \Rightarrow m = fm \Rightarrow (1-f)m = 0$.

Be fogjuk látni, hogy $\text{Ker}(1-f)e = (eM \cap \text{Ker}(1-f)) \oplus (1-e)M$. A direkt összeg nyilván képezhető, hiszen eM és $(1-e)M$ diszjunktak.

$$(1-e)M \subseteq \text{Ker}(1-f)e, \text{ hiszen } (1-f)e(1-e)m = (1-f)(e-e^2)m = 0.$$

$eM \cap \text{Ker}(1-f) \subseteq \text{Ker}(1-f)e$, mivel $m \in eM \cap \text{Ker}(1-f)$ esetén $m = em$, és $(1-f)m = 0$. Tehát $0 = (1-f)m = (1-f)em \Rightarrow m \in \text{Ker}(1-f)e$.

A fordított tartalmazás: $m \in \text{Ker}(1-f)e$ esetén $(1-f)em = 0$, tehát $em \in eM \cap \text{Ker}(1-f)$. Ekkor $m = em + (1-e)m \in (eM \cap \text{Ker}(1-f)) \oplus (1-e)M$. Mivel M Rickart-modulus, így $\text{Ker}(1-f)e$ direkt összeadandó benne, tehát $eM \cap \text{Ker}(1-f) = L \cap N$ szintén direkt összeadandó M -ben. $\square$

Ennek közvetlen következménye a következő állítás endoreguláris modulusokra:

3.3.11. Megjegyzés. Mivel minden endoreguláris modulus Rickart, ezért az endoreguláris modulusok szintén SIP-k.

3.3.12. Tétel. Legyen R gyűrű, valamint M endoreguláris R -modulus. Ekkor ekvivalensek a következők:

- (1) M egység-endoreguláris
- (2) Tetszőleges $\varphi, \psi \in \text{End}_R(M)$, elemekre, amelyekre $\varphi M + \psi M = M$ teljesül, létezik $\pi \in \text{End}_R(M)$, hogy $\varphi + \psi\pi$ izomorfizmus.
- (3) Tetszőleges $\varphi, \psi \in \text{End}_R(M)$ elemekre, amelyekre $\varphi M = \psi M$, létezik $\mu \in \text{End}_R(M)$ izomorfizmus, hogy $\varphi = \psi\mu$.

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (3): Először is a $0 \rightarrow \text{Ker}\varphi \rightarrow M \rightarrow \varphi M \rightarrow 0$ valamint a $0 \rightarrow \text{Ker}\psi \rightarrow M \rightarrow \psi M \rightarrow 0$ sorozatok egzaktak, tetszőleges $\varphi, \psi \in \text{End}_R(M)$ esetén. Továbbá tegyük fel, hogy $\varphi M = \psi M$.

M endoregularitása miatt, a 3.2.2.-es Tétel alapján $\text{Ker}\varphi$ direkt összeadandó M -ben. Így a 3.3.8. Lemma alapján az $M \xrightarrow{\varphi} \varphi M \rightarrow 0$ egzakt sorozat felhasad. Tehát $\exists t \in \text{End}_R(M)$, hogy $\varphi t = \psi$. Hasonlóan ψ esetén $\exists s \in \text{End}_R(M)$, hogy $\psi s = \varphi$. Így $\psi st = \varphi t$. Mivel M endoreguláris, ezért létezik $\gamma \in \text{End}_R(M)$, hogy $\psi = \psi\gamma\psi$. Vegyük észre, hogy

$$(1 - \gamma\psi)(1 - st) = 1 - st - \gamma\psi + \gamma\psi st = 1 - st - \gamma\psi + \gamma\varphi t = 1 - st - \gamma\psi + \gamma\psi = 1 - st.$$

Illetve $m = stm + (1 - st)m = stm + (1 - \gamma\psi)(1 - st)m$, tetszőleges $m \in M$ elemre. Tehát $sM + (1 - \gamma\psi)M = M$.

Így a feltételünk alapján létezik $\pi \in \text{End}_R(M)$ izomorfizmus, hogy

$$s + (1 - \gamma\psi)\pi \text{ izomorfizmus. De } \psi(s + (1 - \gamma\psi)\pi) = \psi s + (\psi - \psi\gamma\psi)\pi = \psi s = \varphi.$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Legyen $\varphi \in \text{End}_R(M)$. Ekkor M endoregularitása miatt létezik $\psi \in \text{End}_R(M)$, hogy $\varphi = \varphi\psi\varphi$. $\varphi M = \varphi\psi\varphi M \subseteq \varphi\psi M \subseteq \varphi M$. Tehát $\varphi M = \varphi\psi M$. Így a feltétel alapján létezik $\mu \in \text{End}_R(M)$ izomorfizmus, hogy $\varphi\psi = \varphi\mu$. Ekkor $\varphi = \varphi\psi\varphi = \varphi\mu\varphi$. De μ izomorfizmus, tehát egység, vagyis $\text{End}_R(M)$ egységreguláris.

(1) $\Rightarrow$ (2): Legyen M egy egység-endoreguláris modulus.

Illetve $\varphi, \psi \in \text{End}_R(M)$, hogy $\varphi M + \psi M = M$. A 3.2.2.-es Tétel miatt, mivel M endoreguláris, így $\text{Ker}\varphi, \text{Im}\varphi, \text{Ker}\psi, \text{Im}\psi$ direkt összeadandók M -ben. Továbbá, szintén M endoregularitása miatt M SIP a 3.3.11. megjegyzés alapján, tehát $\varphi M \cap \psi M$ direkt összeadandó M -ben. Tehát léteznek L, N R -modulusok, melyek $\text{Ker}\varphi$ és φM direkt kiegészítői. Tehát $M = L \oplus \text{Ker}\varphi$, $M = \varphi M \oplus N$.

Ekkor $\psi M = (\varphi M \cap \psi M) \oplus N$. Az izomorfizmustétel miatt $L \cong \varphi M$. A 3.3.5. Tétel alapján, mivel M egység-endoreguláris így rendelkezik a belső egyszerűsítési tulajdonsággal, így $\text{Ker}\varphi \cong N$, legyen $K = \text{Ker}\varphi$. Az előzőek alapján létezik $\eta : K \rightarrow N$ izomorfizmus. Legyen $\theta : M = K \oplus L \rightarrow M$, hogy $k + l \rightarrow \eta k \forall k \in K, \forall l \in L$ esetén. Világos, hogy $\theta \in \text{End}_R(M)$, és $\theta M = N$.

Vizsgáljuk a $0 \rightarrow \text{Ker}\psi \rightarrow M \rightarrow \psi M \rightarrow 0$ egzakt sorozatot. Mivel $\text{Ker}\psi$ direkt összeadandó M -ben, így ez az egzakt sorozat felhasad. Tehát $\exists \tau \in \text{End}_R(M)$, hogy $\psi\tau = \text{id}_{\psi M}$. Most vegyük észre, hogy $\pi = \tau\theta$ esetén $\psi\pi = \psi\tau\theta = \text{id}_{\psi M}\theta = \theta$ (hiszen $\theta M = N \leq \psi M$).

Most pedig megmutatjuk, hogy $\varphi + \psi\pi = \varphi + \theta : M \rightarrow \varphi M \oplus N$ egy izomorfizmus.

Szűrjektív:

$a + b \in \varphi M \oplus N$, $a \in \varphi M$, $b \in N$ esetén. Legyen $k + l \in K \oplus L$ a -nak egy φ szerinti őse. (ahol $k \in K$, $l \in L$) (ilyen van, hisz $a \in \varphi M$) Továbbá legyem $\eta^{-1}b = c$. Ekkor $(\varphi + \theta)(l + c) = \varphi(l + c) + \theta(l + c) = \varphi l + \eta c = a + b$.

Injektív:

Legyen $m_1 = l_1 + k_1, m_2 = l_2 + k_2 \in M$ elemek, hogy

$l_1, l_2 \in L, k_1, k_2 \in K$. Ekkor $(\varphi + \theta)(l_1 + k_1) = \varphi(l_1 + k_1) + \theta(l_1 + k_1) = \varphi l_1 + \eta k_1$. Hasonlóan $(\varphi + \theta)(l_2 + k_2) = \varphi l_2 + \eta k_2$.

Tegyük fel, hogy $(\varphi + \theta)(l_2 + k_2) = \varphi l_2 + \theta k_2 = \varphi l_1 + \eta k_1 = (\varphi + \theta)(l_1 + k_1)$. Ekkor a középső egyenlőséget átalakítva megkapjuk, hogy $\varphi(l_2 - l_1) = \eta(k_1 - k_2)$. Igen ám, de $\varphi(l_2 - l_1) \in \varphi M$, és $\eta(k_1 - k_2) \in N$, ahol $M = \varphi M \oplus N$ miatt $\varphi(l_2 - l_1) = \eta(k_1 - k_2) = 0$. Mivel η izomorfizmus, és $\eta(k_1 - k_2) = 0$, így $k_1 - k_2 = 0$, amiből $k_1 = k_2$. Továbbá $\varphi(l_2 - l_1) = 0 \Rightarrow l_2 - l_1 \in K$. Ekkor $l_2 + 0 = l_2 = l_1 + l_2 - l_1$ az l_2 két felírása a direkt összegben ($M = K \oplus L$),

amiből $l_2 = l_1$ adódik. Tehát $m_1 = m_2$. □

A következő tételhez még szükségünk lesz pár dologra:

3.3.13. Definíció. Legyen M egy R modulus, hogy endomorfizmusgyűrűje S .

Legyen $N \leq M$.

Ekkor $l_S(N) = \{\varphi \in S \mid \varphi N = 0\}$.

Továbbá $\psi \in S$ esetén $l_S(\psi) = \{\varphi \in S \mid \varphi\psi = 0\}$.

3.3.14. Lemma ([4] Corollary 4.4). Legyen R egy Neumann-reguláris gyűrű, M végesen generált projektív R -modulus. M akkor és csak akkor egység-endoreguláris, ha tetszőleges $A_1 \cong A_2$ izomorf direkt összeadandókra létezik B , hogy $M = A_1 \oplus B = A_2 \oplus B$.

3.3.15. Lemma. Legyen R gyűrű, valamint M endoreguláris R -modulus, és $\text{End}_R(M) = S$. Ekkor igazak a következők:

(1) : $\varphi \in S$ akkor és csak akkor injektív, ha a φ -vel történő jobbról szorzás egy szürjektív $S \rightarrow S$ leképezés.

(2) : $\varphi \in S$ akkor és csak akkor szürjektív, ha a φ -vel történő jobbról való szorzás egy injektív $S \rightarrow S$ leképezés.

Bizonyítás. (1) : $\Leftarrow$: Ha a φ -vel történő szorzás szürjektív, akkor $id = t\varphi$ valamilyen t -re. Ekkor $\varphi(x) = 0$ esetén $x = id(x) = t\varphi(x) = t(0) = 0$, tehát φ injektív.

$\Rightarrow$: Ha φ injektív, akkor létezik balinverze vagyis $t \in S$, hogy $t\varphi = id$. Ekkor tetszőleges $x \in S$ -re $x = xt\varphi$

(2) : $\Rightarrow$: Legyen φ szürjektív. Ekkor $\varphi M = M$. Legyen $e \in S$, hogy $e\varphi = 0$. Ekkor $eM = e\varphi M = 0$, tehát $e = 0$.

$\Leftarrow$: Legyen a φ -vel történő jobbról való szorzás injektív. M endoregularitása miatt $M = \varphi M \oplus L$. Legyen e az L -re történő vetítés. Ekkor $e\varphi = 0$, de a φ -vel történő jobbról való szorzás injektív, így $e = 0$, azaz $L = 0$, tehát $\varphi M = M$ □

3.3.16. Lemma ([3] (Theorem 1)). Legyen R gyűrű, M R -modulus.

Egy $\varphi \in \text{End}_R(M)$ elemnek akkor és csak akkor létezik olyan kváziinverze, amely egység, ha $\exists \tau \in \text{End}_R(M)$ izomorfizmus, hogy $M = \text{Im}\varphi \oplus \tau \text{Ker}\varphi$

3.3.17. Tétel. Legyen R gyűrű, valamint M R -modulus, $\text{End}_R(M) = S$. Ekkor a következők ekvivalensek:

- (1) M egység-endoreguláris
- (2) Tetszőleges $\varphi, \psi \in S$ esetén, melyekre, $\varphi M + \psi M = M$, létezik $e \in S$ idempotens, hogy $\varphi + \psi e$ izomorfizmus, és $S\varphi \cap Se = \{0\}$
- (3) Tetszőleges $\varphi \in S$ esetén létezik $e \in S$ idempotens, és $\mu \in S$ izomorfizmus, hogy $\varphi = e + \mu$, és $S\varphi \cap Se = \{0\}$

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (3): Vegyünk egy tetszőleges $\varphi \in S$ elemet.

Ekkor $\varphi M - 1_M M = M$ (ahol $1_M = id_M$), hiszen $\varphi M - 1_M M \subseteq M$ triviális. Valamint $m \in \varphi M$ esetén $m = \varphi x = \varphi x - 0$ valamilyen $x \in M$ esetén, és $0 \in 1_M M$. $m \notin \varphi M$ esetén $m = 0 - (-m) = \varphi 0 - (-m)$. Ekkor a feltevésünk alapján létezik $e \in S$ idempotens, hogy $\varphi - e$ izomorfizmus, és $S\varphi \cap Se = \{0\}$. Legyen $\mu = \varphi - e$. Ekkor $\mu + e = \varphi - e + e = \varphi$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Legyen $\varphi \in S$. Ekkor a feltevésünk alapján létezik $e \in S$ idempotens és $\mu \in S$ izomorfizmus, hogy $\varphi = \mu + e$, és $S\varphi \cap Se = \{0\}$.

Ekkor $e\mu^{-1}\varphi = e\mu^{-1}(\mu + e) = e + e\mu^{-1}e$. $Se\mu^{-1}\varphi \subseteq S\varphi$.

Valamint $S(e + e\mu^{-1}e) = S(1 + e\mu^{-1})e \subseteq Se$. Tehát $Se\mu^{-1}\varphi \subseteq S\varphi \cap Se = \{0\}$. Tehát $e\mu^{-1}\varphi = 0$.

Így $e = \varphi - \mu \Rightarrow e\mu^{-1} = \varphi\mu^{-1} - 1 \Rightarrow 0 = e\mu^{-1}\varphi = \varphi\mu^{-1}\varphi - \varphi \Rightarrow \varphi = \varphi\mu^{-1}\varphi$. Ahol, μ^{-1} izomorfizmus, tehát egység.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Legyen $\varphi, \psi \in S$, hogy $\varphi M + \psi M = M$. Ekkor $a \in l_S(\varphi) \cap l_S(\psi)$ esetén $\forall m \in M$ -re $am = a\varphi m_1 + a\psi m_2 = 0$, tehát $aM = 0$. Így tetszőleges $\tau \in S$ esétn $(\tau + a)m = \tau m + am = \tau m$, minden $m \in M$ -re. Tehát $a = 0$, azaz $l_S(\varphi) \cap l_S(\psi) = \{0\}$.

Mint tudjuk, gyűrű mint önmaga felett vett modulus endomorfizmusgyűrűje izomorf önmagával. Mivel S egység reguláris, így S mint önmaga felett vett modulus egység-endoreguláris. A φ -vel történő jobbról való szorzás egy endomorfizmus, melynek magtere $l_S(\varphi)$. Tehát az izomorfizmustétel, és a belső kiejtési tulajdonság alapján $S = S\varphi \oplus T$, ahol $T \cong l_S(\varphi)$.

Legyen $T_1 = l_S(\varphi)\psi$. Ekkor $T_1 \cong l_S(\varphi)$, hiszen a ψ -vel történő jobbról való

szorzás megad egy szürjektív leképezést, ami injektív $l_S(\varphi) \cap l_S(\psi) = \{0\}$ miatt, tehát izomorfizmus. Ezek alapján $T \cong T_1$, és direkt összeadandó S -ben. Ekkor, mivel egy gyűrű mint önmaga felett vett modulus végesen generált projektív modulus, a 3.3.14. lemma alapján $\exists T_2 \leq S$, hogy $S = T \oplus T_2 = T_1 \oplus T_2$. Legyen $e : T \oplus T_2 \rightarrow T$ az identikus vetítés, azaz $Se = T$. Ekkor $S\varphi \cap Se = \{0\}$, és e -t T_1 -re megszorítva egy $T_1 \cong T$ izomorfizmust kapunk.

Be fogjuk látni, hogy $\varphi + \psi e$ izomorfizmus. Ehhez a 3.3.15. Lemma alapján elegendő, hogy a $(\varphi + \psi e)$ -vel történő jobbról való szorzás egy $S \rightarrow S$ izomorfizmus.

Injektív:

$s(\varphi + \psi e) = 0 \Rightarrow s\varphi = -s\psi e$. Ekkor $s\varphi = -s\psi e \in S\varphi \cap Se = \{0\}$. Tehát $s \in l_S(\varphi)$, valamint $s\psi \in T_1$ és $e|_{T_1} : T_1 \rightarrow T$ izomorfizmusvolta miatt $s\psi = 0$. Így $s \in l_S(\varphi) \cap l_S(\psi) = \{0\}$.

Szürjektív:

Mivel S egység-reguláris, így alkalmazhatjuk a 3.3.16.-os lemmát. Tehát $\exists \tau \in S$, hogy $S = S(\varphi + \psi e) \oplus l_S(\varphi + \psi e)\tau$. De már tudjuk, hogy a $(\varphi + \psi e)$ -vel történő jobbról való szorzás injektív, tehát $l_S(\varphi + \psi e) = \{0\}$. Így $S(\varphi + \psi e) = S$. $\square$

Észrevehető, hogy a 3.3.17.-os Tétel az egység-endoreguláris modulusokat olyan módon karakterizálja, hogy alapvetően nem követeli meg az endoregularitást, a 2.1.7.-es Tételhez hasonlóan.

Hivatkozások

- [1] ANDERSON, F., AND FULLER, K. *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [2] CĂLUGĂREANU, G. On unit-regular rings. *Universitatea Babeş-Bolyai* (2010). <https://math.ubbcluj.ro/~calu/is-id.pdf>}}.
- [3] EHRLICH, G. Units and one-sided units in regular rings. *Transactions of the American Mathematical Society* 216 (1976), 81–90.
- [4] GOODEARL, K. *Von Neumann Regular Rings*. Monographs and studies in mathematics. Pitman, 1979.
- [5] KASCH, F., AND MADER, A. Regularity and substructures of hom. *Communications in Algebra* 34, 4 (2006), 1459–1478.
- [6] KISS, E. *Bevezetés az algebrába*. Elméleti matematika. Typotex, 2007.
- [7] LAM, T. *Lectures on Modules and Rings*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1999.
- [8] LEE, G., RIZVI, S., AND COSMIN, S. Modules whose endomorphism rings are von neumann regular. *Communications in Algebra* 41 (11 2013).
- [9] RIZVI, S., LEE, G., AND COSMIN, S. Rickart modules. *Communications in Algebra* 38 (11 2010), 4005–4027.
- [10] SURODJO, B., WAHYUNI, S., DIYALDIN, F. S., L. J. H., C. P., AND FERRARI, O. On Generalization from Almost von Neumann Regular Rings

to Almost von Neumann Regular Modules. *The 9th SEAMS-UGM 2023 International Conference on Mathematics and Its Applications* (2023).
<https://seams-ugm.id/AlgebraMS/wp-content/uploads/2023/07/Abstrak-AVN-module-Hibah-Pemandatan-Aljabar-untuk-SEAMS-3.pdf>.

- [11] ZHANG, X., AND LEE, G. Characterizations and direct sums of unit-endoregular modules. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 61, 4 (2018), 1103–1112.

Nyilatkozat MI használatról

Alulírott Metzger Ábris András nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során MI alapú eszközöket nem használtam.

.....

Aláírás: