

Móricz Réka Anna

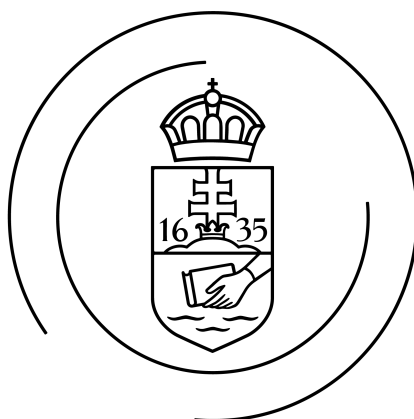
Matematika BSc

Véletlen sorrendű döntések:
az azonnali felvételi probléma és általánosításai

Szakdolgozat

Témavezető: Dr. Király Tamás

Operációkutatás tanszék



Budapest, 2025

Köszönetnyilvánítás

Elsősorban szeretném megköszönni a témavezetőmnek, Dr. Király Tamásnak a rengeteg időt és energiát amelyet rám szánt. Nélküle nem találtam volna rá erre a témára, és sohasem jutottam volna túl a holtpontokon, ha nem gondolkodik velem órákat a kérdéseimről.

Hálás vagyok a szüleimnek, akik mindig mellettem álltak, és még ezt a dolgozatot is hajlandóak voltak elolvasni, pedig a matematika elég messze áll tőlük.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném megköszönni a barátomnak, hogy tartotta bennem a lelket a legnehezebb időszakokban is.

Tartalomjegyzék

1. Az azonnali felvételi probléma (secretary problem)	4
1.1. A probléma szemlélete	4
1.2. A probléma megoldása	4
2. Általánosítások	5
3. Online többdimenziós hátizsák feladat	5
3.1. A feladat leírása	5
3.2. Bevezetés	6
4. Egyszer tanuló algoritmus (One-Time Learning Algorithm, OLA)	7
4.1. Feltevések	8
4.2. Az algoritmus tulajdonságai	8
4.3. Bizonyítás	8
5. Dinamikusan tanuló algoritmus (Dynamic Learning Algorithm, DLA)	19
5.1. Feltevések	20
5.2. Az algoritmus	20
5.3. A versenyképességi hányados elemzése	20

1. Az azonnali felvételi probléma (secretary problem)

A secretary problem egyik legismertebb formája a következő: tegyük fel, hogy van egy cég, ami szeretne venni egy új alkalmazottat. Több jelentkező is akad, a cég célja közülük a lehető legnagyobb valószínűséggel a legjobbat felvenni. Egyszerre egy (véletlenszerűen választott) embert tud behívni állásinterjúra, amely végén közölnie is kell az illetővel, hogy felveszi-e. A probléma nehézségét a következő adja: a cég össze tudja hasonlítani az eddig meginterjúztatott embereket egymással, de nem tud semmit a többi jelentkező képességeiről.

A secretary problem több megoldása is ismert, a következőkben ezek közül egy szemléletes ötletet a „The Secretary Problem and its Extensions: A Review” [4] forrásból, valamint Anupam Gupta és Sahil Singla cikke [5] alapján egy lehetséges megoldást fogok ismertetni.

1.1. A probléma szemlélete

Vegyük észre, hogy a kiválasztási folyamat minden időpillanatban leírható egy számpár segítségével: (r, s) , ahol r azt mondja meg, hogy az n jelentkező közül eddig mennyit interjúztatott meg a cég, s pedig azt, hogy a jelenlegi interjú alanya hányadik helyen áll az aktuális rangsorban. Például az $(5, 1)$ azt a helyzetet írja le, hogy éppen az ötödik ember interjújának végén tartunk, a cégnek el kell döntenie, hogy őt felveszi-e, és azt tudjuk róla, hogy ő egy jobb jelölt az összes eddiginél.

Ezen a ponton világos, hogy a cég döntése optimális esetben mindig az aktuális jelentkező elutasítása egy (r, s) , $s \neq 1$ helyzetben. A kérdés ekkor csupán az: milyen r -re érdemes megállni az $(r, 1)$ állásban, mikor vegyünk fel egy jelöltet, aki jobb az összes eddiginél?

Könnyen látszik, hogy nem érdemes túl kicsi r -nél megállni: az első emberre mindig igaz, hogy ő az eddigi legjobb jelölt, de annak a valószínűsége, hogy valóban ő a legjobb, az csupán $\frac{1}{n}$. Ehhez hasonlóan minden $a \in \mathbb{Z}^+$ igaz, hogy:

$$P(\text{a legjobb jelölt eleme az első } a \text{ embernek}) = \frac{a}{n}$$

Viszont túl sokáig sem érdemes várni, hiszen minden $(r, 1)$ állásra igaz, hogy ha elutasítjuk, fennáll a lehetőség, hogy elmulasztjuk a legjobb munkavállalót.

1.2. A probléma megoldása

Stratégia: Utasítsuk el az első m jelentkezőt, majd vegyünk fel az első olyan embert, aki jobb az összes eddiginél. (Az előző analógiát követve: akkor állunk meg egy $(r, 1)$ állásban, ha $r > m$.) Ekkor annak a valószínűsége, hogy a legjobb jelentkezőt választottuk:

$$\sum_{t=m+1}^n P(\text{a } t\text{-edik ember a legjobb}) \cdot P(\text{az első } t-1 \text{ ember közül a legjobb az első } m \text{ közé esett})$$

$$= \sum_{t=m+1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{m}{t-1} = \frac{m}{n} \cdot (H_{n-1} - H_{m-1})$$

Ahol $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k}$ a k -adik harmonikus szám.

Itt azt az észrevételt használtuk, hogy ha a t -edik ember a legjobb, akkor pontosan akkor esik rá a választásunk a fenti stratégiát követve, ha az előtte lévő emberek közül a legjobb az első m közé esett. Ezután a valószínűség becslésében kihasználtuk azt a feltevést, hogy a jelentkezők minden permutációja ugyanakkora valószínűséggel fordulhat elő (ez egy gyakori feltevés ebben a témakörben).

A fenti kifejezés segítségével már könnyű megtalálni az optimális m -et tetszőleges n -re. Szokás vizsgálni azt is, hogy ha $n \rightarrow \infty$, akkor hová tart ez az optimum, a válasz erre a kérdésre $1/e$.

2. Általánosítások

Több cikk is íródott ebben a témában, én ezek közül most a [4], [5] és [2]-es hivatkozásokban leírtakat fogom használni.

Az eredeti probléma egy kézenfekvő általánosítása a következő: egy helyett most már több jelentkezőt is választhat a cég, a lényeg, hogy a kiválasztott halmaz megfeleljen valamilyen előre lerögzített tulajdonságnak. Ilyen például a matroid secretary problem, amely egy manapság is kutatott terület [3]. Itt kezdetben egy matroid struktúra adott, amelyből a független halmazok alkotják a felvehető részhalmazokat. Jelenleg is nyitott kérdés, hogy létezik-e konstans versenyképes algoritmus minden matroid struktúrára.

Egy másik lehetséges irány az úgynevezett online hátizsák feladat. Ennek az egydimenziós változata a következőképpen néz ki: adott n tárgy, mindegyik két, kezdetben nem ismert paraméterrel: érték és súly. Van ezen kívül egy hátizsákunk, amely m kilogrammot bír el. A célunk a lehető legtöbb összértékben tárgyakat pakolni ebbe a hátizsákba anélkül, hogy túllépnénk a megengedett súlykorlátot. A feladat nehézségét az adja, hogy a paramétereket sorban kapjuk meg, és amint megismertük egy tárgy mindkét tulajdonságát, döntenünk is kell arról, hogy betesszük-e azt a hátizsákunkba.

Ehhez a feladathoz létezik egy többdimenziós változat is, a későbbiekben erre két különböző algoritmust is be fogok mutatni Shipra Agrawal, Zizhuo Wang és Yinyu Ye cikkéből [1].

3. Online többdimenziós hátizsák feladat

3.1. A feladat leírása

A secretary problem egy általánosításának tekinthető a következő probléma: emberek helyett most ajánlatok érkeznek a következő formában: (a_j, π_j) az j -edik ajánlat, ahol $a_j \in [0, 1]^m$, $\pi_j \in \mathbb{R}$, $\pi_j \geq 0$. Adott ezen kívül m különböző erőforrás, a i -edikből $b_i \in \mathbb{R}$ egységnyi. a_{ij} azt mondja meg, hogy a j -edik ajánlat mennyit szeretne a i -edik erőforrásból, π_j pedig azt, hogy mennyit fizetne ezért. A célunk: a bevétel várható értékének maximalizálása úgy, hogy minden erőforrásból legfeljebb annyit

adjunk el, amennyivel rendelkezünk. Az előzőekhez hasonlóan ez is egy online feladat: az ajánlatok sorban érkeznek, az aktuálisról azonnal el kell döntenünk, hogy elfogadjuk-e vagy sem, anélkül, hogy tudnánk, milyen ajánlatok fognak még érkezni a jövőben.

Vegyük észre, hogy ha eltekintünk attól, hogy a döntéseket azonnal meg kell hozni (azaz a feladat offline változatát tekintjük), akkor ez valójában egy IP feladat:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x_j \in \{0, 1\}$$

A célfüggvény:

$$\max \sum_{j=1}^n \pi_j x_j$$

3.2. Bevezetés

A következőkben Shipra Agrawal, Zizhuo Wang és Yinyu Ye két algoritmusát fogom bemutatni [1].

Tekintsük először az offline feladat LP változatát:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n a_{it}x_t &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ 0 &\leq x_t \leq 1, \quad t = 1, \dots, n \\ \max \sum_{t=1}^n \pi_t x_t \end{aligned} \tag{1}$$

Ennek a duálisa a következő:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{it}p_i + y_t &\geq \pi_i, \quad t = 1, \dots, n \\ p_i, y_t &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, n \\ \min \sum_{i=1}^m b_i p_i + \sum_{t=1}^n y_t \end{aligned} \tag{2}$$

A feladat optimumát jelöljük OPT-tal, a hozzá tartozó vektorokat pedig x^* , p^* és y^* -gal. (Ha több vektorhármas is létezik, amelyre felveszi az optimumot, akkor ezek közül válasszunk ki egyet.) Emellett legyen $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Szeretnénk adni egy olyan algoritmust az eredeti (online IP) feladatra, amiről be tudjuk látni, hogy a végeredménye valamilyen értelemben nincs messze az optimumtól. Az offline IP feladatot még mindig elég nehéz megfogni, ezért az eredményünket a következőkben az offline LP feladat optimumához hasonlítjuk majd. Világos, hogy az eredeti feladat (online IP) optima = az offline IP feladat optima $\leq$ az offline LP feladat optima.

Azt, hogy egy algoritmus „milyen messze van az optimumtól”, a következőképp definiálhatjuk: jelöljük OPT-tal az offline LP feladat optimumát. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{A}$ algoritmus c -versenyképes,

ha az eredményének (az általa generált x^A -ra a $\sum_{t=1}^n \pi_t x_t^A$ -nek) a várható értéke $\geq c \cdot \text{OPT}$.

Vegyük észre, hogy ahhoz, hogy ezzel a definícióval közel kerülhessünk az optimumhoz, szükség van arra, hogy az offline IP és LP feladatok optimauma se legyen messze egymástól. Többek között ezért is lesz szükségünk néhány feltevésre, mielőtt hozzáláthatnánk egy algoritmus elemzéséhez.

4. Egyszer tanuló algoritmus (One-Time Learning Algorithm, OLA)

Kezdjük egy egyszerű algoritmus bemutatásával, amelynek a cikk szerzői az OLA (one time learning algorithm) nevet adták. Ez kicsit hasonló lesz az alap secretary problem megoldásához abból a szempontból, hogy egy „tanulási”, valamint egy „beválasztó” részből fog állni, ahol a tanulási fázisban minden ajánlat elutasításra kerül majd: ez arra lesz jó, hogy megtudjuk mikor lesz érdemes elfogadni valamit a következő fázisban.

A tanulási fázis az $s = \varepsilon n$ ajánlatig tartson. Ezután vegyük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^s a_{it} x_t &\leq (1 - \varepsilon) \cdot \frac{s}{n} \cdot b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ 0 &\leq x_t \leq 1, \quad t = 1, \dots, s \\ \max \sum_{t=1}^s \pi_t x_t \end{aligned} \tag{3}$$

Ennek a duálisa a következő:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{it} p_i + y_t &\geq \pi_t, \quad t = 1, \dots, s \\ p_i, y_t &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, s \\ \min \sum_{i=1}^m (1 - \varepsilon) \frac{s}{n} b_i p_i + \sum_{t=1}^s y_t \end{aligned} \tag{4}$$

Legyen $S = \{1, 2, 3, \dots, s\}$. A feladat optimumát jelöljük $\text{OPT}(S)$ -sel, a hozzá tartozó vektorokat pedig $\hat{x}$, $\hat{p}$ és $\hat{y}$ -pal. (Ha több vektorhármass is létezik, amelyre felveszi az optimumot, akkor ezek közül válasszunk ki egyet.)

Ezek segítségével a következő szabályt alkalmazzuk majd a „beválasztó” fázisban: Ha $\pi_t > \hat{p}^T a_t$, és ezzel nem lépjük túl az erőforráskeretet, az ajánlatot elfogadjuk, ha viszont nem, akkor elutasítjuk.

Precízebben: Legyen

$$x_t(p) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \pi_t > \hat{p}^T a_t \\ 0 & \text{ha } \pi_t \leq \hat{p}^T a_t \end{cases}$$

Az algoritmus:

1. lépés: legyen $x_t = 0 \quad \forall t \leq S$.
2. lépés: $\hat{p}$ kiszámítása
3. lépés: $t = S + 1, S + 2, \dots$ -re:

$$x_t = \begin{cases} x_t(\hat{p}) & \text{ha } a_{it}x_t(\hat{p}) \leq b_i - \sum_{j=1}^{t-1} a_{ij}x_j \quad \forall i\text{-re} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Az algoritmus outputja az x vektor.

4.1. Feltevések

- **1.feltevés:** Az (a_i, π_i) ajánlatok véletlen sorrendben érkeznek. Ez alatt azt értjük, hogy az ajánlatok halmaza adott, képzelhetjük róla azt, hogy valamilyen eloszlásból származik, esetleg egy „ellenség” által választott, akinek a célja, hogy a lehető legkisebb profitra tegyünk szert. Az ajánlatok érkezési sorrendjébe viszont még neki sincs beleszólása: minden permutáció egyforma valószínűséggel fordulhat elő.
- **2.feltevés:** n egy előre megadott szám.
- **3.feltevés:** Az ajánlatok „általános pozícióban” vannak. Ez alatt azt értjük, hogy tetszőleges p vektorra teljesül, hogy legfeljebb m olyan ajánlat létezik, amelyre $p^T a_t = \pi_t$
- **4.feltevés:**

$$B = \min_i b_i \geq \frac{6m \log(n/\varepsilon)}{\varepsilon^3}$$

4.2. Az algoritmus tulajdonságai

$\hat{p}$ -re valójában úgy érdemes gondolni, mint egy árvektorra: az i -edik koordinátája azt adja meg, hogy mennyi bevételre szeretnénk szert tenni az i -edik nyersanyag 1 egységnyi eladásából. Elfogadunk egy ajánlatot, ha $\pi_t > \hat{p}^T a_t$, azaz ha az ajánlatban szereplő ár magasabb, mint a benne szereplő erőforrások összértéke.

1. tétel. *A fenti feltevések mellett az OLA tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra $(1 - 6\varepsilon)$ versenyképes.*

4.3. Bizonyítás

A bizonyítás menete: be fogjuk látni, hogy $\{x_t(p^*)\}$ valamilyen értelemben jó becslést ad x_t^* -ra. Ezután megmutatjuk, hogy az $x_t(\hat{p})$ nagy valószínűséggel nem lépi túl az erőforráskeretet, vagyis x_t -t a legtöbb esetben választhatjuk majd $x_t(\hat{p})$ -nak. $x_t(\hat{p})$ -ról azt is belátjuk, hogy $\pi_t x_t(\hat{p})$ várható értéke közel esik az optimumhoz. Végül megmutatjuk, hogy nem veszítünk túl sokat a tanuló fázis alatt, a fentiekből pedig következni fog az 1. tétel.

Ehhez a következő lemmákra lesz szükségünk:

- **2. lemma:** $x_t(p^*) \leq x_t^* \quad \forall t$ -re, és $x_t(p^*), x_t^*$ legfeljebb m darab koordinátában térnek el egymástól.

• 3. lemma:

$$P \left(\sum_{t=1}^n a_{it} x_t(\hat{p}) \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \right) \geq 1 - \varepsilon$$

• 4. lemma:

$$P \left(\sum_{t \in N} \pi_t x_t(\hat{p}) \geq (1 - 3\varepsilon) \cdot \text{OPT} \right) \geq 1 - \varepsilon$$

• 5. lemma:

$$\mathbb{E}[\text{OPT}(S)] \leq \varepsilon \cdot \text{OPT}$$

2. lemma. $x_t(p^*) \leq x_t^* \quad \forall t$ -re, és $x_t(p^*), x_t^*$ legfeljebb m darab koordinátában térnek el egymástól.

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az offline LP feladatot. Jelöljük x^* -al az optimális primál, (p^*, y^*) -al az optimális duál megoldást. Ekkor az optimalitási feltételek miatt igaz a következő:

$$x_t^* > 0 \implies \sum_{i=1}^m a_{it} p_i^* + y_t^* = \pi_t$$

$$y_t^* > 0 \implies x_t^* = 1$$

Az $x_t(p)$ definíciója miatt $x_t(p^*)$ akkor és csak akkor vesz fel 1-et, ha $(p^*)^T a_t < \pi_t$. Mivel feltétel az LP feladatban, hogy $\sum_{i=1}^m a_{it} p_i + y_t \geq \pi_t$, ezért ha $x_t(p^*) = 1$, akkor $y_t^* > 0$. A fentebb leírt második optimalitási feltétel miatt ekkor az is látszik, hogy ebből következik, hogy $x_t^* = 1$. Vagyis a következőt kaptuk:

$$(p^*)^T a_t < \pi_t \implies x_t(p^*) = 1 \implies x_t^* = 1$$

Az $x_t(p)$ függvény definíciója miatt $x_t(p^*)$ két féle értéket vehet fel: 1-et vagy 0-t, és tudjuk, hogy $x_t^* \geq 0 \implies x_t(p^*) \leq x_t^* \quad \forall t \in \{1, \dots, n\}$.

Vegyük észre, hogy ha $\pi_t < (p^*)^T a_t$, akkor $x_t(p^*) = 0$ a függvény definíciója miatt, és mivel $y_t^* \geq 0$ ezért az első optimalitási feltételből az is kijön, hogy ekkor $x_t^* = 0$ (a következtetés jobb oldala nem teljesül $\implies x_t^*$ nem nagyobb mint 0, de $x_t^* \geq 0$).

Eddig sikerült belátnunk hogy ha $\pi_t > (p^*)^T a_t$ vagy ha $\pi_t < (p^*)^T a_t$, akkor $x_t(p^*) = x_t^*$. Most lesz szükségünk a 3. feltevésre, ami azt mondja, hogy legfeljebb m olyan koordináta lehet, amelyre $\pi_t = (p^*)^T a_t \implies x_t(p^*)$ és x_t^* legfeljebb m koordinátában térhetnek el egymástól.

□

3. lemma.

$$P \left(\sum_{t=1}^n a_{it} x_t(\hat{p}) \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m \right) \geq 1 - \varepsilon$$

Bizonyítás. Definíció: Azt mondjuk, hogy egy M rossz minta a p vektorra és az i koordinátára akkor és csak akkor, ha létezik y , amellyel (p, y) optimális megoldása az s időpillanatig tartó offline LP feladatnak (4), de létezik i , amelyre $\sum_{t=1}^n a_{it} x_t(p) > b_i$.

Első lépésként lássuk be, hogy fix p -re és i -re a rossz minta valószínűsége kicsi. Ezután összegezni fogjuk ezt a valószínűséget minden p -re és i -re, ebből kapjuk majd meg a rossz minta valószínűségét.

Legyen $Y_t = a_{it}x_t(p)$. Ha $p = \hat{p}$ azaz p optimális megoldása a (4)-es LP feladatnak, akkor:

$$\sum_{t \in S} Y_t = \sum_{t \in S} a_{it}x_t(p) \leq \sum_{t \in S} a_{it}\hat{x}_t \leq (1 - \varepsilon)\varepsilon b_i$$

ahol $\hat{x}$ az optimális primál megoldás az s időpillanatig tartó offline LP feladatra (3).

Az első egyenlőség egyszerűen Y definíciójából következik. Ezután az első egyenlőtlenségnél a 2. lemmát használjuk, és azt a megfigyelést, hogy p és $\hat{x}$ optimális megoldásai a (3), (4)-es LP feladatnak. Az utolsó egyenlőtlenségnél egyszerűen azt használjuk, hogy $\hat{x}$ egy megoldása a (3)-as LP feladatnak, azaz kielégíti annak feltételeit.

Az alábbi valószínűséget szeretnénk felülről becsülni fix p -re és i -re:

$$P\left(\sum_{t \in N} Y_t > b_i, p \text{ optimális megoldása a (4)-es LP feladatnak}\right)$$

Ehhez vizsgáljuk meg a következő valószínűséget:

$$P\left(\sum_{t \in S} Y_t \leq (1 - \varepsilon)\varepsilon b_i, \sum_{t \in N} Y_t \geq b_i\right)$$

Az első eseményről az előbb beláttuk, hogy mindig igaz ha p optimális megoldás, a másodikban pedig $\geq$ -t használtunk a definícióban szereplő $>$ helyett. Azaz ez egy kicsit bővebb esemény annál, hogy a rögzített p -re és i -re az M nem egy jó minta.

Legyen $Z_t = \frac{b_i Y_t}{\sum_{k \in N} Y_k}$. Megfigyelés: $\sum_{t \in N} Z_t = b_i$.

Ekkor:

$$P\left(\sum_{t \in S} Y_t \leq (1 - \varepsilon)\varepsilon b_i, \sum_{t \in N} Y_t \geq b_i\right) \leq P\left(\sum_{t \in S} Z_t \leq (1 - \varepsilon)\varepsilon b_i, \sum_{t \in N} Y_t \geq b_i\right)$$

Ez azért lesz igaz, mert:

$$\sum_{t \in S} Z_t = \sum_{t \in S} Y_t \cdot \frac{b_i}{\sum_{t \in N} Y_t} \leq \sum_{t \in S} Y_t$$

(itt használtuk a $\sum_{t \in N} Y_t \geq b_i$ egyenlőtlenséget).

$$P\left(\sum_{t \in S} Z_t \leq (1 - \varepsilon)\varepsilon b_i, \sum_{t \in N} Y_t \geq b_i\right) \leq P\left(\left|\sum_{t \in S} Z_t - \varepsilon \sum_{t \in N} Z_t\right| \geq \varepsilon^2 b_i, \sum_{t \in N} Y_t \geq b_i\right)$$

Itt kihasználjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
\sum_{t \in S} Z_t &\leq (1 - \varepsilon) \varepsilon b_i \\
\sum_{t \in S} Z_t &\leq \varepsilon b_i - \varepsilon^2 b_i \\
\sum_{t \in S} Z_t - \varepsilon b_i &\leq -\varepsilon^2 b_i \\
-\sum_{t \in S} Z_t + \varepsilon b_i &\geq \varepsilon^2 b_i \\
-\sum_{t \in S} Z_t + \varepsilon \sum_{t \in N} Z_t &\geq \varepsilon^2 b_i
\end{aligned}$$

Azaz az első eseményt egy bővebb eseményre cseréltük.

Egyszerű látni, hogy:

$$P \left(\left| \sum_{t \in S} Z_t - \varepsilon \sum_{t \in N} Z_t \right| \geq \varepsilon^2 b_i, \sum_{t \in N} Y_t \geq b_i \right) \leq P \left(\left| \sum_{t \in S} Z_t - \varepsilon \sum_{t \in N} Z_t \right| \geq \varepsilon^2 b_i \mid \sum_{t \in N} Y_t \geq b_i \right)$$

Ezen valószínűség becsléséhez szükségünk lesz egy egyenlőtlenségre, amely Hoeffding és Bernstein nevéhez fűződik:

Hoeffding-Bernstein egyenlőtlenség [7]:

Adott a valós számok egy $\{c_1, c_2, \dots, c_R\}$ halmaza. Legyenek $u_1, u_2, \dots, u_r$ ebből a halmazból random, visszatevés nélkül választott minták. Ekkor $\forall t > 0$ -ra:

$$P \left(\left| \sum_{i=1}^r u_i - r\bar{c} \right| \geq t \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{t^2}{2r\sigma_R^2 + t\Delta_R} \right)$$

ahol $\Delta_R = \max_i c_i - \min_i c_i$, $\bar{c} = (1/R) \sum_i c_i$, és $\sigma_R^2 = (1/R) \sum_{i=1}^R (c_i - \bar{c})^2$.

Megfeleltetés:

- $\{c_1, c_2, \dots, c_R\} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$
- $R = n$
- $r = s = \varepsilon n$
- $t = \varepsilon^2 b_i$
- $\Delta_R \leq 1$
- $\sigma_R^2 \leq \frac{1}{n} \cdot b_i$

Az utóbbi kettőt nemsokára belátjuk, de előbb szükségünk lesz néhány megfigyelésre:

Mivel

$$a_{it} \in [0, 1], \quad x_t(p) \in \{0, 1\} \implies \forall t \quad 0 \leq Y_t \leq 1.$$

Emellett azt is feltettük, hogy:

$$\sum_{t \in N} Y_t \geq b_i$$

Ebből következik, hogy:

$$\forall t \quad 0 \leq Z_t \leq 1$$

Amiből már kijön a következő becslés:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in N} (Z_t - \bar{Z})^2 &= \sum_{t \in N} Z_t^2 - \sum_{t \in N} 2Z_t \bar{Z} + N \bar{Z}^2 \\ &= \sum_{t \in N} Z_t^2 - 2\bar{Z} N \cdot \bar{Z} + N \bar{Z}^2 \\ &\leq \sum_{t \in N} Z_t^2 \leq \sum_{t \in N} Z_t = b_i \end{aligned}$$

Ezek alapján már használhatjuk a következő becsléseket:

$$\Delta_R \leq 1, \quad \sigma_R^2 \leq \frac{1}{n} \cdot b_i$$

Vagyis azt kaptuk, hogy:

$$P \left(\left| \sum_{t \in S} Z_t - \varepsilon \sum_{t \in N} Z_t \right| \geq \varepsilon^2 b_i \mid \sum_{t \in N} Y_t \geq b_i \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{\varepsilon^4 b_i^2}{2\varepsilon n \frac{1}{n} \cdot b_i + \varepsilon^2 b_i} \right) = 2 \exp \left(- \frac{\varepsilon^3 b_i}{2 + \varepsilon} \right)$$

Felhasználva a 4.feltevést, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 2 \exp \left(- \frac{\varepsilon^3 b_i}{2 + \varepsilon} \right) &\leq 2 \exp \left(- \frac{6m \log \left(\frac{n}{\varepsilon} \right)}{2 + \varepsilon} \right) \\ 2 \exp \left(- \frac{6m \log \left(\frac{n}{\varepsilon} \right)}{2 + \varepsilon} \right) &= 2 \exp \left(- \log \left(\frac{n}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{6m}{2 + \varepsilon} \right) = 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{\frac{6m}{2 + \varepsilon}} \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{2m} \end{aligned}$$

(Itt felhasználtam, hogy $\varepsilon < 1$.) A célunk a következő egyenlőtlenségről belátni, hogy teljesül:

$$2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{2m} \leq \frac{\varepsilon}{m \cdot n^m}$$

Az előző egyenlőtlenség egyszerű átalakításokkal a következő formára hozható:

$$\varepsilon^{2m-1} \leq \frac{n^m}{2m}$$

Mivel m és n is előre ismert (emlékeztetőül: m az erőforrások száma, n pedig a beérkező kéréseké, amelyről a 2.feltevés szólt), ezért választhatjuk úgy ε -t, hogy ez a feltétel teljesüljön. (Ha $n \geq 2$, akkor elég, ha $\varepsilon \leq 1$.)

Ezzel beláttuk, hogy fix i -re és p -re a rossz minta valószínűsége $\leq \frac{\varepsilon}{m \cdot n^m}$.

Tudjuk, hogy i m -féle lehet. Mi a helyzet p -vel?

Definíció: Azt mondjuk, hogy a p és p' árvektorok lényegesen különbözőek akkor és csak akkor, ha létezik t , amelyre $x_t(p) \neq x_t(p')$. (Azaz ha létezik olyan ajánlat, amelyet az egyik alapján elfogadnánk, de a másik alapján elutasítanánk.)

Vegyük észre, hogy elég a lényegesen különböző p -k számát becsülni, hiszen az Y_t értékek megegyeznek két nem lényegesen különböző vektor esetén.

Első ránézésre ez a definíció egy 2^n -es becslést adna a lényegesen különböző p -k számára, ennél viszont nekünk valami erősebbre lesz szükségünk. Erre a következő szemléletes ötlet alapján van is reményünk: ha érkezik két nagyon jó ajánlat, mindkettőnél az ajánlott ár meghaladja a nyersanyagok összárát a p vektor alapján, akkor ha jön egy harmadik ajánlat, ami pont az előző kettő összege (mind nyersanyagigény, mind bevétel szempontjából), akkor a p vektor ezt is biztosan elfogja fogadni. Más szóval: nem létezik olyan p , amely elfogadná az első 2, de elutasítaná a 3. ajánlatot $\implies$ nem feltétlenül létezik mind a 2^n kimenetelre vektor, amely azt produkálná.

A trükk a következő lesz: tekintsünk az ajánlatokra $m+1$ dimenziós vektorokként: az első m koordináta az eddig megszokott a_t -vel egyezik meg, és azt tárolja, hogy a t -edik kérdés mennyit használna fel az egyes erőforrásokból, az utolsó koordináta pedig legyen π_t : az ár, amit ajánl. Jelöljük ezeket a vektorokat v_t -vel. Ehhez hasonlóan p -t is bővítsük ki egy koordinátával: legyen ez a koordináta -1 , az így kapott vektort pedig jelöljük q -val. Vegyük észre, hogy ekkor a v_t ajánlatot a p árvektor alapján elfogadjuk akkor és csak akkor, ha $q^T v_t < 0$, azaz ha a q és v_t vektorok szöge nagyobb mint 90 fok.

Vegyük a q -ra merőleges hipersíkot egy $m+1$ dimenziós térben. Ekkor látszik, hogy ezen hipersík egyik oldalán azon ajánlatok vektorai helyezkednek el, amelyeket elfogadnánk, ennek a komplementerén pedig azok, amelyeket elutasítanánk. Így a lényegesen különböző árvektorok számát becsülhetjük ezen hipersíkok segítségével, a kérdés a következővé alakult át: adott n vektor egy $m+1$ dimenziós térben. Hányféleképpen tudjuk ezeket 2 csoportra osztani egy hipersík segítségével?

A választ Orlik és Tareo 1992-es műve rejti [6]: n^m .

Fix i -re és p -re a rossz minta valószínűsége $\leq \frac{\varepsilon}{m \cdot n^m}$, és most már azt is tudjuk, hogy i -t m , p -t pedig n^m lényegesen különböző féleképpen választhatjuk meg. $\implies$ a rossz minta valószínűsége $\leq \frac{\varepsilon}{m \cdot n^m} \cdot m \cdot n^m = \varepsilon \implies$ annak a valószínűsége, hogy s nem egy rossz minta $\geq (1 - \varepsilon)$. Ezt akartuk belátni.

□

4. lemma.

$$P\left(\sum_{t \in N} \pi_t x_t(\hat{p}) \geq (1 - 3\varepsilon) \cdot OPT\right) \geq 1 - \varepsilon$$

Bizonyítás. 1. lépés: Vegyük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in N} a_{it} x_t &\leq \hat{b}_i, \quad i = 1, \dots, m \\ 0 &\leq x_t \leq 1, \quad t = 1, \dots, n \\ \max \sum_{t \in N} \pi_t x_t \end{aligned} \tag{5}$$

Ennek a duálisa a következő:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{it} p_i + y_t &\geq \pi_t, \quad t = 1, \dots, n \\ p_i, y_t &\geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, n \\ \min \sum_{i=1}^m \hat{b}_i p_i + \sum_{t=1}^n y_t \end{aligned} \tag{6}$$

Ahol:

$$\hat{b}_i = \begin{cases} \sum_{t \in N} a_{it} x_t(\hat{p}) & \text{ha } \hat{p}_i > 0 \\ \max\{\sum_{t \in N} a_{it} x_t(\hat{p}), b_i\} & \text{ha } \hat{p}_i = 0 \end{cases}$$

Emellett legyen:

$$\hat{y}'_t = \max \left\{ \pi_t - \sum_{i=1}^m a_{it} \hat{p}_i, 0 \right\}$$

$$\hat{y}' = \{\hat{y}'_t\}_{t=1}^n$$

Állítás: $\{x_t(\hat{p})\}_{t=1}^n$ és $(\hat{p}, \hat{y}')$ optimális duál és primál megoldásai az előző LP feladatnak. ($\hat{p}$ a (4)-es számú LP feladat optimális megoldásából jön.)

Bizonyítás. Be fogjuk látni, hogy $\{x_t(\hat{p})\}_{t=1}^n$ és $(\hat{p}, \hat{y}')$ teljesítik az optimalitási feltételeket.

1.feltétel:

$$\hat{p}_i > 0 \implies \sum_{t \in N} a_{it} x_t(\hat{p}) = \hat{b}_i$$

Ez egyszerűen következik $\hat{b}_i$ definíciójából.

2.feltétel:

$$\hat{y}'_t > 0 \implies x_t(\hat{p}) = 1$$

Ezt könnyű látni a következők miatt:

$$\hat{y}'_t > 0 \iff \pi_t - \sum_{i=1}^m a_{it} \hat{p}_i > 0 \iff \pi_t > \sum_{i=1}^m a_{it} \hat{p}_i \iff x_t(\hat{p}) = 1$$

3.feltétel:

$$x_t(\hat{p}) > 0 \implies \pi_t = \sum_{i=1}^m a_{it}\hat{p}_i + \hat{y}'_t$$

Tudjuk, hogy $x_t(\hat{p})$ értéke 0 vagy 1, azaz valójában a következőt szeretnénk belátni:

$$x_t(\hat{p}) = 1 \implies \pi_t = \sum_{i=1}^m a_{it}\hat{p}_i + \hat{y}'_t$$

Az előbb már beláttuk, hogy:

$$x_t(\hat{p}) = 1 \iff \pi_t - \sum_{i=1}^m a_{it}\hat{p}_i > 0 .$$

Ekkor $\hat{y}'_t$ definíciója miatt:

$$\hat{y}'_t = \pi_t - \sum_{i=1}^m a_{it}\hat{p}_i ,$$

ezt akartuk belátni. □

2. lépés: Lássuk be, hogy:

$$P(\hat{b}_i \geq (1 - 3\varepsilon)b_i) \geq 1 - \varepsilon$$

Először vizsgáljuk meg a $\hat{p}_i > 0$ esetet, azaz lássuk be, hogy:

$$\hat{p}_i > 0 \implies P(\hat{b}_i \geq (1 - 3\varepsilon)b_i) \geq 1 - \varepsilon$$

Mivel $\hat{p}$ -al a (4)-es LP feladat optimális megoldása $\implies$ teljesülnek az optimalitási feltételek $\implies$ ha $\hat{p}_i > 0$ akkor $\sum_{t=1}^s a_{it}\hat{x}_t = (1 - \varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot b_i$.

Ekkor tudjuk, hogy:

$$\sum_{t=1}^s a_{it}x_t(\hat{p}) \geq \sum_{t=1}^s a_{it}\hat{x}_t - m \geq (1 - \varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot b_i - \varepsilon^2 b_i = (1 - 2\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot b_i$$

Ahol az első egyenlőtlenség egyszerűen a 2. lemmából következik, a másodikhoz pedig kihasználjuk a 4. feltevést, azaz, hogy:

$$B = \min_i b_i \geq \frac{6m \log(n/\varepsilon)}{\varepsilon^3} \implies \min_i b_i \geq \frac{m}{\varepsilon^2} \implies \min_i b_i \cdot \varepsilon^2 \geq m$$

Ezután a bizonyítás nagyon hasonlítani fog az előző lemmához: fixáljuk le p -t és i -t, majd használjuk a Hoeffding-Bernstein egyenlőtlenséget a rossz minta valószínűségének meghatározására:

Definíció: Azt mondjuk, hogy egy M rossz minta a p vektorra és az i koordinátára akkor és csak akkor, ha $\sum_{t=1}^s a_{it}x_t(p) \geq (1 - 2\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot b_i$, és $\sum_{t=1}^n a_{it}x_t(p) \leq (1 - 3\varepsilon) \cdot b_i$

Az előző lemmához hasonlóan legyen: $Y_t = a_{it}x_t(p)$

$$\begin{aligned}
& P \left(\sum_{t=1}^s a_{it}x_t(p) \geq (1 - 2\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot b_i, \sum_{t=1}^n a_{it}x_t(p) \leq (1 - 3\varepsilon) \cdot b_i \right) \\
&= P \left(\sum_{t=1}^s Y_t \geq (1 - 2\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot b_i, \sum_{t=1}^n Y_t \leq (1 - 3\varepsilon) \cdot b_i \right) \\
&\leq P \left(\left| \sum_{t=1}^s Y_t - \varepsilon \cdot \sum_{t=1}^n Y_t \right| \geq \varepsilon^2 \cdot b_i, \sum_{t=1}^n Y_t \leq (1 - 3\varepsilon) \cdot b_i \right)
\end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy ha teljesül, hogy $\sum_{t=1}^s Y_t \geq (1 - 2\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot b_i$ és $\sum_{t=1}^n Y_t \leq (1 - 3\varepsilon) \cdot b_i \implies |\sum_{t=1}^s Y_t - \varepsilon \cdot \sum_{t=1}^n Y_t| \geq \varepsilon^2 \cdot b_i$.

$$\begin{aligned}
& P \left(\left| \sum_{t=1}^s Y_t - \varepsilon \cdot \sum_{t=1}^n Y_t \right| \geq \varepsilon^2 \cdot b_i, \sum_{t=1}^n Y_t \leq (1 - 3\varepsilon) \cdot b_i \right) \\
&\leq P \left(\left| \sum_{t=1}^s Y_t - \varepsilon \cdot \sum_{t=1}^n Y_t \right| \geq \varepsilon^2 \cdot b_i \left| \sum_{t=1}^n Y_t \leq (1 - 3\varepsilon) \cdot b_i \right. \right) \\
&\leq 2 \exp \left(- \frac{\varepsilon^4 b_i^2}{2 \cdot s \cdot \frac{1}{n} (1 - 3\varepsilon) b_i + \varepsilon^2 b_i \cdot 1} \right)
\end{aligned}$$

A Hoeffding-Bernstein egyenlőtlenséget használva a következő megfeleltetéssel:

- $\{c_1, c_2, \dots, c_R\} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$
- $R = n$
- $r = s = \varepsilon n$
- $t = \varepsilon^2 b_i$
- $\Delta_R \leq 1$
- $\sigma_R^2 \leq \frac{1}{n} (1 - 3\varepsilon) b_i$

Amelyek közül az utolsó a következőképp bizonyítható:

$$\begin{aligned}
n \cdot \sigma_R^2 &= \sum_{t \in N} (Y_t - \bar{Y})^2 \\
&= \sum_{t \in N} Y_t^2 - \sum_{t \in N} 2Y_t \cdot \bar{Y} + N\bar{Y}^2 \\
&= \sum_{t \in N} Y_t^2 - 2N\bar{Y}^2 + N\bar{Y}^2 \\
&\leq \sum_{t \in N} Y_t^2 \leq \sum_{t \in N} Y_t \leq (1 - 3\varepsilon) b_i
\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségből kapott eredményt tovább becsülve kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^4 b_i^2}{2 \cdot s \cdot \frac{1}{n}(1-3\varepsilon)b_i + \varepsilon^2 b_i \cdot 1} \right) &= 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^4 b_i^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot (1-3\varepsilon)b_i + \varepsilon^2 b_i} \right) \\ &= 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^3 b_i}{2-5\varepsilon} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^3 b_i}{2} \right) \end{aligned}$$

Használjuk a 4. feltevést:

$$B = \min_i b_i \geq \frac{6m \log(n/\varepsilon)}{\varepsilon^3}$$

$$2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^3 b_i}{2} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{6m \log(n/\varepsilon)}{2} \right) = 2 \exp \left(-\log \left(\frac{n}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{6m}{2} \right) = 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{\frac{6m}{2}} = 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{3m}$$

A 3. lemmában beláttuk:

$$2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{2m} \leq \frac{\varepsilon}{m \cdot n^m}$$

Tudjuk, hogy:

$$2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{3m} \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{2m} \implies 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{3m} \leq \frac{\varepsilon}{m \cdot n^m}$$

Az előző lemmához hasonlóan venni kell ezt a valószínűséget minden lehetséges p, i kombinációra. i -t m , p -t pedig n^m lényegesen különböző féleképpen választhatjuk meg. $\implies$ a rossz minta valószínűsége $\leq \frac{\varepsilon}{m \cdot n^m} \cdot m \cdot n^m = \varepsilon \implies$ annak a valószínűsége, hogy s nem egy rossz minta $\geq (1-\varepsilon)$. Ezzel beláttuk, hogy $\hat{p}_i > 0 \implies P(\hat{b}_i \geq (1-3\varepsilon)b_i) \geq 1-\varepsilon$.

Mi a helyzet a $\hat{p}_i = 0$ esettel?

$\hat{b}_i$ definíciójából tudjuk, hogy ekkor $\hat{b}_i = \max\{\sum_{t \in N} a_{it} x_t(\hat{p}), b_i\} \implies \hat{b}_i \geq b_i \implies \hat{b}_i \geq (1-3\varepsilon)b_i$. Ezzel beláttuk a 2. lépést.

3. lépés: Az eddigiek alapján belátni a 4. lemmát.

Vegyük észre, hogy ha $\hat{b}_i \geq (1-3\varepsilon)b_i$ teljesül (2. lépés) és x egy megengedett megoldása az eredeti LP feladatnak (1), akkor $(1-3\varepsilon)x$ megengedett megoldása lesz az 1. lépésben vizsgált LP feladatnak $\implies$ legyen x^* optimális megoldás (1)-re. Ekkor $(1-3\varepsilon)x^*$ megengedett megoldása az (5)-nek $\implies \max \sum_{t \in N} \pi_t x_t \geq \sum_{t \in N} \pi_t (1-3\varepsilon)x^* = (1-3\varepsilon) \sum_{t \in N} \pi_t x^* = (1-3\varepsilon) \text{OPT}$. Azt is tudjuk, hogy $\{x_t(\hat{p})\}_{t=1}^n$ optimális megoldása az (5)-nek (1. lépés) $\implies \sum_{t \in N} \pi_t x_t(\hat{p}) \geq (1-3\varepsilon) \cdot \text{OPT}$.

$$P(\hat{b}_i \geq (1-3\varepsilon)b_i) \geq 1-\varepsilon \implies P\left(\sum_{t \in N} \pi_t x_t(\hat{p}) \geq (1-3\varepsilon) \cdot \text{OPT}\right) \geq 1-\varepsilon$$

□

5. lemma. $\mathbb{E}[\text{OPT}(S)] \leq \varepsilon \cdot \text{OPT}$

Bizonyítás. Az eddigi jelölésrendszert használva legyen: x^*, p^*, y^* optimális megoldásai az (1), (2)-nek, $\hat{x}, \hat{p}, \hat{y}$ pedig (3), (4)-nek.

Mivel $S \subseteq N$, egyszerű látni, hogy p^*, y^* megengedett megoldásai (4)-nek, vagyis:

$$\text{OPT}(S) \leq (1 - \varepsilon)\varepsilon b^T p^* + \sum_{t \in S} y_t^* \leq \varepsilon b^T p^* + \sum_{t \in S} y_t^*$$

Ennek a segítségével már megbecsülhetjük $\text{OPT}(S)$ várható értékét a következő módon:

$$\mathbb{E}[\text{OPT}(S)] \leq \varepsilon b^T p^* + \mathbb{E} \left[\sum_{t \in S} y_t^* \right] = \varepsilon \left(b^T p^* + \sum_{t \in N} y_t^* \right) = \varepsilon \cdot \text{OPT}$$

□

Az előbb belátott 4 lemmával már minden szükséges eszköz rendelkezésünkre áll az alábbi, fentebb már említett tétel bizonyításához (1).

Tétel: Az OLA tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra $(1 - 6\varepsilon)$ versenyképes.

Bizonyítás. A 3. és 4. lemma alapján:

$$P \left(\sum_{t=1}^n \pi_t x_t(\hat{p}) \geq (1 - 3\varepsilon)\text{OPT}, \quad \sum_{t=1}^n a_{it} x_t(\hat{p}) \leq b_i \quad \forall i \right) \geq 1 - 2\varepsilon$$

Jelöljük ezt az eseményt ξ -vel: $P(\xi) \geq (1 - 2\varepsilon)$. Ez lesz most számunkra a „jó eset”. Ilyenkor az OLA nem dob ki igéretes ajánlatot amiatt, mert ne lenne rá elég nyersanyag, és az algoritmus végeredménye közel esik az optimumhoz: nagyobb lesz, mint $(1 - 3\varepsilon)\text{OPT}$.

Legyen az OLA által visszaadott eredmény az eddigi jelölést követve x_t , és jelöljük a ξ esemény indikátorfüggvényét $I(\xi)$ -vel.

Az algoritmus tulajdonságai miatt tudjuk, hogy:

$$\sum_{t=1}^n a_{it} x_t(\hat{p}) \leq b_i \implies x_t = x_t(\hat{p}) ,$$

Valamint, hogy:

$$\sum_{t=1}^n a_{it} x_t \leq \sum_{t=1}^n a_{it} x_t(\hat{p})$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\sum_{t=s+1}^n \pi_t x_t \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^n \pi_t x_t - \sum_{t=1}^s \pi_t x_t \right] \\
&\geq \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^n \pi_t x_t(\hat{p}) I(\xi) \right] - \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^s \pi_t x_t(\hat{p}) \right] \\
&\geq (1 - 3\epsilon) P(\xi) \text{OPT} - \epsilon \text{OPT} \\
&\geq (1 - 3\epsilon)(1 - 2\epsilon) \text{OPT} - \epsilon \text{OPT} \\
&= (1 - 5\epsilon + 6\epsilon^2) \text{OPT} - \epsilon \text{OPT} \\
&\geq (1 - 6\epsilon) \text{OPT}
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk a tételt (1). □

5. Dinamikusan tanuló algoritmus (Dynamic Learning Algorithm, DLA)

A következőkben az Egyszer Tanuló Algoritmus egy továbbfejlesztését mutatom be: a Dinamikusan tanuló algoritmust (DLA). Most ahelyett, hogy az optimális duális megoldást csupán az ϵn . lépés után számolnánk ki, a $t = \epsilon n, 2\epsilon n, 4\epsilon n, 8\epsilon n \dots$ lépések után fogjuk (azaz összesen $\lceil \log_2(1/\epsilon) \rceil$ -szer). Ezzel elveszítjük az OLA azon előnyét, hogy csupán egy kis LP feladatot kellett rajta megoldani ϵn változón, de egy kevésbé szigorú alsó korlát is elég lesz a B -re ahhoz, hogy jól tudjuk közelíteni az optimumot.

Legyen $\epsilon = 2^{-E}$ és $L = \{\epsilon n, 2\epsilon n, 4\epsilon n, 8\epsilon n, \dots, 2^{E-1}\epsilon n\}$. Vegyük a következő LP feladatot:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{\ell} a_{it} x_t &\leq (1 - h_{\ell}) \cdot \frac{\ell}{n} \cdot b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
0 &\leq x_t \leq 1, \quad t = 1, \dots, \ell \\
\max \quad &\sum_{t=1}^{\ell} \pi_t x_t
\end{aligned} \tag{7}$$

Ennek a duálisa a következő:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m a_{it} p_i + y_t &\geq \pi_t, \quad t = 1, \dots, \ell \\
p_i, y_t &\geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, \ell \\
\min \quad &\sum_{i=1}^m (1 - h_{\ell}) \frac{\ell}{n} b_i p_i + \sum_{t=1}^{\ell} y_t
\end{aligned} \tag{8}$$

Ahol

$$h_{\ell} = \epsilon \sqrt{\frac{n}{\ell}}$$

Jelöljük $\hat{x}^\ell$, $\hat{p}^\ell$ és $\hat{y}^\ell$ -el ennek egy optimális megoldását. Emellett az előző algoritmushoz hasonlóan tetszőleges p vektorra definiáljuk a következő függvényt:

$$x_t(p) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \pi_t > p^T a_t \\ 0 & \text{ha } \pi_t \leq p^T a_t \end{cases}$$

5.1. Feltevések

Az első 3 feltevésünk ugyanaz lesz mint korábban, a negyedik pedig a következő képpen módosul:

- **1.feltevés:** Az (a_i, π_i) ajánlatok véletlen sorrendben érkeznek. Ez alatt azt értjük, hogy az ajánlatok halmaza adott, képzelhetjük róla azt, hogy valamilyen eloszlásból származik, esetleg egy „ellenség” által választott, akinek a célja, hogy a lehető legkisebb profitra tegyünk szert. Az ajánlatok érkezési sorrendjébe viszont még neki sincs beleszólása: minden permutáció egyforma valószínűséggel fordulhat elő.
- **2.feltevés:** n egy előre megadott szám.
- **3.feltevés:** Az ajánlatok „általános pozícióban” vannak. Ez alatt azt értjük, hogy tetszőleges p vektorra teljesül, hogy legfeljebb m olyan ajánlat létezik, amelyre $p^T a_t = \pi_t$
- **4.feltevés:**

$$B = \min_i b_i \geq \frac{10m \log(n/\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

5.2. Az algoritmus

1. legyen $t_0 = \varepsilon n$. Minden $t \leq t_0$ -ra $x_t = 0$
2. Ezután sorban $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ -re:
 - a) Legyen $\hat{x}_t = x_t(\hat{p}^\ell)$ ahol $\ell = 2^r \varepsilon n$ és r a lehető legnagyobb olyan pozitív egész szám, amelyre $\ell < t$.
 - b) Ha $a_{it} \hat{x}_t \leq b_i - \sum_{j=1}^{t-1} a_{ij} x_j$ minden i -re, akkor legyen $x_t = \hat{x}_t$, különben legyen $x_t = 0$.

Az algoritmus eredménye az x_t .

5.3. A versenyképességi hányados elemzése

6. tétel. *A fenti feltevések mellett tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra a Dinamikus Tanuló Algoritmus $1 - \mathcal{O}(\varepsilon)$ versenyképes.*

A bizonyítás sokban hasonlítani fog az Egyszer Tanuló Algoritmusnál leírtakhoz. A következő lemmákat fogjuk belátni a megfelelő sorrendben:

- **7. lemma:** Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra:

$$P \left(\sum_{t=\ell+1}^{2\ell} a_{it} x_t(\hat{p}^\ell) \leq \frac{\ell}{n} \cdot b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \ell \in L \right) \geq 1 - \varepsilon$$

• **8. lemma:**

$$P \left(\sum_{t=1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) \geq (1 - 2h_\ell - \varepsilon) \text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} \cdot b_i \right) \quad \forall \ell \in L \right) \geq 1 - \varepsilon$$

• **9. lemma:** Tetszőleges l -re:

$$\mathbb{E} \left[\text{OPT}_\ell \left(\frac{\ell}{n} b \right) \right] \leq \frac{\ell}{n} \cdot \text{OPT}$$

7. lemma. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra:

$$P \left(\sum_{t=l+1}^{2\ell} a_{it} x_t(\hat{p}^\ell) \leq \frac{\ell}{n} \cdot b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \ell \in L \right) \geq 1 - \varepsilon$$

Bizonyítás. A bizonyítás sokban hasonlítani fog a 3. lemmára. Fixáljuk le p -t i -t és ℓ -et.

Definíció: Azt mondjuk, hogy egy permutáció rossz a p, i, ℓ hármásra akkor és csak akkor, ha $p = \hat{p}^\ell$ (azaz p optimális megoldása a (8)-as LP feladatnak) de:

$$\sum_{t=\ell+1}^{2\ell} a_{it} x_t(p) > \frac{\ell}{n} \cdot b_i$$

Legyen $Y_t = a_{it} x_t(p)$. Ha $p = \hat{p}^\ell$ akkor tudjuk, hogy:

$$\sum_{t=1}^{\ell} Y_t = \sum_{t=1}^{\ell} a_{it} x_t(\hat{p}^\ell) \leq \sum_{t=1}^{\ell} a_{it} \hat{x}_t^\ell \leq (1 - h_\ell) \frac{\ell}{n} b_i$$

ahol $\hat{x}^\ell$ optimális primál megoldása a (7)-es LP feladatnak.

Az első egyenlőség egyszerűen Y definíciójából következik. Ezután az első egyenlőtlenségnél a 2.Lemmát használjuk, és azt a megfigyelést, hogy $\hat{p}^\ell$ és $\hat{x}^\ell$ optimális megoldásai a (7), (8)-as LP feladatnak. Az utolsó egyenlőtlenségnél egyszerűen azt használjuk, hogy $\hat{x}^\ell$ egy megoldása a (7)-es LP feladatnak, azaz kielégíti annak feltételeit.

Ennek segítségével becsüljük a rossz permutáció valószínűségét (az egyszerűség kedvéért az i -ket ne írjuk ki):

$$\begin{aligned} & P \left(p = \hat{p}^\ell, \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} Y_t \geq \frac{b\ell}{n} \right) \\ & \leq P \left(\sum_{t=1}^{\ell} Y_t \leq (1 - h_\ell) \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} Y_t \geq \frac{b\ell}{n} \right) \\ & \leq P \left(\sum_{t=1}^{\ell} Y_t \leq (1 - h_\ell) \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} Y_t \geq \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \geq \frac{2b\ell}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +P \left(\sum_{t=1}^{\ell} Y_t \leq (1-h_{\ell}) \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} Y_t \geq \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \leq \frac{2b\ell}{n} \right) \\
& \leq P \left(\sum_{t=1}^{\ell} Y_t \leq (1-h_{\ell}) \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \geq \frac{2b\ell}{n} \right) \\
& +P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Y_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \right| \geq \frac{h_{\ell}}{2} \cdot \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \leq \frac{2b\ell}{n} \right)
\end{aligned}$$

Itt az utolsó egyenlőtlenségnél a következőt használtuk:

$$\left| \sum_{t=1}^{\ell} Y_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{t=1}^{\ell} Y_t - \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} Y_t \right|$$

Mivel

$$\sum_{t=1}^{\ell} Y_t \leq \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} Y_t,$$

ezért

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left| \sum_{t=1}^{\ell} Y_t - \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} Y_t \right| &= \frac{1}{2} \left(\sum_{t=\ell+1}^{2\ell} Y_t - \sum_{t=1}^{\ell} Y_t \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\frac{b\ell}{n} - (1-h_{\ell}) \frac{b\ell}{n} \right) = \frac{h_{\ell}}{2} \cdot \frac{b\ell}{n}
\end{aligned}$$

A bizonyítás menete ezután a következő lesz:

- **1. lépés:** Belátjuk, hogy:

$$P \left(\sum_{t=1}^{\ell} Y_t \leq (1-h_{\ell}) \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \geq \frac{2b\ell}{n} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot m \cdot n^m \cdot E}$$

- **2. lépés:** Bebizonyítjuk, hogy

$$P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Y_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \right| \geq \frac{h_{\ell}}{2} \cdot \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \leq \frac{2b\ell}{n} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot m \cdot n^m \cdot E}$$

- **3. lépés:** Az előző kettő segítségével belátjuk a lemmát.

- 1. lépés:** Legyen

$$Z_t = \frac{2 \cdot b \cdot l}{n} \cdot \frac{Y_t}{\sum_{t=1}^{2\ell} Y_t}$$

Ekkor:

$$\begin{aligned}
& P \left(\sum_{t=1}^{\ell} Y_t \leq (1-h_{\ell}) \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \geq \frac{2b\ell}{n} \right) \\
& \leq P \left(\sum_{t=1}^{\ell} Z_t \leq (1-h_{\ell}) \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = \frac{2b\ell}{n} \right) \\
& \leq P \left(\sum_{t=1}^{\ell} Z_t \leq (1-h_{\ell}) \frac{b\ell}{n} \mid \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = \frac{2b\ell}{n} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Z_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t \right| \geq h_{\ell} \frac{b\ell}{n} \left| \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = \frac{2b\ell}{n} \right. \right)$$

Használjuk a Hoeffding-Bernstein egyenlőtlenséget:

Megfeleltetés:

- $\{c_1, c_2, \dots, c_R\} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{2\ell}\}$
- $R = 2\ell$
- $r = \ell$
- $t = h_{\ell} \frac{b\ell}{n}$
- $\Delta_R \leq 1$ (mert $Z_t \leq Y_t$)
- $\sigma_R^2 \leq \frac{2b\ell}{n} \cdot \frac{1}{2\ell} = \frac{b}{n}$

Amelyből az utolsó a következő miatt igaz:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{2\ell} (Z_t - \bar{Z})^2 &= \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t^2 - \sum_{t=1}^{2\ell} 2Z_t \bar{Z} + N \bar{Z}^2 \\ &= \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t^2 - 2\bar{Z} N \cdot \bar{Z} + N \bar{Z}^2 \\ &\leq \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t^2 \leq \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = \frac{2b\ell}{n} \end{aligned}$$

Ezt használva:

$$\begin{aligned} &P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Z_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t \right| \geq h_{\ell} \frac{b\ell}{n} \left| \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = \frac{2b\ell}{n} \right. \right) \\ &\leq 2 \exp \left(-\frac{h_{\ell}^2 \cdot \frac{b^2 \ell^2}{n^2}}{2\ell \frac{b}{n} + h_{\ell} \frac{b\ell}{n}} \right) = 2 \exp \left(-\frac{h_{\ell}^2 \frac{b\ell}{n}}{2 + h_{\ell}} \right) = 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 \frac{2n}{\ell} \frac{b\ell}{n}}{2 + h_{\ell}} \right) \\ &= 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 b}{2 + h_{\ell}} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 \frac{10m \log(n/\varepsilon)}{\varepsilon^2}}{2 + h_{\ell}} \right) = 2 \exp \left(-\frac{10m \log(n/\varepsilon)}{2 + h_{\ell}} \right) \\ &= 2 \exp \left(-\log \left(\frac{n}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{10m}{2 + h_{\ell}} \right) = 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{\frac{10m}{2+h_{\ell}}} \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^m \end{aligned}$$

Be kéne látnunk, hogy

$$2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^m \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot m \cdot n^m \cdot E}$$

Egyszerűsítve:

$$\varepsilon^{m-1} \leq \frac{1}{4m \cdot E}$$

Mivel $E \geq 1$ és m előre ismert, ezért tudjuk úgy választani az ε -t, hogy ez teljesüljön, vagyis hogy:

$$\varepsilon^{m-1} \leq \frac{1}{4m}$$

igaz legyen.

2. lépés:

$$\begin{aligned}
& P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Y_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \right| \geq \frac{h_\ell}{2} \cdot \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \leq \frac{2b\ell}{n} \right) \\
& \leq P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Z_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t \right| \geq \frac{h_\ell}{2} \cdot \frac{b\ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = \frac{2b\ell}{n} \right) \\
& \leq P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Z_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t \right| \geq \frac{h_\ell}{2} \cdot \frac{b\ell}{n} \mid \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = \frac{2b\ell}{n} \right)
\end{aligned}$$

Megint szükségünk lesz a Hoeffding-Bernstein egyenlőtlenségre, az egyetlen különbség a megfeleltetésben t értéke lesz:

$$t = \frac{h_\ell}{2} \frac{b\ell}{n}$$

Vagyis a következő becslést kaptuk:

$$\begin{aligned}
& P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Z_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t \right| \geq \frac{h_\ell}{2} \cdot \frac{b\ell}{n} \mid \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = \frac{2b\ell}{n} \right) \\
& \leq 2 \exp \left(-\frac{\frac{h_\ell^2}{2^2} \cdot \frac{b^2 \ell^2}{n^2}}{2\ell \frac{b}{n} + \frac{h_\ell}{2} \frac{b\ell}{n}} \right) = 2 \exp \left(-\frac{h_\ell^2 \frac{b\ell}{n}}{8 + 2h_\ell} \right)
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a számlálónk ugyanaz, mint az előző lépésben. Az ottani számolásokat követve azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
& 2 \exp \left(-\frac{h_\ell^2 \frac{b\ell}{n}}{8 + 2h_\ell} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{10m \log(n/\varepsilon)}{8 + 2h_\ell} \right) \\
& = 2 \exp \left(-\log \left(\frac{n}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{10m}{8 + 2h_\ell} \right) = 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{\frac{10m}{8+2h_\ell}} \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^m
\end{aligned}$$

Ezen a ponton az 1. lépés megoldását követve készen vagyunk.

3. lépés:

Az eddigiek alapján tudjuk, hogy fix p -re i -re és ℓ -re a rossz permutáció valószínűsége kisebb, mint

$$\frac{\varepsilon}{m \cdot n^m \cdot E}$$

A szokásos trükköt alkalmazzuk: lényegesen különböző árvektorból n^m különböző van, i csupán m , ℓ pedig E féle lehet. Ezekkel az értékekkel felszorozva azt kapjuk, hogy a rossz permutációk valószínűsége $\leq \varepsilon$, amiből már következik a lemma állítása. □

8. lemma.

$$P \left(\sum_{t=1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) \geq (1 - 2h_\ell - \varepsilon) OPT_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} \cdot b_i \right) \quad \forall \ell \in L \right) \geq 1 - \varepsilon$$

Bizonyítás. Vezessünk be néhány új jelölést: Lenyen $LP_s(d)$:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^s a_{it}x_t &\leq d_i, \quad i = 1, \dots, m \\ 0 &\leq x_t \leq 1, \quad j = 1, \dots, s \\ \max \sum_{t=1}^s \pi_t x_t \end{aligned} \tag{9}$$

az optimumát pedig jelöljük $OPT_s(d)$ -vel. Emellett legyen:

$$\hat{b}_i = \begin{cases} \sum_{t=1}^{2\ell} a_{it}x_t(\hat{p}^\ell) & \text{ha } \hat{p}_i^\ell > 0 \\ \max\{\sum_{t=1}^{2\ell} a_{it}x_t(\hat{p}^\ell), \frac{2\ell}{n}b_i\} & \text{ha } \hat{p}_i^\ell = 0 \end{cases}$$

Végül pedig legyen:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t^{2\ell} &= \max \left\{ \pi_t - \sum_{i=1}^m a_{it}\hat{p}_i, 0 \right\} \\ \hat{y}^{2\ell} &= \{\hat{y}_t^{2\ell}\}_{t=1}^{2\ell} \end{aligned}$$

Állítás: $\{x_t(\hat{p}^\ell)\}_{t=1}^{2\ell}$ és $(\hat{p}^\ell, \hat{y}^{2\ell})$ optimális duál és primál megoldásai $LP_{2\ell}(\hat{b})$ -nak.

Bizonyítás. Be fogjuk látni, hogy $\{x_t(\hat{p}^\ell)\}_{t=1}^{2\ell}$ és $(\hat{p}^\ell, \hat{y}^{2\ell})$ teljesítik az optimalitási feltételeket. $LP_{2\ell}(\hat{b})$ a következőképp néz ki:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{2\ell} a_{it}x_t &\leq \hat{b}_i, \quad i = 1, \dots, m \\ 0 &\leq x_t \leq 1, \quad t = 1, \dots, 2\ell \\ \max \sum_{t=1}^{2\ell} \pi_t x_t \end{aligned} \tag{10}$$

1.feltétel:

$$\hat{p}_i^\ell > 0 \implies \sum_{t=1}^{2\ell} a_{it}x_t = \hat{b}_i,$$

Ez egyszerűen következik $\hat{b}_i$ definíciójából.

2.feltétel:

$$\hat{y}_t^{2\ell} > 0 \implies x_t(\hat{p}^\ell) = 1$$

Ez azért igaz, mert:

$$\hat{y}_t^{2\ell} > 0 \iff \pi_t - \sum_{i=1}^m a_{it}\hat{p}_i^\ell > 0 \iff \pi_t > \sum_{i=1}^m a_{it}\hat{p}_i^\ell \iff x_t(\hat{p}^\ell) = 1$$

3.feltétel:

$$x_t(\hat{p}^\ell) > 0 \implies \pi_t = \sum_{i=1}^m a_{it} \hat{p}_i^\ell + \hat{y}_t^{2\ell}$$

Ez a feltétel következik az előző feltétel bizonyításából és $\hat{y}^{2\ell}$ definíciójából. □

Ebből következik, hogy:

$$\sum_{t=1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) = \text{OPT}_{2\ell}(\hat{b}) \geq \left(\min_i \frac{\hat{b}_i}{b_i((2\ell)/n)} \right) \text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b \right)$$

Mennyi lehet a minimuma a $\frac{\hat{b}_i}{b_i((2\ell)/n)}$ kifejezésnek?

Ha $\hat{p}_i^\ell = 0$, akkor $\hat{b}_i$ definíciójából adódik, hogy az arányuk ≥ 1 .

Állítás: Ha $\hat{p}_i^\ell > 0$, akkor $\forall i$ -re:

$$P \left(\hat{b}_i = \sum_{t=1}^{2\ell} a_{it} x_t(\hat{p}^\ell) \geq (1 - 2h_\ell - \varepsilon) \frac{2\ell}{n} b_i \right) \geq 1 - \varepsilon$$

Bizonyítás. Az előzőekhez hasonlóan fixáljuk le p -t i -t és ℓ -et.

Definíció: Azt mondjuk, hogy egy permutáció rossz a p, i, ℓ hármásra akkor és csak akkor, ha $p = \hat{p}^l$, $p_i > 0$ és

$$\sum_{t=1}^{2\ell} a_{it} x_t(p) \leq (1 - 2h_\ell - \varepsilon) \frac{2\ell}{n} b_i$$

Be fogjuk látni, hogy a rossz permutációk valószínűsége kicsi. A szokott módon legyen $Y_t = a_{it} x_t(p)$. Ekkor ha $p = \hat{p}^l$ és $p_i > 0$:

$$\sum_{t=1}^{\ell} Y_t = \sum_{t=1}^{\ell} a_{it} x_t(p) \geq (1 - h_\ell) \frac{\ell}{n} b_i - m$$

Itt felhasználtuk, hogy mivel $p = \hat{p}^l$:

$$p_i > 0 \implies \sum_{t=1}^{\ell} a_{it} \hat{x}_t^\ell = (1 - h_\ell) \frac{\ell}{n} b_i$$

ha x_t^ℓ optimális megoldása a (7)-nek. Ha ezután használjuk a 2. lemmát, megkapjuk a megfelelő egyenlőtlenséget. Ezt tovább becsülhetjük a következő módon:

$$(1 - h_\ell) \frac{\ell}{n} b_i - m \geq (1 - h_\ell - \varepsilon) \frac{\ell}{n} b_i$$

Ez igaz, hiszen tudjuk, hogy:

- $b_i \geq m/\varepsilon^2$ minden i -re
- $\ell \geq n\varepsilon$
- az előzőekből következik, hogy

$$m = \varepsilon \frac{n\varepsilon m}{n \varepsilon^2} \leq \varepsilon \frac{\ell}{n} b_i$$

Ekkor fix p, i, ℓ -re a rossz permutációk valószínűsége a következő módon becsülhető:

$$\begin{aligned}
& P \left(\sum_{t=1}^{\ell} Y_t \geq (1 - h_{\ell} - \varepsilon) \frac{\ell}{n} b_i, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \leq (1 - 2h_{\ell} - \varepsilon) \frac{2\ell}{n} b_i \right) \\
& \leq P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Y_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \right| \geq h_{\ell} \frac{b_i \ell}{n}, \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \leq (1 - 2h_{\ell} - \varepsilon) \frac{2\ell}{n} b_i \right) \\
& \leq P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Y_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \right| \geq h_{\ell} \frac{b_i \ell}{n} \left| \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t \leq (1 - 2h_{\ell} - \varepsilon) \frac{2\ell}{n} b_i \right. \right) \\
& \leq P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Z_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t \right| \geq h_{\ell} \frac{b_i \ell}{n} \left| \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = (1 - 2h_{\ell} - \varepsilon) \frac{2\ell}{n} b_i \right. \right)
\end{aligned}$$

Ahol a szokásos trükköt alkalmazva:

$$Z_t = \frac{(1 - 2h_{\ell} - \varepsilon) 2\ell b_i Y_t}{n \sum_{t=1}^{2\ell} Y_t}$$

(Itt kihasználjuk, hogy $Z_t \leq Y_t$ minden t -re.) Ezután szükségünk lesz a Hoeffding-Bernstein egyenlőtlenségre:

Megfeleltetés:

- $\{c_1, c_2, \dots, c_R\} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{2\ell}\}$
- $R = 2\ell$
- $r = \ell$
- $t = h_{\ell} \frac{b_i \ell}{n}$
- $\Delta_R \leq 1$ (mert $Z_t \leq Y_t$)
- $\sigma_R^2 \leq (1 - 2h_{\ell} - \varepsilon) \frac{b_i}{n}$

Amelyből az utolsó a következő miatt igaz:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{2\ell} (Z_t - \bar{Z})^2 &= \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t^2 - \sum_{t=1}^{2\ell} 2Z_t \bar{Z} + N \bar{Z}^2 \\
&= \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t^2 - 2\bar{Z} N \cdot \bar{Z} + N \bar{Z}^2 \\
&\leq \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t^2 \leq \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = (1 - 2h_{\ell} - \varepsilon) \frac{2\ell}{n} b_i
\end{aligned}$$

Ezek alapján a következő becslést kapjuk:

$$P \left(\left| \sum_{t=1}^{\ell} Z_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t \right| \geq h_{\ell} \frac{b_i \ell}{n} \left| \sum_{t=1}^{2\ell} Z_t = (1 - 2h_{\ell} - \varepsilon) \frac{2\ell}{n} b_i \right. \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \exp \left(-\frac{h_\ell^2 \frac{b_i^2 \ell^2}{n^2}}{2\ell \cdot (1 - 2h_\ell - \varepsilon) \frac{b_i}{n} + h_\ell \frac{b_i \ell}{n}} \right) = 2 \exp \left(-\frac{h_\ell^2 \frac{b_i \ell}{n}}{2 - 3h_\ell - 2\varepsilon} \right) \\
&= 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 b_i}{2 - 3 \cdot \varepsilon \sqrt{n/\ell} - 2\varepsilon} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 b_i}{2} \right)
\end{aligned}$$

Használjuk a 4. feltevést:

$$B = \min_i b_i \geq \frac{10m \log(n/\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

Ennek segítségével:

$$\begin{aligned}
2 \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 b_i}{2} \right) &\leq 2 \exp \left(-\frac{10m \log(n/\varepsilon)}{2} \right) \\
&= 2 \exp \left(-\log \left(\frac{n}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{10m}{2} \right) = 2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{5m}
\end{aligned}$$

Azt szeretnénk belátni, hogy megfelelő ε -ra teljesül a következő:

$$2 \left(\frac{\varepsilon}{n} \right)^{5m} \leq \frac{\varepsilon}{m \cdot n^m \cdot E}$$

Ehhez elég:

$$\varepsilon^{5m-1} \leq \frac{n^{4m}}{2 \cdot m \cdot E} \leq \frac{n^{4m}}{2 \cdot m \cdot n}$$

Tudjuk ε jól választani, hiszen n és m előre ismert. Ezek után már csak venni kell az n^m különböző p , m féle i és E darab ℓ értéket és azt kapjuk, hogy a rossz permutáció valószínűsége $\leq \varepsilon$. Ezzel beláttuk az állítást. $\square$

Vagyis azt kaptuk, hogy ha $\hat{p}_i^\ell = 0$, akkor :

$$\sum_{t=1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) = \text{OPT}_{2\ell}(\hat{b}) \geq \text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b_i \right)$$

Ha pedig $\hat{p}_i^\ell > 0$, akkor $\forall i$ -re:

$$\begin{aligned}
P \left(\hat{b}_i = \sum_{t=1}^{2\ell} a_{it} x_t(\hat{p}^\ell) \geq (1 - 2h_\ell - \varepsilon) \frac{2\ell}{n} b_i \right) &\geq 1 - \varepsilon \\
\implies P \left(\min_i \frac{\hat{b}_i}{b_i((2\ell)/n)} \geq (1 - 2h_\ell - \varepsilon) \right) &\geq 1 - \varepsilon \\
\implies P \left(\sum_{t=1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) \geq (1 - 2h_\ell - \varepsilon) \text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} \cdot b \right) \right) &\geq 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

Ezt akartuk belátni. $\square$

9. lemma. *Tetszőleges l -re:*

$$\mathbb{E} \left[\text{OPT}_\ell \left(\frac{\ell}{n} b \right) \right] \leq \frac{\ell}{n} \cdot \text{OPT}$$

Bizonyítás. Legyen $\text{LP}_\ell\left(\frac{\ell}{n}b\right)$ optimális megoldása x', p', y' , az (1)-es és (2)-es LP feladatoké pedig a szokásos jelölést használva x^*, p^*, y^* .

Könnyű látni, hogy p^* és y^* (megfelelő koordinátái) egy megengedett megoldását adják $\text{LP}_\ell\left(\frac{\ell}{n}b\right)$ -nek, vagyis:

$$\text{OPT}_\ell\left(\frac{\ell}{n}b\right) \leq \sum_{i=1}^m \frac{\ell}{n} b_i p^* + \sum_{t=1}^{\ell} y^* \leq \frac{\ell}{n} b^T p^* + \sum_{t=1}^{\ell} y^*$$

Ennek segítségével pedig már be tudjuk látni a lemmát, ugyanis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_\ell\left(\frac{\ell}{n}b\right) \right] &\leq \frac{\ell}{n} b^T p^* + \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{\ell} y^* \right] \\ &= \frac{\ell}{n} b^T p^* + \frac{\ell}{n} \sum_{t \in N} y_t^* = \frac{\ell}{n} \left(b^T p^* + \sum_{t \in N} y_t^* \right) = \frac{\ell}{n} \cdot \text{OPT} \end{aligned}$$

□

Most már minden szükséges eszköz a rendelkezésünkre áll a 6-os tétel belátásához, vagyis hogy tetszőleges $\epsilon > 0$ -ra a Dinamikus Tanuló Algoritmus $1 - \mathcal{O}(\epsilon)$ versenyképes.

Bizonyítás. A 7. és 8. lemmákból tudjuk, hogy:

$$P \left(\sum_{t=\ell+1}^{2\ell} a_{it} x_t(\hat{p}^\ell) \leq \frac{\ell}{n} \cdot b_i \ \forall i, \sum_{t=1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) \geq (1 - 2h_\ell - \epsilon) \text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} \cdot b \right) \ \forall \ell \in L \right) \geq 1 - 2\epsilon$$

Jelöljük ezt az eseményt ξ -vel: $P(\xi) \geq (1 - 2\epsilon)$. Vizsgáljuk meg a DLA által adott x_t megoldást:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\ell \in L} \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} \pi_t x_t \right] \geq \mathbb{E} \left[\sum_{\ell \in L} \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) I(\xi) \right]$$

hiszen ha a ξ esemény bekövetkezik, akkor az algoritmus során x_t -t mindig $x_t(\hat{p}^\ell)$ -nek választjuk.

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\sum_{\ell \in L} \sum_{t=\ell+1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) I(\xi) \right] \\ &\geq \sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) I(\xi) \right] - \sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) I(\xi) \right] \end{aligned}$$

Ezt a 8. lemma segítségével a következőképp becsülhetjük tovább:

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{2\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) I(\xi) \right] - \sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{\ell} \pi_t x_t(\hat{p}^\ell) I(\xi) \right] \\ &\geq \sum_{\ell \in L} (1 - 2h_\ell - \epsilon) \mathbb{E} \left[\text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b \right) I(\xi) \right] - \sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_\ell \left(\frac{\ell}{n} b \right) I(\xi) \right] \end{aligned}$$

Itt a második tagnál használtuk a 7. lemma állítását (amiatt nézhetjük az optimumot $\frac{\ell}{n}b$ -ig). Bontsuk ki a zárójelket, és rendezzük át a tagok sorrendjét:

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b \right) I(\xi) \right] - \sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_{\ell} \left(\frac{\ell}{n} b \right) I(\xi) \right] \\
&- \sum_{\ell \in L} 2h_{\ell} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b \right) I(\xi) \right] - \varepsilon \sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b \right) I(\xi) \right]
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az első két tagból egy csomó elem kiejti egymást, és a következő marad:

$$\begin{aligned}
&\geq P(\xi) \cdot \text{OPT} - \mathbb{E} [\text{OPT}_{\varepsilon n}(\varepsilon b) I(\xi)] \\
&- \varepsilon \sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b \right) I(\xi) \right] - \sum_{\ell \in L} 2h_{\ell} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b \right) I(\xi) \right]
\end{aligned}$$

Minden kivonandó tagot becsülhetünk felülről azzal, ha elhagyjuk belőle az $I(\xi)$ -t:

$$\begin{aligned}
&\geq (1 - 2\varepsilon) \text{OPT} - \mathbb{E} [\text{OPT}_{\varepsilon n}(\varepsilon b)] \\
&- \varepsilon \sum_{\ell \in L} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b \right) \right] - \sum_{\ell \in L} 2h_{\ell} \mathbb{E} \left[\text{OPT}_{2\ell} \left(\frac{2\ell}{n} b \right) \right]
\end{aligned}$$

Ezután használjuk a 9. lemmát:

$$\begin{aligned}
&\geq (1 - 2\varepsilon) \text{OPT} - \varepsilon \text{OPT} - 2\varepsilon \sum_{\ell \in L} \frac{\ell}{n} \text{OPT} - 4 \sum_{\ell \in L} \frac{h_{\ell} \ell}{n} \text{OPT} \\
&\geq (1 - 2\varepsilon) \text{OPT} - \varepsilon \text{OPT} - 2\varepsilon(1 - \varepsilon) \text{OPT} - 4(5/2 \cdot \varepsilon) \text{OPT} \\
&= (1 - 15\varepsilon + 2\varepsilon^2) \text{OPT} \geq (1 - 15\varepsilon) \text{OPT}.
\end{aligned}$$

Itt az utolsó előtti lépésnél a következő becsléseket használtuk:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell \in L} \frac{\ell}{n} = (1 - \varepsilon) \\
&\sum_{\ell \in L} h_{\ell} \frac{\ell}{n} = \sum_{\ell \in L} \varepsilon \sqrt{\frac{n}{\ell}} \cdot \frac{\ell}{n} = \varepsilon \sum_{\ell \in L} \sqrt{\frac{\ell}{n}} \leq 2,5\varepsilon
\end{aligned}$$

□

Hivatkozások

- [1] Shipra Agrawal, Zizhuo Wang, and Yinyu Ye. A dynamic near-optimal algorithm for online linear programming. *Operations Research*, 62(4):876–890, 2014.
- [2] Moshe Babaioff, Nicole Immorlica, David Kempe, and Robert Kleinberg. Online auctions and generalized secretary problems. *ACM SIGecom Exchanges*, 7(2):1–11, 2008.
- [3] Kristóf Bérczi, Vasilis Livanos, José Soto, and Victor Verdugo. Matroid secretary via labeling schemes. *arXiv preprint arXiv:2411.12069*, 2024.
- [4] PR Freeman. The secretary problem and its extensions: A review. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, pages 189–206, 1983.
- [5] Anupam Gupta and Sahil Singla. Random-order models., 2020.
- [6] Peter Orlik and Hiroaki Terao. *Arrangements of Hyperplanes*, volume 300. Springer Science & Business Media, 1992.
- [7] Aad W Van Der Vaart, Jon A Wellner, Aad W van der Vaart, and Jon A Wellner. *Weak convergence*. Springer, 1996.

Alulírott Móricz Réka Anna nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
LaTeX matematikai képletek generálása	Claude 3.7 Sonnet, GPT-4o	Néhány képlet a 4. és 5. fejezetben, amelyek az [1]-es cikkben is szerepeltek	
Ezen táblázat elkészítése	GPT-4o		
Nyelvhelyesség ellenőrzése	Gemini 2.5 Pro Preview 05-06	Teljes dolgozat	

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.