

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Portfólió optimalizáció Wasserstein gömbben

Szakdolgozat
Biztosítási és Pénzügyi Matematika MSc
Kvantitatív Pénzügyek szakirány

Készítette:
TIDERENCZL DÁNIEL

Témavezető:
DR. MICHALETZKY GYÖRGY
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Budapest, 2025

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. A probléma előkészítése	6
2.1. Optimális szállítás	6
2.2. Wasserstein távolság és kopula	10
2.3. Torzított kockázati mérték	12
2.4. A portfólió optimalizálási probléma	14
3. A 2-Wasserstein korlát megválasztása	15
3.1. Konvex optimalizáció	16
3.2. Eltérés a viszonyítási stratégiától	19
4. Kvantilisfüggvények feletti optimalizáció	26
5. Szimuláció	44
5.1. Piacmodell	44
5.2. Paraméterek a szimulációhoz	45
5.3. Szimuláció menete	45
5.4. Torzított kockázati mérték választása	46
5.5. Kopula választása	50
5.6. Paraméterek változtatása	55
6. Összefoglalás	57

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Michaletzky György Tanár Úrnak, aki ezt a rendkívül érdekes témát javasolta nekem a szakdolgozatom megírásához. A munkám előrehaladását jelentősen megkönnyítette a konzultációk során adott útmutatásaival. A mélyebb tudást igénylő elméleti részeket pedig sokszor a Tanár Úr saját bizonyítási ötletei és magyarázatai segítségével sikerült megértenem.

Ezen kívül nagyon hálás vagyok a szüleimnek, akik az egyetemen eltöltött éveim során végig támogattak, és lehetőséget biztosítottak számomra a tanulmányaim folytatásához.

1. Bevezetés

Egy portfólió összeállítása során a befektetőnek a legfőbb célja, hogy a várható hozamát maximalizálja a lehető legkisebb kockázat mellett. A megfelelő portfólió összeállításához jó viszonyítási alapot nyújthatnak az adott tőzsdék indexei. Magyarországon például a BUX a legismertebb tőzsdeindex, míg az USA-ban az S&P500, a DJIA és a Nasdaq. Azonban a befektetők általában nem szeretnék velük teljesen azonos befektetési stratégiát választani, mert az ezekkel elérhető maximális nyereség és a mellé társuló kockázat nem feltétlenül egyezik az ő preferenciáikkal. Az eszközök megfelelő súlyozásával jobb várható hozam-kockázat szerkezetet is elő tudnak állítani. De azt sem szeretnék, hogy túlságosan eltérjenek a viszonyítási stratégiától, hiszen az a legtöbb esetben kis kockázatot hordoz és jól teljesít a piacon. A szakdolgozat azt a témát járja körül, hogy miként lehet egy megválasztott kockázati mértéket minimalizálni úgy, hogy közben a stratégia kezdeti költsége ne legyen nagyobb, mint a viszonyítási stratégiáé, miközben végső kifizetése kellően közel legyen hozzá és egy előre meghatározott összefüggőségi struktúrát alkosson vele. A kockázat megragadásának sokféle módja van. A legegyszerűbb manapság gyakori megközelítése a VaR, CVaR és ES (várható alsóági veszteség) alapú modelleken keresztül történik. A portfólió optimalizálásához viszont pontosabb eredmény érhető el bizonyos torzított kockázati mértékek használatával. Ezeket részletesen tárgyalják Jan Dhaene és szerzőtársai [3] művükben, de a téma szempontjából lényeges részeket én is feldolgozom a 2. fejezetben. Az összefüggőségi struktúrát a kopulák fogják biztosítani, míg a viszonyítási stratégiához való közelséget a Wasserstein-metrika szerint mérjük. Ez a metrika illeszkedik ugyanis a legjobban az optimalizációhoz nélkülözhetetlen kvantilisfüggvények összehasonlításához. A Wasserstein-távolság bevezetéséhez az optimális szállítás problémáján keresztül juthatunk el. Erről átfogó képet nyújthat Matthew Thrope [2] könyve, de a fontosabb lépéseket a 2. fejezet elején ismertetem. A szakdolgozat túlnyomó részét a 3. és 4. fejezet teszi ki, amelyekben Silvana M. Pesenti és Sebastian Jaimungal [1] cikke alapján az optimalizációs problémát matematikai módszerekkel tárgyalom. A 3. fejezet arról szól, hogy miként válassza meg a befektető azt a korlátot, amelyen kívül nem akar lépni a viszonyítási stratégiához képest a Wasserstein-távolság szerint. Ehhez elengedhetetlen lesz néhány konvex optimalizációval kapcsolatos eredmény bemutatása. A 4. fejezetben pedig arról írok, hogy hogyan

fogalmazható át a probléma a kvantilisfüggvények feletti optimalizációra. Végül zárásként mutatok néhány példát arra, hogy miként befolyásolja konkrét kopulák illetve torzított kockázati mértékek választása a stratégia eltérését a viszonyítási stratégiától. Ennek szemléltetésére az elméleti háttéren alapuló python programnyelvben megírt szimuláció segítségével készített ábrákat is össze fogok hasonlítani.

2. A probléma előkészítése

Az optimalizáció során a $(\mathbb{P}, \Omega, \mathcal{F})$ teljes, filtrált valószínűségi mezőn vizsgálódunk, ahol $\mathcal{F}$ a természetes generált σ -algebra. A kockázatos eszközöket $(S_t^1, \dots, S_t^n)_{t \geq 0}$ -val, a sztochasztikus diszkontfaktort pedig $\varrho = (\varrho_t)_{t \geq 0}$ -val jelöljük. Utóbbiról feltesszük, hogy az eloszlásfüggvénye folytonos.

$$\mathcal{A} := \left\{ \boldsymbol{\pi} = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^n)_{t \in [0, T]} \mid \boldsymbol{\pi} \in L^2(\Omega[0, T]), \right. \\ \left. \boldsymbol{\pi} \text{ önfinanszírozó és előrejelezhető} \right\}.$$

Stratégiák ezen $\mathcal{A}$ halmazából választ a befektető egy π stratégiát, amelynek $X^\pi = (X_t^\pi)_{t \in [0, T]}$ kifizetés folyamata a következő sztochasztikus differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$dX_t^\pi = r_t X_t^\pi \sum_{i=1}^n (1 - \pi_t^i) dt + X_t^\pi \sum_{i=1}^n (1 - \pi_t^i) \frac{dS_t^i}{S_t^i}.$$

Vagyis összesen a portfóliónak $\sum_{i=1}^n \pi^i$ hányadát fekteti a befektető kockázatos eszközökbe.

2.1. Optimális szállítás

Jelölje $\mathcal{P}(X)$ az X téren értelmezett valószínűségi mértékek halmazát. A $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvényt költségfüggvénynek nevezzük, ahol $c(x, y)$ az egységnyi tömegnek $x \in X$ -ből $y \in Y$ -ba való szállítási költségét mutatja. A problémakör célja a c költség minimalizálása, miközben egy valószínűségi mértéket egy másikba szállítunk át.

2.1. Definíció. Az $M : X \rightarrow Y$ leképezésről azt mondjuk, hogy a $\mu \in \mathcal{P}(X)$ mértéket a $\lambda \in \mathcal{P}(Y)$ mértékbe szállítja (jelölésben: $\lambda = M * \mu$), ha minden λ -mérhető H halmazra

$$\mu(M^{-1}(H)) = \lambda(H).$$

Két híres formalizációja is van az optimális szállítási problémának. Ezek rendre Monge illetve Kantorovich nevéhez fűződnek. Nekünk a Wasserstein metrika szempontjából az utóbbi lesz hasznos, így mostantól azzal foglalkozunk.

A szállítási függvény gráfja egy mértéket indukál a szorzattéren úgy, hogy a marginálisok mértéke adott. Vagyis tetszőleges $A \subseteq X$ mérhető halmazból elszállított tömegnek $\mu(A)$ -val és tetszőleges $B \subseteq Y$ mérhető halmazba elszállított tömegnek $\lambda(B)$ -val kell megegyeznie, valamint

$$\nu(A \times Y) = \mu(A) \text{ és } \nu(X \times B) = \lambda(B).$$

Az ilyen tulajdonságú ν mértékek halmazát $\Gamma(\mu, \lambda)$ -vel jelöljük.

Kantorovich-féle optimális szállítási probléma:

Adott $\mu \in \mathcal{P}(X)$ és $\lambda \in \mathcal{P}(Y)$ mértékekre $\mathcal{K}(\nu)$ minimalizálása a cél $\nu \in \Gamma(\mu, \lambda)$ felett, ahol

$$\mathcal{K}(\nu) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\nu(x, y).$$

A probléma relevanciáját mutatja a következő 2.2 lemma, amelyet a terjedelmére való tekintettel bizonyítás nélkül közlünk. A lemma bizonyítása megtalálható Matthew Thrope [2] művében.

2.2. Lemma (Szállítási terv létezése). Az X és Y lengyel terekre (olyan terek, amelyek homeomorfak egy megszámlálható sűrű részhalmazzal rendelkező teljes metrikus térrel) legyen $\mu \in \mathcal{P}(X)$ és $\lambda \in \mathcal{P}(Y)$, valamint $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ alulról félig folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $\nu^* \in \Gamma(\mu, \lambda)$, ami minimalizálja $\mathcal{K}$ -t $\nu \in \Gamma(\mu, \lambda)$ felett.

Fő célunk a Wasserstein távolság definíciójának egyszerűsítése 1 dimenzióban, így az optimális szállítási feladatot 1 dimenzióban szeretnénk megoldani. Ehhez egy önmagában is érdekes lemmát fogunk felhasználni.

Legyen a $\mu, \lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mértékekhez tartozó eloszlásfüggvények rendre F és G , vagyis

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} d\mu = \mu((-\infty, x]).$$

Hasonlóan $G(x) = \lambda((-\infty, x])$. Ezentúl jelölje ezek kvantilisfüggvényeit rendre $\hat{F}$ illetve $\hat{G}$, tehát $x \in [0, 1]$ -re

$$\hat{F}(x) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) > x\} \text{ és } \hat{G}(x) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid G(t) > x\}.$$

2.3. Lemma. A $\mu, \lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mértékekhez legyen $\nu^* \in \Gamma(\mu, \lambda)$ egy optimális szállítási terv a $c(x, y) = h(x - y)$ költségfüggvénnyel, ahol h folytonos. Ekkor minden $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{supp}(\nu^*)$ -re

$$h(x_1 - y_2) + h(x_2 - y_1) \geq h(x_1 - y_1) + h(x_2 - y_2).$$

Ez a lemma segítséget nyújt a következő 2.4 tétel bizonyításában, amely kulcsfontosságú lesz a későbbiekben számunkra a 2-Wasserstein távolság bevezetéséhez. A 2.3 lemma bizonyítása [2]-ben olvasható.

2.4. Tétel. *A $\mu, \lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mértékekhez tartozó eloszlásfüggvények legyenek rendre F és G , valamint tegyük fel, hogy $c(x, y) = h(x - y)$ költségfüggvény, ahol h folytonos és konvex. A $J(x, y) = \min\{F(x), G(y)\}$ eloszlásfüggvényhez tartozó mérték $\mathbb{R}^2$ -en legyen $\tilde{\nu}$. Ekkor $\tilde{\nu} \in \Gamma(\mu, \lambda)$, $\tilde{\nu}$ optimális megoldás Kantorovich szállítási problémájára a c költségfüggvényrel, és*

$$\min_{\nu \in \Gamma(\mu, \lambda)} \mathcal{K}(\nu) = \int_0^1 h(\hat{F}(x) - \hat{G}(x)) dx.$$

Bizonyítás. A 2.2 lemma biztosítja egy $\nu^* \in \Gamma(\mu, \lambda)$ optimális szállítási terv létezését a Kantorovich-féle problémára. Azt fogjuk megmutatni, hogy $\tilde{\nu} = \nu^*$. A tétel első részének az igazolásához először feltesszük h -ről, hogy szigorúan konvex, majd határátmenet segítségével belátjuk, hogy a konvexség is elegendő. Kulcsfontosságú észrevétel a bizonyításhoz, hogy amennyiben h szigorúan konvex és $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \text{supp}(\nu^*)$ valamint $x_1 < x_2$ teljesül, akkor $y_1 \leq y_2$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $y_2 < y_1$. Az $a = x_1 - y_1$, $b = x_2 - y_2$ és $c = x_2 - x_1$ változókat bevezetve a 2.3 lemmából adódik, hogy

$$h(a + c) + h(b - c) \geq h(a) + h(b).$$

Célunk az, hogy h szigorú konvexitása révén a Jensen-egyenlőtlenség felhasználásával ellentmondásra jussunk, így a $b - c$ és $a + c$ kifejezéseket rendre a és b konvex kombinációjaként szeretnénk felírni. Tehát olyan $r \in (0, 1)$ számot keresünk, amellyel $b - c = ra + (1 - r)b$ és $a + c = (1 - r)a + rb$. Ezt az egyenletrendszert megoldva $r = \frac{c}{b-a}$, adódik, ami megfelelő, hiszen $x_1 < x_2$ és $y_2 < y_1$ miatt $\frac{c}{b-a} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - y_2 - x_1 + y_1} = \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1) + (y_1 - y_2)} \in (0, 1)$. Most már felírható a Jensen-egyenlőtlenség:

$$h(a + c) + h(b - c) < ((1 - r)h(a) + rh(b)) + (rh(a) + (1 - r)h(b)) = h(a) + h(b).$$

Ez azonban ellentmondás, tehát valóban $y_2 \geq y_1$.

Megmutatjuk, hogy $\min\{F(x), G(y)\} = \nu^*((-\infty, x] \times (-\infty, y])$. Ehhez hozzuk létre a $H = (-\infty, x] \times (y, \infty)$ és $K = (x, \infty) \times (-\infty, y]$ halmazokat. Azt szeretnénk igazolni, hogy $\nu^*(H)$ illetve $\nu^*(K)$ közül

legalább az egyik 0. Ekkor ugyanis

$$\begin{aligned} \min\{\nu^*(((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup H), \nu^*(((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup K)\} = \\ = \nu^*((-\infty, x] \times (-\infty, y]). \end{aligned}$$

Mivel $((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup H = (-\infty, x] \times \mathbb{R}$ illetve $((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup K = \mathbb{R} \times (-\infty, y]$, így a $\Gamma(\mu, \lambda)$ -beli mértékek tulajdonságai szerint

$$\nu^*(((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup H) = \mu((-\infty, x]) = F(x),$$

$$\nu^*(((-\infty, x] \times (-\infty, y]) \cup K) = \lambda((-\infty, y]) = G(y).$$

Ez igazolja, hogy $\min\{F(x), G(y)\} = \nu^*((-\infty, x] \times (-\infty, y])$ és $\tilde{\nu} = \nu^*$. Még meg kell mutatni, hogy $\nu^*(H)$ és $\nu^*(K)$ nem lehetnek egyszerre 0-tól különbözőek.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\nu^*(H) > 0$ és $\nu^*(K) > 0$. Az első feltevés azt jelenti, hogy egy pozitív ν -mértékű halmaza létezik az olyan $(x_1, y_1) \in \text{supp}(\nu^*)$ pontoknak, amelyekre $x_1 \leq x$ és $y_1 > y$. A második feltevés pedig azt jelenti, hogy egy pozitív ν -mértékű halmaza létezik az olyan $(x_2, y_2) \in \text{supp}(\nu^*)$ pontoknak, amelyekre $y_2 \leq y$ és $x_2 > x$. Az ilyen pontokra $x_1 < x_2$ és $y_2 < y_1$ teljesül, ami ellentmondás.

Most pedig nézzük azt az esetet, amikor h konvex. Ekkor a ν^* -szerinti integrálját egy szigorúan konvex függvény ν^* -szerinti integráljához szeretnénk alulról tartani. Ha a költségfüggvény konstans, akkor maga a szállítási probléma megoldása triviális. Ellenkező esetben, mivel h nemnegatív és konvex, így $\exists d \neq 0, e \in \mathbb{R}$, hogy $h(x) \geq \max\{dx + e, 0\}$. A $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(dx + e)^2 + 4} + \frac{1}{2}(dx + e)$ függvényre teljesül, hogy $0 \leq g(x) \leq 1 + h(x)$, és $d \neq 0$ miatt $g''(x) = \frac{2d^2}{((dx + e)^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} > 0$, így g

szigorúan konvex.

Ebben az esetben bármely $\varepsilon > 0$ -ra a $h_\varepsilon(x) = h(x) + \varepsilon g(x)$ függvény is szigorúan konvex, és

$$h(x) \leq h_\varepsilon(x) \leq \varepsilon + (1 + \varepsilon)h(x). \quad (1)$$

Ekkor tetszőleges $\nu \in \Gamma(\mu, \lambda)$ -ra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h(x - y) d\tilde{\nu}(x, y) &\leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h_\varepsilon(x - y) d\tilde{\nu}(x, y) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h_\varepsilon(x - y) d\nu(x, y) \leq \varepsilon + (1 + \varepsilon) \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h(x - y) d\nu(x, y), \end{aligned}$$

ahol a második egyenlőtlenségnél $\tilde{\nu}$ optimalitását, a többinél pedig az (1) egyenlőtlenséget használtuk fel. $\varepsilon \rightarrow 0$ esetén a bizonyítandó állítás adódik.

A tétel 2. részének a bizonyításához azt kellene megmutatni, hogy a ν^* mérték miként szállítható át az $\mathcal{L}$ Lebesgue-mértékbe.

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}((-\infty, x] \times (-\infty, y]) &= \min\{F(x), G(y)\} = \\ &= \mathcal{L}(\{t \in [0, 1] : F(t) \geq x, G(t) \geq y\}) = \\ &= \mathcal{L}\left(\left\{t \in [0, 1] : \hat{F}(t) \leq x, \hat{G}(t) \leq y\right\}\right) = \\ &= \mathcal{L}|_{[0,1]}\left(\left(\hat{F}(t), \hat{G}(t)\right)^{-1}((-\infty, x] \times (-\infty, y])\right) = \\ &= \left(\hat{F}(t), \hat{G}(t)\right) * \mathcal{L}|_{[0,1]}((-\infty, x] \times (-\infty, y]), \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{L}|_{[0,1]}(A) = \mathcal{L}(A \cap [0, 1])$. Vagyis $\tilde{\nu} = (\hat{F}, \hat{G}) * \mathcal{L}|_{[0,1]}$. Ezt az eredményt, majd a mértéktartó leképezések alaptételét felhasználva adódik, hogy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h(x - y) d\tilde{\nu}(x, y) &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} h(x - y) d\left((\hat{F}, \hat{G}) * \mathcal{L}|_{[0,1]}\right)(x, y) = \\ &= \int_0^1 h\left(\hat{F}(t) - \hat{G}(t)\right) dt. \end{aligned}$$

□

2.2. Wasserstein távolság és kopula

Most már rátérhetünk a Wasserstein távolság definiálására. Legyen k pozitív egész szám.

Azon valószínűségi mértékek $X \subset \mathbb{R}^d$ terén definiáljuk, amelyek k -adik momentuma véges, azaz

$$\mathcal{P}_k(X) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X \|x\|_k^k d\mu(x) < \infty \right\}.$$

2.5. *Megjegyzés.* Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ vektor k -normája

$$\|x\|_k = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^k \right)^{\frac{1}{k}}.$$

2.6. Definíció. A $\mu, \lambda \in \mathcal{P}_k(X)$ mértékek k -Wasserstein távolsága:

$$d_k\{\mu, \lambda\} := \min_{\nu \in \Gamma(\mu, \lambda)} \left(\int_{X \times X} \|x - y\|_k^k d\nu(x, y) \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Vagyis a k -Wasserstein távolság éppen a Kantorovich-féle szállítási probléma minimumának a k -edik gyöke, ahol a költségfüggvény $c(x, y) = \|x - y\|_k^k$.

Matthew Thrope [2]-ben belátta, hogy a k -Wasserstein távolság egy metrikát határoz meg $\mathcal{P}_k(X)$ -en.

Portfólió optimalizáláshoz a későbbiekben a 2-Wasserstein távolságot fogjuk használni, illetve feltesszük, hogy $X = \mathbb{R}$, hiszen valós értékű valószínűségi változókkal dolgozunk.

Mivel a $h(x) = x^2$ függvény folytonos és konvex, így a 2.4 tétel azonnali következménye, hogy a valós számegyenesről véve eloszlásokat a 2-Wasserstein távolság az alábbi egyszerűbb formában írható fel:

$$d_2\{\mu, \lambda\} := \left(\int_0^1 \left(\hat{F}(x) - \hat{G}(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Látható, hogy ez csakis a kvantilisfüggvényektől függ, így mostantól a $d_2\{\hat{F}, \hat{G}\}$ jelölést használjuk. Ha pedig a megfelelő valószínűségi változók 2-Wasserstein távolságát írjuk fel, akkor a $d_2(X, Y)$ jelölést alkalmazzuk.

Egy másik kulcsfontosságú eszköz az optimalizáláshoz a kopula lesz.

2.7. Definíció. A $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ leképezést d -dimenziós kopulának hívjuk, ha olyan d -dimenziós eloszlásfüggvény, amelynek a marginálisai egyenletes eloszlásúak.

Sklar jól ismert tétele szerint tetszőleges $(X_1, X_2, \dots, X_d)$ valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvénye kifejezhető a marginálisai és egy C kopula segítségével, mint

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_d \leq x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)).$$

A fordított irány is igaz: Ha adottak az $F_i(x)$ marginális eloszlásfüggvények és a $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ kopula, akkor $C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d))$ egy d -dimenziós eloszlásfüggvényt határoz meg $F_i(x)$ marginálisokkal.

2.3. Torzított kockázati mérték

A portfólió tulajdonosa egy rögzített $\rho \in \mathcal{A}$ viszonyítási stratégiához olyan $\pi \in \mathcal{A}$ stratégiát keres, amelynek kezdeti költsége nem haladja meg ρ kezdeti költségét, a végső X_T^π kifizetésfüggvénye és a viszonyítási stratégia X_T^ρ kifizetésfüggvénye közötti összefüggést a $C_{\pi,\rho}$ kopula írja le és a 2-Wasserstein távolságuk korlátos valamilyen $\varepsilon > 0$ számmal, azaz $d_2(X_T^\pi, X_T^\rho) \leq \varepsilon$. Ezen feltételek mellett kéne a végső kifizetésfüggvény kockázatát valamilyen értelemben minimalizálni. Ehhez bevezetjük a torzított kockázati mértékek fogalmát, amiket a pénzügyi világban gyakran használnak olyan befektetők reprezentálására, akik túlértékelik az alacsony, míg alulértékelik a magas valószínűséggel bekövetkező eseményeket.

2.8. Definíció. Egy $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvényt torzítási függvénynek nevezünk, ha nemcsökkenő, és $h(0) = 0$, $h(1) = 1$.

2.9. Definíció. Egy F_X eloszlásfüggvényű X valószínűségi változó baloldali általánosított inverzét a következőképpen definiáljuk: bármely $p \in [0, 1]$ -re $\hat{F}_X^+(p) := \sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq p\}$.

2.10. Definíció. A h torzítási függvény mellett a $\mathcal{D}_h$ torzított kockázati mérték egy olyan mérték a négyzetesen integrálható eloszlásfüggvények halmazán, hogy bármely $F_X \in L^2(\mathbb{P}, \Omega)$ -re

$$\mathcal{D}_h(F_X) = - \int_{-\infty}^0 1 - h(1 - F_X(x))dx + \int_0^{\infty} h(1 - F_X(x))dx,$$

amennyiben legalább az egyik integrál véges.

Nekünk elegendő lesz azzal az esettel foglalkozni, amikor a h torzítási függvény abszolút folytonos. Ilyenkor az eloszlásfüggvények torzított kockázati mértéke egyszerűbb alakot ölt. Ezt a következő 2.11 tételben be is látjuk.

2.11. Tétel. Amennyiben a h torzítási függvény abszolút folytonos, akkor a $\mathcal{D}_h(F_X)$ kockázati mérték az alábbi formában írható fel:

$$\mathcal{D}_h(F_X) = \int_0^1 \gamma(u) \hat{F}_X(u) du,$$

ahol $\gamma(u)$ a h függvény baloldali deriváltja az $1 - u$ helyen, és $\int_0^1 \gamma(u) du = 1$.

Bizonyítás. Mivel majdnem mindenütt $1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X \geq x)$, így a 2.10 definíció második tagja megegyezik az alábbi integrállal:

$$\int_0^\infty h(\mathbb{P}(X \geq x))dx.$$

Mivel h jobbról folytonos és $h(1) = 1$, így $h(\mathbb{P}(X \geq x))$ átírható az $\int_{(0, \mathbb{P}(X \geq x)]} dh(p)$ Lebesgue-Stieltjes integrállá. Vagyis

$$\int_0^\infty h(\mathbb{P}(X \geq x))dx = \int_0^\infty \int_{(0, \mathbb{P}(X \geq x)]} dh(p)dx.$$

Itt kihasználhatjuk, hogy

$$\mathbb{P}(X \geq x) \geq 1 - q \Leftrightarrow \mathbb{P}(X < x) \leq q \Leftrightarrow x \leq \hat{F}_X^+(q),$$

$$\text{vagyis } \mathbb{P}(X \geq x) \geq p \Leftrightarrow x \leq \hat{F}_X^+(1 - p).$$

Ezt az ekvivalenciát és a nemnegatív függvények integrálására használható Fubini-tételt alkalmazva:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{(0, \mathbb{P}(X \geq x)]} dh(p)dx &= \int_{(0, \mathbb{P}(X \geq x)]} dh(p) \int_0^{\hat{F}_X^+(1-p)} dx = \\ &= \int_{(0, \mathbb{P}(X \geq x)]} \hat{F}_X^+(1 - p)dh(p). \end{aligned}$$

Ugyanilyen lépésekkel adódik a 2.10 definíció első tagjára, hogy

$$- \int_{-\infty}^0 1 - h(1 - F_X(x))dx = \int_{(\mathbb{P}(X \geq x), 1]} \hat{F}_X^+(1 - p)dh(p).$$

Itt azt kellett kihasználni, hogy $1 - h(\mathbb{P}(X \geq x))$ előállítására Lebesgue-Sieltjes integrálként $\int_{(\mathbb{P}(X \geq x), 1]} dh(p)$.

A kapott két eredményt összerakva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{D}_h(F_X) = \int_{[0, 1]} \hat{F}_X^+(1 - p)dh(p).$$

Mivel h folytonos és $\hat{F}_X^+(1 - p)$ valamint $\hat{F}_X(1 - p)$ csak véges sok $p \in [0, 1]$ -re térhet el egymástól, így a kapott eredményben $\hat{F}_X^+(1 - p)$ helyettesíthető $\hat{F}_X(1 - p)$ -vel. E mellett h abszolút folytonossága miatt $dh(p) = h'(p)dp$. Ebből már következik a bizonyítandó állítás. $\square$

2.12. *Megjegyzés.* Ha az F_X eloszlásfüggvényhez tartozó X valószínűségi változóra írjuk fel a torzított kockázati mértéket, akkor a $\mathcal{D}_h[X]$ jelölést használjuk.

Lényeges megjegyezni, hogy sok esetben a pénzügyi világban a torzított kockázati mérték minimalizálására van szükség, és ilyenkor az eredeti definícióban szereplő képletben ellenkező előjelekkel definiálják azt. A mi esetünkben is ez a helyzet áll fenn, így a szakdolgozatban az X valószínűségi változó h torzítási függvényével adott torzított kockázati mértékét az alábbi képlettel határozzuk meg:

$$\mathcal{D}_h[X] = - \int_0^1 \gamma(u) \hat{F}_X(u) du,$$

ahol $\gamma(u)$ a h függvény baloldali deriváltja az $1 - u$ helyen, és $\int_0^1 \gamma(u) du = 1$.

2.4. A portfólió optimalizálási probléma

Jelöljük $\mathcal{H}^\rho$ -val azon $\mathcal{F}_T$ -mérhető négyzetesen integrálható valószínűségi változók halmazát, amelyeknek a viszonyítási stratégia X_T^ρ végső kifizetésfüggvényével való összefüggését a $C_{\pi,\rho}$ kopula határozza meg, azaz

$$\mathcal{H}^\rho := \{X \in L^2(\mathbb{P}, \Omega) : X \in \mathcal{F}_T \text{ és } (X, X_T^\rho)\text{-nek } C_{\pi,\rho} \text{ a kopulája}\}.$$

A befektetőnek a következő optimalizálási feladatot kell megoldania:

$$\inf_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{D}_h[X_T^\pi] \quad (\text{OPT})$$

úgy, hogy $X_T^\pi \in \mathcal{H}^\rho$, $E[\varrho_T X_T^\pi] \leq E[\varrho_T X_T^\rho] = X_0^\rho$ és $d_2(X_T^\pi, X_T^\rho) \leq \varepsilon$.

3. A 2-Wasserstein korlát megválasztása

Most térjünk rá arra, hogy miként érdemes a befektetőnek a 2-Wasserstein távolsághoz az ε korlátot megválasztania. Ehhez először bevezetünk néhány jelölést és definíciót.

Jelölje $\mathcal{Q}$ a négyzetesen integrálható kvantilisfüggvények halmazát, $\mathcal{Q}_\varepsilon$ pedig azon négyzetesen integrálható kvantilisfüggvények halmazát, amelyek 2-Wasserstein távolsága a viszonyítási stratégia kvantilisfüggvényétől legfeljebb ε , vagyis

$$\mathcal{Q}_\varepsilon := \left\{ q \in \mathcal{Q} \left| \int_0^1 \left(q(u) - \hat{F}_{X^\rho} \right)^2 du \leq \varepsilon^2 \right. \right\}.$$

3.1. Definíció. Egy $f \in L^2([0, 1])$ függvény izotonikus vetítését a négyzetesen integrálható kvantilisfüggvények halmazára $f^\perp$ -sel jelöljük, és a következő módon definiáljuk:

$$f^\perp := \arg \min_{q \in \mathcal{Q}} \int_0^1 (q(u) - f(u))^2 du.$$

Másképp megfogalmazva $f^\perp$ az a kvantilisfüggvény, amelynek L^2 -beli távolsága f -től minimális.

Először rögzített $\varepsilon > 0$ -ra definiáljuk a viszonyítási stratégiához tartozó kvantilisfüggvény ε -sugarú 2-Wasserstein gömbjében fekvő kvantilisfüggvények lehetséges legkisebb illetve legnagyobb várható értékét:

$$\underline{E} := \inf_{q \in \mathcal{Q}_\varepsilon} \int_0^1 q(x) dx \text{ és } \overline{E} := \sup_{q \in \mathcal{Q}_\varepsilon} \int_0^1 q(x) dx.$$

Majd pedig rögzített $E_0 \in [\underline{E}, \overline{E}]$ mellett definiáljuk a $\mathcal{Q}_\varepsilon$ -beli kvantilisfüggvények lehető legkisebb illetve legnagyobb szórását:

$$\underline{D} := \inf_{\substack{q \in \mathcal{Q}_\varepsilon \\ \int_0^1 q(x) dx = 1}} \left(\int_0^1 (q(x) - E_0)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ és}$$

$$\overline{D} := \sup_{\substack{q \in \mathcal{Q}_\varepsilon \\ \int_0^1 q(x) dx = 1}} \left(\int_0^1 (q(x) - E_0)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.1. Konvex optimalizáció

Most már hamarosan rátérhetünk arra a két tételre, amelyek segítségével nyújtanak a befektetőnek a 2-Wasserstein gömb ε sugarának megválasztásához. Előtte azonban ismertetünk egy konvex optimalizációs lemmát, amelyre támaszkodni fogunk a tételek bizonyítása során.

3.2. Lemma. Legyenek $f_0, f_1, \dots, f_n$ konvex, $h_1, \dots, h_m$ pedig lineáris funkcionálok a V vektortéren úgy, hogy $\exists g \in \text{int}V$, amire $f_i(g) < 0$, $i = 1, \dots, n$ és $h_j(g) = 0$, $j = 1, \dots, m$. Továbbá feltesszük, hogy az utóbbi m feltétel egyike sem hagyható el, vagyis az egyenlőséggel teljesülő korlátok nem fejezhetők ki egymás lineáris kombinációjából. Ekkor a

$$\min_{g \in V} f_0(g) \text{ feltéve, hogy } f_i(g) \leq 0, h_j(g) = 0, i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$$

feladat megoldásához elegendő a következő feladatot megoldani:

$$\sup_{\substack{\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, \\ \nu_1 \in \mathbb{R}, \dots, \nu_m \in \mathbb{R}}} G(\underline{\lambda}, \underline{\nu}), \text{ ahol } \underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_m)$$

$$\text{és } G(\underline{\lambda}, \underline{\nu}) = \inf_{g \in V} \left(f_0(g) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(g) + \sum_{j=1}^m \nu_j h_j(g) \right).$$

Bizonyítás. Jelöljük az eredeti feladat optimumát p^* -gal! Ha $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, akkor $\lambda_1 f_1(g) \leq 0, \dots, \lambda_n f_n(g) \leq 0$ azon g -re, amelyre a feltételek teljesülnek. Ezért $G(\underline{\lambda}, \underline{\nu}) \leq p^*$ és így

$$\sup_{\substack{\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, \\ \nu_1 \in \mathbb{R}, \dots, \nu_m \in \mathbb{R}}} G(\underline{\lambda}, \underline{\nu}) \leq p^*. \quad (1)$$

Definiáljuk a következő halmazokat:

$$\begin{aligned} A &:= \{(\underline{u}, \underline{v}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid \exists g \in V : f_i(g) \leq u_i, i = 1, \dots, n, \\ &\quad h_j(g) = v_j, j = 1, \dots, m, f_0(g) \leq t\} \text{ és} \\ B &:= \{(0, s) \in \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R} \mid s < p^*\}. \end{aligned}$$

$(\underline{u}^1, \underline{v}^1, t^1), (\underline{u}^2, \underline{v}^2, t^2) \in A$ és $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ esetén $\exists g_1, g_2$, hogy $f_i(g_1) \leq u_i^1, f_i(g_2) \leq u_i^2, h_j(g_1) = v_j^1, h_j(g_2) = v_j^2, f_0(g_1) \leq t^1$ és $f_0(g_2) \leq t^2$. Tetszőleges $\gamma \in [0, 1]$ -re és $i = 1, \dots, n$ -re f_i konvexsége miatt

$$f_i(\gamma g_1 + (1 - \gamma)g_2) \leq \gamma f_i(g_1) + (1 - \gamma)f_i(g_2) \leq \gamma u_i^1 + (1 - \gamma)u_i^2,$$

f_0 konvexsége miatt

$$f_0(\gamma g_1 + (1 - \gamma)g_2) \leq \gamma f_0(g_1) + (1 - \gamma)f_0(g_2) \leq \gamma t^1 + (1 - \gamma)t^2,$$

$j = 1, \dots, m$ -re h_j linearitása miatt pedig

$$h_j(\gamma g_1 + (1 - \gamma)g_2) = \gamma h_j(g_1) + (1 - \gamma)h_j(g_2) = \gamma v_j^1 + (1 - \gamma)v_j^2.$$

Vagyis $(\gamma \underline{u}^1 + (1 - \gamma)\underline{u}^2, \gamma \underline{v}^1 + (1 - \gamma)\underline{v}^2, \gamma t^1 + (1 - \gamma)t^2) \in A$, tehát A konvex.

A B halmaz pedig egy nyílt félegyenes, tehát egy nyílt konvex halmaz. Nyilvánvaló, hogy A és B nemüresek. Másrészt diszjunktak is, ugyanis ha $(\underline{u}, \underline{v}, t) \in A \cap B$, akkor B definíciója szerint $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ -re $u_i = v_j = 0$, A definíciója szerint pedig $\exists g : f_1(g) \leq 0, \dots, f_n(g) \leq 0, h_1(g) = 0, \dots, h_m(g) = 0, f_0(g) \leq t < p^*$. Ez viszont ellentmondana annak, hogy p^* az eredeti feladat optimuma.

Például [12]-ben megtalálható az az ismert konvex geometriai tétel, hogy amennyiben két nemüres, diszjunkt konvex halmaz közül legalább az egyik nyílt, akkor azok elválaszthatók egy hipersíkkal. Az $A, B \subset \mathbb{R}^{n+m+1}$ halmazokra ez teljesül, ezért létezik olyan $\underline{\alpha}^T \underline{u} + \underline{\omega}^T \underline{v} + \beta t = c$ egyenletű hipersík, ami elválasztja őket. Itt $(\underline{\alpha}, \underline{\omega}, \beta) = \underline{0}$ nem teljesülhet, hiszen ekkor nem egy hipersík egyenlete adódna. Tehát

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}^T \underline{u} + \underline{\omega}^T \underline{v} + \beta t &\geq c, \text{ ha } (\underline{u}, \underline{v}, t) \in A \text{ és} \\ \underline{\alpha}^T \underline{u} + \underline{\omega}^T \underline{v} + \beta t &\leq c, \text{ ha } (\underline{u}, \underline{v}, t) \in B. \end{aligned}$$

Ha $(\underline{u}, \underline{v}, t) \in A$, akkor $\forall \underline{u}' \succ \underline{u}, t' > t$ esetén $(\underline{u}', \underline{v}, t') \in A$ is teljesül, ezért $\underline{\alpha} \succ \underline{0}$ és $\beta \geq 0$. Itt $\succ$ és $\succ$ rendre azt jelentik, hogy koordinátánként nagyobb-egyenlő illetve nagyobb.

Ha pedig $(\underline{u}, \underline{v}, t) \in B$, akkor $(\underline{u}, \underline{v}) = \underline{0}$, így $\underline{\alpha}^T \underline{u} + \underline{\omega}^T \underline{v} + \beta t = \beta t \leq c$. Így $\forall t < p^*$ -ra $\beta(p^* - \varepsilon) \leq c$, ahol a megfelelő $\varepsilon > 0$ -val $t = p^* - \varepsilon$. Mivel $\beta(p^* - \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \beta p^*$ és $c \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} c$, így a határátmenet szerint $\beta p^* \leq c$.

Ezért $(f_1(g), \dots, f_n(g), h_1(g), \dots, h_m(g), f_0(g)) \in A$ miatt

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(g) + \sum_{j=1}^m \omega_j h_j(g) + \beta f_0(g) \geq c \geq \beta p^*. \quad (2)$$

Ha $\beta > 0$, akkor (2)-ben β -val végigosztva az adódik, hogy minden g -re

$$f_0(g) + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\beta} f_i(g) + \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j}{\beta} h_j(g) \geq p^*,$$

amiből következik, hogy

$$G\left(\frac{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}, \frac{\underline{\omega}}{\underline{\beta}}\right) \geq p^*.$$

Ezt (1)-gyel összevetve azt kapjuk, hogy

$$G\left(\frac{\underline{\alpha}}{\underline{\beta}}, \frac{\underline{\omega}}{\underline{\beta}}\right) = p^* = \sup_{\substack{\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, \\ \nu_1 \in \mathbb{R}, \dots, \nu_m \in \mathbb{R}}} G(\underline{\lambda}, \underline{\nu}).$$

Most tegyük fel, hogy $\beta = 0$. Ekkor (2) alapján minden $g \in V$ -re

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(g) + \sum_{j=1}^m \omega_j h_j(g) \geq 0. \quad (3)$$

Olyan $\tilde{g} \in \mathbf{int}V$ -ra pedig, amelyre $f_i(\tilde{g}) < 0$, $i = 1, \dots, n$, $h_j(\tilde{g}) = 0$, $j = 1, \dots, m$ teljesül, fennáll, hogy

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\tilde{g}) \geq 0.$$

Mivel minden tagban $f_i(\tilde{g})$ negatív, α_i pedig nemnegatív, így az egyenlőtlenségből következik, hogy $\underline{\alpha} = \underline{0}$. Ez azonban $(\underline{\alpha}, \underline{\omega}, \underline{\beta}) \neq \underline{0}$ és $\beta = 0$ miatt maga után vonja, hogy $\underline{\omega} \neq \underline{0}$. A (3) egyenlőtlenségből és

$\underline{\alpha} = \underline{0}$ -ból az is következik, hogy minden $g \in V$ -re $\sum_{j=1}^m \omega_j h_j(g) \geq 0$. Fel-

használva, hogy $\tilde{g} \in \mathbf{int}V$, perturbálhatjuk $\tilde{g}$ -ot olyan tetszőleges $e \in V$ iránnyal, hogy, még mindig V -ben maradjunk. Vagyis $g_\varepsilon = \tilde{g} + \varepsilon e \in V$ -re h_j , $j = 1, \dots, m$ linearitásának köszönhetően

$$\sum_{j=1}^m \omega_j h_j(g_\varepsilon) = \sum_{j=1}^m \omega_j h_j(\tilde{g}) + \varepsilon \sum_{j=1}^m \omega_j h_j(e) = \varepsilon \sum_{j=1}^m \omega_j h_j(e).$$

Mivel a h_j , $j = 1, \dots, m$ korlátok nem fejezhetők ki egymásból, így $\exists e \in V$ irány, amelyre $0 \neq \sum_{j=1}^m \omega_j h_j(e)$. Ezzel ellentétes előjelűnek és kellően

kicsi abszolút értékűnek választva ε -t elérhető, hogy $\sum_{j=1}^m \omega_j h_j(g_\varepsilon) < 0$

teljesüljön $g_\varepsilon \in V$ -re. Ez viszont ellentmondás. Ezzel megmutattuk, hogy $\beta = 0$ nem lehetséges, és így a lemma állítását beláttuk. $\square$

3.3. *Megjegyzés.* A duál problémában a λ_i és ω_j konstansokat Lagrange együttthatóknak nevezzük.

3.4. *Megjegyzés.* A 3.2 lemma jelöléseivel élve, ha erős dualitás áll fenn (mint ahogyan a 3.2 lemmában is), akkor a primál feladat optimumát g^* -vel, a duálét pedig $(\underline{\lambda}^*, \underline{\nu}^*)$ -gal jelölve

$$\begin{aligned} f_0(g^*) = \mathcal{G}(\underline{\lambda}^*, \underline{\nu}^*) &= \inf_{g \in V} \left(f_0(g) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^* f_i(g) + \sum_{j=1}^m \nu_j^* h_j(g) \right) \leq \\ &\leq f_0(g^*) + \sum_{i=1}^n \lambda_i^* f_i(g^*) + \sum_{j=1}^m \nu_j^* h_j(g^*) \leq f_0(g^*). \end{aligned}$$

Ez csakis akkor teljesülhet, ha az egyenlőtlenségek helyén is egyenlőségek állnak, amiből következik, hogy $\sum_{i=1}^n \lambda_i^* f_i(g^*) = 0$. Mivel ezen összeg minden tagja nempozitív, így $i = 1, \dots, n$ -re $\lambda_i^* f_i(g^*) = 0$ adódik. Tehát az egyenlőtlenséggel teljesülő korlátoknál vagy a korlátozó funkcionál értékének a duál optimumában, vagy pedig a megfelelő Lagrange-együttthatónak a duál problémában 0-nak kell lennie.

3.2. Eltérés a viszonyítási stratégiától

3.5. **Tétel.** $\mathcal{Q}_\varepsilon$ -beli kvantilisfüggvények lehetséges legkisebb illetve legnagyobb várható értéke rendre

$$\underline{E} = E[X_T^\rho] - \varepsilon \text{ és } \overline{E} = E[X_T^\rho] + \varepsilon.$$

A megfelelő kvantilisfüggvények, amelyek felveszik az $\overline{E}$ illetve $\underline{E}$ értékeket, rendre

$$\underline{q}(x) = \hat{F}_{X_T^\rho}(x) - \varepsilon \text{ és } \overline{q}(x) = \hat{F}_{X_T^\rho}(x) + \varepsilon.$$

Bizonyítás. Nézzük a tétel állítását $\underline{E}$ -ra. Ehhez az $\int_0^1 q(x)dx$ kifejezés infimumát kell megkeresni, ahol q olyan kvantilisfüggvény, amely a viszonyítási stratégia ε sugarú 2-Wasserstein-gömbjén belül helyezkedik el. Vagyis a következő problémát kell megoldani:

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}} \int_0^1 q(u)du \text{ úgy, hogy } \int_0^1 \left(q(u) - \hat{F}_{X_T^\rho}(u) \right)^2 du \leq \varepsilon^2.$$

Most a 3.2 lemma jelöléseivel $V = \mathcal{Q}$, $n = 1$, $m = 0$,

$$f_0(q) = \int_0^1 q(u) du \text{ és}$$

$$f_1(q) = \left(\int_0^1 \left(q(u) - \hat{F}_{X_T^\rho}(u) \right)^2 du \right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon = \|q - \hat{F}_{X_T^\rho}\|_2 - \varepsilon.$$

Triviális észrevétel, hogy az f_0 funkcionál lineáris, így konvex is. A Minkowski-egyenlőtlenség értelmében $r \in [1, \infty]$ esetén ha tetszőleges h_1 és h_2 majdnem mérhető függvények összeadhatók, akkor az L^r -normát $\|\cdot\|_r$ -rel jelölve a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\|h_1 + h_2\|_r \leq \|h_1\|_r + \|h_2\|_r.$$

Ezért tetszőleges $\gamma \in [0, 1]$ -re

$$\|\gamma h_1 + (1 - \gamma)h_2\|_r \leq \|\gamma h_1\|_r + \|(1 - \gamma)h_2\|_r = \gamma\|h_1\|_r + (1 - \gamma)\|h_2\|_r,$$

tehát az $\|\cdot\|_r$ funkcionál konvex. Most speciálisan $r = 2$. Az ε konstans paraméter nem befolyásolja a konvexitást, így az f_1 funkcionál konvex. Ezentúl $\exists q \in \mathbf{int}\mathcal{Q}$, amire $f_1(q) < 0$. Például $q \equiv \hat{F}_{X_T^\rho}$ ilyen. Tehát a 3.2 lemma feltételei teljesülnek, így alkalmazhatjuk. Ezek szerint elegendő a következő feladatot megoldani:

$$\sup_{\lambda \geq 0} \inf_{q \in \mathcal{Q}} \mathcal{G}(\lambda, q), \text{ ahol}$$

$$\mathcal{G}(\lambda, q) = \int_0^1 q(u) du + \lambda \left(\int_0^1 \left(q(u) - \hat{F}_{X_T^\rho}(u) \right)^2 du - \varepsilon^2 \right). \quad (1)$$

A Lagrange-függvényben megjelenő kifejezés q kvadratikus függvénye, ezért alakítsuk teljes négyzetté. Így a q -at tartalmazó tagot elég lesz majd minimalizálni. (1)-et teljes négyzetté alakítva:

$$\mathcal{G}(\lambda, q) = \lambda \int_0^1 \left(q(u) - \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(u) - \frac{1}{2\lambda} \right) \right)^2 du + \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}(u) du - \lambda \varepsilon^2 - \frac{1}{4\lambda}.$$

Ennél az átalakításnál kihasználtuk, hogy $\lambda > 0$. Ez a később előkerülő 4.12 tétel következménye, amely szerint a 2-Wasserstein korlát éles ennél az optimalizációs problémánál. Csak az első tagban jelenik meg q , így rögzített $\lambda > 0$ -ra

$$\arg \min_{q \in \mathcal{Q}} \mathcal{G}(\lambda, q) = \arg \min_{q \in \mathcal{Q}} \int_0^1 \left(q(u) - \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(u) - \frac{1}{2\lambda} \right) \right)^2 du.$$

Ez épp $\hat{F}_{X_T^\rho} - \frac{1}{2\lambda}$ izotonikus vetítése a négyzetesen integrálható kvantilisfüggvények halmazára. Mivel $\hat{F}_{X_T^\rho}(u) - \frac{1}{2\lambda}$ maga is négyzetesen integrálható kvantilisfüggvény, így a vetület éppen $q_\lambda(u) = \hat{F}_{X_T^\rho}(u) - \frac{1}{2\lambda}$. Ezt beírva $\mathcal{G}$ képletébe a következő kifejezés adódik:

$$\int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}(u) du - \lambda\varepsilon^2 - \frac{1}{4\lambda}.$$

Ennek a λ szerinti szuprémumát kell keresni. Mivel az első tag nem függ λ -tól, így a következő optimumkeresési feladatot kell megoldani:

$$\sup_{\lambda>0} f(\lambda), \text{ ahol } f(\lambda) = \lambda\varepsilon^2 - \frac{1}{4\lambda}.$$

$f'(\lambda) = \frac{1}{4\lambda^2} - \varepsilon^2$ és $f''(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda^3} < 0$, így $\lambda = \frac{1}{2\varepsilon}$ lokális maximumhely. De $\lambda > 0$ miatt ez az egyetlen szélsőérték hely, így egyben globális maximumhely is. Vagyis $\varepsilon = \frac{1}{2\lambda}$, amiből következik, hogy $q(x) = \hat{F}_{X_T^\rho}(x) - \varepsilon$, és így $\underline{E} = \int_0^1 q(x) dx = \int_0^1 (\hat{F}_{X_T^\rho}(x) - \varepsilon) dx = E[X_T^\rho] - \varepsilon$.

$\overline{E}$ -ra infimum helyett szuprémum vételével hasonló módon adódik a tétel állítása. $\square$

3.6. Megjegyzés. A 4.12 tétel bizonyítása sem közvetlenül, sem közvetve nem használja fel a 3.5 tételt. Csupán azért került az utóbbi előbbre a szakdolgozatban, mert az ismeretében érthetővé válik olyan halmazok és fogalmak definiálásának az oka, amelyeket a 4.12 tételnél fel fogunk használni.

3.7. Tétel. *Bármely tetszőleges $\mathcal{Q}_\varepsilon$ -beli kvantilisfüggvény szórása az alábbi intervallumba esik:*

$$[\max\{D(X_T^\rho) - \varepsilon, 0\}, D(X_T^\rho) + \varepsilon].$$

Bizonyítás. Rögzítsünk le egy $E_0 \in [\underline{E}, \overline{E}]$ számot, és legyen $\Delta E = E[X_T^\rho] - E_0$. Megmutatjuk, hogy a lehetséges legkisebb illetve legnagyobb szórás, ami egy $\mathcal{Q}_\varepsilon$ -beli kvantilisfüggvénynek lehet, rendre

$$\underline{D} = \max\left\{D(X_T^\rho) - \sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}, 0\right\} \text{ és } \overline{D} = D(X_T^\rho) + \sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}.$$

Ha ezt sikerül igazolni, akkor azonnal következik a tétel állítása, hiszen a lehetséges E_0 -okra infimumot véve:

$$\begin{aligned} \inf_{E_0 \in [\underline{E}, \overline{E}]} \underline{D} &= \inf_{E_0 \in [\underline{E}, \overline{E}]} \max\left\{D(X_T^\rho) - \sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}, 0\right\} = \\ &= \max\{D(X_T^\rho) - \varepsilon, 0\}. \end{aligned}$$

A lehetséges legkisebb szórás éppen $E_0 = E[X_T^\rho]$ esetén vétetik fel, ami az $[\underline{E}, \overline{E}]$ intervallumba esik, így a neki megfelelő kvantilisfüggvény eleme $\mathcal{Q}_\varepsilon$ -nak. Ugyanígy

$$\sup_{E_0 \in [\underline{E}, \overline{E}]} \overline{D} = \sup_{E_0 \in [\underline{E}, \overline{E}]} \left\{ D(X_T^\rho) + \sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2} \right\} = D(X_T^\rho) + \varepsilon.$$

A lehetséges legnagyobb szórás is $E_0 = E[X_T^\rho]$ esetén vétetik fel, így a neki megfelelő kvantilisfüggvény szintén eleme $\mathcal{Q}_\varepsilon$ -nak.

Most a tétel lényegi részének a bizonyításával folytatjuk, először $\underline{D}$ -re optimalizálunk. A 3.2 lemmát most a $V = \mathcal{Q}$ és $n = m = 1$ esetre alkalmazhatjuk az

$$f_0(q) = \int_0^1 (q(u) - E_0)^2 du, \quad f_1(q) = \left(\int_0^1 \left(q(u) - \hat{F}_{X_T^\rho}(u) \right)^2 du \right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon$$

$$\text{és } h_1(q) = \int_0^1 q(u) du - E_0$$

funkcionálokra, ugyanis a 3.5 tételbeli bizonyításhoz hasonlóan adódik, hogy f_0 és f_1 konvex, h_1 lineáris, és $q \equiv \hat{F}_{X_T^\rho}$ -ra $f_1(q) < 0$. Ezek szerint elegendő a következő feladatot megoldani:

$$\sup_{\lambda \geq 0, q \in \mathcal{Q}} \inf_{\nu \in \mathbb{R}} \mathcal{G}(\lambda, \nu; q), \text{ ahol}$$

$$\mathcal{G}(\lambda, \nu; q) =$$

$$\int_0^1 (q(u) - E_0)^2 du + \lambda \left(\int_0^1 \left(q(u) - \hat{F}_{X_T^\rho}(u) \right)^2 du - \varepsilon^2 \right) + \nu \left(\int_0^1 q(u) du - E_0 \right) =$$

$$(1 + \lambda) \int_0^1 \left(q(u) - \frac{1}{1 + \lambda} \left(\lambda \hat{F}_{X_T^\rho}(u) + E_0 - \frac{\nu}{2} \right) \right)^2 du -$$

$$\frac{1}{1 + \lambda} \int_0^1 \left(\lambda \hat{F}_{X_T^\rho}(u) + E_0 - \frac{\nu}{2} \right)^2 du + \lambda \int_0^1 \left(\hat{F}_{X_T^\rho}^2(u) - \varepsilon^2 \right) du - \nu E_0 + E_0^2.$$

A 3.5 tételben látott teljes négyzetté alakításos technikával sikerült $\mathcal{G}(\lambda, \nu; q)$ -t olyan alakúra hozni, ahol csak az első tagban jelenik meg a q kvantilisfüggvény, így rögzített $\lambda \geq 0$ és $\nu \in \mathbb{R}$ -re

$$\arg \min_{q \in \mathcal{Q}} \mathcal{G}(\lambda, \nu; q) = \arg \min_{q \in \mathcal{Q}} \int_0^1 \left(q(u) - \frac{1}{1 + \lambda} \left(\lambda \hat{F}_{X_T^\rho}(u) + E_0 - \frac{\nu}{2} \right) \right)^2 du.$$

Ez épp az $q_{\lambda, \nu}(u) = \frac{1}{1 + \lambda} \left(\lambda \hat{F}_{X_T^\rho}(u) + E_0 - \frac{\nu}{2} \right)$ függvény izotonikus vetülete a kvantilisfüggvények halmazára, ami $\hat{F}_{X_T^\rho}$ monoton növekedése

miatt önmagával egyezik meg. A külső optimalizáláshoz ezt helyettesítsük vissza $\mathcal{G}(\lambda, \nu; q)$ -be, majd tegyük egyenlővé 0-val a ν illetve λ -szerinti parciális deriváltakat.

Visszahelyettesítés után $\mathcal{G}(\lambda, \nu; q)$ -ben a ν -tól függő tagokat elegendő figyelembe venni a ν -szerinti deriválásnál, hiszen a többi tag parciális deriváltja 0. Ezeket az $l_1(\nu)$ függvénybe összegezve:

$$\begin{aligned} l_1(\nu) &:= \nu \frac{\lambda}{1+\lambda} \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}(u) du - \frac{\nu^2}{4(1+\lambda)} + \nu \frac{E_0}{1+\lambda} - \nu E_0. \\ \frac{\partial}{\partial \nu} l_1(\nu) = 0 &\iff \frac{\lambda}{1+\lambda} E[X_T^\rho] - E_0 + \frac{E_0}{1+\lambda} = \frac{\nu}{2(1+\lambda)} \iff \\ &\iff \nu = 2\lambda E[X_T^\rho] + 2E_0 - 2E_0(1+\lambda) = 2\lambda \Delta E. \end{aligned}$$

Hasonlóan a λ -tól függő tagokat az $l_2(\lambda)$ függvénybe összegezve:

$$\begin{aligned} l_2(\lambda) &:= -\frac{\lambda^2}{1+\lambda} \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}^2(u) du - \frac{\nu^2}{4(1+\lambda)} - \frac{E_0^2}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} \nu \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}(u) du - \\ &\quad \frac{\lambda}{1+\lambda} 2E_0 \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}(u) du + \frac{\nu E_0}{1+\lambda} + \lambda \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}^2(u) du - \varepsilon^2 \lambda. \end{aligned}$$

Kihasználva, hogy

$$\begin{aligned} D^2(X_T^\rho) &= \int_0^1 \left(\hat{F}_{X_T^\rho} - E[X_T^\rho] \right)^2 du = \\ &= \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}^2 du - 2E[X_T^\rho] \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho} du + (E[X_T^\rho])^2 = \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}^2 du - (E[X_T^\rho])^2, \end{aligned}$$

a következő adódik:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \lambda} l_2(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)^2} \int_0^1 \hat{F}_{X_T^\rho}^2(u) du + \frac{\nu^2}{4(1+\lambda)^2} + \\ &\quad \frac{E_0^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{\nu E[X_T^\rho]}{(1+\lambda)^2} - \frac{2E_0 E[X_T^\rho]}{(1+\lambda)^2} - \frac{\nu E_0}{(1+\lambda)^2} - \varepsilon^2 \\ \iff D^2(X_T^\rho) + (E[X_T^\rho])^2 - \varepsilon^2(1+\lambda)^2 &= \nu E_0 - \nu E[X_T^\rho] - E_0^2 + 2E_0 E[X_T^\rho] - \frac{\nu^2}{4} \\ \iff D^2(X_T^\rho) &= \varepsilon^2(1+\lambda)^2 - (\Delta E)\nu - \frac{\nu^2}{4} - (\Delta E)^2. \end{aligned}$$

Ebbe $\nu = 2\lambda \Delta E$ -et beírva azt kapjuk, hogy az optimumban

$$\nu = 2\lambda \Delta E \text{ és } D^2(X_T^\rho) \stackrel{(*)}{=} (1+\lambda)^2 (\varepsilon^2 - (\Delta E)^2).$$

Ha $\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2} \leq D(X_T^\rho)$, akkor létezik belső ponti megoldás, azaz $\lambda > 0$ és $\nu \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lambda^* = \frac{D(X_T^\rho)}{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}} - 1 \text{ és } \nu^* = \frac{2D(X_T^\rho)\Delta E}{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}} - 2\Delta E.$$

A $(\lambda^*, \nu^*; q_{\lambda^*, \nu^*})$ helyen $\mathcal{G}$ valóban a szuprémumát veszi fel, hiszen az egyetlen lokális szélsőérték globális szélsőérték is, és könnyen ellenőrizhető, hogy fix $q_{\lambda, \nu}$ -ra $\mathcal{G}(\lambda, \nu; q_{\lambda, \nu})$ Hesse-mátrixa negatív szemidefinit, így a szélsőérték maximum.

$$\begin{aligned}
q_{\lambda^*, \nu^*}(u) &= \frac{1}{1 + \lambda^*} \left(\lambda^* \hat{F}_{X_T^\rho}(u) + E_0 - \frac{\nu^*}{2} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}}{D(X_T^\rho)} \left(\frac{D(X_T^\rho) \hat{F}_{X_T^\rho}(u)}{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}} - \hat{F}_{X_T^\rho}(u) + E_0 + \Delta E - \frac{D(X_T^\rho) \Delta E}{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}} \right) = \\
&= \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}}{D(X_T^\rho)} \right) \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(u) - E[X_T^\rho] \right) + E_0, \text{ ezért} \\
\underline{D}^2 &= \int_0^1 \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}}{D(X_T^\rho)} \right)^2 \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(u) - E[X_T^\rho] \right)^2 du = \\
&= \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}}{D(X_T^\rho)} \right)^2 \int_0^1 \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(u) - E[X_T^\rho] \right)^2 du = \\
&= \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}}{D(X_T^\rho)} \right)^2 D^2(X_T^\rho) = \left(D(X_T^\rho) - \sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Viszont $\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2} > D(X_T^\rho)$ esetén $\nexists \lambda \geq 0$, amelyre $(*)$ teljesül, így az optimum csakis határpontban lehet. Vagyis $\lambda^* = 0$, és így $\nu^* = 2\lambda^* \Delta E = 0$. Ekkor $q_{\lambda^*, \nu^*}(u) \equiv \Delta E$, ezért $\underline{D} = 0$.

$\overline{D}$ -re az optimalizáció teljesen hasonlóan működik, mint $\underline{D}$ -re, ezért csupán a főbb lépéseket mutatom meg. Mivel

$$\overline{D} := \sup_{\substack{q \in \mathcal{Q}_\varepsilon \\ \int_0^1 q(x) dx = 1}} \left(\int_0^1 (q(x) - E_0)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = - \inf_{\substack{q \in \mathcal{Q}_\varepsilon \\ \int_0^1 q(x) dx = 1}} \left(\int_0^1 (q(x) - E_0)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

így most a következő problémát kell megoldani:

$$\sup_{\lambda \geq 0} \inf_{\substack{q \in \mathcal{Q} \\ \nu \in \mathbb{R}}} \mathcal{G}(\lambda, \nu; q), \text{ ahol}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\lambda, \nu; q) &= - \int_0^1 (q(u) - E_0)^2 du + \\
&\lambda \left(\int_0^1 \left(q(u) - \hat{F}_{X_T^\rho}(u) \right)^2 du - \varepsilon^2 \right) + \nu \left(\int_0^1 q(u) du - E_0 \right) = \\
&= (\lambda - 1) \int_0^1 \left(q(u) - \frac{1}{\lambda - 1} \left(\lambda \hat{F}_{X_T^\rho}(u) - E_0 - \frac{\nu}{2} \right) \right)^2 du - \\
&\frac{1}{\lambda - 1} \int_0^1 \left(\lambda \hat{F}_{X_T^\rho}(u) - E_0 - \frac{\nu}{2} \right)^2 du + \lambda \int_0^1 \left(\hat{F}_{X_T^\rho}^2(u) - \varepsilon^2 \right) du - \nu E_0 - E_0^2.
\end{aligned}$$

Rögzített λ -ra és ν -re a belső optimalizálás eredménye:

$$q_{\lambda,\nu}(u) = \frac{1}{\lambda-1} \left(\lambda \hat{F}_{X_T^\rho}(u) - E_0 - \frac{\nu}{2} \right).$$

A külső optimalizálásnál a parciális deriváltakat kiszámítva pedig a következő adódik:

$$\nu = 2\lambda\Delta E \text{ és } D^2(X_T^\rho) \stackrel{(\bullet)}{=} (\lambda-1)^2 (\varepsilon^2 - (\Delta E)^2).$$

$(\bullet)$ -nak két lehetséges λ megoldása van. Ezek közül a nagyobbat kell venni, tehát

$$\lambda^* = \frac{D(X_T^\rho)}{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}} + 1 \text{ és így } \nu^* = \frac{2D(X_T^\rho)\Delta E}{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}} + 2\Delta E.$$

Ezeket az optimális kvantilisfüggvénybe visszahelyettesítve:

$$q_{\lambda^*,\nu^*}(u) = \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2}}{D(X_T^\rho)} \right) \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(u) - E[X_T^\rho] \right) + E_0, \text{ ezért}$$

$$\bar{D}^2 = \left(D(X_T^\rho) + \sqrt{\varepsilon^2 - (\Delta E)^2} \right)^2.$$

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. $\square$

A 3.5 és 3.7 tételek segítséget nyújtanak a portfólió befektetőjének a megfelelő 2-Wasserstein korlát megválasztásához. Például ha az előre meghatározott $E_a < E[X_T^\rho]$ várható érték alá illetve $D_f > D(X_T^\rho)$ szórás fölé nem szertné, hogy kerüljön a kvantilisfüggvény, akkor az alábbi választás megfelelő: $\varepsilon = \min \{E[X_T^\rho] - E_a, D_f - D(X_T^\rho)\}$.

4. Kvantilisfüggvények feletti optimalizáció

A 2-Wasserstein gömb sugarára kapott korlátok segítségével közelebb juthatunk az optimalizációs probléma megoldásához azáltal, hogy egyszerűsíteni tudjuk. Ezt úgy fogjuk elérni, hogy az eredeti optimalizációs problémát átírjuk a kvantilisfüggvények feletti optimalizációs problémává. Ennek első lépéseként megmutatjuk, hogy a $\mathcal{H}^p$ halmaz reprezentálható kvantilisfüggvényekkel. Először azonban definiáljuk a feltételes kopulának és az inverzének a fogalmát, és teszünk egy megjegyzést a reprezentációs tételhez.

4.1. Definíció. Jelölje az X_1 és X_2 valószínűségi változók kopuláját $C_{1,2}$. Ekkor X_1 -nek az X_2 feltétel melletti $C_{1|2}$ feltételes kopuláját a következő módon definiáljuk:

$$C_{1,2}(r, z) = \int_0^z C_{1|2}(r, s) ds.$$

Ennek az első változóbeli inverzét $\hat{C}_{1|2}$ -vel jelöljük.

4.2. Megjegyzés. A $\mathbb{P}$ mérték szerint folytonos Y valószínűségi változót a saját eloszlásfüggvényébe behelyettesítve a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót kapunk. Ez azért igaz, ugyanis

$$F_{F_Y(Y)}(t) = \mathbb{P}(F_Y(Y) \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq F_Y^{-1}(t)) = F_Y(F_Y^{-1}(t)) = t,$$

ami épp a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

4.3. Tétel (Kvantilis reprezentáció). *Legyen Y folytonos valószínűségi változó, és a $\mathbb{P}$ mérték szerint a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású $F_Y(Y)$ valószínűségi változót jelöljük V -vel. F legyen egy tetszőleges eloszlásfüggvény, és definiáljuk az X valószínűségi változót az alábbi módon:*

$$X := \hat{F}\left(\hat{C}_{1|2}(U|V)\right), \quad (1)$$

ahol $U \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$ és U független V -től.

Ekkor X eloszlásfüggvénye $\mathbb{P}$ szerint $F_X = F$, és (X, Y) -nak a kopulája $C_{1,2}$.

Másfelől, ha X eloszlásfüggvénye $\mathbb{P}$ szerint F_X , és (X, Y) -nak $C_{1,2}$ a kopulája, akkor (1)-nek teljesülni kell rá valamely V -től független $U \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$ valószínűségi változóval.

Bizonyítás. Először az utóbbi irányt látjuk be. Tegyük fel, hogy (X, Y) -nak $C_{1,2}$ a kopulája, illetve V -től független $U \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= C_{1,2}(F_X(x), F_Y(y)) = \int_0^{F_Y(y)} C_{1|2}(F_X(x)|v)dv = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{\{u \leq C_{1|2}(F_X(x)|v)\}} du \mathbb{1}_{\{v \leq F_Y(y)\}} dv = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{\{\hat{C}_{1|2}(u|v) \leq F_X(x)\}} du \mathbb{1}_{\{v \leq F_Y(y)\}} dv \stackrel{(*)}{=} \\
&\stackrel{(*)}{=} \mathbb{P}\left(\hat{F}_X\left(\hat{C}_{1|2}(u|v)\right) \leq x, \hat{F}_Y(V) \leq y\right), \text{ vagyis} \\
Q_{(X,Y)} &= Q_{(\hat{F}_X(\hat{C}_{1|2}(u|v)), \hat{F}_Y(V))} = Q_{(\hat{F}_X(\hat{C}_{1|2}(u|v)), Y)}.
\end{aligned}$$

Az első egyenlőségnél Sklar tételét használtuk fel, $(*)$ -nál pedig U és V függetlenségét. Ezzel az egyik irányt beláttuk.

A másik irány igazolásához legyen $X := \hat{F}\left(\hat{C}_{1|2}(U|V)\right)$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq x, F_Y(Y) \leq F_Y(y)) = \\
&= \mathbb{P}\left(\hat{C}_{1|2}(U|V) \leq F(x), V \leq F_Y(y)\right) \stackrel{(\bullet)}{=} \\
&\stackrel{(\bullet)}{=} \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{\{u \leq C_{1|2}(F(x)|v)\}} du \mathbb{1}_{\{v \leq F_Y(y)\}} dv = \\
&= \int_0^{F_Y(y)} C_{1|2}(F(x)|v)dv = C_{1,2}(F(x), F_Y(y)).
\end{aligned}$$

A $(\bullet)$ egyenlőségnél U és V függetlenségét használtuk fel.

Ezzel beláttuk, hogy $F_X = F$ és (X, Y) -nak $C_{1,2}$ a kopulája. $\square$

4.3.1. Következmény. Azon X_T^π valószínűségi változók halmazát, amelyeknek a viszonyítási stratégiával való kapcsolatát a $C_{\pi,\rho}$ kopula írja le, az alábbi módon tudjuk reprezentálni:

$$\mathcal{H}^\rho = \left\{ q \left(\hat{C}_{\pi,\rho}(U|U^\rho) \right) \mid q \in \mathcal{Q}, U \sim \mathcal{F}_T, U \perp\!\!\!\perp^{\mathbb{P}} U^\rho, U \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1) \right\},$$

ahol $U^\rho = F_{X_T^\rho}(X_T^\rho)$. Vagyis U^ρ és egy tőle független $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó generálja a $\mathcal{H}^\rho$ halmazt. Ezt követően azt szeretnénk elérni, hogy a lehetséges U valószínűségi változók halmazát leszűkítsük, és az optimalizálási probléma kezdeti

költségvetési korlátját is jobban kezelhető formájúvá kívánjuk átalakítani. Az előbbihez először folytonos kontra-monoton valószínűségi változók szorzatának a várható értékéről mutatunk be egy a későbbiekben felhasználható érdekes eredményt.

4.4. Definíció. Az X és Y folytonos valószínűségi változókat kontra-monotonnak nevezzük, ha az egyik monoton csökkenő függvénye a másiknak, azaz létezik olyan monoton csökkenő g függvény, amellyel $X = g(Y)$.

4.5. *Megjegyzés.* Jól ismert algebrai állítás, hogy amennyiben az $x_1, x_2, \dots, x_n$ és $y_1, y_2, \dots, y_n$ nemnegatív szám n -esekre $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ és $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ teljesül, akkor

$$\sum_{j=1}^n x_j y_{n-j} \leq \sum_{j=1}^n x_j y_{\sigma(j)} \leq \sum_{j=1}^n x_j y_j,$$

ahol σ az $1, 2, \dots, n$ számok egy tetszőleges permutációja.

Ennek analógiájára nem meglepő a következő 4.6 lemma eredménye.

4.6. Lemma. Ha X és Y adott eloszlású folytonos valószínűségi változók, akkor $E[XY]$ pontosan akkor minimális, ha X és Y kontra-monoton.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy X és Y nemnegatív valószínűségi változók.

$$\begin{aligned} E[XY] &= E \left[\int_0^X \int_0^Y 1 \, dudv \right] = E \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{u \leq X, v \leq Y\}} \, dudv \right] = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(u \leq X, v \leq Y) \, dudv. \end{aligned}$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(u \leq X) \, du \text{ és } E[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}(v \leq Y) \, dv, \text{ így} \\ E[XY] - E[X]E[Y] &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(u \leq X, v \leq Y) \, dudv - \int_0^\infty \mathbb{P}(u \leq X) \, du \int_0^\infty \mathbb{P}(v \leq Y) \, dv \stackrel{(*)}{=} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(u \leq X, v \leq Y) \, dudv - \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{P}(u \leq X) \mathbb{P}(v \leq Y) \, dudv \stackrel{(\diamond)}{=} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty (\mathbb{P}(X < u, Y < v) - \mathbb{P}(X < u) \mathbb{P}(Y < v)) \, dudv. \end{aligned}$$

A (*) egyenlőségnél a nemnegatív függvényekre alkalmazható Fubini-tételt használtuk fel, ($\diamond$)-nál pedig a következő két azonosságot:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(u \leq X, v \leq Y) &= 1 - \mathbb{P}(X < u) - \mathbb{P}(Y < v) + \mathbb{P}(X \leq u)\mathbb{P}(Y \leq v), \\ \mathbb{P}(u \leq X)\mathbb{P}(v \leq Y) &= (1 - \mathbb{P}(X < u))(1 - \mathbb{P}(Y < v)) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(X < u) - \mathbb{P}(Y < v) + \mathbb{P}(X < u)\mathbb{P}(Y < v) =: (\bullet).\end{aligned}$$

Ha X és Y nem feltétlenül nemnegatív valószínűségi változók, akkor hasonló formula igaz $E[XY] - E[X]E[Y]$ kiszámítására, csupán az integrálok alsó határát kell 0-ról $-\infty$ -re kicserélni.

Mivel X és Y eloszlása ismert, így $E[XY]$ minimalizálása ekvivalens ($\bullet$) minimalizálásával, amely pedig ekvivalens $\mathbb{P}(X < u, Y < v)$ minimalizálásával. Utóbbi szintén azért igaz, mert X és Y eloszlása ismert.

Tetszőleges A és B eseményekre teljesül, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ és $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$, így

$$\mathbb{P}(X < u, Y < v) \geq \max\{\mathbb{P}(X < u) + \mathbb{P}(Y < v) - 1, 0\}.$$

Nyilván $\mathbb{P}(X < u, Y < v)$ akkor lesz minimális, ha

$$\mathbb{P}(X < u, Y < v) = \max\{\mathbb{P}(X < u) + \mathbb{P}(Y < v) - 1, 0\} =: (\otimes).$$

Rögzített u -ra $\mathbb{P}(X < u)$ rögzített $[0, 1]$ intervallumbeli szám, így $v \rightarrow -\infty$ esetén valamely v_0 -ra $\mathbb{P}(Y < v_0)$ éppen akkora lesz, hogy $\mathbb{P}(X < u) + \mathbb{P}(Y < v_0) - 1 = 0$ teljesül. Nyilván minden $v < v_0$ -ra is $(\otimes) = 0$ teljesül. Ha u rögzítettségét feloldjuk, és elkezdjük csökkenteni, akkor $\mathbb{P}(X < u)$ is csökken. Ezáltal az a v_0 , amelytől kezdve minden $v < v_0$ -ra $(\otimes) = 0$, egyre inkább nő.

Most tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(X < u) + \mathbb{P}(Y < v) - 1 > 0$. Ekkor

$$\mathbb{P}(X < u, Y < v) = \mathbb{P}(X < u) + \mathbb{P}(Y < v) - 1. \quad (1)$$

Mivel azonban $\forall u, v \in \mathbb{R}$ -re

$$\mathbb{P}(X < u) + \mathbb{P}(Y < v) - 1 = \mathbb{P}(X < u, Y < v) - \mathbb{P}(X \geq u, Y \geq v),$$

így $\mathbb{P}(X \geq u, Y \geq v) \stackrel{(\clubsuit)}{=} 0$ teljesül $\forall u, v \in \mathbb{R}$ -re, amelyekre (1) fennáll. Fix u_0 -ra $\exists v_0$, amire $\mathbb{P}(X < u_0) + \mathbb{P}(Y < v_0) = 1$. u_0 növelésével ez a v_0 csökken, így a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a megfelelő (u_0, v_0) pontok egy monoton csökkenő görbét határoznak meg. A görbe minden (u_0, v_0) pontjára ($\clubsuit$) miatt az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq u_0, y \geq v_0\}$ halmaz $\mathbb{P}$ -nullmértékű, vagyis a görbe

feletti halmaz $\mathbb{P}$ -nullmértékű, mivel lefedhető megszámlálhatóan sok $\mathbb{P}$ -nullmértékű halmazzal. Ebből következik, hogy a grafikon alatti halmaz $\mathbb{P}$ -mértéke 1. Mivel a grafikon bármely (u_0, v_0) pontjára

$$1 = \mathbb{P}(X < u_0) + \mathbb{P}(Y < v_0) = \mathbb{P}((X, Y) \text{ a görbe alá esik}) + \mathbb{P}(X < u_0, Y < v_0),$$

így $\mathbb{P}(X < u_0, Y < v_0) = 0$. Vagyis a grafikon alatti halmaz is lefedhető megszámlálhatóan sok $\mathbb{P}$ -nullmértékű halmazzal, így $\mathbb{P}$ -nullmértékű. Ebből már következik, hogy minden ω eseményre $(X(\omega), Y(\omega))$ a monoton csökkenő görbére esik. $\square$

A 4.6 lemma segítségével már be fogjuk tudni látni, hogy az U valószínűségi változót elegendő lesz egy az ϱ_T -vel kontra-monoton valószínűségi változó formájában keresni, speciálisan $U = 1 - F_{\varrho_T|U^\rho}(\varrho_T|U^\rho)$. A 4.3 kvantilis reprezentációs tétel motivációjából definiáljuk a

$$W := \hat{C}_{\pi|\rho} (1 - F_{\varrho_T|U^\rho}(\varrho_T|U^\rho)|U^\rho)$$

valószínűségi változót és valószínűségi változók alábbi halmazát:

$$\tilde{\mathcal{H}}^\rho := \{q(W) \mid q \in \mathcal{Q}\}.$$

Lényeges észrevétel a W valószínűségi változóval kapcsolatban, hogy eloszlását ismerjük, mégpedig $W \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$. Ennek igazolásához felhasználjuk, hogy a 4.2 megjegyzés szerint $U = 1 - F_{\varrho_T|U^\rho}(\varrho_T|U^\rho) \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$, valamint $U \perp\!\!\!\perp^\mathbb{P} U^\rho$, mivel $\varrho_T \perp\!\!\!\perp^\mathbb{P} U^\rho$. Ebből adódik, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W \leq u) &= \mathbb{P}(\hat{C}_{\pi|\rho} (1 - U|U^\rho) \leq u) = \mathbb{P}(1 - U \leq C_{\pi|\rho}(u|U^\rho)) = \\ &= \mathbb{P}(U > 1 - C_{\pi|\rho}(u|U^\rho)) = 1 - \mathbb{P}(U \leq 1 - C_{\pi|\rho}(u|U^\rho)) \stackrel{(\diamond)}{=} \\ &\stackrel{(\diamond)}{=} 1 - \mathbb{P}(U \leq 1 - u) = 1 - (1 - u) = u, \end{aligned}$$

ami épp a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. A $(\diamond)$ egyenlőségnél felhasználtuk, hogy tetszőleges $U, V \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$ független valószínűségi változókra

$$\begin{aligned} C_{U,V}(u, v) &= C_{U,V}(F_U(u), F_V(v)) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = uv, \text{ így} \\ C_{U|V}(u|V) &= \left. \frac{\partial C_{U,V}(u, v)}{\partial v} \right|_{v=V} = u. \end{aligned}$$

4.7. Lemma. Tetszőleges $X \in \mathcal{H}^\rho$ valószínűségi változóhoz definiáljuk az $\tilde{X} := \hat{F}_X(W)$ valószínűségi változót. Ekkor a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$E[\varrho_T X] \geq E[\varrho_T \tilde{X}],$$

ahol egyenlőség pontosan $\tilde{X} = X$ és $X \in \tilde{\mathcal{H}}^\rho$ esetén áll fenn.

Bizonyítás. A bizonyításhoz a 4.6 lemmát szeretnénk felhasználni, de ehhez először be kéne látni, hogy ϱ_T és $\hat{F}_X(W)$ kontra-monoton. Ez azonban közvetlenül nem fog menni, mert $\hat{F}_X(W)$ képletében ϱ_T helyett $\varrho_T|U^\rho$ szerepel. Erről viszont meg lehet mutatni, hogy $\hat{F}_X(W)$ -vel kontra-monoton, majd a teljes várható érték tételének a felhasználásával a feltételes várható értéket át tudjuk alakítani a valódi várható értéké.

Mivel $\hat{C}_{\pi,\rho}$ az első változójában monoton növekvő, valamint $\hat{F}_X$ és $F_{\varrho_T|U^\rho}$ is monoton növekvő függvények, így ϱ_T növelése esetén $\hat{F}_X\left(\hat{C}_{\pi,\rho}\left(1 - F_{\varrho_T|U^\rho}(\varrho_T|U^\rho)|U^\rho\right)\right)$ csökken, tehát $\varrho_T|U^\rho$ és $\hat{F}_X(W)$ valóban kontra-monoton.

A 4.3 kvantilis reprezentációs tétel szerint létezik olyan U^ρ -tól független $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású U valószínűségi változó, amellyel $X = \hat{F}_X\left(\hat{C}_{\pi,\rho}(U|U^\rho)\right)$. Így

$$\begin{aligned} E[\varrho_T \tilde{X}] &= E[\varrho_T \hat{F}_X(W)] \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} E\left[E\left[\varrho_T \hat{F}_X\left(\hat{C}_{\pi,\rho}\left(1 - F_{\varrho_T|U^\rho}(\varrho_T|U^\rho)|U^\rho\right)\right) \middle| U^\rho\right]\right] \leq \\ &\leq E\left[E\left[\varrho_T \hat{F}_X\left(\hat{C}_{\pi,\rho}(U|U^\rho)\right) \middle| U^\rho\right]\right] \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} E\left[\varrho_T \hat{F}_X\left(\hat{C}_{\pi,\rho}(U|U^\rho)\right)\right] = E[\varrho_T X], \end{aligned}$$

ahol a $(*)$ -os egyenlőségekben a teljes várható érték tételét, az egyenlőtlenségnél pedig a 4.6 lemmát használtuk fel. Utóbbiból az is adódik, hogy az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül egyenlőséggel, ha $U|U^\rho$ a ϱ_T monoton csökkenő függvénye. Mivel $U \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$, így ez csak is $U = 1 - F_{\varrho_T|U^\rho}(\varrho_T|U^\rho)$ esetén lehetséges. Ebből az is következik, hogy $\tilde{X} = X$ $\mathbb{P}$ -majdnem mindenütt, és $\tilde{X} := \hat{F}_X(W) \in \tilde{\mathcal{H}}^\rho$ miatt $X \in \tilde{\mathcal{H}}^\rho$. $\square$

A következő tétellel azt fogjuk megmutatni, hogy elegendő olyan stratégiákat vizsgálni az optimalizáláshoz, amelyeknek végső kifizeté-

sük $\tilde{\mathcal{H}}^\rho$ -beli.

Ehhez fontos észrevétel, hogy az (OPT) optimalizálási problémában a korlátok csak az X_T^π valószínűségi változótól függnnek, így a problémát úgy is megoldhatjuk, hogy először megkeressük az optimális végső valószínűségi változót, vagyis

$$\inf_{X \in L^2(\mathbb{P}, \Omega)} \mathcal{D}_h[X] \quad (\text{OPT}')$$

úgy, hogy $X \in \mathcal{H}^\rho$, $E[\varrho_T X] \leq E[\varrho_T X_T^\rho] = X_0^\rho$ és $d_2(X, X_T^\rho) \leq \varepsilon$.

Majd ezt követően megkonstruáljuk azt az $\mathcal{F}_T$ -mérhető $\pi \in \mathcal{A}$ replikáló stratégiát, amelyre $\mathbb{P}$ -majdnem mindenütt $X_T^\pi = X$. Mivel $X \in \mathcal{H}^\rho$, így X is $\mathcal{F}_T$ -mérhető, és a piacról feltettük, hogy teljes, ami biztosítja az egyértelmű replikáló stratégia létezését. Ennek megkonstruálása azonban rendkívül hosszadalmas, és kevésbé izgalmas az optimalizálási problémánál, így mi most (OPT') megoldására koncentrálnunk.

4.8. Tétel. *Tetszőleges olyan $X \in \mathcal{H}^\rho \setminus \tilde{\mathcal{H}}^\rho$ valószínűségi változóra, amelyre (OPT') korlátozó feltételei teljesülnek, fennáll, hogy létezik olyan $q \in \mathcal{Q}$ kvantilisfüggvény, amellyel $\tilde{X} := q(W)$ -re $\mathcal{D}_h[X] \geq \mathcal{D}_h[\tilde{X}]$ teljesül.*

Ha pedig rögzített $\varepsilon > 0$ mellett X az ε sugarú 2-Wasserstein gömb belsejében fekszik, akkor az egyenlőtlenség szigorú.

Bizonyítás. Egy az (OPT') korlátjait teljesítő X valószínűségi változóval $a > 0$ -ra definiáljuk valószínűségi változók $X_a := \hat{F}_X(W) + a$ családját. Először tegyük fel, hogy X az ε sugarú 2-Wasserstein gömb belsejében fekszik, azaz $d_2(X, X_T^\rho) =: b < \varepsilon$.

Definíció szerint minden $[0, 1]$ intervallumon értelmezett, monoton növekvő, balról folytonos q függvény, amelyre $q(0) = -\infty$ teljesül, kvantilisfüggvény. Az $\hat{F}_X$ kvantilisfüggvény pedig négyzetesen integrálható is, mivel minden $X \in \mathcal{H}^\rho$ valószínűségi változó négyzetesen integrálható. Ezek a tulajdonságok az $\hat{F} := \hat{F}_X + a$ függvényre is öröklődnek, vagyis $X_a = \hat{F}(W)$, ahol $\hat{F}$ kvantilisfüggvény. Ezért $X_a \in \tilde{\mathcal{H}}^\rho$, és így $\tilde{\mathcal{H}}^\rho \subset \mathcal{H}^\rho$ miatt $X_a \in \mathcal{H}^\rho$. Tehát (OPT') egyik korlátja teljesül.

A 2-Wasserstein korlát teljesüléséhez nézzük X_a -nak a viszonyítási stratégia végső kifizetésétől való 2-Wasserstein távolságát:

$$\begin{aligned} (d_2(X_a, X_T^\rho))^2 &= \int_0^1 \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(t) - \hat{F}_X(t) - a \right)^2 dt = \\ &= (d_2(X, X_T^\rho))^2 - 2a \int_0^1 \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(t) - \hat{F}_X(t) \right)^2 dt + a^2 =: (*). \end{aligned}$$

Összevetve a kvantilisfüggvények monoton tulajdonságát a 3.5 tétel eredményével az adódik, hogy egy $\mathcal{Q}_b$ -beli kvantilisfüggvény eltérése a viszonyítási stratégia kvantilisfüggvényétől minden pontban legfeljebb b , így $\hat{F}_X \in \mathcal{Q}_b$ miatt a $(*)$ kifejezés integrál tagjában az integrandus b -vel felülről becsülhető. Vagyis

$$(*) \leq b^2 + 2ab + a^2 = (a + b)^2.$$

Ezért az $a := \varepsilon - b$ választással (OPT') 2-Wasserstein korlátja teljesül. Még a kezdeti költségére vonatkozó feltételt kell biztosítanunk. Ehhez vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} E[\varrho_T X_a] &= E \left[\varrho_T \left(\hat{F}_X(W) + a \right) \right] = \\ &= E \left[\varrho_T \hat{F}_X(W) \right] + a E[\varrho_T] \leq E \left[\varrho_T \hat{F}_X(W) \right] + a, \end{aligned} \quad (1)$$

mivel a sztochasztikus diszkontfaktor várható értéke legfeljebb 1 lehet. Másrészt az 4.7 lemmát felhasználva $X \notin \tilde{\mathcal{H}}^\rho$ miatt

$$E \left[\varrho_T \hat{F}_X(W) \right] < E[\varrho_T X] \leq X_0^\rho. \quad (2)$$

Az utóbbi egyenlőtlenségnél az X kezdeti költségére (OPT')-ban adott korlátot használtuk fel. (1) és (2) alapján az adódik, hogy az $a := X_0^\rho - E \left[\varrho_T \hat{F}_X(W) \right] > 0$ választással X_a -ra nem sérül a kezdeti költség korlát. Vagyis az

$$a := \min \left\{ \varepsilon - b, X_0^\rho - E \left[\varrho_T \hat{F}_X(W) \right] \right\} > 0$$

választás esetén (OPT') minden korlátja fennáll X_a -ra. Ráadásul a torzított kockázati mértéket sikerült csökkenteni, hiszen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_h[\tilde{X}] &= \mathcal{D}_h[X_a] = - \int_0^1 \hat{F}_{X_a}(u) h(u) du \stackrel{(\diamond)}{=} \\ &\stackrel{(\diamond)}{=} - \int_0^1 \hat{F}_X(u) h(u) du - a \int_0^1 h(u) du = \\ &= - \int_0^1 \hat{F}_X(u) h(u) du - a = \mathcal{D}_h[X] - a < \mathcal{D}_h[X]. \end{aligned}$$

A $(\diamond)$ egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $\hat{F}_{X_a}(t) = \hat{F}_X(t) + a$. Ez azért igaz, mert $W \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$ miatt

$$\begin{aligned} F_{X_a}(t) &= \mathbb{P}\left(\hat{F}_X(W) + a \leq t\right) = \mathbb{P}(W \leq F_X(t - a)) = F_X(t - a), \\ \text{és így } \hat{F}_{X_a}(t) &= \hat{F}_X(t - a) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq t - a\} = \\ &= \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) + a \geq t\}. \end{aligned}$$

Ha X a 2-Wasserstein gömb határán van, akkor a bizonyítás eddigi részeiből adódik, hogy az $\tilde{X} = X_0 = \hat{F}_X(W)$ valószínűségi változó kielégíti **(OPT')** megszorításait, és $\mathcal{D}_h[\tilde{X}] = \mathcal{D}_h[X]$. $\square$

4.9. Megjegyzés. A 4.8 tételben elég volt az $X \in \mathcal{H}^\rho \setminus \tilde{\mathcal{H}}^\rho$ valószínűségi változókat vizsgálni, mivel $X \in \tilde{\mathcal{H}}^\rho$ esetén az $X = q(W)$ reprezentáció fennáll, így nem releváns a torzított kockázati mérték csökkentése egy $q(W)$ alakú valószínűségi változó bevezetésével.

A 4.8 tétel megmutatta, hogy elegendő olyan stratégiákkal foglalkoznunk, amelyek végső kifizetése $\mathcal{H}^\rho$ -beli. Így **(OPT')**-ban az $E[\varrho_T X] \leq X_0^\rho$ kezdeti költség feltételt átírhatjuk jobban kezelhető alakba. A megfelelő q kvantilisfüggvénnyel $X = q(W)$, ezért

$$\begin{aligned} E[\varrho_T X] &= E[\varrho_T q(W)] \stackrel{(*)}{=} E[E[\varrho_T q(W) \mid W]] \stackrel{(\bullet)}{=} \\ &\stackrel{(\bullet)}{=} E[q(W)E[\varrho_T \mid W]] \stackrel{(\circledast)}{=} \int_0^1 q(w)E[\varrho_T \mid W = w]dw. \end{aligned}$$

A $(*)$ egyenlőségnél a teljes várható érték tételét, $(\bullet)$ -nál a $q(W)$ -nek a feltételre való mérhetőségét, $(\circledast)$ -nál pedig a várható érték integrál előállításában azt használtuk fel, hogy a definíciójának köszönhetően a W valószínűségi változó értékkészlete a $[0, 1]$ intervallum.

Ezáltal bevezethetjük kvantilisfüggvények olyan halmazát, amelynek a segítségével egy hasznos tételt tudunk kimondani az **(OPT')** optimalizálási probléma átalakíthatóságáról a megfelelő kvantilisfüggvények felett való optimalizálásra.

$$\mathcal{Q}^\rho := \left\{ q \in \mathcal{Q} \mid \int_0^1 q(w)E[\varrho_T \mid W = w]dw \leq X_0^\rho \right\}.$$

Vezessük be a következő, kvantilisfüggvények feletti optimalizálási problémát:

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}^\rho \cap \mathcal{Q}^\rho} \mathcal{D}_h(q). \quad (\text{OPT}^*)$$

4.10. Tétel (Kvantilis optimalizáció). Az (OPT^*) optimalizálási probléma megoldása egyenértékű az (OPT') probléma megoldásával olyan értelemben, hogy ha az X^* valószínűségi változóra adódik a torzított kockázati mérték infimuma (OPT') -ban, akkor (OPT^*) -ban az $\hat{F}_{X^*}$ kvantilisfüggvényre véték fel az infimum.

Ha pedig a q^* kvantilisfüggvényre véték fel az infimum (OPT^*) -ban, akkor (OPT') -ban a $q^*(W)$ valószínűségi változóra.

Bizonyítás. Defináljuk valószínűségi változóknak a következő halmazát:

$$\mathcal{G} := \tilde{\mathcal{H}}^\rho \cap \{X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{P}) \mid E[\varrho_T X] \leq X_0^\rho\}.$$

Azt szeretnénk megmutatni, hogy létezik bijekció a $\mathcal{G}$ és $\mathcal{Q}^\rho$ halmazok között. Ebből következne a tétel állítása, hiszen $\mathcal{G}$ -ben olyan valószínűségi változók vannak, amelyek (OPT') minden korlátozó feltételének megfelelnek a 2-Wasserstein korlátot leszámítva, $\mathcal{Q}_\varepsilon$ pedig épp olyan valószínűségi változók halmaza, amelyekre ez a korlát teljesül.

Térjünk rá a $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{Q}^\rho$ bijekció megkonstruálására. Mivel $\mathcal{Q}^\rho$ -ben a kezdeti költség feltételnek van kulcs jelentősége, így $\mathcal{G}$ -ben is a kezdeti költség feltételt próbáljuk meg átalakítani. A 4.3 tételből adódik, hogy tetszőleges $X \in \mathcal{G}$ -re $X \in \mathcal{G} \subset \mathcal{H}^\rho$ miatt $X = \hat{F}_X(W)$ majdnem mindenütt. A W által generált σ -algebrát $\sigma(W)$ -vel jelölve

$$\begin{aligned} E[\varrho_T X] &= E[\varrho_T \hat{F}_X(W)] \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} E \left[E \left[\varrho_T \hat{F}_X(W) \mid \sigma(W) \right] \right] \stackrel{(\bullet)}{=} E \left[\hat{F}_X(W) E[\varrho_T \mid \sigma(W)] \right]. \end{aligned}$$

A $(*)$ egyenlőségnél a teljes várható érték tételét, $(\bullet)$ -nál pedig azt használtuk fel, hogy $\hat{F}_X(W)$ mérhető $\sigma(W)$ -re.

Ha sikerül bizonyítani, hogy a $g(w) := \frac{d}{dw} E[\varrho_T \mathbb{1}_{\{W \leq w\}}]$ függvénnyel $g(W) = E[\varrho_T \mid \sigma(W)]$, akkor $w \in (0, 1)$ -re a

$\frac{d}{dw} E[\varrho_T \mathbb{1}_{\{W \leq w\}}] = E[\varrho_T \mid W = w]$ egyenlőség alapján

$$\begin{aligned} E[\varrho_T X] &= E[\hat{F}_X(W)g(W)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}_X(w) E[\varrho_T \mid W = w] f_W(w) dw = \\ &= \int_0^1 \hat{F}_X(w) E[\varrho_T \mid W = w] dw. \end{aligned}$$

Itt az utolsó egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy $W \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$, így W

sűrűségfüggvénye $f_W(w) = \mathbb{1}_{\{w \in [0,1]\}}$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$X \in \mathcal{G}\text{-re } E[\varrho_T X] = \int_0^1 \hat{F}_X(w) E[\varrho_T | W = w] dw \leq X_0^\rho. \quad (1)$$

Legyen $\varphi(X) := \hat{F}_X$. Mivel X négyzetesen integrálható, így $\varphi(X) \in \mathbb{L}^2([0,1])$. Ezt összevetve az (1) egyenlőtlenséggel $\varphi(X) \in \mathcal{Q}^\rho$ adódik. Az $g(W) = E[\varrho_T | \sigma(W)]$ egyenlőség igazolásához a $\mathbb{P}$ -ről térjünk át a $\mathbb{Q}$ valószínűségi mértékre a $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{\varrho_T}{E[\varrho_T]}$ Radon-Nikodyn derivált segítségével. Ekkor W -nek a $\mathbb{Q}$ -szerinti sűrűségfüggvényét $f_W^\mathbb{Q}$ -val jelölve

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{d}{dw} E[\varrho_T \mathbb{1}_{\{W \leq w\}}] = E[\varrho_T] \frac{d}{dw} E \left[\frac{\varrho_T}{E[\varrho_T]} \mathbb{1}_{\{W \leq w\}} \right] = \\ &= E[\varrho_T] \frac{d}{dw} E^\mathbb{Q} [\mathbb{1}_{\{W \leq w\}}] = E[\varrho_T] f_W^\mathbb{Q}(w). \end{aligned}$$

Annak a megmutatásához, hogy adott Y és Z valós értékű valószínűségi változók majdnem mindenütt megegyeznek, elegendő belátni, hogy tetszőleges korlátos valószínűségi változóval beszorozva őket, a szorzatok várható értéke egyenlő. Ekkor ugyanis

$$\begin{aligned} \int (Y - Z) \mathbb{1}_{\{Z < Y\}} d\mathbb{P} &= E[(Y - Z) \mathbb{1}_{\{Z < Y\}}] = \\ &= E[(Y - Z) \mathbb{1}_{\{Z > Y\}}] = \int (Y - Z) \mathbb{1}_{\{Z > Y\}} d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

amiből azonnal következik, hogy $Y = Z$ $\mathbb{P}$ -majdnem mindenütt.

Tetszőleges $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, Borel-mérhető függvénnyel

$$E[h(W) E[\varrho_T | \sigma(W)]] = E[E[h(W) \varrho_T | \sigma(W)]] = E[h(W) \varrho_T]$$

adódik, ahol az első egyenlőségnél $h(W)$ -nek a $\sigma(W)$ -mérhetőségét, a másodiknál pedig a teljes várható érték tételét használtuk fel. Másrészt

$$\begin{aligned} E[h(W) g(W)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(w) E[\varrho_T] f_W^\mathbb{Q}(w) f_W(w) dw = \\ &= E[\varrho_T] \int_0^1 h(w) f_W^\mathbb{Q}(w) dw = E[\varrho_T] E^\mathbb{Q}[h(W)] = \\ &= E[\varrho_T] E \left[h(W) \frac{\varrho_T}{E[\varrho_T]} \right] = E[h(W) \varrho_T]. \end{aligned}$$

Vagyis $E[h(W)g(W)] = E[h(W)E[\varrho_T|\sigma(W)]]$, amiből következik, hogy $g(W) = E[\varrho_T|\sigma(W)]$.

A φ leképezés $\varphi^{-1} : \mathcal{Q}^\rho \rightarrow \mathcal{G}$ inverzét a következőképpen definiáljuk: Tetszőleges $q \in \mathcal{Q}^\rho$ -ra legyen $\varphi^{-1}(q) := q(W)$. Mivel W $\mathcal{F}_T$ -mérhető, így $\varphi^{-1}(q)$ is az, és $q \in \mathbb{L}^2([0, 1])$, így $\varphi^{-1}(q) \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{P})$. Ezentúl $q \in \mathcal{Q}^\rho$ miatt $\int_0^1 q(w)E[\varrho_T|W=w]dw \leq X_0^\rho$, így az (1) egyenlőségben $\hat{F}_X$ helyett q -t írva $E[\varrho_T\varphi^{-1}(q)] \leq X_0^\rho$ adódik. $\varphi^{-1}(q) \in \mathcal{G}$ teljesüléséhez már csupán azt kell megmutatni, hogy a $(\varphi^{-1}(q), X_T^\rho) = (q(W), X_T^\rho)$ valószínűségi vektorváltozónak (W, X_T^ρ) -hez hasonlóan $C_{\pi, \rho}$ a kopulája. Sklar tétele szerint $F_{W, X_T^\rho}(u, v) = C_{W, X_T^\rho}(F_W(u), F_{X_T^\rho}(v))$.

q monoton növekedésének a következtében pedig $F_{q(W)}(u) = \mathbb{P}(q(W) \leq u) = \mathbb{P}(W \leq q^{-1}(u)) = F_W(q^{-1}(u))$, ezért

$$\begin{aligned} F_{W, X_T^\rho}(q^{-1}(u), v) &= C_{\pi, \rho}(F_W(q^{-1}(u)), F_{X_T^\rho}(v)) = \\ &= C_{\pi, \rho}(F_{q(W)}(u), F_{X_T^\rho}(v)) = F_{q(W), X_T^\rho}(u, v). \end{aligned}$$

Ezzel a tétel állítását beláttuk. $\square$

Arról azonban egyelőre még semmit sem tudunk mondani, hogy az (OPT*) probléma kvantilisfüggvénye és ezáltal a (OPT') probléma valószínűségi változója, amelyre a torzított kockázati mérték infimuma felvétetik, egyértelmű-e. Ezért vezessünk be egy újabb optimalizációs problémát, amelynek a segítségével már az egyértelműséget is igazolni tudjuk. Tetszőleges $c > 0$ -ra nézzük a következő problémát:

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathcal{Q}^\rho} \left(\mathcal{D}_h(q) + c \left(d_2 \left\{ q, \hat{F}_{X_T^\rho} \right\} \right)^2 \right). \quad (\text{OPT}^\circ)$$

4.11. Lemma. Legyen K egy konvex halmaz, f pedig egy szigorúan konvex függvény. Amennyiben az $\inf_{x \in K} f(x)$ problémának létezik megoldása, akkor az x^* , amelyre az infimum felvétetik, egyértelmű.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az egymástól különböző K -beli x_1^* -ra és x_2^* -ra $f(x_1^*) = f(x_2^*) = \inf_{x \in K} f(x)$. Mivel K konvex, ezért tetszőleges $\alpha \in [0, 1]$ -re $x_\alpha := \alpha x_1^* + (1 - \alpha)x_2^* \in K$. Így a szigorúan konvex f -re a Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva a következő adódik:

$$f(x_\alpha) < \alpha f(x_1^*) + (1 - \alpha)f(x_2^*) = \inf_{x \in K} f(x).$$

Ez ellentmond annak, hogy az infimum x_1^* -ra illetve x_2^* -ra vétetik fel. $\square$

4.12. Tétel. Legyen $\varepsilon > 0$ a viszonyítási stratégia körüli 2-Wasserstein gömb sugara. Létezik olyan $\bar{c} > 0$, hogy minden $c \in (0, \bar{c})$ -re a kvantilisfüggvény, amelyre az (OPT[°]) problémában az infimum felvételik:

$$q_c^*(v) = g^\perp(v; c, \lambda_1, \lambda_2), \text{ ahol}$$

$$g(v; c, \lambda_1, \lambda_2) = \hat{F}_{X_T^\rho}(v) + \frac{\gamma(v) - \lambda_2 \psi(v)}{2(\lambda_1 + c)}.$$

Ráadásul ez az egyetlen kvantilisfüggvény, amely az (OPT[°]) problémában az infimumot adja.

Itt γ jelöli a torzítási súlyfüggvényt, $\psi(v) = E[\varrho_T | W = v]$, a λ_1 és λ_2 Lagrange-együtthatókra pedig az alábbi két lehetőség egyike teljesül:

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ úgy, hogy $\varepsilon^2 = \int_0^1 \left(q_c^*(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv$ és $X_0^\rho = \int_0^1 q_c^*(v) \psi(v) dv$.
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ úgy, hogy $\varepsilon^2 = \int_0^1 \left(q_c^*(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv$.

Bizonyítás. Legyen $c > 0$ tetszőleges. A keresendő kvantilisfüggvények a $\mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathcal{Q}^\rho$ halmazból valók. Ez biztosítja a 2-Wasserstein illetve a kezdeti költség korlátot, vagyis az $f_1(q) = \int_0^1 \left(q_c^*(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv - \varepsilon^2$ és $f_2(q) = \int_0^1 q_c^*(v) \psi(v) dv - X_0^\rho$ függvények nempozitivitását. A 3.5 tételbeli bizonyítással teljesen analóg módon megmutatható, hogy ezen függvények konvexek, és az (OPT[°]) probléma optimalizálandó függvénye is konvex, mivel két konvex függvény összege. Így a $W = \mathcal{Q}$, $n = 2$ és $m = 0$ esetre alkalmazható a 3.2 lemma, tehát a következő feladatot

kell megoldanunk:

$$\begin{aligned}
& \sup_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} \inf_{q \in \mathcal{Q}} \mathcal{G}(\lambda_1, \lambda_2; q), \text{ ahol} \\
\mathcal{G}(\lambda_1, \lambda_2; q) &= \left(- \int_0^1 q(v) \gamma(v) dv + c \int_0^1 \left(q(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv \right) + \\
& \lambda_1 \left(\int_0^1 \left(q(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv - \varepsilon^2 \right) + \lambda_2 \left(\int_0^1 (q_c^*(v) \psi(v)) dv - X_0^\rho \right) = \\
&= - \int_0^1 q(v) \gamma(v) dv + (\lambda_1 + c) \left(\int_0^1 \left(q(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv - \varepsilon^2 \right) + \\
& \quad \lambda_2 \left(\int_0^1 (q_c^*(v) \psi(v)) dv - X_0^\rho \right) + c\varepsilon^2 = \\
&= (\lambda_1 + c) \int_0^1 \left(q(v) - \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(v) + \frac{\gamma(v) - \lambda_2 \psi(v)}{2(\lambda_1 + c)} \right) \right)^2 dv - \\
& \quad (\lambda_1 + c) \int_0^1 \left(\hat{F}_{X_T^\rho}(v) + \frac{\gamma(v) - \lambda_2 \psi(v)}{2(\lambda_1 + c)} \right)^2 dv + \\
& \quad (\lambda_1 + c) \int_0^1 \left(\hat{F}_{X_T^\rho}^2(v) - \varepsilon^2 \right) dv + c\varepsilon^2 - \lambda_2 X_0^\rho.
\end{aligned}$$

A 3.5 tételben látott teljes négyzetté alakításos technikával sikerült $\mathcal{G}(\lambda_1, \lambda_2; q)$ -et olyan alakúra hozni, amelynek csak az első tagja függ q -tól, így rögzített $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ -ra a belső optimalizáláshoz elég ezt a tagot q -ban minimalizálni. Az optimum épp $q(v; c, \lambda_1, \lambda_2)$ -nek a $\mathcal{Q}$ -ra való izotonikus vetületénél vétetik fel. A későbbiek szempontjából nem fontos a külső optimalizálást is elvégezni λ_1, λ_2 -re. Azt viszont megmutatjuk, hogyha elvégeznénk, akkor a kvantilisfüggvény, amelyre az optimum felvétetik, egyértelmű.

Ha teljesül, hogy a $\mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathcal{Q}^\rho$ halmaz konvex, az $f(q) := \mathcal{D}_h(q) + c \left(d_2 \left\{ q, \hat{F}_{X_T^\rho} \right\} \right)^2$ függvény pedig szigorúan konvex, akkor a 4.11 lemmából következik az egyértelműség. Legyen $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathcal{Q}^\rho$, és tetszőleges $\alpha \in [0, 1]$ -re $q_\alpha := \alpha q_1 + (1 - \alpha) q_2$. Ekkor

$$\begin{aligned}
a &:= f(q_\alpha) = - \int_0^1 (\alpha q_1(v) + (1 - \alpha) q_2(v)) \gamma(v) dv + \\
& \quad c \int_0^1 \left(\alpha q_1(v) + (1 - \alpha) q_2(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv \text{ és} \\
b &:= \alpha f(q_1) + (1 - \alpha) f(q_2) = - \alpha \int_0^1 q_1(v) \gamma(v) dv - (1 - \alpha) \int_0^1 q_2(v) \gamma(v) dv + \\
& \quad c \alpha \int_0^1 \left(q_1(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv + c(1 - \alpha) \int_0^1 \left(q_2(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv.
\end{aligned}$$

A Jensen-egyenlőtlenség szerint f szigorú konvexitásához elegendő be-

láttni, hogy $a - b < 0$, ami $c > 0$ miatt ekvivalens $\frac{a-b}{c} < 0$ -val.

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{c} &= \int_0^1 (\alpha^2 q_1^2(v) + (1-\alpha)^2 q_2^2(v) + 2\alpha(1-\alpha)q_1(v)q_2(v)) dv - \\ &\quad \int_0^1 (\alpha q_1^2(v) + (1-\alpha)q_2^2(v)) dv = \\ &= \int_0^1 (\alpha q_1(v)^2 + (1-\alpha)q_2(v))^2 - (\alpha q_1^2(v) + (1-\alpha)q_2^2(v)) dv < 0, \end{aligned}$$

hiszen a szigorúan konvex $x \mapsto x^2$ függvényre alkalmazva a Jensen-egyenlőtlenséget, adódik az integrandus negativitása.

$\mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathcal{Q}^\rho$ konvexitásához pedig belátjuk, hogy $q_\alpha \in \mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathcal{Q}^\rho$. Egyrészt

$$\begin{aligned} \int_0^1 q_\alpha(v)\psi(v)dv &= \alpha \int_0^1 q_1(v)\psi(v)dv + (1-\alpha) \int_0^1 q_2(v)\psi(v)dv \leq \\ &\leq \alpha X_0^\rho + (1-\alpha)X_0^\rho = X_0^\rho, \text{ így } q_\alpha \in \mathcal{Q}^\rho. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (q_\alpha(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v))^2 dv = \\ &= \int_0^1 (\alpha^2 q_1^2(v) + (1-\alpha)^2 q_2^2(v) + \hat{F}_{X_T^\rho}^2(v)) dv + \\ &\int_0^1 (2\alpha(1-\alpha)q_1(v)q_2(v) - 2\alpha q_1(v)\hat{F}_{X_T^\rho}(v) - 2(1-\alpha)q_2(v)\hat{F}_{X_T^\rho}(v)) dv = \\ &= \alpha^2 \int_0^1 (q_1(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v))^2 dv + (1-\alpha)^2 \int_0^1 (q_2(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v))^2 dv + \\ &2\alpha(1-\alpha) \int_0^1 (q_1(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v)) (q_2(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v)) dv \stackrel{(*)}{\leq} \alpha^2 \varepsilon^2 + (1-\alpha)^2 \varepsilon^2 + \\ &\alpha(1-\alpha) \int_0^1 (q_1(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v))^2 + (q_2(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v))^2 dv \stackrel{(\otimes)}{\leq} \\ &\stackrel{(\otimes)}{\leq} (\alpha^2 + (1-\alpha)^2)\varepsilon^2 + 2\alpha(1-\alpha)\varepsilon^2 = \varepsilon^2, \text{ így } q_\alpha \in \mathcal{Q}_\varepsilon. \end{aligned}$$

A $(*)$ és a $(\otimes)$ egyenlőtlenségeknél kihasználtuk, hogy $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_\varepsilon$, $(*)$ -nál pedig azt is, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számokra $2ab \leq a^2 + b^2$.

Már csak a Lagrange-együtthatókra vonatkozó állítást kell igazolni. Legyen $c > 0$ kellően kicsi. Megmutatjuk, hogy $\lambda_1 > 0$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\lambda_1 = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} g(v; c, \lambda_1, \lambda_2) &= \hat{F}_{X_T^\rho}(v) + \frac{\gamma(v) - \lambda_2 \psi(v)}{2c} =: g_c(v, \lambda_2) \text{ és} \\ (d_2 \{g_c^\perp, F_{X_T^\rho}\})^2 &= \int_0^1 (g_c^\perp(v, \lambda_2) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v))^2 dv = \frac{1}{4c^2} \int_0^1 (\gamma(v) - \lambda_2 \psi(v))^2 dv. \end{aligned}$$

Ha sikerül megmutatni, hogy $\int_0^1 (\gamma(v) - \lambda_2 \psi(v))^2 dv > 0$, akkor $\exists \bar{c} > 0$, hogy minden $c \in (0, \bar{c})$ esetén $d_2 \left\{ g_c^\perp, F_{X_T^\rho} \right\} > \varepsilon$, ami ellentmond a kvantilisfüggvényekre vonatkozó 2-Wasserstein korlátnak. Ezért $\lambda_1 = 0$ ellentmondásra vezet. A 3.4 megjegyzésből pedig következik, hogy $\lambda_1 > 0$ esetén $\varepsilon^2 = \int_0^1 \left(q_c^*(v) - \hat{F}_{X_T^\rho}(v) \right)^2 dv$, $\lambda_2 > 0$ esetén pedig $X_0^\rho = \int_0^1 q_c^*(v) \psi(v) dv$.

A $\int_0^1 (\gamma(v) - \lambda_2 \psi(v))^2 dv > 0$ egyenlőtlenséget nem nehéz igazolni, hiszen $\gamma(v) = \lambda_2 \psi(v)$ fennállása során a 4.7 lemma következtében az X_0^ρ kezdeti költség szigorúan nagyobb lenne $\int_0^1 \psi(v) \hat{F}_{X_T^\rho}(v) dv$ -nél. Ez azonban ellentmondás, hiszen $\lambda_2 > 0$ esetén szükségszerűen egyenlőek. $\square$

4.12.1. Következmény. A 4.12 tételből kapott $\bar{c}$ -vel az (OPT°) probléma infimumát adó kvantilisfüggvény minden $c \in (0, \bar{c})$ -ra azonos, és épp ez adja az infimumot a (OPT^*) problémában is.

Bizonyítás. A 4.12 tétel szerint a 2-Wasserstein korlát egyenlőséggel teljessül, így az (OPT°) probléma átírható az alábbi alakba:

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathcal{Q}^\rho} (\mathcal{D}_h(q) + c\varepsilon^2) = \inf_{q \in \mathcal{Q}_\varepsilon \cap \mathcal{Q}^\rho} (\mathcal{D}_h(q)) + c\varepsilon^2.$$

Ebből látszik, hogy valóban nem függ c -től az optimális kvantilisfüggvény. Ráadásul az (OPT^*) problémában a duál függvény épp ugyanilyen alakú egy konstans tagtól eltekintve, így ugyanarra a kvantilisfüggvényre adódik az optimum, mint (OPT°) -ban. $\square$

Ebből már következik, hogy az (OPT^*) probléma infimumát adó kvantilisfüggvény valóban egyértelmű. Ezt q^* -gal jelölve a 4.10 tétel alapján megkapjuk az (OPT°) probléma infimumát adó $X^* = q^*(W)$ valószínűségi változót. Tehát az is kijött, hogy erre a problémára az infimumot adó valószínűségi változó egyértelmű.

Most már minden szükséges eszköz a birtokunkban van ahhoz, hogy rátérjünk az eredetileg felmerülő optimalizálási problémára:

$$\inf_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{D}_h[X_T^\pi] \quad (\text{OPT})$$

úgy, hogy $X_T^\pi \in \mathcal{H}^\rho$, $E[\varrho_T X_T^\pi] \leq E[\varrho_T X_T^\rho] = X_0^\rho$ és $d_2(X_T^\pi, X_T^\rho) \leq \varepsilon$.

4.13. Tétel. *Létezik olyan π^* stratégia, amelyre az infimum (OPT) -ban felvétetik, vagyis létezik megoldás az (OPT) optimalizálási problémára.*

Erre a stratégiára teljesül, hogy $\mathcal{D}_h[X_T^{\pi^*}] \leq \mathcal{D}_h[X_T^\rho]$, $E[\varrho_T X_T^{\pi^*}] \leq X_0^\rho$ és $d_2(X_T^\pi, X_T^\rho) = \varepsilon$. Ráadásul ha az (OPT) problémában a kockázati mérték nagyobb, mint az (OPT)-ból a kopula -és a költségvetési korlát elhagyásával adódó problémában, akkor a π^* megoldás egyértelmű.

Bizonyítás. A 4.12.1 következményből kapott X^* valószínűségi változó az (OPT') probléma megoldását adja. Az általunk vizsgált piacmodellek teljessége miatt létezik olyan $\pi^* \in \mathcal{A}$ stratégia, amely éppen X^* -ot valósítja meg. Ezzel kaptunk egy megoldást az (OPT) problémára.

A 4.12 tételből azonnal következik a költségvetési korlát fennállása, illetve az, hogy a 2-Wasserstein korlát egyenlőséggel teljesül.

A kockázati mértékek közti egyenlőtlenség fennállásához elegendő megmutatni, hogy az (OPT') probléma megoldását adó X^* valószínűségi változóra teljesül, hogy $\mathcal{D}_h[X^*] \leq \mathcal{D}_h[X_T^\rho]$. Ehhez megkonstruálunk egy olyan valószínűségi változót, amely kielégíti (OPT') korlátjait és kockázati mértéke megegyezik a viszonyítási stratégiához tartozó változó kockázati mértékével. Ebből adódik, hogy X^* kockázati mértéke legfeljebb ennyi. Vegyük az $\hat{F}_{X_T^\rho}(W)$ valószínűségi változót. Ennek épp $\hat{F}_{X_T^\rho}$ a kvantilisfüggvénye, hiszen $F_{X_T^\rho}$ az az eloszlásfüggvény, amelybe behelyettesítve önmagát $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású változót kapunk. Nyilván $\hat{F}_{X_T^\rho} \in \mathcal{Q}_\varepsilon$ és $F_{X_T^\rho}(W) \in \tilde{\mathcal{H}}^\rho \subset \mathcal{H}^\rho$. Az 4.7 lemma szerint pedig a következőt egyenlőséget kapjuk:

$$E \left[\varrho_T \hat{F}_{X_T^\rho}(W) \right] \leq E [\varrho_T X_T^\rho] = X_0^\rho.$$

Ezentúl $\mathcal{D}_h \left[\hat{F}_{X_T^\rho}(W) \right] = \mathcal{D}_h[X_T^\rho]$, ugyanis $\hat{F}_{X_T^\rho}(W)$ és X_T^ρ azonos eloszlású $\mathbb{P}$ szerint.

Az egyértelműség megmutatásához elég belátni, hogy a (OPT) probléma megoldásához tartozó $\check{X}$ végső kifizetés $g(W)$ alakú valamely g kvantilisfüggvénnyel, hiszen a 4.12.1 következményből azt kaptuk, hogy a $g(W)$ alakú megoldása (OPT')-nak egyértelmű. (OPT)-ból a kopula- és költségvetési korlát elhagyásával az alábbi problémát kapjuk:

$$\inf_{\pi \in \mathcal{A}} \mathcal{D}_h[X_T^\pi] \text{ úgy, hogy } X_T^\pi \in \mathcal{F}_T \text{ és } d_2(X_T^\pi, X_T^\rho) \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Ennek a megoldásához tartozó végső kifizetés valószínűségi változót jelölje $\overset{\circ}{X}$, a megfelelő kvantilisfüggvényt pedig $\overset{\circ}{g}$.

Feltesszük, hogy $\mathcal{D}_h[\check{X}] < \mathcal{D}_h[\overset{\circ}{X}]$ és $\check{X} \neq \check{g}(W)$ $\mathbb{P}$ -majdnem mindenütt, ahol $\check{g}$ az $\check{X}$ -hez tartozó kvantilisfüggvény. Megmutatjuk, hogy

ez ellentmondásra vezet. Ehhez $\check{g}(W)$ és $\overset{\circ}{g}(W)$ lineáris kombinációjából létrehozunk egy olyan valószínűségi változót, amelyre teljesülnek (OPT) feltételei, viszont $\check{X}$ -nél kisebb a torzított kockázati mértéke. $\omega \in [0, 1]$ -re legyen

$$X_\omega = \omega \overset{\circ}{g}(W) + (1 - \omega) \check{g}(W).$$

Mivel $W \overset{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$ miatt $\mathbb{P}(\check{g}(W) \leq x) = \mathbb{P}(W \leq F_{\check{X}}(x)) = F_{\check{X}}(x)$, így $\check{g}(W)$ és $\check{X}$ azonos eloszlású, vagyis $\check{g}(W)$ az (OPT) 2-Wasserstein korlátjának köszönhetően X_T^ρ ε -sugarú 2-Wasserstein gömjében fekszik.

(1) korlátja miatt ugyanez $\overset{\circ}{g}(W)$ -re is teljesül, így

$$\begin{aligned} d_2^2(X_T^\pi, X_\omega) &= \int_0^1 \left(\omega \overset{\circ}{g}(u) + (1 - \omega) \check{g}(u) - \hat{F}_{X_T^\rho}(u) \right)^2 du \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \int_0^1 \left(\omega \overset{\circ}{g}(u) - \omega \hat{F}_{X_T^\rho}(u) \right)^2 du + \int_0^1 \left((1 - \omega) \check{g}(u) - (1 - \omega) \hat{F}_{X_T^\rho}(u) \right)^2 du \leq \\ &\leq \omega^2 \varepsilon^2 + (1 - \omega)^2 \varepsilon^2 \stackrel{(\circledast)}{\leq} \varepsilon^2. \end{aligned}$$

(*)-nál a Jensen-egyenlőtlenséget alkalmaztuk az $x \mapsto x^2$ konvex függvényre, $(\circledast)$ -nál pedig azt használtuk ki, hogy $\omega \in [0, 1]$ -re $2\omega \geq 2\omega^2$. Tehát a 2-Wasserstein korlát teljesül X_ω -ra.

Másrészt mivel kvantilisfüggvények lineáris kombinációja kvantilisfüggvény, így a $q(u) = \omega \overset{\circ}{g}(u) + (1 - \omega) \check{g}(u)$ kvantilisfüggvénnyel $X_\omega = q(W)$, ezért $X_\omega \in \tilde{\mathcal{H}}^\rho \subset \mathcal{H}^\rho$. X_ω kezdeti költsége pedig

$$E[\varrho_T X_\omega] = \omega E[\varrho_T \overset{\circ}{g}(W)] + (1 - \omega) E[\varrho_T \check{g}(W)] = \omega E[\varrho_T \overset{\circ}{X}] + (1 - \omega) E[\varrho_T \check{g}(W)]$$

kihasználva, hogy $W \overset{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0, 1)$ miatt $\overset{\circ}{X}$ és $\overset{\circ}{g}(W)$ azonos eloszlású $\mathbb{P}$ -szerint. Mivel a 4.7 lemma miatt $E[\varrho_T \check{g}(W)] < E[\varrho_T \overset{\circ}{X}] \leq X_0^\rho$, így $X_0^\rho \geq E[\varrho_T \overset{\circ}{X}]$ esetén $E[\varrho_T X_\omega] < X_0^\rho$, tehát $\forall \omega \in [0, 1]$ -re X_ω teljesíti (OPT) feltételeit, és

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_h[X_\omega] &\stackrel{(\diamond)}{=} \omega \mathcal{D}_h[\overset{\circ}{g}(W)] + (1 - \omega) \mathcal{D}_h[\check{g}(W)] \stackrel{(\bullet)}{<} \\ &\stackrel{(\bullet)}{<} \omega \mathcal{D}_h[\overset{\circ}{X}] + (1 - \omega) \mathcal{D}_h[\check{X}] = \mathcal{D}_h[\check{X}], \end{aligned} \tag{2}$$

ami ellentmondás. $(\diamond)$ -ál a torzított kockázati mérték linearitását, $(\bullet)$ -nál pedig azt használtuk ki, hogy $\check{g}(W)$ és $\check{X}$ azonos eloszlású $\mathbb{P}$ -szerint, ezért $\mathcal{D}_h[\check{X}] = \mathcal{D}_h[\check{g}(W)]$.

Ha pedig $X_0^\rho < E[\varrho_T \overset{\circ}{X}]$, akkor X_ω -nak ω -tól való folytonos függése és $E[\varrho_T \check{g}(W)] < X_0^\rho$ miatt $\exists \omega^* \in [0, 1]$, amire $E[\varrho_T X_{\omega^*}] = X_0^\rho$. Vagyis X_{ω^*} teljesíti (OPT) korlátjait, és (2)-ben ω -t ω^* -ra cserélve adódik, hogy $\mathcal{D}_h[X_{\omega^*}] < \mathcal{D}_h[\check{X}]$. Tehát ismét ellentmondásra jutottunk. $\square$

5. Szimuláció

5.1. Piacmodell

Az eddigiek során tárgyalt elméleti háttérre alapozva a szimulációt az úgynevezett SIR-CEV piacmodellben (Stochastic Interest Rate-Constant Elasticity of Variance) végezzük el. Itt az n -dimenziós $\mathbf{W} = (\mathbf{W}_t)_{t \in [0,1]}$ $\mathbb{P}$ -Wiener folyamat generálja a természetes filtrációt, amelynek a kvadratikus kovariancia-struktúráját a $\varsigma_{i,j} = d[W^i, W^j]_t$ elemekből álló Σ mátrix írja le ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$). A sztochasztikus kamatláb átlaghoz visszahúzó tulajdonságát az alábbi, Vasicek modellből ismert dinamikával biztosítjuk:

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^n$$

A modellben az első kockázatos eszköz egy hosszú lejáratú államkötvény. A $B_t = \frac{1-e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}$, $\varkappa = \kappa - \kappa^{\mathbb{Q}}$, $\eta = \kappa\theta - \kappa^{\mathbb{Q}}\theta^{\mathbb{Q}}$ jelöléseket használva az árfolyamának a dinamikájára az alábbi egyenletet tételezzük fel:

$$dS_t^1 = ((1 + \varkappa B_t)r_t - \eta B_t)S_t^1 dt - \sigma_r B_t S_t^1 dW_t^1.$$

$\kappa^{\mathbb{Q}}$ és $\theta^{\mathbb{Q}}$ a $\mathbb{Q}$ -mértékhez definiált paraméterek, ahol $\mathbb{Q}$ -at az $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{\varrho_T}{E[\varrho_T]}$ Radon-Nikodyn derivált segítségével definiáljuk. A szimuláció során át kell térni $\mathbb{P}$ -ről a $\mathbb{Q}$ mértékre. $\varkappa$ -t és η -t azért definiáltuk így, hogy S_t^1 új mérték szerinti dinamikájában a drift "kockázatmentes" legyen. A többi kockázatos eszköz részvény. A driftjeikből, volatilitásaikból és CEV-paramétereikből álló vektorokat jelölje rendre $\boldsymbol{\mu} = (\mu^2, \dots, \mu^n)$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^2, \dots, \sigma^n)$, $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta^2, \dots, \vartheta^n)$. Az i -edik részvény árfolyamdinamikája ($i \in \{2, 3, \dots, n\}$):

$$dS_t^i = \mu^i S_t^i dt + (S_t^i)^{\vartheta^i+1} \sigma^i dW_t^i.$$

$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_t)_{t \in [0,T]}$ legyen az a vektor értékű folyamat, amelyre

$(\Sigma \boldsymbol{\lambda}_t)^1 = \frac{\eta - \varkappa r_t}{\sigma_r}$ illetve $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ -re $(\Sigma \boldsymbol{\lambda}_t)^i = \frac{\mu^i - r_t}{(S_t^i)^{\vartheta^i} \sigma^i}$ az adott eszközökre vonatkozóan a kockázat piaci ára. Ekkor feltesszük, hogy a sztochasztikus diszkontfaktor teljesíti a következő differenciálegyenletet:

$$d\varrho_t = -\varrho_t r_t dt - \varrho_t \boldsymbol{\lambda}_t d\mathbf{W}_t.$$

5.2. Paraméterek a szimulációhoz

A szimulációt 3 kockázatos eszközre végezzük el, mert ez is elegendő az eltérések szemléltetésére. Ugyanez a módszer működne több eszköz esetén is.

A portfólió kezdeti értéke $X_0^\pi = 1$, $r_0 = 0,02$ az induló spot kamatláb és a kockázatos eszközök kezdeti súlyozása

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,65 \\ 0,15 \end{pmatrix}. \text{ A befektetést 5 éves időtartamon vizsgáljuk, a 2-}$$

Wasserstein korlátot pedig $\varepsilon = 0,1$ -nek választjuk.

$$S_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0,05 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,3 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,15 \\ 0,25 & 1 & 0,35 \\ 0,15 & 0,35 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\kappa = 1, \theta = 0,025, \sigma_r = 0,015, \kappa^{\mathbb{Q}} = 1, \theta^{\mathbb{Q}} = 0,03, \sigma_r^{\mathbb{Q}} = 0,015.$$

5.3. Szimuláció menete

Első lépésként az n -dimenziós $\mathbf{W}$ Wiener-folyamatot érdemes szimulálni, hiszen ezt felhasználva már szimulálható a sztochasztikus diszkontfaktor illetve az eszközár folyamatok. Utóbbiak segítségével a viszonyítási stratégia trajektóriái is szimulálhatók. Ezt követően az

$u^{\rho,j} := F_{X_T^\rho}(x_T^{\rho,j})$ értékek generálásával szimulálható az $U^\rho \stackrel{\mathbb{P}}{\sim} \mathcal{U}(0,1)$ valószínűségi változó. Mivel X_T^ρ eloszlását nem ismerjük, így $F_{X_T^\rho}$ -et a kernel sűrűség becslés módszerével határozhatjuk meg. Ezt részletesen tárgyalja [11]. A feltételes eloszlásra vonatkozó kernel sűrűség becslésére használatos a Nadaraya-Watson formula, amely [5]-ben megtalálható. Ez alapján generálhatók $F_{\varrho_T|U^\rho}(\varrho_T^j|u^{\rho,j})$ realizációi. A kiválasztott kopula képletének a második parciális deriváltját véve meghatározható a feltételes kopula, majd a pythonban numerikus gyökkeresési módszer segítségével a feltételes inverz kopula is. Így már adódnak a W valószínűségi változónak a $\hat{C}_{\pi|\rho}(1 - F_{\varrho_T|U^\rho}(\varrho_T^j|u^{\rho,j})|u^{\rho,j})$ realizációi is.

$\psi(w) = E[\varrho_T|W = w]$ realizációinak a meghatározásához szükség van a $\mathbb{Q}$ -mérték használatára, illetve ismételten a kernel sűrűség becslés alkalmazására. Majd $F_{X_T^\rho}$ inverzét meghatározva, az $\hat{F}_{X_T^\rho}(u)$ értékekből már számítható a 4.12 tételben szereplő g függvény, amelynek az izotonikus vetülete lesz a q^* optimális kvantilisfüggvény.

q^* és W realizációiból generálhatók $X_T^{\pi*} = q^*(W)$ realizációi.

5.4. Torzított kockázati mérték választása

A tozított kockázati mértékek összehasonlítására a befektető stratégiája és a viszonyítási stratégia közötti összefüggőség megragadására a $\zeta = 6$ paraméterű Gumbel kopulát használjuk. 4 különböző kockázati mértéket hasonlítunk össze.

5.1. Definíció. $\alpha - \beta$ kockázati mértékek családjának nevezzük az alábbi torzítási súlyfüggvénnyel rendelkező kockázati mértékek családját:

$$\gamma(v) = \frac{1}{k} (p \mathbb{1}_{\{v \leq \alpha\}} + (1-p) \mathbb{1}_{\{v > \beta\}}),$$

ahol $p \in [0, 1]$, $0 < \alpha \leq \beta < 1$ és $k = p\alpha + (1-p)(1-\beta)$ az úgynevezett normalizáló konstans.

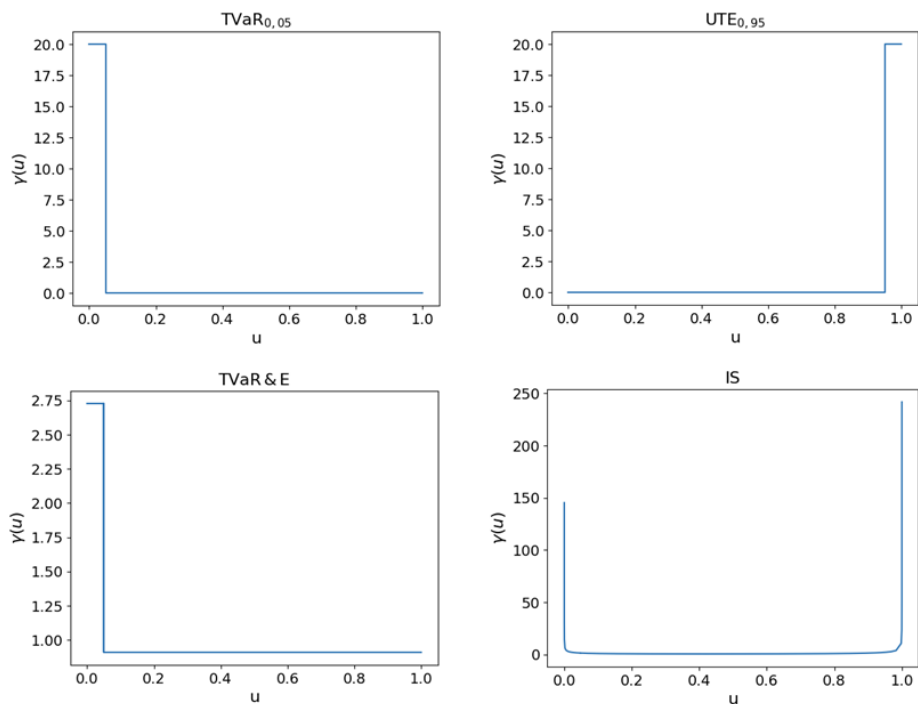
$\mathbb{1}_{\{v \leq \alpha\}}$ a veszteséget $\mathbb{1}_{\{v > \beta\}}$ pedig a nyereséget ragadja meg, így $p \in [0, \frac{1}{2}]$ esetén a mérték a nyereségre, míg $p \in (\frac{1}{2}, 1]$ esetén a veszteségre helyezi a hangsúlyt. Éppen ezért $p = 1$ esetén TVaR_α , míg $p = 0$ esetén UTE_β adódik. TVaR -t használva a befektető az alsóági veszteséget szeretné minimalizálni, míg UTE -t használva a felsőági nyereséget maximalizálni.

Ha $\alpha = \beta$ és $p \in (\frac{1}{2}, 1]$, akkor $\gamma(v) = \xi (\frac{1}{\alpha} \mathbb{1}_{\{v \leq \alpha\}} + \Upsilon)$, ahol $\xi = \frac{(2p-1)\alpha}{k}$ és $\Upsilon = \frac{1-p}{(2p-1)\alpha}$. Tehát a torzított kockázati mérték $\mathcal{D}_h[X] = \xi (\text{TVaR}_\alpha(X) - \Upsilon E[X])$, ami egy olyan befektető preferenciáinak felel meg, aki a TVaR -t minimalizálni, míg a várható nyereséget maximalizálni szeretné.

Ezek mellett az IS (Integrated Shortfall) kockázati mértéket vizsgáljuk, amely az ES továbbfejlesztése. Ez a mérték nem $\alpha - \beta$ mérték. A torzítási súlyfüggvénye rögzített $r \in (0, 1)$ -re

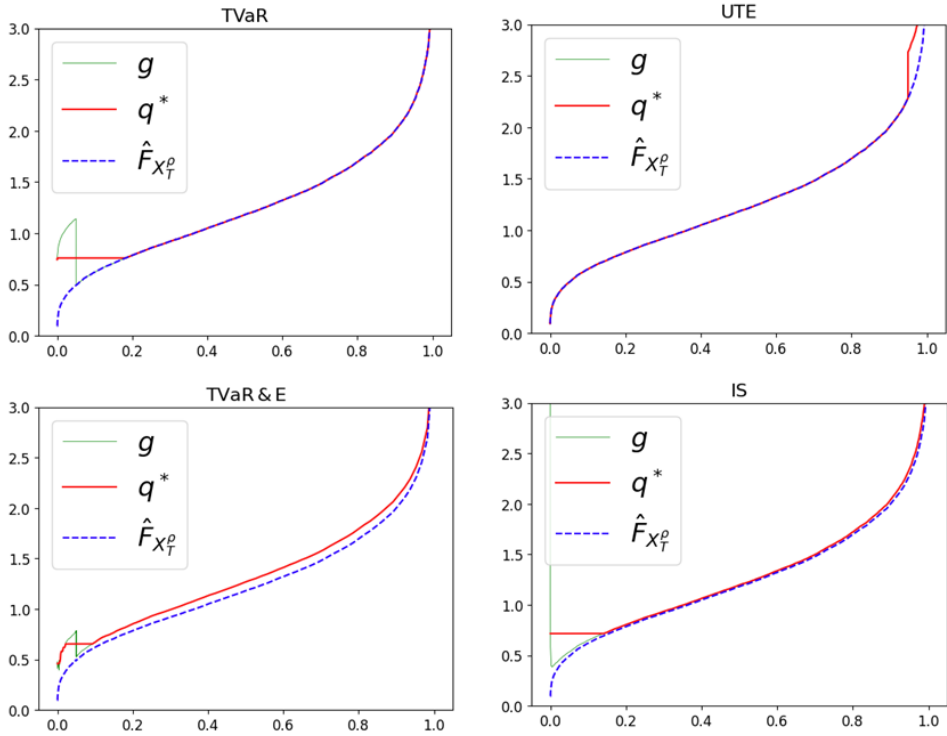
$$\gamma(v) = \frac{d}{dv} \frac{v^r}{(v^r + (1-v)^r)^{\frac{1}{r}}}.$$

A szimuláció során az $r = 0,6$ -os értéket használjuk, amely pénzügyi területen gyakori választás. Ennek motivációja [9]-ben megtalálható. Az 1. ábra a torzítási súlyfüggvények grafikonjait mutatja az adott paraméterek mellett.



1. ábra. Torzítási súlyfüggvények grafikonjai

A TVaR-nál $\alpha = 0,05$, az UTE-nál $\beta = 0,95$, a TVaR & E-nél pedig $\alpha = \beta = 0,05$ paraméterekkel szimuláltunk. Az ábra is jól mutatja, hogy az adott mérték a veszteségre vagy a nyereségre koncentrál. Ugyanezen paraméterek mellett a 2. ábrán a viszonyítási és az optimális stratégia kvantilisfüggvényeinek kapcsolatát mutattuk meg az adott torzított kockázati mértékek mellett. Előbbit piros vonal, utóbbit kék szaggatott vonal jelöli. Az ábrán zölddel jelölve látható a g függvény gráfja is, amelynek az izotonikus vetületként kaptuk meg az optimális kvantilisfüggvényt.

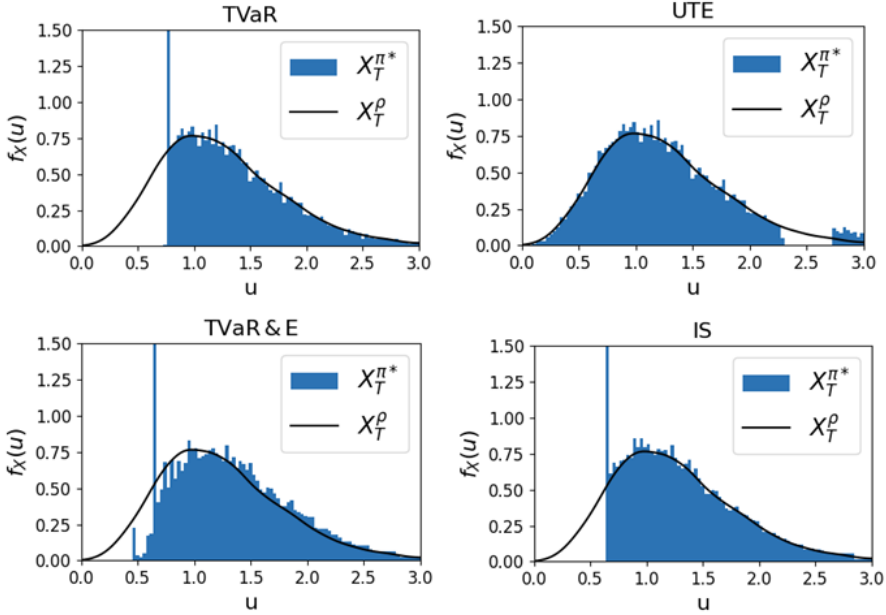


2. ábra. A viszonyítási és az optimális stratégia kvantilisfüggvényeinek összehasonlítása adott torzított kockázati mértékek mellett

A TVaR kockázati mértéket használó befektető a veszteség elkerülésében érdekelt. Ezért marad a kellően kicsi kvantilisokra q^* függvény gráfja $\hat{F}_{X_T}^\rho$ gráfja felett, majd egy ponttól kezdve a kis környezetében halad. A 4.12 tételben beláttuk, hogy a g függvény függ a torzítási súlyfüggvénytől, ami TVaR kockázati mérték esetén $\mathbb{1}_{\{v \leq \alpha\}}$. Ebből adódik, hogy g ugrik α -ban, és ez okozza az α -kvasntilis környezetében q^* -nak a vízszintes szakaszát. Az IS szintén a veszteséget ragadja meg. A kapott ábra nagyon hasonlít a TVaR-nál kapottéra, csupán a vízszintes szakasz kicsit lejjebb tolódott. Ez annak köszönhető, hogy az IS az ES-nek a megfelelő mérték szerinti integrálja. A TVaR & E esetén a várható nyereség ellentettjét is minimalizálni kell a TVaR mellett, ez okozza az optimális stratégia kvantilisfüggvényének felfelé tolódását. Az UTE-t pedig a várható nyereség maximalizálására használják, így a TVaR-ral ellentétben itt a β szintig halad a két kvantilisfüggvény egymás kis környezetében, onnantól pedig q^* gráfja $\hat{F}_{X_T}^\rho$ -jé felett halad. Az UTE esetén $\gamma(v) = \mathbb{1}_{\{v > \beta\}}$, ami q^* ugrását okozza β -ban. Ekkor

a két kvantilisfüggvénynek megfelelő eloszlások nem abszolút folytonosak egymásra nézve. Ilyen esetek teszik szükségessé a 2-Wasserstein metrika alkalmazását.

A 3. ábrán a szimulációból adódó optimális portfólió végső kifizetésének a hisztogramja látható a viszonyítási stratégia sűrűségfüggvényéhez viszonyítva.



3. ábra. Az optimális stratégia végső kifizetésének az összehasonlítása a viszonyítási stratégia végső kifizetésével

A TVaR, IS és a TVaR & E esetén a baloldali farokról a sűrűség nagy része egy a viszonyítási stratégia móduszánál valamivel kisebb értékhez tevődött át. Az IS-nél kicsit kisebb ez az érték, mint a TVaR-nál, de ettől eltekintve a két hisztogram nagyon hasonló. A TVaR & E-nél az optimális stratégia kifizetésének bal és jobb farka is vastagabb, mint az előbb említett két mérték esetén. A jobb farkok X_T^{ρ} jobb farkánál is vastagabb. Azonban az UTE esetén a legvastagabb a jobboldali farkok. A sűrűség nagy része ide tevődött át a $(q^*(\beta-), q^*(\beta+))$ intervallumról ($u = 2,5$ körüli nagyjából $0,2$ sugarú intervallum), ahol $q^*(\beta-)$ és $q^*(\beta+)$ a q^* bal- illetve jobboldali határértékét jelöli β -ban.

5.5. Kopula választása

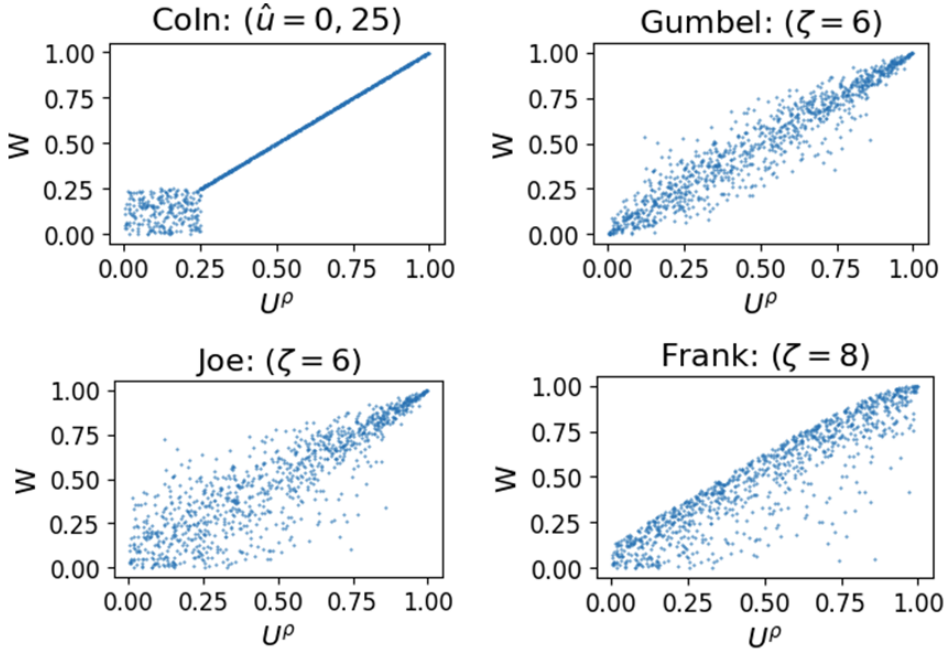
5 különböző 2-dimenziós kopulát, mint összefüggőségi struktúrát vizsgáltunk a viszonyítási és az optimális stratégia között. Ezeket az 1. táblázat tartalmazza a képletükkel és paraméterükkel együtt. Az összehasonlítás során az $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,9$ és $p = 0,75$ paraméterű $\alpha - \beta$ mértéket használom. A befektető az célja, hogy akkor legyen minél közelebb a stratégiája a viszonyítási stratégiához, amikor az jól teljesít. Ezért olyan kopulákat vizsgállok, amelyeknél a felső faroknál a legerősebb az összefüggőség.

1. táblázat: Vizsgált kopulák

Kopula	Képlet
CoIn	$\frac{1}{\hat{u}}(u \wedge \hat{u})(v \wedge \hat{u}) + ((u \wedge v) - \hat{u})^+, \quad \hat{u} \in [0, 1)$
Gumbel	$\exp \left(- \left[(-\log(u))^\zeta + (-\log(v))^\zeta \right]^{1/\zeta} \right), \quad \zeta \in [1, \infty)$
Joe	$1 - \left[(1-u)^\zeta + (1-v)^\zeta - (1-u)^\zeta(1-v)^\zeta \right]^{1/\zeta},$ $\zeta \in [1, \infty)$
Fordított Clayton	$u + v - 1 + \left[(1-u)^{-\zeta} + (1-v)^{-\zeta} - 1 \right]^{-1/\zeta},$ $\zeta \in (0, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\zeta} \log \left(1 + \frac{1}{-1+e^{-\zeta}}(e^{-\zeta u} - 1)(e^{-\zeta v} - 1) \right),$ $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

A CoIn kopula $\hat{u}$ paramétere az a határ, amely alatt függetlenség, felett pedig komonotonitás áll fenn. A másik 4 kopula az arkhimédészi kopulák családjából származik, nekik a ζ paraméterük az összefüggőség erősségét határozza meg.

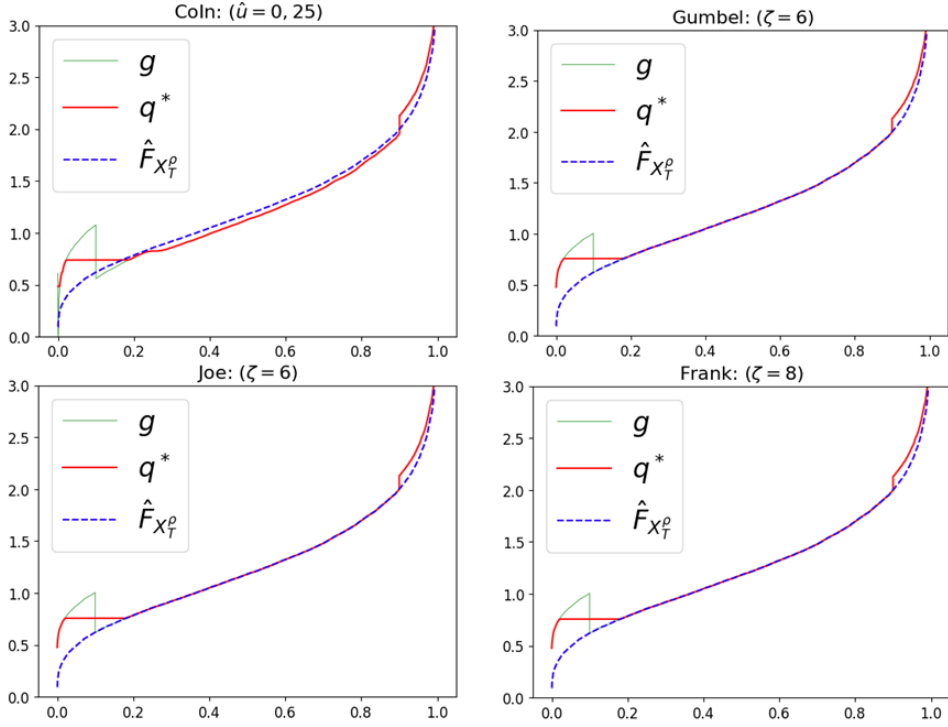
Mivel korábban a W valószínűségi változót a $\hat{C}_{\pi|\rho}$ feltételes inverz kopula segítségével definiáltuk, ahol U^ρ a feltétel, ezért a megfelelő kopulák struktúrájának az átlátásához segítséget nyújthat W és U^ρ szimulált értékeinek az összevetése az adott kopulák mellett. Ez a 4. ábrán látható.



4. ábra. W és U^ρ valószínűségi változók szimulálása az adott kopulák mellett

A Joe és Gumbel kopulánál szépen kirajzolódik, hogy a jobb faroknál a legerősebb az összefüggőség. Ezért tűnnek kifejezetten jó választásnak a portfólió optimalizációs problémához. A Frank kopula esetén kicsit gyengébb ez az összefüggőség a jobb faroknál. A CoIn kopulánál pedig az $\hat{u}$ küszöb megválasztásával szabályozni lehet, hogy melyik szinttől kezdve teljesüljön erős összefüggőség.

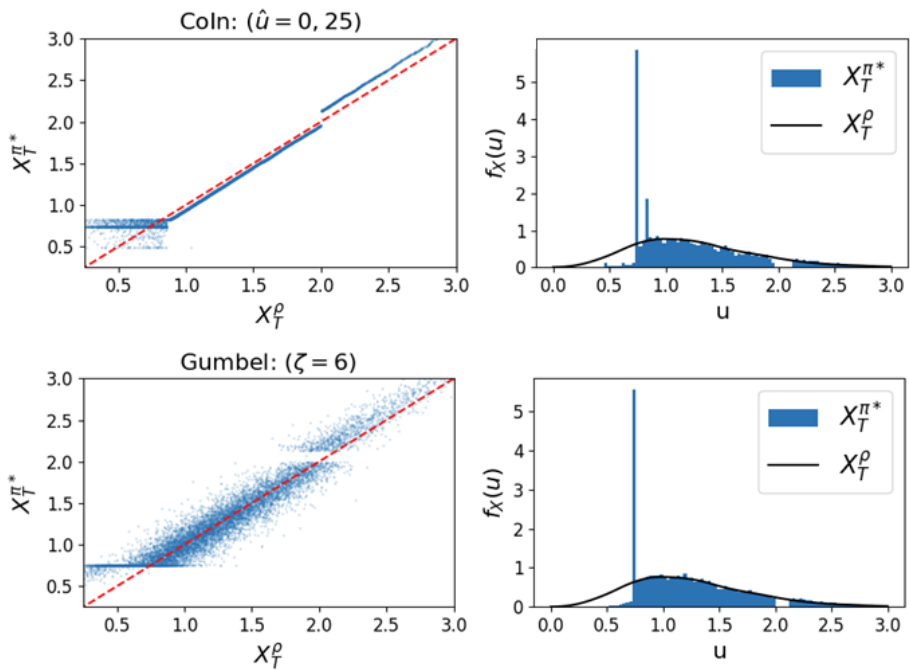
A q^* és $\hat{F}_{X_T}^\rho$ kvantilisfüggvények kapcsolatát a vizsgált kopulák esetén az 5. ábra mutatja.



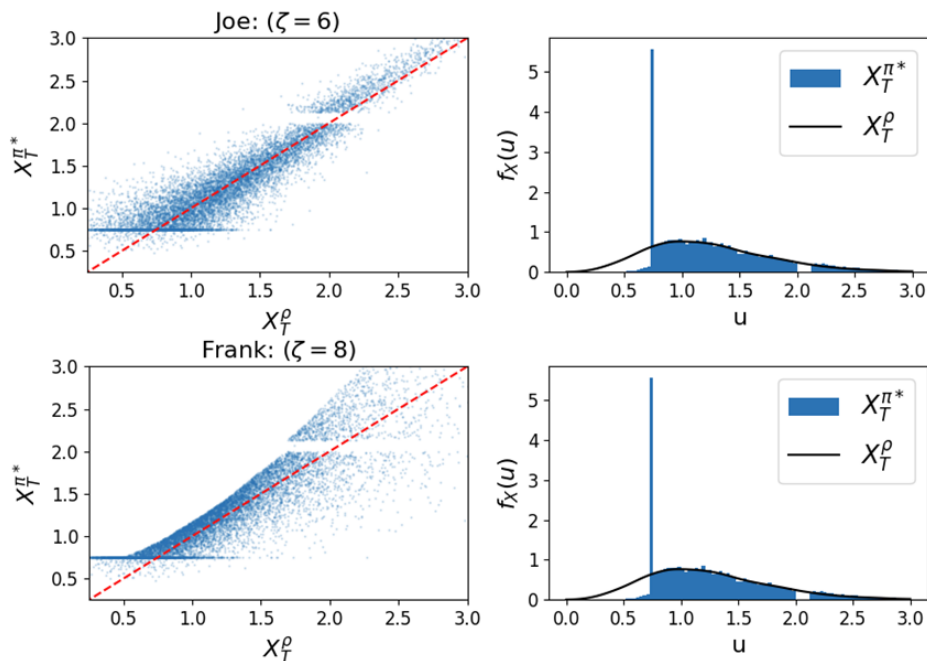
5. ábra. A viszonyítási és az optimális stratégia kvantilisfüggvényeinek összehasonlítása adott kopulák mellett

Az arkhimédészi kopulákhoz tartozó grafikonokon nem látszik eltérés, azonban a CoIn kopula esetén megjelenik q^* gráfján egy második vízszintes szakasz is. Az 1. vízszintes szakaszt a többi vizsgált kopulához hasonlóan a torzított kockázati mérték indukálja, míg a 2.-at az $\hat{u}$ küszöb, amelynél összefüggőségi szerkezetet vált a kopula.

A 6. és 7. ábrák megjelenítik a szimuláció alapján az $X_T^{\pi^*}$ és X_T^ρ változók kapcsolatát, illetve a végső kifizetésük sűrűségét az adott kopulákat véve összefüggőségi struktúrának.



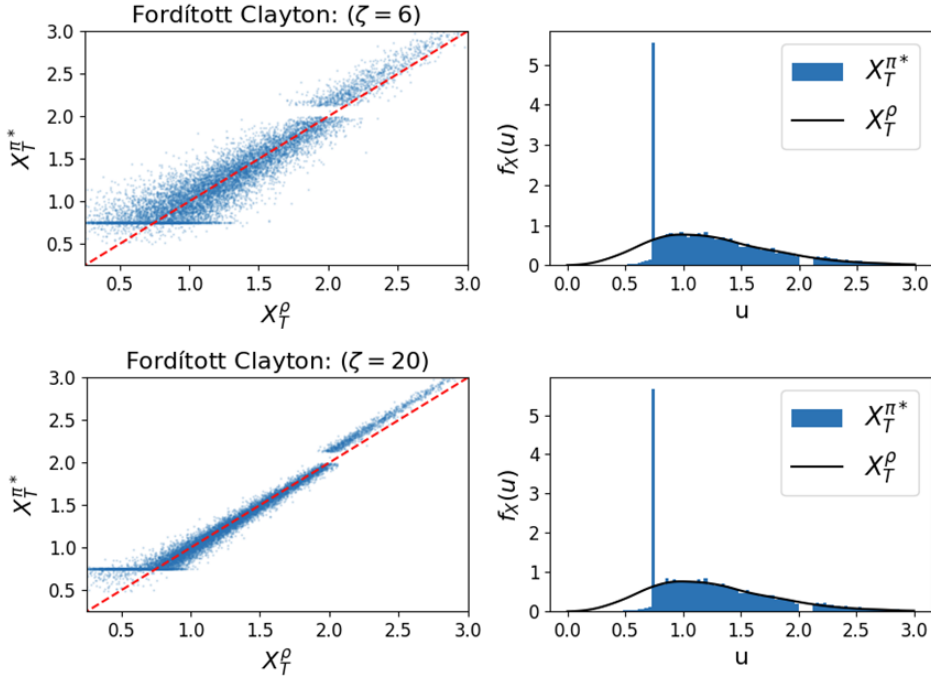
6. ábra. Az optimális stratégia végső kifizetésének az összehasonlítása a viszonyítási stratégia végső kifizetésével CoIn és Gumbel kopula esetén



7. ábra. Az optimális stratégia végső kifizetésének az összehasonlítása a viszonyítási stratégia végső kifizetésével Joe és Frank kopula esetén

A baloldali ábrák szépen mutatják az $X_T^{\pi^*}$ és X_T^{ρ} változók közötti összefüggést. A CoIn kopula esetén jól látszik, hogy a szimuláció valóban olyan változókat adott vissza, amelyek az adott határ alatt függetlenek, felette pedig komotonak. A Gumbel és a Joe kopula alkalmazása mellett pedig kirajzolódik az egyre erősödő összefüggőség a jobb farok felé haladva. Vagyis valóban akkor fog csupán kicsit eltérni az optimális stratégia a viszonyítási stratégiától, amikor az jól teljesít. A Frank kopula az előzőeknél enyhébb összefüggőséget mutat. A jobboldali ábrák rendkívül hasonlóak. A viszonyítási stratégia bal farkáról a súly nagy része a $q^*(\alpha)$ értékhez tevődik át. Ezt reprezentálja a hisztogramon a hosszú függőleges kiugrás. Mivel az $\alpha - \beta$ mérték súlyfüggvénye olyan, hogy q^* ugrik β -ban, ezért a $(q^*(\beta-), q^*(\beta+))$ intervallumról is áttevődik a viszonyítási stratégiához tartozó súly, ennek is nagy része a $q^*(\alpha)$ értékhez. Vagyis az optimális stratégia súlyfüggvényét leginkább a torzított kockázati mérték befolyásolja. Ez mutatja, hogy mi okozza a különböző kopulák melletti hisztogramok hasonlóságát. A CoIn kopula esetén azonban egy kisebb eltérés figyelhető meg, hiszen a súly egy része a $q^*(\hat{u})$ értékhez tevődik át, ezért a grafikonon megjelenik egy második kiugrás is.

A Fordított Clayton kopula szintén megfelelő választás, ha a befektető a viszonyítási stratégia jól teljesítése esetén szeretne ahhoz közel lenni a saját stratégiájával. Ezt szépen illusztrálják a 8. ábrának a baloldali grafikonjai.



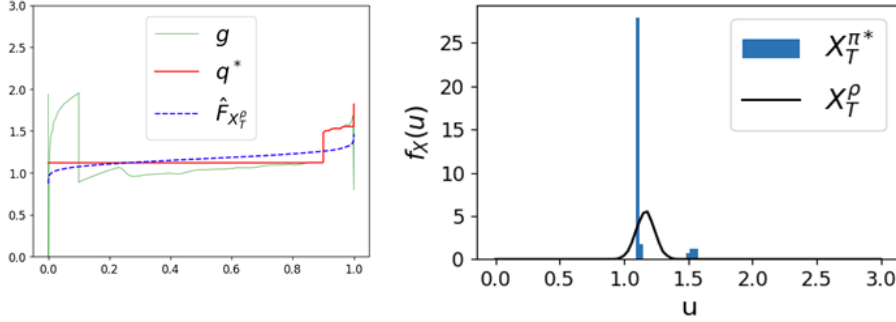
8. ábra. A kopula paraméterének a befolyása

Ez az ábra arra mutat rá, hogy mennyivel erősebb összefüggőségi struktúra hozható létre a változók között a kopula paraméterének a növelésével. Ennek ellenére a végső kifizetés histogramja nem változik lényegesen, hiszen azt a torzított kockázati mérték választása sokkal inkább befolyásolja.

5.6. Paraméterek változtatása

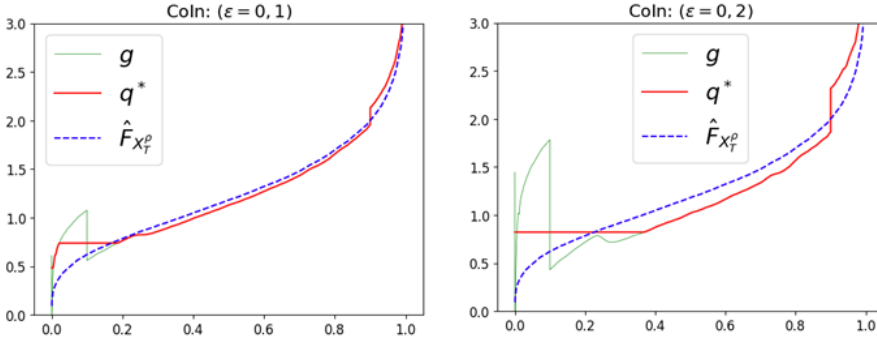
A modell szimulációja során használt paraméterek nagy része piaci adottság, de például a befektetés T időtávját, a portfólió kezdeti allokációját vagy a 2-Wasserstein korlátot a befektető saját maga választhatja meg. A szimuláció során a Gumbel ($\zeta = 6$) kopulát és az $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,9$, $p = 0,75$ paraméterű $\alpha - \beta$ kockázati mértéket használva, de induláskor a portfólió 15%-a helyett a 70%-át a hosszú

lejáratú államkötvénybe fektetve, jelentősen megváltozik az optimális stratégia hisztogramja és az optimális kvantilisfüggvény kapcsolata a viszonyítási stratégia kvantilisfüggvényével. Ezt a 9. ábra szemlélteti.



9. ábra. Az optimális és viszonyítási stratégia kvantilisfüggvényeinek és végső kifizetéseinek a kapcsolata a kezdeti portfólió súlyok megváltoztatása esetén

A 2-Wasserstein korlát növelésével a befektető jobban el tud térni a viszonyítási stratégia kifizetésének a várható értékétől illetve szórásától. Ezt a viselkedést szépen szemlélteti a 10. ábra.



10. ábra. Az optimális és viszonyítási stratégia kvantilisfüggvényeinek az eltérése $\varepsilon = 0, 1$ illetve $\varepsilon = 0, 2$ esetén

6. Összefoglalás

Szakdolgozatom a folytonos idejű portfólió optimalizáció egy speciális formáját dolgozta fel. E szerint egy adott kezdeti költségvetési korlát teljesítése mellett a végső kifizetés valószínűségi változójának egy előre meghatározott kapcsolatban kell állnia a viszonyítási stratégia végső kifizetésével. Egyrészt, az összefüggőségi struktúrájukat egy előre rögzített kopula írja le, másrészt a 2-Wasserstein távolságuknak a maximális értéke is elő van írva. Ezen feltételeknek eleget téve kellett valamely torzított kockázati mértéket minimalizálni. A probléma kulcsának tekinthető Wasserstein-metrikát többféle módon is meg lehet közelíteni. Én a Kantorovich-féle optimális szállítási problémán keresztül jutottam el a definiálásához, ugyanis ez az út kiválóan szemlélteti a mögöttes tartalmát. A torzított kockázati mértékek bevezetését és a probléma formalizálását követően a 2-Wasserstein korlát megválasztását tárgyaltam. Ez a döntés azon múlik, hogy a befektető a végső kifizetés valószínűségi változójával milyen várható érték szint alá illetve szórás szint fölé nem szeretne menni. Ezt követően az eredeti probléma megoldásához úgy jutottunk el, hogy azt átfogalmaztuk a kvantilisfüggvények feletti optimalizációs problémára a kvantilis reprezentációs tétel segítségével. A megoldás fő pillére pedig az izotonikus projekció volt. A téma elméleti áttekintése után szimuláción keresztül bemutattam, hogy eltérő kopulák illetve torzított kockázati mértékek választása miként befolyásolja az optimális stratégia végső kifizetését. Megfigyelhettük, hogy az utóbbiaknak jelentősebb a szerepe, bár a CoIn, illetve bármely vizsgált arkhimédészi családba tartozó kopula használatakor adódó eredmények lényeges eltérést tükröztek. Az eredmények értékelése támaszt nyújthat a befektetőnek a megfelelő kopula és torzított kockázati mérték megválasztására a saját preferenciáinak a kielégítésére.

Hivatkozások

- [1] Silvana M. Pesenti, Sebastian Jaimungal: Portfolio Optimisation within a Wasserstein Ball. 2022.
- [2] Matthew Thrope: Introduction to Optimal Transport. Lent 2018.
- [3] Jan Dhaene, Alexander Kukush, Daniel Linders, Qihe Tang: Remarks on quantiles and distortion risk measures. 2012.
- [4] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe: Convex Optimization. Cambridge University Press 2004.
- [5] Eduardo García-Portugués: Notes for Nonparametric Statistics. MSc in Statistics for Data Science at Carlos III University of Madrid 2025.
- [6] Ludger Rüschendorf: On the distributional transform, Sklar's Theorem, and the empirical copula process. University of Freiburg, Germany 2009.
- [7] Németh A., Németh S.: Isotonic regression and isotonic projection. Linear Algebra and its Applications 2016.
- [8] Rüschendorf: Mathematical Risk Analysis: Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portofolios (Springer), Heidelberg, Germany 2013.
- [9] Tversky A., Kahneman D.: Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty 1992.
- [10] Paul Embrechts, Filip Lindskog and Alexander McNeil: Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. Department of Mathematics ETHZ, Zürich, Switzerland 2001.
- [11] Yen-ChiChen: A Tutorial on Kernel Density Estimation and Recent Advances. Department of Statistics, University of Washington 2017.
- [12] Moussong Gábor: Geometria. Eötvös Loránd Tudományegyetem, Geometriai Tanszék 2013.

Alulírott *Tudorcsel Dániel* nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább

felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Táblázat készítés	ChatGPT	1. táblázat	LaTeX táblázat létrehozása
Adatfeldolgozás	ChatGPT	5. fejezet	python kód generálása
Nyelvhelyesség ellenőrzés	Writefull	Teljes dolgozat	

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.