

Eötvös Loránd Tudományegyetem Budapesti Corvinus Egyetem



Rendszerkockázat

MSc szakdolgozat

Csóti Kristóf

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

Témavezető:

Backhausz Ágnes

Egyetemi adjunktus

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Budapest, 2025. 05. 16.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. Motiváció	3
1.2. Alapfogalmak	4
2. Rendszerkockázat meghatározása gépi tanulási módszerekkel	6
2.1. Alapkonceptió	6
2.2. A metodológia	7
2.2.1. A krízis-esemény	8
2.2.2. A feltételes várható érték becslése	9
2.3. A gépi tanulási módszerek	10
2.3.1. Lineáris regresszió	10
2.3.2. Szupport vektor regresszió	11
2.3.3. Gradient boosting	11
2.3.4. Random forest	12
3. A módszer implementálása	13
3.1. Adatok	13
3.1.1. Makroökonómiai faktorok	13
3.1.2. A vállalatok karakterisztikái	15
3.2. A módszer	16
3.2.1. A krízis esemény	16
3.2.2. A vállalatok hozamainak becslése	17
3.3. Eredmények	19
3.3.1. A piaci hozam kockázatos értéke	19
3.3.2. A végső rendszerkockázat	20
3.3.3. Összegzés	22
4. Rendszerkockázat modellezése hálózatokkal	23

4.1. A hálózat "kitisztítása"	23
4.1.1. A hálózat felépítése	23
4.1.2. Az Eisenberg-Noe algoritmus	24
4.1.3. A megoldás létezése és egyértelműsége	25
4.1.4. A fixpont-egyenlet megoldásának megtalálása	27
4.2. Kaszkádok egy hálózatban	28
4.2.1. Fa-alapú becslés	28
4.2.2. Generátorfüggvény alapú megközelítés	30
4.2.3. A modell használata	32
5. Rendszerkockázat modellezése Hawkes-folyamattal	33
5.1. Alapdefiníciók	33
5.1.1. Beépítés egy modellbe	34
5.1.2. Szimulációk	35
6. Összegzés	38
Köszönetnyilvánítás	40
Irodalomjegyzék	40

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Motiváció

A rendszerkockázat fogalma és hatásai már korábban is jelen voltak, azonban a kutatók, szakemberek figyelme a 2008-as világválság miatt terelődött erre a témára.

A hírhedt válság fő kirobbantó oka az ún. Credit Default Swap-ek (CDS) félreárazása volt. Ezek a pénzügyi termékek csőd esetére biztosítanak segítséget. A termék vevője egy előre meghatározott pénzáram-sorozattal vásárol védelmet a CDS eladójától. Az eladó pedig vállalja, hogy valamilyen csődesemény bekövetkeztekor megfizeti a vevőt érő kár egy előre meghatározott részét.

A 2000-es évek elején egyre népszerűbbé váltak ezek a pénzügyi termékek, azonban az árazásuk során pusztán a csődesemények historikus statisztikáit vették alapul az alkalmazott matematikai modellek. Ezek a módszerek nem vették figyelembe a hirtelen, nagy, több szereplőre is kiterjedő káresemények valószínűségét, a rendszerből adódó kockázatot. [1]

Ennek a hiányára korábban már több szerző is felhívta a figyelmet (Murphy, 1988 [2]; Buchanan, 2008 [3]), azonban a kibocsátók vakon bíztak a módszereikben. Ennek eredménye az lett, hogy a CDS-ek alul voltak árazva, tehát a kifizetett pénzáram-sorozat nem fedezte a valós csődvalószínűségből keletkező várható kötelezettség értékét. A kiváló hedge-elési lehetőség a termék népszerűségéhez vezetett, egy ponton 50 billió dolláros nagyságrendűre nőtt a termék piaca. Ezek egy óriási buborékhoz vezettek, hiszen elegendő volt egy átlagos számosságú csődeseményt hozó időszak, hogy a félreárazás kipukkadjon.

Ennek a megvalósulása pedig 2008-ban érkezett el, amikor az alacsony, fedezet

nélkül kiadott hitelek lenyomták a lakásárakat, ami fizetéseképtelenné tett adósokat. A növekvő számú csődesemény dominószzerűen döntötte be a félreárazott CDS-eket hatalmas mennyiségben kereskedett piacot. A válság további hatásait, a rengeteg mentőcsomagot és egyéb következményeket pedig már ismerjük. [4]

A 2008-as válság egyik fő tanulsága tehát, hogy a pénzügyi rendszer szereplői közti összekapcsolódás is egyfajta kockázat, aminek a mérése kiemelkedően fontos, és be kell építeni a szabályozások közé.

1.2. Alapfogalmak

Alapvetően a kockázat alatt egy ismert valószínűségi eloszlással rendelkező véletlen jövőbeli valószínűségi változót értünk. A kockázatot valamilyen kockázati mértékkel próbáljuk számszerűsíteni, ami a valószínűségi eloszlást valamilyen szempontból jellemző szám. A rendszerkockázat a pénzügyi rendszer összeomlásának veszélye. Az ennek megfelelő kockázati mértéknek pedig jellemeznie kell a rendszer bedőléséből fakadó veszteségek eloszlását valamilyen módon.

Általánosságban a leggyakrabban használt kockázati mérték a kockázatotott érték (Value at Risk, VaR). [5]

1. Definíció. Legyen a P portfóliónk jelenlegi értéke S_0 , egy adott jövőbeli időpontban az értékének az eloszlásfüggvénye pedig $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, és $\alpha \in (0, 1)$. Ekkor az α megbízhatósági szintű (vagy konfidenciájú) kockázatotott érték a következő:

$$VaR_\alpha(P) = S_0 - F^{-1}(1 - \alpha) \quad (1.1)$$

Eszerint a definíció szerint a kockázatotott érték a jövőbeli érték eloszlásának egy adott kvantilise és a jelenlegi érték különbsége. Azt fejezi ki, hogy α bizonyossággal legfeljebb ennyit fogunk veszíteni. Ennek előnye, hogy könnyen számolható (az eloszlás ismeretében), viszont hátránya, hogy csak egy adott percentilistól függ, és figyelmen kívül hagyja az eloszlás viselkedését azon túl.

Ennek kiküszöbölésére használható az ú.n. várható alsóági veszteség (expected shortfall), amely valamilyen α -szintű VaR értéknél nem jobb kimenetelek várható értékének felel meg.

2. Definíció. Legyen a P portfóliónk γ konfidenciájú kockázatotott értéke $VaR_\gamma(P)$. Ekkor az α -szintű várható alsóági veszteség a következő:

$$ES_\alpha(P) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} VaR_\gamma(P) d\gamma \quad (1.2)$$

Így a várható alsóági veszteség pont az $1 - \alpha$ kvantilis alatti eloszlás várható értéke.

A szakdolgozat során a rendszerkockázat meghatározására fogunk néhány módszert megvizsgálni. Először egy egyszerűbb intuíción alapuló módszert, amely Machine Learning módszereket is használ a modellezéshez. Ezután egy ezen a módszeren alapuló saját programot mutatunk be. A következő fejezetben a pénzügyi rendszerek hálózatokon történő modellezését vizsgáljuk, és a csődesemények okozta hatások terjedésének végállapotát próbáljuk majd meghatározni. Az utolsó fejezetben pedig a Hawkes-folyamattal ismerkedünk meg, amely egy újabb megközelítése a rendszer-méretű sokkok modellezésének.

2. fejezet

Rendszerkockázat meghatározása gépi tanulós módszerekkel

2.1. Alapkoncepció

Ebben a fejezetben egy olyan módszert fogunk megvizsgálni, ami egyszerű pénzügyi adatokat használ fel, és ezekből épít fel egy olyan rendszert, amelyre könnyen alkalmazhatók gépi tanulós eljárások. A cél az, hogy egy olyan kockázati mérőszámot határozzunk meg, ami kifejezi a pénzügyi rendszer makroökonómiai összeköttettségét, tudja modellezni a ritka, krízis-szerű események bekövetkezését, és a hatásukra történő láncreakciókat. A fejezetben tárgyalt eljárást Liu et al. [6] dolgozta ki.

Számos rendszerkockázatot jellemző mérőszámot, módszert kidolgoztak kutatók. Egy 2012-ben megjelent módszer négy típusú pénzügyi intézet (bankok, biztosítók, brókercégek és hedge fund-ok) hozamainak az ok-okozati kapcsolatait vizsgálja. A kutatás során megfigyelhető volt egy dinamikusan változó kapcsolat-háló a négy szektor intézetei között. A bankok és biztosítók hozamai szignifikánsabban határozzák meg a brókercégek és hedge fund-ok hozamait, azonban a másik irányban ilyen nem figyelhető meg, ezért a rendszernek egyfajta aszimmetriáját lehetett felfedezni. [7]

A fejezetben tárgyalt módszer az intézmények tőkeszerkezetét és a hozamokat használja adatként. A fő mérőszám egy rendszerszintű krízis esetén (feltételeesen) várható alsóági veszteség. Ehhez meg kell határozni, hogy pontosan mit értünk rendszerszintű krízis-esemény alatt, és hogyan számoljuk a várható veszteséget. Emellett

arra is kitérünk, hogy több pénzügyi piac kapcsolata esetén hogyan tudjuk a hatás tovaggyűrűzését kezelni.

2.2. A metodológia

Ha egy vállalat tőkehiányt mutat, akkor az az egész pénzügyi rendszerre negatív hatással van, mert könnyen fizetéseképtelenné tud válni. Így a rendszerkockázat méréséhez ennek a feltételes várható értékét használjuk.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

Legyen N darab vállalatunk, és a teljes pénzügyi rendszert a sys index-szel jelöljük. Legyen adottak a vállalatok tőkeszerkezetei: A_t^j a j . vállalat t időpontbeli eszközeinek értéke, E_t^j a tőke piaci értéke és D_t^j az adósságaik könyvszerinti értéke, $R_t^j = \frac{E_t^j}{E_{t-1}^j} - 1$ a vállalat hozama ahol $j = 1, \dots, N$, R_t^{sys} pedig a piac hozama. Legyen k egyfajta tőkekövetelmény, ami szabályozza, hogy a saját tőke mennyiségének el kell érnie az eszközök (súlyozott) összértékének a k -ad részét. Ez általában (például a bázeli szabályozás szerint) 8%.

Ekkor egy vállalat tőkehiánya (Capital Shortfall, jelölés: CS_t^j) kifejezhető a következő módon:

$$CS_t^j = kA_t^j - W_t^j = k(E_t^j + D_t^j) - E_t^j \quad (2.1)$$

Ezt $t + h$ időpontban nézve, a hozamokkal kifejezve, és E_t^j -t kiemelve:

$$\begin{aligned} CS_{t+h}^j &= E_t^j \left[k \left(\frac{E_{t+h}^j}{E_t^j} + \frac{D_{t+h}^j}{E_t^j} \right) - \frac{E_{t+h}^j}{E_t^j} \right] = E_t^j \left[k \frac{D_{t+h}^j}{E_t^j} - (1 - k)(R_{t+1;t+h}^j + 1) \right] \\ &= E_t^j \left[k \frac{D_{t+h}^j}{E_t^j} - (1 - k)R_{t+1;t+h}^j - 1 + k \right] = E_t^j \left[k \left(\frac{D_{t+h}^j}{E_t^j} + 1 \right) - (1 - k)R_{t+1;t+h}^j - 1 \right] \\ &= E_t^j \left[k \left(\frac{D_{t+h}^j + E_t^j}{E_t^j} \right) - (1 - k)R_{t+1;t+h}^j - 1 \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

ahol az $R_{t+1;t+h}^j$ hozam a $t+1$ és $t+h$ időpontok közötti hozam, vagyis: $1 + R_{t+1;t+h}^j = \prod_{i=1}^h (1 + R_{t+i}^j)$.

Nevezzük krízis-eseménynek azt az eseményt, amikor a piac hozama egy C szint alá esik egy adott időtávra tekintve: $CE_{t+1;t+h} = \{R_{t+1;t+h}^{sys} \leq C\}$. Tegyük fel, hogy a vállalatok adósságai nem strukturálódnak át egy krízis-időszak alatt sem, vagyis $\mathbb{E}[D_{t+h}^j | CE_{t+1;t+h}] = D_t^j$. Emellett bevezetjük a $LVG_t^j = \frac{D_t^j + E_t^j}{E_t^j}$ jelölést egy vállalat

tőkeáttételére.

Így a krízis-eseményre vett t időpontbeli feltételes várható értéke a tőkehiánynak (E_t^j független a feltételtől):

$$SRISK_{t+1;t+h}^j := \mathbb{E}_t[CS_{t+h}^j | CE_{t+1;t+h}] = E_t^j[kLVG_t^j - (1-k)\mathbb{E}_t[R_{t+1;t+h}^j | CE_{t+1;t+h}] - 1]. \quad (2.3)$$

Ennek a pozitív részét aggregáljuk, hiszen tőke többlettel nem lehet kiegyenlíteni a hiányt. Így megkapjuk a rendszerkockázatot jellemző kockázati mértékünket:

$$SRISK_{t+1;t+h} = \sum_{j=1}^N (SRISK_{t+1;t+h}^j)_+. \quad (2.4)$$

Ez a mérőszám azt fejezi ki, hogy a teljes pénzügyi rendszerben mekkora tőkehiány keletkezne, ha a piac egy kritikus érték alatti hozamszinten lenne.

A kiszámításhoz szükséges a C kritikus érték meghatározása, illetve a $\mathbb{E}_t[R_{t+1;t+h}^j | CE_{t+1;t+h}]$ feltételes várható érték becslése.

2.2.1. A krízis-esemény

Korábbi cikkek a krízis-eseményt definiáló kritikus értéket vagy egy rögzített konstanssal határozzák meg (tipikusan $h = 21$ mellett $C = -10\%$), vagy pedig egy α -szintű kockáztatott értékkel adják meg, vagyis a hozam eloszlásának egy $1 - \alpha$ percentilisű realizációjaként, tehát $CE_{t+1;t+h} = \{R_{t+1;t+h}^{sys} \leq VaR_{t+1;t+h}^{sys;\alpha}\}$.

Ezt a VaR értéket próbáljuk regresszióval meghatározni. Ehhez tegyük fel, hogy a rendszer h -lépéses hozamát az $M_t^{sys} \in \mathbb{R}^m$ makroökonómiai faktorok generálják egy $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ leképezéssel, és egy olyan $\epsilon_{t+1;t+h}^{sys}$ reziduálissal, amelyre $Q_\alpha(\epsilon_{t+1;t+h}^{sys} | M_t^{sys}) = 0$, ahol $Q_\alpha(X)$ az X eloszlásának az α kvantilise:

$$R_{t+1;t+h}^{sys} = F(M_t) + \epsilon_{t+1;t+h}^{sys}. \quad (2.5)$$

Tételezzük fel, hogy a piac hozamait h lépésközzel ismerjük az elmúlt T időszakra, vagyis $\{R_{s+1;s+h}^{sys}\}_{s=t-h-(T-1)}^{t-h}$ ismert. Az F -et (nem feltétlen lineáris) regresszióval keressük:

$$\hat{F}_t(.) = \underset{F(.)}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{T} \sum_{s=t-h-(T-1)}^{t-h} \rho_\alpha(R_{s+1;s+h}^{sys} - F(M_t^{sys})), \quad (2.6)$$

ahol $\rho_\alpha(x) = x(\alpha - I_{\{x \leq 0\}})$, ahol I indikátorfüggvény. Ennek a használatát az indokolja, hogy a hozamok α kvantilisét keressük, így ha a $\rho_\alpha()$ függvény argumentuma negatív, vagyis túlbecsültük a kvantilist, akkor $1 - \alpha$ súllyal adja hozzá az eltérés abszolút értékét (vagyis az ellentettjét). Ha pedig az argumentum pozitív, akkor α súllyal adja hozzá a hibát az összeghez. Így a regresszió eredménye pont az α konfidenciaszintű VaR-t fogja adni:

$$\widehat{VaR}_{t+1;t+h}^{sys;\alpha} = \hat{F}_t(M_t^{sys}), \quad (2.7)$$

ami az általunk becsült VaR, amit használunk a krízis-esemény meghatározásához: $CE_{t+1;t+h} = \{R_{t+1;t+h}^{sys} \leq \widehat{VaR}_{t+1;t+h}^{sys;\alpha}\}$.

2.2.2. A feltételes várható érték becslése

A $\mathbb{E}_t[R_{t+1;t+h}^j | CE_{t+1;t+h}]$ kifejezés becsléséhez szintén regressziót használunk, azonban modellezzük a pénzügyi rendszer szereplőinek egymásra való hatásait, így egy rétegződést kapunk. Például egy konkrét magyar vállalat esetén a regresszió változóiba érdemes bevenni az amerikai, az európai és a magyar aggregált hozamot, mert ezek mind hatással vannak egy magyar vállalatra.

Legyen a rétegek száma n , az első réteg a világgazdasági rendszer hozamának (általában az USA hozammal azonosítják) feleljen meg, az n . réteg pedig az éppen vizsgált piac. Tegyük fel, hogy bármilyen $1 \leq i < j \leq n$ -re igaz, hogy R_i^i hat R_j^j -re.

Jelöljük az i . rétegen szereplő hozamra ható makroökonómiai faktorokat a következő módon: $M_t^i \in \mathbb{R}^{m_i}, i = 1, \dots, n$. Legyenek a vizsgált piac vállalatait jellemző karakterisztikák $\{C^j \in \mathbb{R}^{m_j}\}_{j=1}^N$. A krízis-esemény pedig legyen az előző részben meghatározott $CE_{t+1;t+h} = \{R_{t+1;t+h}^{sys} \leq \widehat{VaR}_{t+1;t+h}^{sys;\alpha}\}$.

Tegyük fel, hogy a faktorok és karakterisztikák adottak, emellett a különböző rétegek hozamait, és a vállalatok hozamait is ismerjük historikusan egy T hosszú intervallumon. A következő struktúrát használjuk a regresszióhoz:

$$R_{s+1;s+h}^i = L^i(R_s^i, \dots, R_s^1; R_{s+1;s+h}^{i-1}, \dots, R_{s+1;s+h}^1; M_s^i, M_s^i \mathbb{I}_{CE_{s+1;s+h}}) + \epsilon_{s+1;s+h}^i, \quad (2.8)$$

ahol $i = 1, \dots, n - 1$ vagyis az i . köztes réteg hozamának becsléséhez a jelenlegi és korábbi rétegeken realizált s időpontbeli hozamokat, a korábbi rétegeken $s + 1$ -től $s + h$ -ig becsült hozamokat, és az i . piacra ható faktorokat, és a krízis-esemény alatt ható faktorokat (ezek lényegesen eltérőek lehetnek) használjuk. Az n . réteget nem

becsüljük külön mint piac. Hasonlóan a vállalatokra:

$$R_{s+1;s+h}^j = F^j(R_s^{n-1}, \dots, R_s^1; R_{s+1;s+h}^{n-1}, \dots, R_{s+1;s+h}^1; R_s^j; M_s^n, M_s^n \mathbb{I}_{CE_{s+1;s+h}}; C_s^j, C_s^j \mathbb{I}_{CE_{s+1;s+h}}) + \epsilon_{s+1;s+h}^j, \quad (2.9)$$

ahol $j = 1, \dots, N$, és $C_s^n I_{CE_{s+1;s+h}}$ a krízis-esemény alatt jellemző karakterisztikák.

A megoldást a négyzetes hiba minimalizálásával kapjuk:

$$\begin{aligned} \hat{L}^i(.) &= \underset{L^i(.)}{\operatorname{argmin}} = \frac{1}{T} \sum_{s=t-h-(T-1)}^{t-h} (\epsilon_{s+1;s+h}^i)^2, \\ \hat{F}^j(.) &= \underset{F^j(.)}{\operatorname{argmin}} = \frac{1}{T} \sum_{s=t-h-(T-1)}^{t-h} (\epsilon_{s+1;s+h}^j)^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Így a meghatározandó feltételes várható érték kiszámításának lépései ($ER_{t+1;t+h}^j := \mathbb{E}_t[R_{t+1;t+h}^j | CE_{t+1;t+h}]$ jelöléssel):

$$\begin{aligned} \widehat{ER}_{t+1;t+h}^1 &= \widehat{VaR}_{t+1;t+h}^{sys;\alpha} \\ \widehat{ER}_{t+1;t+h}^i &= \hat{L}^i(R_s^i, \dots, R_s^1; \widehat{ER}_{s+1;s+h}^{i-1}, \dots, \widehat{ER}_{s+1;s+h}^1; M_s^i, M_s^i \mathbb{I}_{CE_{s+1;s+h}}) \\ \widehat{ER}_{s+1;s+h}^j &= \hat{F}^j(R_s^{n-1}, \dots, R_s^1; \widehat{ER}_{s+1;s+h}^{n-1}, \dots, \widehat{ER}_{s+1;s+h}^1; R_s^j; M_s^n, M_s^n \mathbb{I}_{CE_{s+1;s+h}}; C_s^j, C_s^j \mathbb{I}_{CE_{s+1;s+h}}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

ahol $i = 2, \dots, n-1$ és $j = 1, \dots, N$. Ezt beírva a vállalati $SRISK^j$ kiszámításába, és összegezve a pozitív részét minden egyes vállalatra megkapjuk a rendszerkockázatot.

2.3. A gépi tanulással módszerek

Ebben a szakaszban röviden bemutatunk néhány gépi tanulással módszert, amelyek alkalmazhatók a regressziók elvégzésére.

2.3.1. Lineáris regresszió

A legegyszerűbb módszer a lineáris regresszió, amely során egy megfigyelt $Y \in \mathbb{R}^n$ (determinisztikus) változót próbálunk becsülni egy szintén megfigyelt $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (szintén determinisztikus) változó segítségével lineárisan, a $\beta \in \mathbb{R}^p$ együtthatókkal, a veszteségfüggvény (itt a négyzetes eltérések összege) minimalizálásával:

$$\hat{\beta} = \operatorname{argmin}_{\beta} \sum_{i=1}^n (Y_i - (\beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j X_{i,j}))^2. \quad (2.12)$$

A kapott együtthatók szignifikanciája (vagy p-értéke) jellemzi, hogy egy változónak mekkora magyarázó-szerepe van. Kiszámításakor a $H_0 : \beta_j = 0$ nullhipotézist vizsgáljuk, és a p-érték a $t = \frac{\hat{\beta}_j}{D^2(\hat{\beta}_j)}$ t-eloszlású ($n - p$ szabadsági fokú) statisztika megfelelő kvantilise. Jellemzően, ha a p-érték 5% alatti, akkor a változót szignifikánsnak gondoljuk. [8]

2.3.2. Szupport vektor regresszió

A Szupport Vektor regresszió (SVR) a klasszifikációs probléma támasztóvektoros megoldásának általánosítása. Az eredeti problémát, a klasszifikációs feladatot egy lineárisan (jobban) szeparálható metrikus térbe viszi át egy ún. kernel-függvénnyel, így könnyebben kezelhetővé téve az adatpontok sokaságát. A leggyakrabban használt kernelfüggvény a Gauss-féle RBF (Radial Basis Function), amely a következő új metrikát definiálja: $K(x, y) = \exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{\sigma^2}\right)$, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi távolság.

Az így kapott metrikus térbe transzformálva végezzük el a regresszió veszteségfüggvényének a minimalizálását úgy, hogy egy ε hiperparaméternél kisebb hibákat figyelmen kívül hagyjuk, amivel kiküszöbölhető a modell alul-, illetve túlillesztése. A módszer további előnye, hogy jól kezeli a sokdimenziós adatokat és a kilógó adatokat. [9]

2.3.3. Gradient boosting

A következő módszer a veszteségfüggvényt minimalizáló modellt a gradiensekkel közelítve keresi. Tegyük fel, hogy n db m -dimenziós megfigyelésünk van, és adott egy konvex, kétszer differenciálható veszteségfüggvény: $l(y_i, \hat{y}_i) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Legyen a jelenlegi modellünk által prediktált értékek $\hat{y}_i^{k-1}$, ahol $i = 1, \dots, n$, valamint k a jelenlegi iteráció sorszáma, és keressük azt a kiegészítő $f_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amire az $L_k = \sum_{i=1}^n l(y_i, \hat{y}_i^{k-1} + f_k(x_i))$ kifejezés minimális lesz. Ezt a következő módon közelítjük:

$$L_k \approx \sum_{i=1}^n [l(y_i, \hat{y}_i^{k-1}) + g_i f_k(x_i) + \frac{1}{2} h_i f_k^2(x_i)], \quad (2.13)$$

ahol $g_i = \frac{\partial l}{\partial \hat{y}_i}(y_i, \hat{y}_i^{k-1})$, és $h_i = \frac{\partial^2 l}{\partial \hat{y}_i^2}(y_i, \hat{y}_i^{k-1})$.

Ekkor frissítjük a modellünket az $f_k(x_i)$ taggal. A lépések, kiegészítő modellek leggyakrabban döntési fák. Ilyen módon lépkedve kereshetünk egy optimális modellt. [10]

2.3.4. Random forest

A Random Forest módszer során döntési fákat hozunk létre, amelyeket az eredeti mintából visszatevéses mintavétellel véletlenszerűen kiválasztott halmazokon tanítjuk, majd átlagoljuk az összes fán kapott prediktált értéket. A kisebb, véletlen mintákon tanítással több, gyengébben tanuló, de különböző adathalmazon illesztett modellt kapunk, amiket átlagolva csökkentjük a túltanulás veszélyét.

Egy fa tanítása során legjobb vágásokat keresünk, amivel a jelenlegi halmazt kettébontjuk, így építve fel a döntési fát. Legyenek a kiválasztott adatpontok $x_i \in \mathbb{R}^m$, a tanulandó változók pedig $y_i \in \mathbb{R}$, ahol $i = 1, \dots, n$. Tegyük fel, hogy a veszteségfüggvény a négyzetes eltérések összege.

A $(\theta, j) : \theta \in \mathbb{R}, j \in 1, \dots, n$ párokra definiáljuk az $S_1 = \{(x_i, y_i) : x_{i,j} \leq \theta\}$ és $S_2 = \{(x_i, y_i) : x_{i,j} > \theta\}$ halmazokat. Ekkor keressük a

$$\theta^*, j^* = \operatorname{argmin}_{\theta, j} MSE(S_1) + MSE(S_2), \quad (2.14)$$

optimumokat, ahol $MSE(S) = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} (y_i - \bar{y})^2$. Ebben a kifejezésben $|S|$ az S halmaz mérete, és $\bar{y} = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} y_i$.

Az optimális vágást iteratívan keresve egy adott megállási feltételig (például egy maximális fa-mélységig) felépíthetjük a döntési fákat. [11]

3. fejezet

A módszer implementálása

Ebben a fejezetben az előbb bemutatott metodológia alapkoncepcióját követve készített saját programot fogom bemutatni. A program nem használ többszörös rétegzést, csak az amerikai piacot vizsgálja, és azon belül a 30 "legfontosabb" (a Dow Jones indexben szereplő) amerikai vállalatnak az együttes rendszerkockázatát próbálja meghatározni egy dátumra. Az implementáció a következő linken érhető el: <https://github.com/kcsoti0118/Szakdolgozat>.

3.1. Adatok

Az implementációhoz valós adatokat használunk. Az eredeti módszer a piaci hozamokat makroökonómiai faktorokkal próbálja regresszálni, majd a vállalatok hozamait különböző karakterisztikákkal kiegészítve becsli.

A regressziók célváltozói rendre a hozamok. A teljes amerikai piac hozamát az S&P500 index hozamaival közelítjük, amely 500 amerikai nagyvállalat részvényárfo-lyamainak a súlyozott átlaga, így az index hozama jól követi a teljes piac hozamát. Az index adatai, és a 30 kiválasztott részvény hozamai a Yahoo Finance¹ oldaláról napi bontásban elérhetők, felhasználhatók.

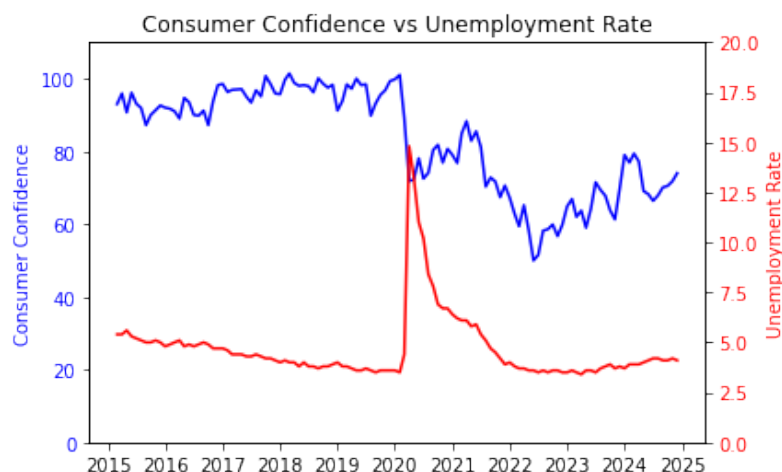
3.1.1. Makroökonómiai faktorok

A makroökonómiai adatokhoz öt darab alapvető, piacot jellemző mérőszám adott, havi rendszerességgel, 2015. 03. 01-től kezdve 2024. 12. 01-ig. A felhasznált adatok a következők:

¹<https://finance.yahoo.com/>

- **GDP (Gross Domestic Product):** Az USA területén belül végfelhasználásra előállított termékek és szolgáltatások összértéke az elmúlt egyéves periódusban. Ez az adat negyedévenként frissül, a köztes hónapokban a legutolsó értékkel töltjük fel az adatot.
- **CPI (Consumer Price Index):** Egy előre összeállított fogyasztói kosár - ami alapvető termékeket és szolgáltatásokat tartalmaz - árának a változását követő mérőszám.
- **Federal Funds Effective Rate:** Az amerikai gazdaságban a Federeal Funds által meghatározott irányadó kamatláb
- **Consumer Confidence Index:** Az emberek optimizmusát/pesszimizmusát méri a gazdasággal, a személyes jövedelmükkel és a jövőbeli kilátásaikkal szemben. Ez a mérőszám jól jellemzi a fogyasztók pénzköltési hajlandóságát.
- **Munkanélküliségi ráta:** A munkanélküliek aránya a gazdaságilag aktívakhoz viszonyítva. A gazdaságilag aktívak a munkanélküliek és a foglalkoztatottak uniója.

Egy példa két felhasznált makroökonómiai adatra:



Az adatokon megfigyelhető, hogy a koronavírus 2020-as kitörése milyen óriási sokkot jelentett a piacnak, mind a munkanélküliségi rátára, mind a fogyasztók optimizmusára nézve.

3.1.2. A vállalatok karakterisztikái

A vállalatok sajátosságainak jellemzésére két típusú faktorokat használunk. Az egyik adatcsoport a részvénytársaságok pénzügyi mérlegét, a vállalatok értékét jellemző mutatók. Ezek közül néhány érdekes példa:

- Forgótőke: a forgóeszközök és a rövid lejáratú kötelezettségek különbsége, ami a likviditás mutatója.
- Kibocsátott részvények száma / rendes részvények (a szavazati joggal bírók) száma
- Historikus P/E: részvényár / elmúlt egy évben egy részvényre jutó nyereség
- Várható P/E: részvényár / következő egy évben egy részvényre jutó várható nyereség
- Vállalati érték / éves árbevétel

Ezeket az adatok csak egyetlen időpontra (2024. 12. 01.) tudtam elérni, így ezekből idősor nem áll rendelkezésünkre. Erre az időpontra rendelkezésünkre állnak a vállalatok pénzügyi mérlegeinek szükséges adatai is.

A másik típusú vállalatokat/részvényeket jellemző felhasznált mutatók az ún. technikai indikátorok [12]. A 30 vizsgálandó részvénynek napi szinten elérhető a nyitó és záró árfolyama, a napi legmagasabb és legalacsonyabb árfolyama, illetve a hozama és a volumen, amekkora értékben kereskedtek az adott napon az adott értékpapírral.

Ezekből az értékekből számos mérőszám alkotható, amely a részvényár alakulásának valamilyen karakterisztikáját jellemzi. Ezek közül 6 darabot használunk a vállalatok karakterizálására, amelyek a következők:

- **MACD (Moving Average Convergence Divergence)** (gyors és lassú): a részvényárnak egy rövidebb periódusú és egy hosszabb periódusú súlyozott átlagának a különbsége. Célja a részvényár momentumának és trendjének megfogása. Ebből a mutatóból egy 9 napos súlyozott átlaggal lassított verziót is kiszámítunk.
- **RSI (Relative Strength Index)**: Egy adott periódus alatt az átlagos részvényár-emelkedés és az átlagos részvényár-csökkenés aránya. Ez a mérőszám az emelkedések és esések egymáshoz viszonyított erejét mutatja meg.

- **ADX (Average Directional Index):** A napi legmagasabb és legalacsonyabb árfolyamok változását vizsgálja. Ha az egyik szélsőséges érték napról napra nagyobb mértékben változott, mint a másik, akkor egy jelentős tendencia van a piacon. Ez a metrika a trendek erősségét jellemzi (de az irányát nem).
- **ROC (Rate of Change):** Egy adott időperiódussal korábbi árhoz viszonyított változás (százalékban). Ez a mérőszám az árfolyam-változások irányát és gyorsaságát jellemzi.
- **SMI (Stochastic Momentum Index):** A záró árfolyam, és a napi legmagasabb és legalacsonyabb értékeket felező ár különbsége, arányosítva egy adott perióduson felvett maximum és minimum árfolyam különbségére. Ennek a súlyozott átlaga indikálhatja egy trend kifáradását.
- **OBV (On-Balance Volume):** A kereskedés volumenének előjeles összege egy adott perióduson, ahol az előjeleket a záróárfolyam egyik napról a másikra változásának az iránya adja meg. A metrika célja a részvény momentumának a jellemzése.

A technikai indikátorok mind egy 20 napos perióduson kalkulálódnak, mivel egy hónapban körülbelül 20 tőzsdei kereskedési nap van, így ezek egy egyhónapos intervallumot jellemző metrikák. Az értékeket a makróökonómiai adatokkal azonos napokra határoztuk meg, vagyis 2015. 03. 01-től 2024. 12. 01-ig.

3.2. A módszer

A 2. fejezetben bemutatott módszerhez hasonlóan egy piaci krízis-esemény során keletkező tőkehiányt közelítünk. A piaci és vállalati hozamokat egy 20 kereskedési napos időhorizonton számoljuk. A rendszerkockázatot egy 20 kereskedési napos időhorizontra prediktálva számoljuk.

3.2.1. A krízis esemény

Az első lépés a piac bezuhanásának a regresszálása. Ezt a piaci hozam adott α -szintű kockázattal értékének becslésével végezzük, ahogy a 2. fejezetben is. Az optimális modell megkereséséhez a prediktált és valós érték különbségének a $\rho_\alpha(x) = x(\alpha - I_{\{x \leq 0\}})$ módon vett transzformáltját minimalizáljuk, mint hibafüggvényt. Erre

két módszer, egy lineáris regresszió és egy szupport vektor regresszió áll rendelkezésünkre, aminek bemenete a makroökonómiai faktorok időszora, és a célváltozó az S&P500 hozamainak időszora.

Az implementáció során a bemenetet mindkét esetben standardizáljuk (vagyis az idősorok átlagát 0-ra, szórásukat 1-re transzformáljuk), mivel nagyon eltérő nagyságrendűek az adatok.

A lineáris regresszió során a veszteségfüggvényt minimalizáljuk a regresszió együtthatóinak beállításával, a `scipy` csomag `optimize.minimize` függvényével.

A szupport vektor regresszió során a Gauss-féle RBF kernelfüggvényt használjuk, és a megfelelő ϵ hiperparamétert (vagyis a hibák figyelmen kívül hagyásának határát) egy rácson keressük az `sklearn` csomag `model_selection.GridSearchCV` függvényével, amely egy 5-részre vágó keresztvalidációt alkalmaz. A rács keresési terét korábbi futások eredményei alapján szűkítettük, így törekedve a túlillesztés elkerülésére.

A regresszió előtt mindkét esetben leválasztjuk az utolsó, 2024. 12. 01-i adatokat. A modelleket az összes többi adaton tanítjuk, majd a tanítás után alkalmazzuk a leválasztott adatpontra, így kapva egy prediktált α -szintű VaR-t a piac hozamára.

3.2.2. A vállalatok hozamainak becslése

A következő lépés a 30 darab amerikai részvénytársaság hozamainak a tanulása. Minden részvényre külön-külön építünk modellt. Ehhez input adatnak felhasználjuk a piacot jellemző makroökonómiai változókat, a részvényeket jellemző technikai indikátorokat, a részvény előző havi hozamát és a piac jelenlegi hozamát. A célváltozó az adott részvény hozamainak időszora. Minden módszer futtatása során a négyzetes eltérést minimalizáljuk, mint hibafüggvényt, ahogy 2.10-ben. Az alkalmazott módszerek a 2.3 részben megismertek:

- **Lineáris regresszió:** Az adatokat ismét standardizáljuk a nagyságrendbeli különbségek miatt, majd a `statsmodels.api` csomag `OLS` függvényét hívjuk meg a legkisebb négyzetes eltérést adó modell megkeresésére.
- **Szupport vektor regresszió:** Az implementáció teljesen hasonló a piac hozamának kockázatosított értékének kiszámításánál látotthoz, egyedül az optimális ϵ kereséséhez alkalmazott rács értékkészlete tágabb, amit szintén korábbi futások alatti eredmények alapján véglegesítettünk. A többi paraméter az alapértelmezett értékét veszi fel.

- **Gradient boosting:** A módszert az xgboost csomag XGBRegressor függvényének felhasználásával implementáltuk, és szintén a GridSearchCV-vel vizsgáltuk az optimális paramétereket, ám a hosszú futásidő miatt rögzítettük a leggyakrabban felvett hiperparaméter-értékeket. Így a módszer $n_estimators = 100$ -szor frissíti a modellt, egy döntési fa maximum $max_depth = 5$ mélységű, és az új modelleket $learning_rate = 0,1$ -es súlyozással adja a teljes modellhez. A relatíve magas $n_estimators$ és alacsony $learning_rate$ egy lassabb, de kisebb kockázattal túlillesztő modellt eredményez.
- **Random forest:** A módszerhez az sklearn csomag ensemble.RandomForestRegressor függvényét alkalmazzuk. A paraméterek beállítása szintén GridSearchCV futtatásával, majd a leggyakoribb értékek beállításával történt. Így a végső erdő $n_estimators = 300$ fából áll, egy fa legfeljebb $max_depth = 15$ mélységű és egy végső csúcsban legalább $min_samples_leaf = 3$ darab mintának lennie kell. A teljes minta kis mérete miatt a tanításnál engedélyezzük, hogy ne a teljes mintát használja, hanem visszatevéses mintavételezéssel válassza ki az egyes fákat tanító adatpontok halmazát.

A modellek tanítását az elérhető összes adaton végezzük az utolsó kivételével, amelyre már csak alkalmazzuk a betanított modellt, úgy, hogy a piac hozamának helyére behelyettesítjük a krízis esemény bekövetkezésére prediktált piaci hozamot, amit az előző lépésben számoltunk ki.

Emellett elérhetők egyetlen időpontra a vállalatok karakterisztikái, amelyeket egy korrekcióra használunk fel. Az idősorok hiánya miatt most nem historikus értékeken tudunk valamilyen modellt tanítani, hanem a 30 részvény adatait egyszerre kell beadni, amivel egy, a piaci sajátságokat feltáró modellt kapunk eredményül. A tanulás célváltozója az egyes részvények hozamainak és a piac hozamának különbsége. Az adatok mindegyike a 2024. 12. 01-es dátumra van szűrve.

Minden egyes részvényre úgy kapjuk a korrekció mértékét, hogy azt kihagyva betanítunk egy modellt (a korábban is említett négy módszer valamelyikét használva), majd az aktuális részvényre alkalmazzuk a modellt.

Az így kapott vállalati hozamokkal (korrigált vagy nem korrigált), a vállalatok mérlegének adataival és egy adott k megkövetelt tőkearány paraméterrel becsülhe-

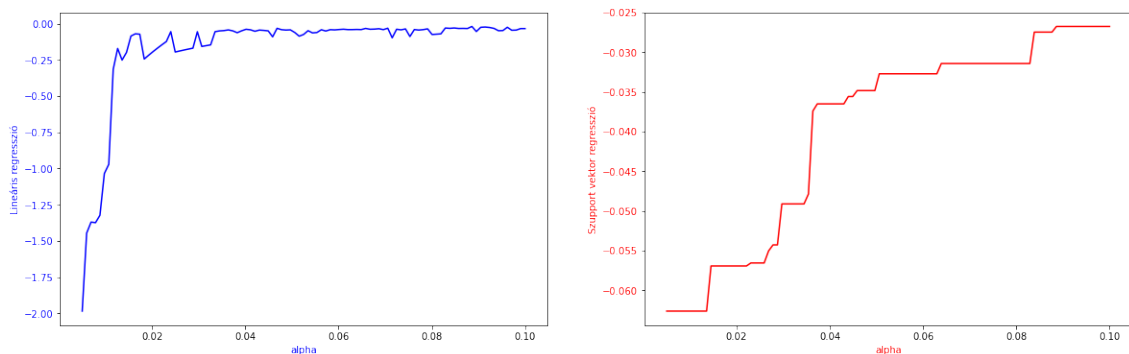
tő a piacot reprezentáló részvénytársaságok által generált rendszerkockázat a 2.2 egyenlet alapján.

3.3. Eredmények

Ebben a részben a futtatások eredményeit vizsgáljuk különböző beállítások mellett.

3.3.1. A piaci hozam kockázatotott értéke

Az S&P500 hozamainak prediktálása két módszer áll rendelkezésünkre, a sima lineáris regresszió és a szupport vektor regresszió. Az érték meghatározásához még egy α bizonyossági szint szüksége, amelyre gyakran a 0, 5%, 1% és 5% valamelyikét használjuk. A következő grafikonokon ábrázoljuk a két módszer által adott eredményeket a konfidenciaszint függvényében:



3.1. ábra. A piaci hozam kockázatotott értéke lineáris regresszióval (bal), és szupport vektor regresszióval (jobb)

Látható, hogy a lineáris regresszió extrém ($\alpha = 0.5\%$) esetben irreálisan szélsőséges értéket ad vissza. Emellett α szerint nem nő monoton. A regressziókba belenézve a hibafüggvény értéke $\alpha = 5\%$ környékén a legjobb, így talán ilyen értékekre használható lehet.

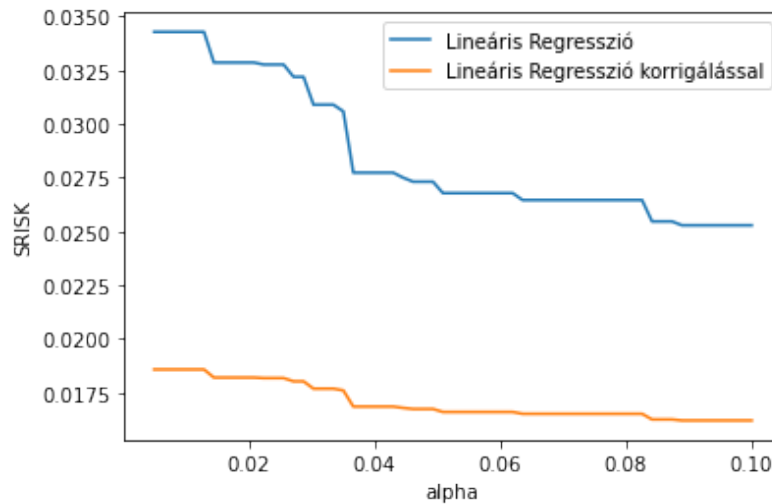
A szupport vektor regresszió azonban kevésbé ad kirívóan alacsony értéket a legkisebb konfidenciaszintekre. Kifejezetten realiztikusnak érződik egy 5 – 6%-os zuhanás, ha a piaci hozamok legrosszabb 0.5%-át akarjuk becsülni, vagyis körülbelül 200 naponta történik ilyen mértékű esés. Emellett az eredmények monoton nőnek, amely szintén egy elvárt tulajdonság. Érdekes megfigyelni, hogy sok esetben az α ap-

ró variálása nem változtat az eredményen, néhány esetben viszont nagy emelkedést ad.

3.3.2. A végső rendszerkockázat

A végső rendszerkockázat meghatározásához (2024. 12. 01. dátumra) a piaci hozam VaR értékének meghatározásához az imént látott eredmények miatt csak a szupport vektor regressziós módszert használjuk. Egy adott futást meghatároz az α bizonyossági szint, a k elvárt eszköz-tőke arány és az alkalmazott Machine Learning módszer.

Elsőnek vizsgáljuk külön a lineáris regresszió eredményeit az α függvényében.

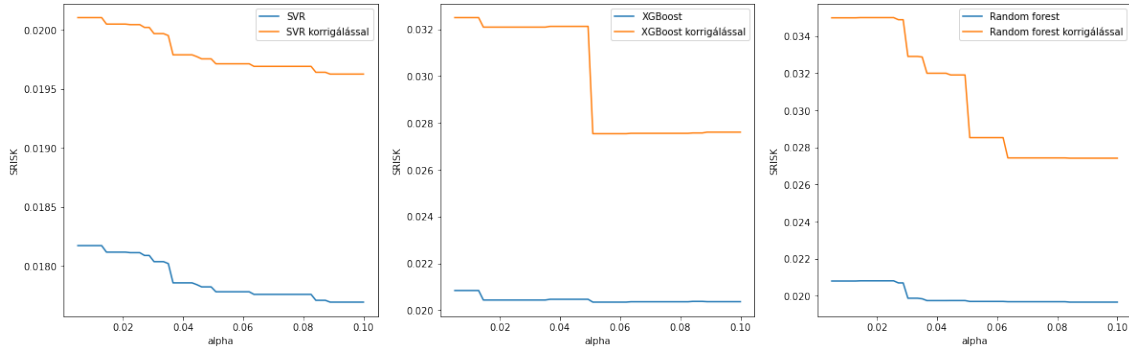


3.2. ábra. A végső prediktált rendszerkockázat lineáris regressziót alkalmazva

Az ábrán a végső rendszerkockázatot a 30 vállalat összes tőkéjének arányában láthatjuk. Az α változtatásával monoton csökken a végeredmény, ami egy elvárt tulajdonság, hiszen a konfidenciaszint növelésével a piac kevésbé extrém bezuhanásának esetére prediktálunk egy végső kockázati értéket.

A lineáris regressziókba egy általános beállítás ($\alpha = 5\%$, $k = 8\%$) mellett belenézve azt tapasztalhatjuk, hogy a regresszió változói általában nem szignifikánsak, és a szignifikáns változók halmaza nagyon változik a különböző futások során.

A bonyolultabb gépi tanulási módszerek eredményei a következők:



3.3. ábra. A végső prediktált rendszerkockázat az ML módszereket alkalmazva

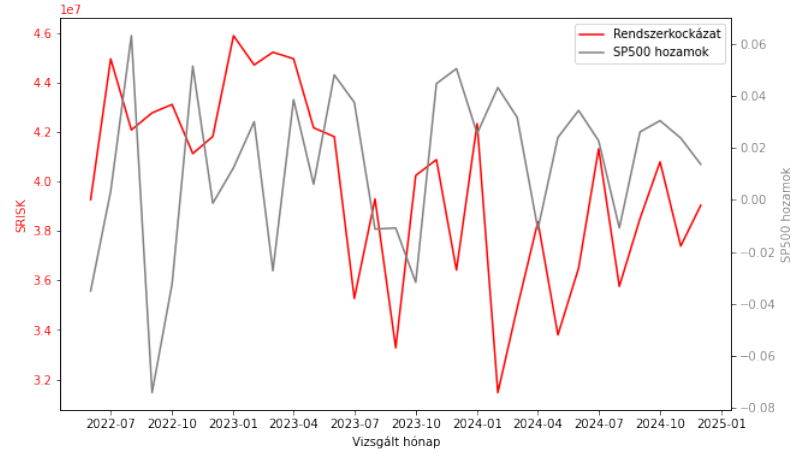
Az eredményekből megfigyelhető, hogy ezen módszerek során a korrigálás pont el-
lentélesen hat, mint a lineáris regresszió esetén.

A végső rendszerkockázat α szerinti monoton csökkenése itt is többé-kevésbé megva-
lósul. Az XGBoost alapú regresszió esetén egy apró emelkedés megfigyelhető, emel-
lett érdekes, hogy ezzel a módszerrel több, hosszabb konstans szakaszt is kaptunk.
A szupport vektoros regresszió esetén a végső predikciók egy kisebb értékkészleten
veszik fel az értékeiket, vagyis az α változtatására kevésbé érzékeny, emellett a kor-
rigálás is a legkisebb relatív változást idézi elő erre a módszerre nézve. A szupport
vektor regresszió adja a legkisebb végső predikciókat a fejlettebb módszerek közül.
A random forest alapú módszer esetén adódik a legbővebb értékkészlet, ez a legér-
zékenyebb eljárás a három közül.

A végső rendszerkockázatot nem relativizálva egy 10^{10} dollár nagyságrendű vég-
eredményt kapunk. Ez azt jelenti, hogy ha a piacon bekövetkezne egy krízis-esemény,
akkor pusztán 30 amerikai vállalat több tízmilliárd dolláros tőkehiányt produkálna,
amely sürgős pótlást igényelne.

A minimális tőkekövetelményt állítva (eddig fixálva volt $k = 8\%$ -os értékre) a
végső rendszerkockázat szakaszosan lineárisan nő, ahol a szakaszok azok az inter-
vallumok, ahol egy újabb vállalat tőkehiányossá válik. Rögzített $\alpha = 5\%$ mellett
 $k = 5\%$ -tól $k = 15\%$ -ig vizsgálva a hiányt mutató részvénytársaságok száma 2-ről
indulva 8-ra emelkedik, a leggyakrabban használt $k = 8\%$ -os értéken ez a szám 5.

Még egy érdekes dolog megfigyelhető, ha a módszert elkezdjük korábbi hónapokra futtatni (ekkor persze korrekció nélkül). A következő eredményeket kapjuk a szuport vektor regressziót alkalmazva:



3.4. ábra. A prediktált rendszerkockázat korábbi hónapokra alkalmazva, szuport vektor regresszióval

A két ábrázolt idősor (kevés adatpontjának) egy -0.17 -es korrelációja adódik, ami egybevág azzal, hogy alacsonyabb piaci hozamok, vagyis rosszabb időszakokban a rendszer kockázata magasabb. A másik két fejlettebb módszer esetén ez a korreláció nagyon közel esik a 0-hoz. Lineáris regresszió esetén a korreláció egy még erősebb negatív értéket mutat (-0.27).

3.3.3. Összegzés

A saját program elkészítésének célja nem a pontos reprodukálás volt (leginkább a szűkös adatforrás miatt), hanem egy működő, valós adatokat felhasználó és néhány Machine Learning módszert alkalmazó rövid program volt.

Az előző fejezet alapkonceptióját teljes mértékben követve, majd az eredmények paraméterekre vett érzékenységet és egyéb jellemzőit vizsgálva megfigyelhettünk néhány érdekes tulajdonságot, viselkedést, illetve a rendszerkockázat nagyságrendjére is kaptunk egy képet.

Összességében a program elkészítése és futtatása segítette a probléma megértését, és betekintést nyújtott a rendszerből fakadó kockázat mérésének egyik lehetséges módjába.

4. fejezet

Rendszerkockázat modellezése hálózatokkal

Ebben a fejezetben a rendszerkockázat mérésének egy teljesen másik megközelítést vizsgáljuk. A pénzügyi piacokon szereplő intézeteket (kereskedelmi és központi bankok, befektetési alapok, biztosítók, stb.), akik egymás között adnak-vesznek különböző pénzügyi termékeket, vizsgálhatjuk, mint egy nagy gráfot, hálózatot.

A fejezet váza Caccioli et al. összefoglaló cikkét követi. [13]

4.1. A hálózat "kitisztítása"

4.1.1. A hálózat felépítése

Tekintsük azt az irányított gráfot, aminek a csúcsai a pénzügyi intézeteket reprezentálják, melyeknek száma N . Két pénzügyi intézet között fennállhat egy hitelezési kapcsolat, ezt a gráf élein ábrázoljuk. Tartsuk számon egy $L_{i,j}$ változóban az i . intézet kötelezettségeit a j . felé, minden $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ -re. Így az ilyen értékeket tartalmazó $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mátrix pont az élsúlyozott irányított gráf szomszédsági mátrixa lesz. Az ábrázolt kötelezettségekről feltesszük, hogy mind egy időben járnak le. Az élekről feltehetjük, hogy nemnegatívak, mivel egy negatív tartozás, vagyis egy követelés a fordított irányú élen jelenne meg, így negatív élsúllynak nincs értelme. Emellett feltehetjük, hogy semelyik pénzügyi intézetnek nincs önmagára vonatkozó követelése, vagyis az átló elemei mind nullák.

Emellett legyen az $e \in \mathbb{R}^N$ vektor a hálózaton kívülről jövő nettó követelések/-kötelezettségek vektora. A vektor pozitív értéket vesz fel egy koordinátában, ha a

koordinátának megfelelő pénzügyi intézetnek a külső szereplőkkel meglévő hitelezési kapcsolatainak szuperpozíciója egy követelést eredményez.

A szomszédsági mátrix és a külső pénzmozgások vektorának kettőse megadja a pénzügyi hálózatot: $\mathcal{F} = (L, e)$. A felépítés számos valós piacokon meglévő tulajdonságot figyelmen kívül hagy, például a hitelek különböző lejáratú idejét (akár két intézet között is fennállhat több, különböző lejáratú szerződés), valamint a kifizetések esetleges véletlenszerűségét, és ezek korreláltságát.

Ezzel a felépítéssel láthatjuk, hogy a pénzügyi rendszer szereplői milyen kötelezettségekkel rendelkeznek, amiket a modell szerint egyszerre törlesztenek. Azonban ha a hálózat olyan, hogy néhány intézet nem tudja megfizetni a tartozásait (részlegesen vagy teljesen), akkor az más intézeteket is fizetéseképtelenné tehet, így elindítva egyfajta fertőzést a pénzügyi rendszer hálózatán. A fertőzés tovaterjedéseinek végállapota egy egyensúlyi helyzet lesz, aminek meghatározását a következő fejezetben tárgyalt Eisenberg-Noe algoritmus [14] oldja meg.

4.1.2. Az Eisenberg-Noe algoritmus

Legyen a hálózat egy csúcsát terhelő összes kötelezettsége $\bar{p}_i = \sum_{j=0}^N L_{i,j}$. Emellett vezessük be a kötelezettségek L mátrixának standardizáltját:

$$\Pi_{i,j} = \begin{cases} \frac{L_{i,j}}{\bar{p}_i} & \text{ha } \bar{p}_i > 0 \\ 0 & \text{ha } \bar{p}_i = 0 \end{cases}$$

Az algoritmus azt a $p \in \mathbb{R}^N$ visszafizetési vektort keresi, amit a piac szereplői végül képesek lesznek törleszteni. Erre nyilván teljesül, hogy $0 \leq p \leq \bar{p}$. Ennek a megoldásának az egyértelműségéhez fel kell tételezni néhány intuitív szabályt, amelyek a visszafizetéseket irányítják. Ezek a következők:

Törlesztési prioritás: A pénzügyi intézetek kötelesek törleszteni adósságaikat mindaddig, amíg rendelkezésükre áll valamennyi pénzforrás. Tehát amíg fizetéseképtelenné nem válnak vagy nem teljesítik a kötelezettségeiket, addig kötelesek törleszteni, és nem allokálhatnak pénzt saját tőkéjük halmozására.

Arányos törlesztés: Ha egy szereplő nem tudja teljes mértékben megfizetni a tartozásait, akkor a kötelezettségeinek részleteit úgy allokálja az őt hitelező intézetek felé, hogy az eredeti $\Pi_{i,j}$ kötelezettségi arányokat megtartják a törlesztések.

Korlátozott fizetőképesség: Legfeljebb csak akkora értékben teljesítheti mind-egyik szereplő a kötelezettségeit, mint amekkora értékben bevételez jut, vagyis $p_i \leq e_i + \sum_{j=1}^N \Pi_{j,i} p_j$. A képletben a többi pénzügyi intézet i -nek történő kifizetését összegezzük, ami előáll, mint a p_j visszafizetés $\Pi_{j,i}$ arányú részlete az (Arányos törlesztés) szabály miatt.

Ezek alapján az intézetek visszafizetései:

$$p_i = \min \left\{ \bar{p}_i, e_i + \sum_{j=1}^N \Pi_{j,i} p_j \right\} \quad (4.1)$$

minden $i = 1, \dots, N$, hiszen ha elég forrás áll egy szereplő rendelkezésére (vagyis $\bar{p}_i \leq e_i + \sum_{j=1}^N \Pi_{j,i} p_j$), akkor mindent tud törleszteni, tehát $p_i = \bar{p}_i$, ha pedig nincs elég forrása (vagyis $\bar{p}_i > e_i + \sum_{j=1}^N \Pi_{j,i} p_j$), akkor pedig minden rendelkezésére álló pénzt törlesztésre fordít, vagyis $p_i = e_i + \sum_{j=1}^N \Pi_{j,i} p_j$.

Az így kapott 4.1 egyenletrendszer a $0 \leq p \leq \bar{p}$ feltétel mellett egy fixpont egyenletet ad, ahol a $\Phi(\cdot; \Pi, \bar{p}, e) : [0, \bar{p}] \rightarrow [0, \bar{p}]$, $\Phi(p; \Pi, \bar{p}, e) = \min \left\{ \bar{p}_i, e_i + \sum_{j=1}^N \Pi_{j,i} p_j \right\}$ leképezés fixpontját keressük.

4.1.3. A megoldás létezése és egyértelműsége

A megoldás létezését a Tarski fixponttétel segítségével láthatjuk. [15]

3. Definíció. Egy $\mathcal{U} = \langle A, \leq \rangle$ párost, ahol A egy nemüres halmaz, $\leq$ pedig egy kétváltozós reláció, amely egy részben rendezettséget ad, vagyis $\forall a, b, c \in A$ -ra:

- $a \leq a$
- $a \leq b$ -ből és $b \leq a$ -ból következik, hogy $a = b$
- $a \leq b$ -ből és $b \leq c$ -ből következik, hogy $a \leq c$.

Ekkor az $\mathcal{U} = \langle A, \leq \rangle$ párost rácsnak nevezzük, ha $\forall a, b \in A$ párnak létezik legkisebb felső korlátja (szuprémuma) és legnagyobb alsó korlátja (infimuma).

A rácsot teljesnek nevezzük, ha bármely $B \subseteq A$ részhalmaznak létezik infimuma és szuprémuma.

1. Tétel. Tarski-fixponttétel: Legyen $\mathcal{U} = \langle A, \leq \rangle$ egy teljes rács, $f : A \rightarrow A$ egy monoton növő függvény, $P : \{x : f(x) = x\}$ a fixpontok halmaza. Ekkor P szintén egy teljes rács, vagyis nemüres, és létezik szuprémuma és infimuma.

A 4.1-ben definiált leképezés folytonos és p -ben monoton növe (hiszen a Π mátrix nemnegatív). Emellett a $0 \leq p \leq \bar{p}$ feltétel miatt a leképezés értelmezési tartománya és értékkészlete is $[0, \bar{p}]$ -beli, amely $\mathbb{R}^N$ egy kompakt részhalmaza, amire nyilván teljesülnek a teljes rács definíciójának feltételei. Így a Tarski-fixponttétel alapján az egyenletrendszernek létezik megoldása.

Az egyértelműség bizonyításához további feltevésekre van szükségünk. [14]

4. Definíció. A pénzügyi intézetek egy $\mathcal{S} \in \{1, \dots, N\}$ részhalmazát többletes halmaznak nevezzük, ha egyiknek sincs $\mathcal{S}$ -en kívülre menő kötelezettsége, és a hálózaton kívülről összességében pozitív pénzáramot kapnak, vagyis $\forall i, j; i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S} : \Pi_{i,j} = 0$ és $\sum_{i \in \mathcal{S}} e_i > 0$.

Ez a definíció azt jelenti, hogy a pénzügyi hálózat egy ilyen részhalmazán biztosan többlet fog keletkezni (ez a kívülre nincs kötelezettség, és a kívülről jövő összes pénzáram szigorú pozitivitása miatt igaz), így a "kitisztítás" után ebben a halmazban maradni fog el nem költött pénz.

A következő definíció a hálózathoz konstruált irányított gráfról szól. Ebben a gráfban a csúcsok az $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ halmaz elemei, és olyan $i, j \in \mathcal{N}$ csúcsok között megy él, amikre $\Pi_{i,j} > 0$.

5. Definíció. Egy $i \in \mathcal{N}$ csúcs tartozási pályája az $o(i)$ jelöléssel a következő: $o(i) = \{j \in \mathcal{N} : \text{létezik } i \rightarrow j \text{ irányított út}\}$.

Ekkor egy olyan $o(i)$ pályára, amire $\sum_{j \in o(i)} e_j > 0$, valamint egy tetszőleges p^* kifizetési vektorra (amely egyik megoldása a fixpont-egyenletnek) igaz, hogy $\exists j \in o(i) : \bar{p}_j < (\Pi^T p^* + e)_j$, vagyis a kifizetések végén többletes marad, kevesebbet kellett törleszteni, mint amennyit neki törlesztettek. Ez abból következik, hogy ilyen feltevések mellett $o(i)$ egy többletes halmaz.

Ez elvezet az utolsó definíciónkhoz:

6. Definíció. Egy pénzügyi rendszer reguláris, ha minden tartozási pálya többletes halmaz.

2. Tétel. *Ha egy pénzügyi hálózat reguláris, akkor a legnagyobb és a legkisebb kifizetési vektor egybeesik, vagyis a fixpont-egyenlet megoldása egyértelmű. [14]*

A tételt nem bizonyítjuk. Ezekkel az extra feltételekkel már egy olyan pénzügyi hálózatot kapunk, amelyek esetén a "kitisztítás" egyértelmű. Könnyen kaphatunk reguláris hálózatot, ha a külső pénzáramok vektora, vagyis e csupa pozitív elemű.

4.1.4. A fixpont-egyenlet megoldásának megtalálása

A megoldás keresésekor feltesszük, hogy a megoldás egyértelmű, vagyis a hálózat reguláris.

Nevezzük supermegoldásoknak az $\bar{S} = \{p \in [0, \bar{p}] : \Phi(p) \leq p\}$ halmazt, ami olyan kifizetésvektorok halmaza, amelyek esetén néhány pénzügyi intézet többet költhet adósságok törlesztésére, mint amennyi bevétele volt. Az természetesen nem lehet, hogy minden szereplő a bevétele felett költ törlesztésre. Egy $p \in \bar{S}$ -re legyen $D(p) = \{i \in \mathcal{N} : \Phi(p)_i < \bar{p}_i\}$, vagyis $D(p)$ a p -ben fizetéseképtelenné váló szereplők indexei. Ekkor definiáljuk a következő diagonális mátrixot:

$$\Lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \text{ és } i \in D(p) \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

aminek ott 1 az átlóbeli eleme, ahol a megfelelő indexű intézet p -ben fizetéseképtelen, így ezzel a mátrixszal, illetve az $I - \Lambda$ mátrixszal szorozva vetíthetünk a $D(p)$ -beli, valamint $D(p)$ -n kívüli szereplőkre.

Egy rögzített $p' \in \bar{S}$ supermegoldásra vezessük be a $p \rightarrow FX_{p'}(p)$ leképezést:

$$FX_{p'}(p) = \Lambda(p') \left(\Pi^T (\Lambda(p')p + (I - \Lambda(p')\bar{p})) + e \right) + (I - \Lambda(p'))\bar{p}$$

Ez a p' szerint fizetéseképtelenekre összegzi a kifizetéseket, feltételezve, hogy a $D(p)$ -beliek p kifizetést törlesztenek, míg a $D(p)$ -n kívüliek $\bar{p}$ teljes egészét törlesztik, ehhez pedig hozzáadja a nem fizetéseképtelen szereplőkre vetített részét a $\bar{p}$ -nak. Ennek a leképezésnek létezik fixpontja, ezt jelöljük $f(p')$ -vel.

Ezt az eljárást iteráljuk, $p^0 = \bar{p}$ -ből indulva (ami szintén egy supermegoldás), és $p^j = f(p^{j-1})$ lesz a következő supermegoldás.

3. Tétel. *Ez az eljárás egy egyértelműen definiált sorozatot ad, amely N lépésen belül eljut az eredeti fixpont-egyenlet megoldásáig. [14]*

A tételt nem bizonyítjuk. Ezzel a módszerrel meghatározható a pénzügyi hálózat "kitisztítását" megmutató kifizetések vektora. Ebből a vektorból leolvasható, hogy mely szereplők váltak fizetéseképtelenné, és ezen hatás tovagyűrűzéseként milyen végállapot alakult ki a teljes pénzügyi rendszerben, és milyen rendszerszintű kockázat van a rendszer egészében.

Egy kisebb további általánosítás bevezethető, ha a fizetéseképtelenség esetén valamilyen faktorokkal büntetjük a szükségszerű pénzszerzést. [16]

Ennek egyik magyarázata például, hogy sürgős fizetési kényszer esetén egyes szereplőknek muszáj folyósítaniuk egyes termékeiket, vagy behajtani valamely követelésüket, akár az eredeti érték törtrészéért is. Erre bevezetve az $\alpha, \beta \in [0, 1]$ faktorokat, a modellbeli kifizetésfüggvényt módosíthatjuk a következő módon:

$$p_i = \begin{cases} \bar{p}_i & \text{ha } \bar{p}_i < e_i + \sum_j \Pi_{j,i} p_j \\ \alpha e_i + \beta \sum_j \Pi_{j,i} p_j & \text{különben.} \end{cases}$$

4.2. Kaszkádok egy hálózatban

A pénzügyi hálózatok modellezésére egy másik koncepció az ún. kaszkádok használata, amelyek egy gráfon, szomszédok közti terjedés alapján, hosszabb időhorizonton kialakuló fertőzőtségi csoportok.

A kaszkádok használatát rendszerkockázat mérésére először Gai és Kapida [17] alkalmazta, akiknek a cikke Watts et al. [18] eredetileg társadalmi interakciókat modellező módszerén alapult. Ez a módszer úgy konstruálja meg a fertőzés terjedését, hogy egy csúcs akkor válik fertőzőtté (vagy aktívvá), ha a szomszédainak legalább egy $R \in [0, 1]$ küszöböt elérő része már fertőzött.

4.2.1. Fa-alapú becslés

A pénzügyi hálózatot ismét úgy ábrázoljuk, mint egy nagy (irányított) gráfot, ahol az élek valamilyen hitelezési kapcsolatot jelentenek. Ebben a részben a vírus végső elterjedését úgy próbáljuk megbecsülni, hogy a hálózat gráfjáról feltesszük, hogy lokálisan fa-szerű, vagyis a gráf kisebb részleteibe belenagyítva nincsenek benne (irányított) körök.

Legyen p_k a gráf foksámeloszlása, vagyis $p_k = P(\text{egy csúcs foksáma} = k)$, ρ annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen vizsgált csúcs a folyamat végén fertőzött

lesz, ρ_0 annak a valószínűsége, hogy a kiindulási pillanatban is fertőzött volt, és q pedig egy véletlenszerűen választott szomszéd fertőzöttségének a valószínűsége. Ekkor a következő módon írható fel a végső aktivitás valószínűsége:

$$\rho = \rho_0 + (1 - \rho_0) \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} q^m (1 - q)^{k-m} F\left(\frac{m}{k}\right), \quad (4.2)$$

ahol $F(x) = \mathbb{I}_{\{x > R\}}$, vagyis 1, ha az argumentum átlépi az R küszöböt. Ez az egyenlet minden lehetséges k fokszámmra (vagyis a csúcs szomszédainak számára), és minden lehetséges m fertőzött szomszédok számára ($0 \leq m \leq k$) kiszámolja, hogy mekkora eséllyel van pontosan k szomszéd, amiből pontosan m darab fertőzött, majd ezeket megszorozva az $F(\frac{m}{k})$ értékkel, vagyis a megfertőződés indikátorával, és összegezve megkapja a választott csúcs megfertőződésének valószínűségét, feltéve, hogy eredetileg nem volt fertőzött. Emellett beleszámoljuk azt is, ha már eredetileg is fertőzött volt a csúcs.

Most írjunk fel egy hasonló egyenletet q -ra, egy szomszéd fertőzöttségének valószínűségére. Ezelőtt megemlítettünk egy gyakori módszert, amit többször is fogunk alkalmazni.

Megjegyzés. Hálózatelméletben, amikor egy véletlenszerűen választott foksám eloszlását vizsgáljuk, akkor természetesen az eredeti p_k foksámeloszlást használjuk. Azonban ha egy következő csúcs foksámának eloszlását vizsgáljuk, ahova az eredeti csúcsból egy él mentén jutottunk, akkor már érdemes meggondolni, hogy milyen eloszlással modellezzük ezen csúcs foksámának eloszlását.

Mivel éleket követve nagyobb valószínűséggel jutunk egy nagy foksámú csúcsba, így ha egy él mentén jutunk egy csúcsba, akkor erre a csúcsra a foksámeloszlás: $p'_k = \frac{k}{z} p_k$, ahol $z = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$, vagyis az átlagos foksám. A $k p_k$ szorzatban a k szorozótényező azt reprezentálja, hogy egy k foksámú csúcsba k darab szomszédjából léphetünk be. A z átlagos foksámmal osztás az 1-re normálás miatt szerepel. Ezt az új eloszlást nevezzük többletfoksám eloszlásnak.

Ezzel a módosított foksám eloszlással felírható egy hasonló egyenlet:

$$q = \rho_0 + (1 - \rho_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z} p_k \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} q^m (1 - q)^{k-1-m} F\left(\frac{m}{k}\right), \quad (4.3)$$

ahol $z = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k$. Ebben az egyenletben kihasználjuk azt a feltevést, hogy a kiin-

dulási csúcs alaptól nem fertőzött.

Ezzel egy fixpont-egyenletet kaptunk q -ra, amiből ρ is adódik. A ρ azt is megmutatja, hogy a végső kaszkád a csúcsok mekkora hányadát fedi, így a ρ értéket végső méretként is értelmezhetjük. Kutatások alapján a lokális fa-szerűség feltevése melletti eredmény meglehetősen jól közelíti a kialakult valódi kaszkád méretét.

A fixpontegyenlet megoldható a

$$q_{n+1} = \rho_0 + (1 - \rho_0)G(q_n) \quad (4.4)$$

rekurzióval $n = 0, 1, \dots$ -re, ahol

$$q_0 = \rho_0 \text{ és } G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z} p_k \sum_{m=0}^{k-1} \binom{k-1}{m} q^m (1-q)^{k-1-m} F\left(\frac{m}{k}\right).$$

A ρ_0 -ról feltesszük, hogy kicsi, 0-hoz nagyon közeli az értéke.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett alakul ki egy, a gráf csúcsainak nagy részére kiterjedő, globális fertőzés (akár nagyon kis számú eredetileg fertőzött csúcsból indulva). Ehhez fejtsük hatványsorba a $G(q) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l q^l$ kifejezést. Az együtthatók:

$$C_l = \sum_{k=l+1}^{\infty} \sum_{n=0}^l \binom{k-1}{l} \binom{l}{n} (-1)^{l-n} \frac{k}{z} p_k F\left(\frac{n}{k}\right).$$

Az elsőrendű közelítést beírva kapjuk, hogy a 4.4 rekurzió növekedő lesz (legalábbis induláskor), ha $(1 - \rho_0)C_1 > 1$, vagyis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)}{z} p_k \left[F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) \right] > \frac{1}{1-\rho_0}$. Szimulációk azonban azt mutatták, hogy ez a feltétel nem elégséges egy globális kaszkád kialakulásához. [19] Egy másodrendű feltételt bevezetve sokkal jobban visszakaphatjuk a szimulációk eredményeit. Ha

$$(C_1 - 1)^2 - 4C_0C_2 + 2\rho_0(C_1 - C_1^2 - 2C_2 + 4C_0C_2) < 0 \quad (4.5)$$

teljesül, akkor a $q = \rho_0 + (1 - \rho_0)(C_0 + C_1q + C_2q^2)$ másodrendű közelítés adta egyenletnek nincs $q = 0$ -hoz közeli megoldása, így lesz globális méretű kaszkád.

4.2.2. Generátorfüggvény alapú megközelítés

A várható végső kaszkádméret meghatározására mutatunk egy másik módszert. [18]

Ehhez nevezzünk veszélyeztetettnek egy olyan csúcsot, amelynek k fokszáma $R \geq \frac{1}{k}$, vagyis egyetlen szomszédjának aktiválódása elegendő a csúcs megfertőzéséhez. Legyen $\mu_K = P[R \leq \frac{1}{k}]$ annak a valószínűsége, hogy egy k foksámú csúcs

veszélyeztetett lenne. Ez egy rögzített R mellett visszaadja az előző részben szereplő $F(x) = \mathbb{I}_{\{x > R\}}$ indikátort. Ezzel a jelöléssel egy csúcs veszélyeztetettségét megkapjuk a következő generátorfüggvény együtthatóiként:

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k p_k x^k. \quad (4.6)$$

Egy él mentén egy véletlenszerű szomszédos csúcsra menve kapjuk a szomszédos csúcs veszélyeztetettségének generátorfüggvényét (ismét a módosított többletfokszám eloszlást használva):

$$G_1(x) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k \mu_k p_k x^{k-1}}{\sum_{k=1}^{\infty} k p_k} = \frac{G'_0(x)}{z} \quad (4.7)$$

Itt az x kitevője azért $k - 1$, mert mivel egy él mentén léptünk be a csúcsba, így a fokszáma legalább 1, így csak onnantól kezdve érdekelnek a valószínűségek.

Emellett írjuk fel a veszélyeztetett klaszterek méretének generátorfüggvényét:

$$H_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n x^n, \quad (4.8)$$

$$H_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\theta}_n x^n, \quad (4.9)$$

ahol θ_n annak a valószínűsége, hogy egy csúcs egy n méretű veszélyeztetett csúcsokból álló összefüggő részgráfban van benne, míg $\hat{\theta}_n$ annak a valószínűsége, hogy egy csúcs véletlenszerűen választott szomszédja van benne egy n méretű veszélyeztetett klaszterben. Ezzel a definícióval a következő egyenlőség áll fenn:

$$H_1(x) = 1 - G_1(1) + x G_1(H_1(X_1)). \quad (4.10)$$

Ennek a bizonyításhoz először gondoljuk meg, hogy $G_1(1)$ annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott szomszéd veszélyeztetett, hiszen $G_1(1)$ pont az együtthatók összege, és az együtthatók annak a valószínűségei, hogy egy k foksámú szomszéd veszélyeztetett. Ezt összegezve épp annak a valószínűségét kapjuk, hogy a szomszéd veszélyeztetett. $1 - G_1(1) = (1 - G_1(1))x^0$ így annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott szomszéd egy 0 elemű veszélyeztetett klasztert alkot (vagyis nem veszélyeztetett).

A $G_1(H_1(x))$ kompozíció pedig pont azt a generátorfüggvényt fogja adni, aminek

együtthatói annak a valószínűségei, hogy egy veszélyeztetett szomszéd további szomszédja benne vannak egy n méretű veszélyeztetett klaszterben, vagyis együtt egy $n + 1$ méretű veszélyeztetett klasztert alkotnak. Ezt x -szel szorozva és hozzáadva az $(1 - G_1(1))x^0$ kifejezéshez épp a $H_1(x)$ generátorfüggvényt kapjuk.

Hasonló érveléssel láthatjuk, hogy:

$$H_0(x) = 1 - G_0(1) + xG_0(H_1(X_1)). \quad (4.11)$$

Ebből a várható veszélyeztetett klaszterméretet a $\sum_{k=0}^{\infty} n\theta_n = \sum_{k=1}^{\infty} n\theta_n 1^{n-1}$ kifejezéssel kapjuk, ami épp a $H'_0(1)$ derivált. Abba beírva a $H_0(x)$ és $H_1(x)$ -re kapott kifejezéseket egy fixpontegyenletet kapunk, aminek a megoldása pontosan akkor lesz globális méretű, ha $z < G'_0(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\mu_k p_k$. Ebbe μ_k helyére $F(\frac{1}{k})$ -t írva épp az előző részben kapott elsőrendű feltételt kapjuk, ha $F(0) = 0$, és ρ_0 0-hoz tart.

4.2.3. A modell használata

Az előbb megismert fertőzés terjedési modell pénzügyi rendszerekre való alkalmazásához definiáljuk a hálózatot a szokásos módon, a csúcsok a pénzügyi intézetek, az élek pedig a köztük levő hitelezési kötelezettségek.

Egy intézet pénzügyi mérlegén bell bontsuk szét az eszközöket a pénzügyi hálózaton belüli A^I eszközökre és azonkívüli A^X eszközökre. Ugyanígy a forrás oldalon legyenek külön rendszeren belüli L^I kötelezettségek és rendszeren kívüli L^X kötelezettségek, valamint a tőkét jelöljük E -vel. Ekkor az i . szereplő fizetőképessége, ha

$$A_i^I + A_i^X - L_i^I - L_i^X > 0,$$

vagyis $K > 0$. Tételezzük fel, hogy ha egy bank fizetéseképtelenné válik, akkor egyik kötelezettségét se teljesíti semmilyen mértékben. Tegyük fel továbbá, hogy az intézetek belső tőkeáttéte, vagyis $\frac{A_i^I}{K_i} = R > 0$ állandó minden i szereplőre, valamint az A_i^I követelések egyenletesen oszlanak el az i -vel szomszédos (vagyis i -nek tartozó) csúcsok között. Így egy szereplő akkor lesz fizetéseképtelen, ha a neki tartozó intézeteknek több, mint R -ed része fizetéseképtelenné válik.

Így ilyen feltevések mellett az R szám lesz a megfelelő küszöb, aminél ha több fertőzött (most fizetéseképtelen) szomszédos csúcs van, akkor a kiinduló csúcs is megfertőződik. Ezzel modellezhetővé válik a fizetéseképtelenség tovaterjedése és hatásai, amely egy újabb módszer a rendszerkockázat mérésére.

5. fejezet

Rendszerkockázat modellezése Hawkes-folyamattal

A rendszerkockázat helyes modellezésének az a célja, hogy az egyes piaci szereplőket elérő krízis-események (például egy csődesemény) más szereplőkre is hatással lehetnek, növelhetik a hasonló események bekövetkezésének valószínűségét. Ez a mechanizmus az előfordulások összecsoportosulását, klasztereződését okozza. Ennek a modell-szintű megfogására alkalmas az ún. Hawkes-folyamat használata. [20]

5.1. Alapdefiníciók

7. Definíció. Adott egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Az $N : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ monoton növekvő, nemnegatív egész értékű sztochasztikus folyamatot számláló folyamatnak nevezzük.

Egy számláló folyamatot jellemez az intenzitásvektora:

8. Definíció. Az $(N_t)_{t \geq 0}$ számláló folyamat intenzitásvektora:

$$\lambda_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} \mathbb{E}[N_{t+\Delta} - N_t | \mathcal{F}_t].$$

Az intenzitás az ugrások t -beli feltételes várható értéke a t időpont előtti információk ismeretében. A Hawkes-folyamat esetén az intenzitásvektor a korábbi ugrások egy nemnegatív együtthatós lineáris kombinációja lesz, így biztosítva egy öngerjesztő tulajdonságot.

9. Definíció. A Hawkes-folyamat egy olyan N_t d -dimenziós számláló folyamat, amelynek intenzitásvektorának koordinátái a következők:

$$\lambda_t^i = \mu_i + \sum_{j=1}^d \int_0^t \Phi^{i,j}(t-t') dN_{t'}^j,$$

ahol $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\Phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrix-értékű magfüggvény, amire:

- $\Phi^{i,j}(t) \geq 0 \ \forall t \geq 0$ -ra és $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$ -re.
- $\Phi^{i,j}(t) = 0 \ \forall t < 0$ -ra és $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$ -re.
- $\Phi^{i,j}(t)$ függvény integrálható L^1 -értelemben $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$ -re.

5.1.1. Beépítés egy modellbe

Tegyük fel, hogy a piacon M darab pénzügyi szereplő van (röviden: bankok). Minden egyes banknak van valamennyi tőkéje (például készpénztartaléka), amelynek a logaritmusának alakulására a következő dinamikát feltételezzük:

$$dX_t^i = \frac{a^i}{M} \sum_{k=1}^M (X_t^k - X_t^i) dt + \sigma^i dW_t^i + c^i dN_t^i, \quad (5.1)$$

minden $i \in \{1, \dots, M\}$ piaci szereplőre.

A sztochasztikus differenciálegyenlet mögött az a koncepció, hogy a kevesebb tőkével rendelkező bankok kölcsönt vesznek fel a többlettel rendelkező bankoktól, és az egyes intézetek hitelezési aktivitását egy $a \in \mathbb{R}^M$, $a_i \geq 0$ vektor kontrollálja. A logaritmus dinamikájában a többletet/hiányt a különbség vételével határozzuk meg, ami a sima tőkére nézve a hányados vételével ekvivalens, tehát a relatív szuficit/deficit arányában vállalnak/kérnek hitelt a bankok.

A W_t folyamat egy M -dimenziós Brown-mozgás, és $\sigma \in \mathbb{R}^M$, $\sigma \geq 0$ a szórást meghatározó paraméter.

Az N_t folyamat egy M -dimenziós Hawkes-folyamat, vagyis egy öngerjesztő folyamat, ami az egyes szereplőket érő sokkokat reprezentálja. A $c \in \mathbb{R}^M$, $c < 0$ negatív paraméter állítja a sokkok negatív hatásait az egyes bankok tőkéjének alakulására. Az i . bank sokkjainak hatását a j . bankra a magfüggvény $\Phi^{i,j}(t)$ értékéből olvashatjuk ki.

Természetesen az X folyamat néhány koordinátájában lehet negatív. Akkor mondjuk egy bankra, hogy csődbe ment, ha a tőkefolyamatának logaritmusa egy $D \leq 0$ szint alá esik. Ekkor továbbra is szerepel a piacon, és kap kölcsönt más

bankoktól. Mindaddig csődösnek nyilvánítjuk, amíg el nem éri újra a 0 szintet a folyamat.

Az egyenletet a következő egyszerűbb alakban is fel lehet írni:

$$dX_t^i = a^i(\bar{X}_t - X_t^i)dt + \sigma^i dW_t^i + c^i dN_t^i, \quad (5.2)$$

ahol $\bar{X}_t = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M X_t^k$ a bankok rendelkezésre álló tőkéjének logaritmikus átlaga. Ebben a felírásban látszik, hogy a folyamat átlaghoz visszahúzó.

Bizonyítható, hogy egy így definiált sztochasztikus differenciálegyenletnek létezik egyértelmű megoldása. [21]

5.1.2. Szimulációk

Legyen a Hawkes-folyamat magfüggvénye exponenciálisan lecsengő és azonos minden bank-párra, vagyis $\Phi^{i,j}(t) = \alpha e^{-\beta t} \forall i, j \in \{1, \dots, M\}$, ahol $\alpha = \frac{2}{M}$, $\beta = \frac{2}{M}$, és a Hawkes-folyamat intenzitásához adódó konstans $\mu_i = \frac{10}{M} \forall i \in \{1, \dots, M\}$ -re.

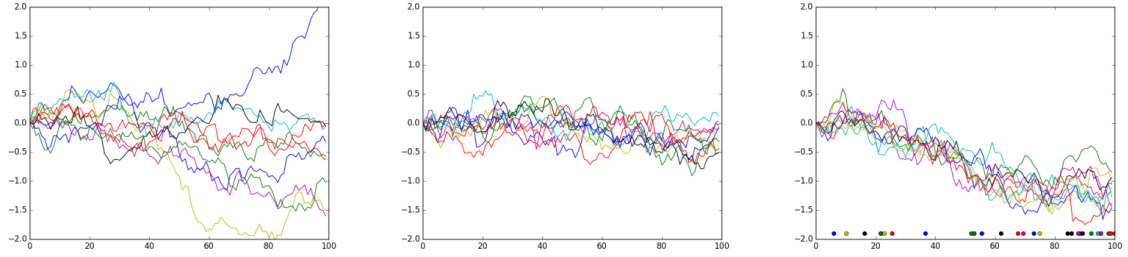
Emellett az X folyamat definíciójában szereplő W Brown-mozgást kicseréljük egy $\tilde{W}$ folyamatra, amelyre $\tilde{W}_t^i = \rho W^0 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^i$, $\forall i \in \{1, \dots, M\}$ -re, ahol W^0 független W^i -től $\forall i \in \{1, \dots, M\}$ -re. Ezzel beemelünk egy közös W^0 zajt, amely minden bankra hatással van, és egy ρ mértékű korrelációt okoz.

A szimulációk Borovykh et al. [21] tanulmányában találhatók meg.

Először 10 részvényre szimulálták a következő három esetet (Euler-Maruyama diszkrétizálással, 100 lépésre):

- 1. eset: Nincs hitelezés (vagyis a azonosan 0), csak független Brown-mozgások vannak és $\sigma = 1$ azonosan, nincs ugrófolyamat
- 2. eset: Van hitelezés ($a = 10$ azonosan), a Brown-mozgások korreláltak ($\rho = 0.2$) és $\sigma = 1$ azonosan, nincs ugrófolyamat
- 3. eset: Van hitelezés ($a = 10$ azonosan), a Brown-mozgások korreláltak ($\rho = 0.2$) és $\sigma = 1$ azonosan, Hawkes-folyamat is szerepel és $c = -0.2$ azonosan

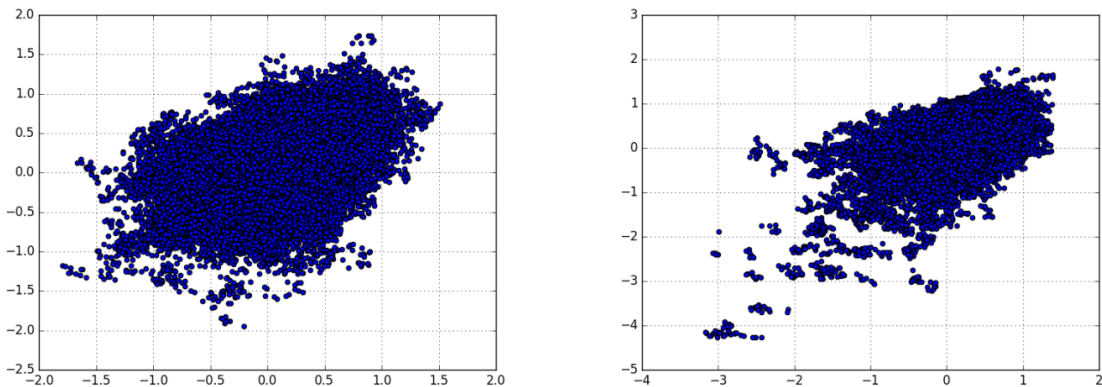
Ezekkel a következő log-tőke alakulásokat kapjuk (az esetek sorrendjében):



5.1. ábra. A szimulált log-tőke folyamatok a különböző esetekre [21]

Az ábrákon látható, hogy az első esetben a különböző bankok folyamatai teljesen függetlenül alakulnak, azonban a második esetben már egy jelentős átlaghoz visszahúzás figyelhető meg. A harmadik esetben a sokkok (mint a Hawkes-folyamat ugrásai, színes pöttyökkel jelölve) megjelenésével egy negatív tendencia jött elő. Emellett az ugrások bekövetkezésein látható a klasztereződés, ez legerősebben a szimuláció végén észlelhető.

A szimulációkat úgy is elvégezhetjük, hogy a sokkot reprezentáló ugrófolyamat egy Poisson-folyamat. A Poisson-folyamat egy olyan számlálófolyamat, amelynek intenzitása konstans. Ezáltal nincs semmilyen öngerjesztő tulajdonsága, a bankokat egymástól függetlenül éri a sokkok, exponenciális eloszlást követő időközönként. Erre modellezve egy két bankból álló rendszert a következő végállapotokat kapjuk a log-tőke folyamatra:



5.2. ábra. A szimulációk végállapotai Poisson-, illetve Hawkes-folyamat esetén [21]

Ezen az ábrán látható, hogy a Hawkes folyamat esetén jobban együtt mozog a két szereplő, és extrémebb negatív értékek is realizálódnak a szimulációk során.

A cikk egy másik eredményét is érdemes még kiemelni. A csődbe kerülő bankok számának relatív gyakoriságát vizsgálva az vehető észre, hogy hitelezés nélkül ez egy, a középértékre (5) szimmetrikus eloszlás, míg a 2. esetben egy lecsengő sűrűséget kapunk. A Hawkes-folyamatot beemelve pedig egy kezdetben lecsengő, azonban a maximális (10) értéknél jelentősen magasabb értéket felvevő eloszlást kapunk az öngerjesztés miatt.

Az értekezésben tárgyalt eredmények rámutatnak, hogy a Hawkes-folyamatok felhasználása alkalmas a pénzügyi piacok szereplőit érő sokkok modellezésére, ha szeretnénk a krízis-események klasztereződését, öngerjesztését beépíteni a modellezésbe.

A rendszerkockázat mérése során a cél épp ezen tulajdonság hatásának vizsgálata, így a fejezetben bemutatott Hawkes-folyamat egy újabb alkalmas megközelítés a pénzügyi szereplők összekapcsoltságából fakadó kockázat modellezésére.

6. fejezet

Összegzés

A szakdolgozat során a rendszerkockázat témakörét vizsgáltuk. A bevezetésben láthattuk, hogy korábbi elhanyagolása mekkora szerepet játszott a 2008-as világválság idején. Ebből kiindulva az ilyen fajta kockázat mérése, számszerűsítése a modern pénzügyi matematika egyik fontos és gyakran kutatott területe. Az ezután következő fejezetekben néhány lényegesen eltérő megközelítést tárgyaltunk. Ezekben közös volt, hogy a pénzügyi szereplők tőkéjének alakulását, hiányát vagy egy megkövetelt szinttől való eltérését vizsgálta.

Először egy egyszerűbb intuíciókon alapuló, azonban valós adatokkal dolgozó, könnyen megvalósítható módszert ismertünk meg, amelyben a nagy újítást jelentő gépi tanulás is jól alkalmazható. Az eljárás kulcsa, hogy feltérképezze a hozamok kapcsolatát a piaci illetve vállalati karakterisztikákkal és az adott szereplőkre ható hozamokkal. Az összetett hatás-mechanizmusok közelítésére alkalmas fejlett Machine Learning módszereket használni a lehető legjobb eredmény érdekében. Az összefüggés feltérképezése után vizsgálhatóvá válik, hogy egy krízis-esemény során mekkora tőkehiány alakul ki egyes piacokon, amely jól reprezentálja a rendszerben rejlő kockázatot.

A következő fejezetben ezen eljárás mintájára egy saját kóddal próbáltunk bepillantani a rendszerkockázat mérésébe. Valós piaci adatokkal szimulálva, és néhány gépi tanulási módszer kipróbálásával néhány érdekesség mellett láthattuk, hogy milyen hatalmas pénzmennyiség bevonásának szükségét okozhatja egy krízis-esemény bekövetkezése.

A folytatásban a pénzügyi piacok szereplői közötti hitelezési kapcsolatok hálózaton modellezését tárgyaltuk. Ekkor a fő vizsgálandó jelenség az volt, hogy egyes

intézetek fizetésektelensége milyen eredményhez vezethet.

Az első részben a kifizetések végső állapotainak meghatározására láttunk egy algoritmust. A rendszerszintű összekapcsoltság negatív hatása itt is mérhetővé válik annak meghatározásával, hogy a rendszer szereplői az eredeti követeléseiknek mekkora részét fogják ténylegesen megkapni.

A második részben pedig egy fertőzés-terjedési modellt vizsgáltuk. Ez a módszer azt reprezentálta, hogy néhány fizetésektelen (fertőzött) szereplő hogyan fertőzi tovább a szomszédait, és a végállapota mekkora fertőzött kaszkádot eredményez. Kutatások bizonyították, hogy kezdetben elég a piac kis részének fizetésektelensége ahhoz, hogy globális méretű fertőzést okozzon a rendszerben.

Mindkét módszer a hálózatokon modellezett rendszer összeköttettségéből eredő lehetséges problémaforrások egy-egy megközelítését mutatta be.

Az utolsó fejezetben pedig egy újabb megközelítést láttunk a problémának, amely egy öngerjesztő intenzitású számálofolyamat, a Hawkes-folyamat alkalmazását mutatta be. A használatát az egyes szereplőket érő sokkok egyszerre bekövetkezése motiválta, amelyet megfelelően vissza is ad a módszer. A használata valamilyen folyamat modellezésekor beépíti a rendszerszintű krízis-események előfordulását az adott modellbe.

Összességében három nagyon különböző módszert láthattunk a pénzügyi rendszerek összekapcsoltságából eredő veszélyek, kockázatok meghatározására, amely fontos területe a pénzügyi matematikának. A saját program elkészítésekor is érezhető volt, hogy a probléma nagyon sok módon megfogható. A dolgozat célja a rendszerkockázat mérésének számos módszere közül néhány körbejárása és elsajátítása volt.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Backhausz Ágnesnek a rengeteg segítséget, amely lehetővé tette a szakdolgozat megírását. Az érdekes témaajánlás mellett a folyamatos tanácsai és alapos, részletes javaslatai nagyon gördülékennyé tették a dolgozat elkészítését.

Emellett hálával tartozom eddigi tanárainknak, barátainknak, akiktől rengeteg ismeretet szereztem az évek során.

Irodalomjegyzék

- [1] Austin Murphy. „An analysis of the financial crisis of 2008: causes and solutions”. *An Analysis of the Financial Crisis of* (2008).
- [2] J Austin Murphy. „A discounted cash-flow model of fixed-income securities subject to multiple calls”. *Southern Economic Journal* (1988), 21–36. old.
- [3] Mark Buchanan. „Crazy Money”. *New Scientist* (2008), 32–35. old.
- [4] Joseph E Stiglitz. „Lessons from the global financial crisis of 2008”. *Seoul Journal of economics* 23.3 (2010), 321–339. old.
- [5] John Hull. *Risk management and financial institutions, + Web Site*. 733. köt. John Wiley & Sons, 2012.
- [6] Ruicheng Liu és Chi Seng Pun. „Machine-Learning-enhanced systemic risk measure: A Two-Step supervised learning approach”. *Journal of Banking & Finance* 136 (2022), 106416. old.
- [7] Monica Billio és tsai. „Econometric measures of connectedness and systemic risk in the finance and insurance sectors”. *Journal of financial economics* 104.3 (2012), 535–559. old.
- [8] Jeffrey M Wooldridge. *Introductory Econometrics: A Modern Approach 6rd ed.* Cengage learning, 2016.
- [9] Mariette Awad és Rahul Khanna. *Efficient learning machines: theories, concepts, and applications for engineers and system designers*. Springer nature, 2015.
- [10] Tianqi Chen és Carlos Guestrin. „Xgboost: A scalable tree boosting system”. *Proceedings of the 22nd acm sigkdd international conference on knowledge discovery and data mining*. 2016, 785–794. old.

- [11] Steven J Rigatti. „Random forest”. *Journal of Insurance Medicine* 47.1 (2017), 31–39. old.
- [12] Vivek Bajaj. *Best 25 Technical Indicators that Every Trader Should Know*. <https://blog.elearnmarkets.com/best-25-technical-indicators/>. 2025.
- [13] Fabio Caccioli, Paolo Barucca és Teruyoshi Kobayashi. „Network models of financial systemic risk: a review”. *Journal of Computational Social Science* 1 (2018), 81–114. old.
- [14] Larry Eisenberg és Thomas H Noe. „Systemic risk in financial systems”. *Management Science* 47.2 (2001), 236–249. old.
- [15] Alfred Tarski. „A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications.” (1955).
- [16] Leonard CG Rogers és Luitgard AM Veraart. „Failure and rescue in an inter-bank network”. *Management Science* 59.4 (2013), 882–898. old.
- [17] Prasanna Gai és Sujit Kapadia. „Contagion in financial networks”. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 466.2120 (2010), 2401–2423. old.
- [18] Duncan S Callaway és tsai. „Network robustness and fragility: Percolation on random graphs”. *Physical review letters* 85.25 (2000), 5468. old.
- [19] James P Gleeson és Diarmuid J Cahalane. „Seed size strongly affects cascades on random networks”. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 75.5 (2007), 56103. old.
- [20] Emmanuel Bacry, Iacopo Mastromatteo és Jean-François Muzy. „Hawkes processes in finance”. *Market Microstructure and Liquidity* 1.01 (2015), 1550005. old.
- [21] Anastasia Borovykh, Andrea Pascucci és Stefano La Rovere. „Systemic risk in a mean-field model of interbank lending with self-exciting shocks”. *IISE Transactions* 50.9 (2018), 806–819. old.

MI-eszközhasználati nyilatkozat

Alulírott, Csóti Kristóf, nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI-alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Nyelvhelyesség	GPT-4turbo	Teljes dolgozat	Helyesírás-ellenőrzés

A felsoroltakon túl más MI-alapú eszközt nem használtam.