

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Kelemen Lajos

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc
Kvantitatív pénzügyek specializáció

Magántőkealapok hozamfelbontása

Szakdolgozat

Témavezető: Dr. Molnár-Sáska Gábor
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM



**BUDAPESTI
CORVINUS
EGYETEM**

Budapest, 2025.

Tartalomjegyzék

1. A magántőkealapok és a hozamfelbontás bemutatása	6
1.1. Mik a magántőkealapok?	6
1.2. A magántőkealapok rövid története	8
1.3. A magántőkealapok jelene és jövője	8
1.4. A tőzsdén jegyzett és a magántőkealapban lévő vállalatok összehasonlítása	10
1.5. A hagyományos hozamfelbontási módszerek	12
1.5.1. A Fama-felbontás	13
1.5.2. A Brinson-felbontás	14
1.5.3. Faktor-felbontás	15
1.5.4. Alkalmazhatóság a magántőkealapok esetén	17
2. A magántőkealapok hozamfelbontási modelljei	18
2.1. A teljesítmény mérése, a hozam számolása	18
2.1.1. PME mérőszámok	19
2.2. Egy magántőkealap hozamfelbontási modell bemutatása	22
2.2.1. Modell felépítése	24
2.3. Shapley-algoritmus bemutatása	27
2.4. Játékelméleti példa Shapley-algoritmussal	29
2.5. Saját modell bemutatása	30
3. Eredmények bemutatása	32
3.1. Valós adatok hiánya	32
3.2. Adatok generálása	32
3.3. A magántőkealapok hozama	34
3.4. Modell reprodukálás	38
3.4.1. Monte-Carlo szimuláció	38
3.4.2. Egyedi hatások vizsgálata	39
3.5. A modell továbbfejlesztése	40
3.5.1. Stratégia és földrajzi régió halmazok bővítése	40
3.5.2. Hozamfelbontás PME mutatókkal	42
3.6. A saját modell eredményei	43

3.6.1.	Saját hozamfelbontás hibája	44
3.6.2.	A piaci portfólió közelítése	46
3.6.3.	A jellemzők hozamai	47
3.6.4.	A felbontás illeszkedése	48
3.7.	Progamozási megoldások	49
4.	Összefoglalás	50

Köszönetnyilvánítás

Hálás köszönettel tartozom témavezetőmnek, Molnár-Sáska Gábornak, amiért megismertette velem ezt az érdekes és releváns témát, valamint hogy szakértelmével folyamatosan segítette a szakdolgozatom megírását.

Szeretném kifejezni hálámat a családom részére, akik mindvégig támogattak és támaszt nyújtottak a tanulmányaim során.

Végül szeretném megköszönni az elmúlt éveket a csoporttársaimnak, akikkel sok közös élményben lehetett részem és bármilyen kérdéssel kapcsolatban a segítségemre siettek.

Bevezetés

A szakdolgozatom célja egy magántőkealapok hozamfelbontására irányuló modell felépítése. Egy portfóliómenedzser számára a hozamfelbontás ismerete kulcsfontosságú a teljesítmény mélyebb megértéséhez és javításához. Azonosíthatóvá válnak a hozam forrásai, amely segíti a döntéshozatalt.

Az első fejezetben megismerkedhetünk a magántőke befektetések felépítésével. A magántőkealapoknak két fontos szereplője van. Az alapkezelők irányítják a befektetést, míg a befektetők, akiket korlátolt partnereknek nevezünk, szolgáltatják a tőkét. A magántőkealap egyik legfontosabb jellemzője a stratégiája. Bemutatásra kerül a felvásárlás, növekedési tőke és kockázati tőke stratégiák működése. Áttekintjük a magántőkealapok múltját, jelenét és jövőjét. Mérvadó iparági előrejelzéseket elemezve azt mondhatjuk, hogy az ilyen típusú befektetéseknek jelentős szerepe lesz a jövőben, így a vizsgálatuk indokolt. Összehasonlításra kerülnek a tőzsdei és a magántőke befektetések, amelyből kiderül, hogy modellezési szempontból is más megközelítésre lesz szükség a hagyományos hozamfelbontási módszerekhez képest. Ezután röviden bemutatásra kerül a Fama-, a Brinson-, és a Faktor-felbontás, melyek kiszámítását példákon keresztül mutatjuk be.

A második fejezetben először a magántőkealapok teljesítményének mérésére szolgáló hozam típusokat definiáljuk. Mivel a magántőkealapok nem likvid eszközök, ezért nem alkalmazható a hagyományos hozamszámolás. A cash-flow struktúrával rendelkező befektetések esetén a két leggyakoribb mutató a belső megtérülési ráta (IRR) és a tőkearányos megtérülési szorzó (MOIC). A PME (Public Market Equivalent) mérőszámok segítségével a magántőkealap teljesítményét egy tőzsdei indexbe való befektetéssel hasonlíthatjuk össze. Tehát ezek megmutatják, hogy jobban jártunk-e a magántőkealapba való befektetéssel annál, mintha a tőzsdei indexbe fektettünk volna. Ezután ismertetjük a *Private portfolio attribution analysis* [5] cikkben felépített magántőkealapok hozamfelbontására szolgáló modellt, ami a saját modell alapját is nyújtja. Definiáljuk a hozamfelbontás komponenseit és kiszámításukat. A másik fontos tanulmány, amit felhasználunk a Shapley-algoritmust mutatja be [24]. Ezen algoritmus segítségével fogjuk tudni kiszámolni az egyes jellemzők hozamait. Végül egy saját modell elméleti felépítését ismertetjük.

A harmadik fejezetben elsőként a magántőkealapok generálásának folyamatát mutatjuk be. A valós adatok hozzáférése limitált, tekintve a befektetések privát jellegét, ezért egy szimulált piacon végezzük a vizsgálatokat. A különböző jellemzőkkel rendelkező alapoktól más teljesítményt várunk el. A szimulált magántőkealapoknak kiszámoljuk a különböző PME mutatóit. Az összehasonlítás az S&P500 indexszel történik. Reprodukáljuk a második fejezetben bemutatott modell [5] eredményeit Monte-Carlo szimuláció segítségével. Ezután két irányban is továbbfejlesztjük a modellt. Egyrészt a magántőkealapok két jellemzőjének, a stratégiák és a földrajzi régióknak a halmazát bővítjük ki. Másrészt az IRR és MOIC hozam mutatók helyett a PME mutatókkal is felbontjuk a magántőkealapok hozamát. Végül a saját modell eredményeit ismertetjük. Megvizsgáljuk a különböző tulajdonságait és korlátait. A további fejlesztési irányokat is meghatározunk.

1. fejezet

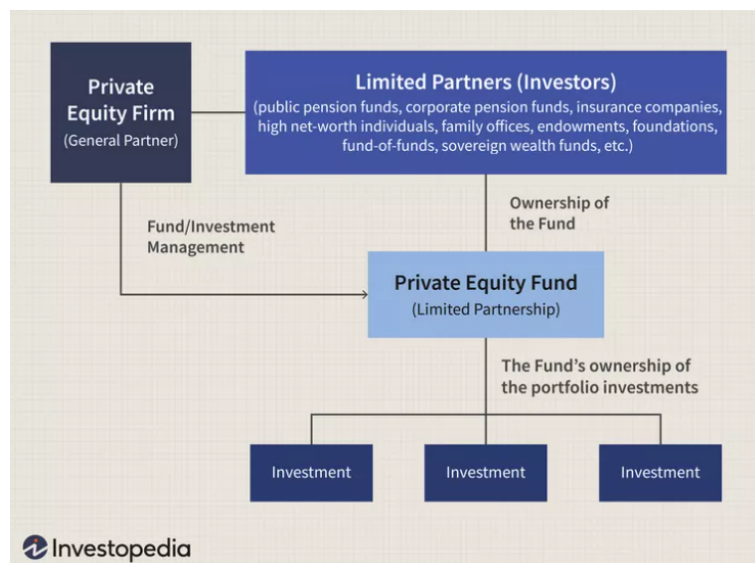
A magántőkealapok és a hozamfelbontás bemutatása

1.1. Mik a magántőkealapok?

A magántőke befektetések (private equity) egy olyan alternatíváját nyújtják a befektetéseknek, ahol a befektetők részesedést szereznek egy nem tőzsdén listázott, hanem magánkézben lévő vállalatban. A befektetés tehát egy zártkörű tőkefinanszírozás a kiszemelt vállalat részére, ami a magántőkealapon keresztül történik. A magántőkealap egy olyan partnerkapcsolat, ami a magántőke társaság (private equity fund) és a befektetők között jön létre. A magántőke társaság irányítóit alapkezelőknek (general partner), míg a befektetőket korlátolt partnernek (limited partner) nevezzük. A magántőkealapot a magántőke társaság fogja menedzselni, míg a tőkét a befektetők biztosítják (1.1 ábra). A menedzsment díja általában a magántőkealap 2%-a, valamint egy előre meghatározott szint felett elért profit 20%-a. A magántőkealapok célja általában, hogy a vállalatot, amibe a tőkét fekteti, jól működő, profitot termelő szintre hozza és értékesítse vagy a tőzsdén listázza. A vállalat hatékonyabb működésének céljából költségcsökkentést eszközölhet, vagy akár a teljes meglévő menedzsmentet lecserélheti. Ezek a befektetések közép-hosszú távra szólnak, vagyis körülbelül 5-15 évre [8].

Az ilyen típusú befektetések nagyon különbözőek lehetnek. A következő befektetési stratégiák és formák a legismertebbek:

- Tőkeáttétes felvásárlás (Leveraged buyout): Egy olyan vállalatfelvásárlási stratégia, ahol a magántőkealap nagyrészt hitelből finanszírozza a tranzakciót, így minimális saját tőkét fektet be. Ezzel a stratégiával magas hozam érhető el a tőkeáttét miatt, ugyanakkor ez nagy kockázati faktor is, mivel ha a vállalat nem teljesít jól, akkor nem tudja a hitelt törleszteni és csődbe mehet. Ezt a stratégiát leggyakrabban nagy vállalatoknál használják. A stratégia működését az 1.1 és 1.2 Példák mutatják be.



1.1. ábra. A magántőkealap felépítése [8]

- **Növekedési tőke befektetés (Growth capital):** Egy olyan finanszírozási forma, amelyet közepes, stabil bevétellel rendelkező vállalatok kapnak, hogy gyors növekedést vagy terjeszkedést érjenek el. A befektetők itt részesedést szereznek a vállalatból, de a menedzsmentet általában nem cserélik le.
- **Kockázati tőke befektetés (Venture capital):** Ebben a formában a nagy növekedési potenciállal rendelkező, jellemzően korai fázisban lévő startupok számára biztosítanak tőkét a befektetők. A vállalatirányításhoz csak stratégiai tanácsokkal, kapcsolati tőkével járulnak hozzá. Ez egy kockázatos befektetési forma, mivel nincs garancia arra, hogy a startup sikeres lesz és profitot fog termelni. Az egyik legsikeresebb kockázati tőke befektető az 1.3 Példában kerül bemutatásra.

1.1. Példa. Egy magántőkealap megvásárol egy 500 millió forint értékű vállalatot, melyet 100 millió forint tőkéből és 400 millió forint banki hitelből finanszíroz, aminek az évi kamata 10%. Ha sikerül egy év alatt optimalizálni a céget és 600 millió forintért értékesíteni, akkor 60 millió forintos profitot sikerül szerezni. Így ebben az esetben a hozam 60%-os, míg banki hitel nélkül tisztán tőkéből megvásárolva mindössze 12%-os lett volna.

1.2. Példa. 2007-ben a Blackstone magántőke társaság tőkeáttétes felvásárlást hajtott végre, melynek keretében összesen 26 milliárd dollárért vásárolta fel a Hilton Hotelt és vezette ki a tőzsdéről. 2013-ban listázták újra, a Blackstone fokozatosan értékesítette részesedését, végül megközelítőleg 12 milliárd dolláros profitot realizált [30].

1.3. Példa. Az egyik leghíresebb kockázati tőke befektető a Sequoia Capital, amely olyan vállalatokba fektetett még a startup fázisban, mint az Apple, Google, Zoom és Airbnb,

melyek óriási hasznot termeltek. Ugyanakkor nem minden befektetésük térült meg, 2023-ban 214 millió dollárt vesztek az FTX kriptotőzsde bukása után, mely jól mutatja ezen stratégia kockázatát [29].

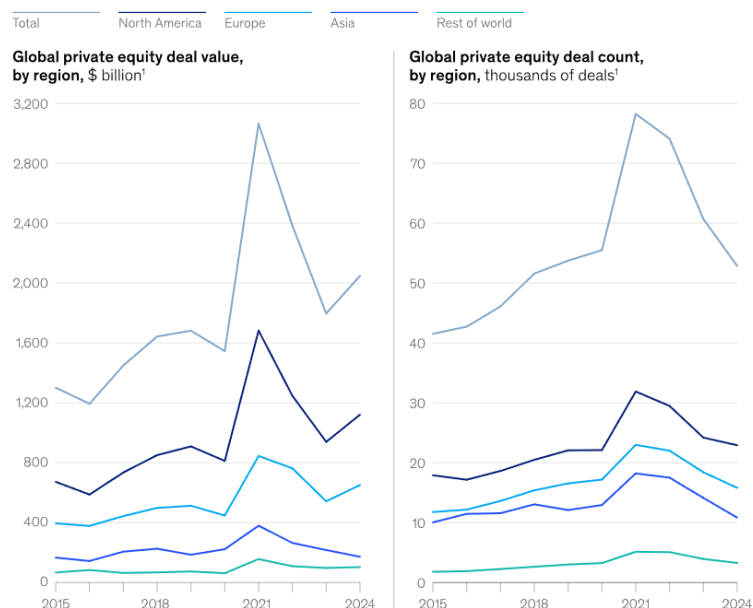
1.2. A magántőkealapok rövid története

Az első magántőkealap társaságok 1946-ban jöttek létre. Előtte leginkább a leggazdagabb családokra, például a Rockefeller, volt jellemző, hogy felvásárlást hajtottak végre. Az első igazán sikeres kockázati tőke befektetés az ARDC-hez köthető, amely 1957-ben 70000 dollárt fektetett a Digital Equipment Corporation vállalatba, melyet 1968-ban listáztak a tőzsdén 35,5 millió dollár értékben. Ez több, mint 500-szoros megtérülést jelentett. Az 1980-as évekig leginkább a kockázati tőke befektetések voltak a meghatározók. Ekkor kezdődött a Szilícium-völgy felemelkedése is, ugyanis leginkább az itt lévő technológiai startupok voltak a haszonélvezői a befektetéseknek. A '80-as években a felvásárlások is egyre meghatározóbbá váltak. 1980-ban az éves befektetés mindössze 2,4 milliárd dollár volt, amely az évtized végére évi 21,9 milliárd dollárra emelkedett. A Gibson Greetings 1982-es felvásárlása híresnek számít ebben az időben, ugyanis a befektetők a 80 millió dolláros tranzakció után csupán 16 hónappal 290 millió dollárért listázták a vállalatot a tőzsdén. A korszakban több, mint 2000 felvásárlás történt és több, máig meghatározó magántőke társaság is ekkor jött létre, például a már említett Blackstone is. 1989-ben történt az addig látott legnagyobb tőkeáttétes felvásárlás, az RJR Nabisco vállalatot 31,1 milliárd dollárért vették meg. Ez akkora összegnek számított, hogy csupán 2006-ban sikerült először nominálisan felülmúlni, azonban az inflációval korrigálva még ez is elmaradt a '89-estől. A magántőke befektetések ezután néhány évig stagnáltak, majd a kilencvenes években újabb robbanás következett be, melynek eredményeként az ezredfordulónál már 305 milliárd dollárra emelkedett az éves szintű befektetés.

Az első nagy visszaesést a 2000-es Dotcom lufi okozta. 2003 közepére a kockázati tőke ágazat mintegy felére zsugorodott. A felvásárlások is erősen visszaestek. 2001-ben csupán hat 500 millió dollár feletti tranzakció történt az előző évi huszonhéthez képest az Egyesült Államokban. Európában azonban folytatódott a növekedés, és 2001-ben először múlta felül az európai befektetések mérete az amerikaiakat. A felvásárlások 2005-2007 között újra lendületet vettek és sorra dőltek meg a rekordok, de a 2008-as gazdasági világválság aztán itt is éreztette a hatását és visszaesést eredményezett [9].

1.3. A magántőkealapok jelene és jövője

Az elmúlt tíz évben dinamikusan növekedtek a magántőke befektetések, a 2021-es csúcson meghaladta az évi 3000 milliárd dollárt is (1.2 ábra). Összehasonlításképpen a kriptopiaccal eddigi legnagyobb piaci kapitalizációja körülbelül 3700 [1], míg az Apple-é, amely a leg-



1.2. ábra. A magántőkealapok éves befektetéseinek összértéke (bal) és száma (jobb) [11]

értékesebb vállalat, 3860 milliárd dollár volt [2]. A következő években a magántőkealapok dinamikus növekedése várható. Vizsgáljunk meg néhány mérvadó elemzői várakozást:

1. A McKinsey a *Globális Magántőkepiaci jelentésében* [11] a következő megállapításokat teszi:

- A 2024-es év javuló likviditási környezetet és élénkülő tranzakciós aktivitást hozott, amely alapján folytatódhat a magántőke szektor növekedése.
- A tőkealap kezelők egyre inkább a magánbefektetők felé fordulnak, mivel az intézményi befektetőktől érkező tőke kevésbé kiszámítható.
- A befektetések egyre inkább koncentrálnak az olyan szektorokba, mint a mesterséges intelligencia, egészségügyi technológia és zöld energiák. Ez a kockázati tőke befektetésekből hozhat nagy növekedést.
- Ázsia magántőkepiaca nyomás alatt marad, így a befektetések inkább Észak-Amerika és Európa felé fognak irányulni.

2. Az FTI Consulting négy fő előrejelzése [7]:

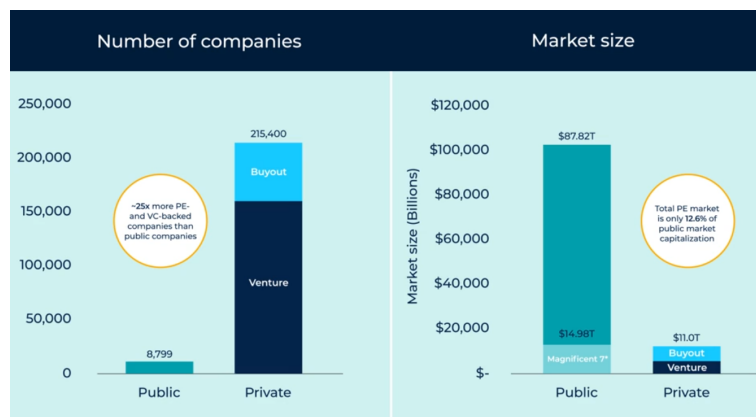
- A Donald Trump elnök által bejelentett vámintézkedések növelik a költségeket és a geopolitikai kockázatot. Ezeket a kockázatokat figyelembe kell vennie az alapkezelőknek a befektetési döntések meghozatalakor.
- A hagyományos banki hitelezés visszaesése miatt a magánhitelezés (private credit) egyre fontosabb finanszírozási forrássá válik.

- A geopolitikai kockázatok növekedésével a kibertámadások veszélye is egyre nagyobb lesz. A vállalatoknak fel kell készülniük, hogy a megfelelő biztonsági rendszerekkel rendelkezzenek.
 - A mesterséges intelligencia szerepe egyre jelentősebb lesz a vállalati értékteremtésben. A működési költségek jelentősen csökkenhetnek például az ügyfélszolgálat, a marketing és termékfejlesztés területeken a mesterséges intelligencia alkalmazásával.
3. Larry Fink, a BlackRock alapkezelő vezérigazgatójának a befektetőkhez intézett levelében a következő előrejelzést adja [15]:
- 2024 és 2040 között összesen 68 ezer milliárd dollárra becsülik az infrastrukturális befektetések igényét globálisan. Ilyen típusú befektetés például az autópálya, vasút és kikötő építés. Az országok ezeket magas államadósságuk miatt nem fogják tudni finanszírozni, így előtérbe kerülhet a magántőke bevonása.
 - A vállalatok a banki hitelezés kötöttségei és korlátai miatt szintén egyre inkább a magántőke bevonása felé fordulhatnak. Még a legnagyobb tech vállalatoknak is nehézséget okoz egy új adatközpont felépítése, pedig a mesterséges intelligencia térnyerésével egyre több ilyenre lesz szükség.
 - A klasszikus 60/40-es portfóliók át fognak rendeződni 50/30/20-as portfólióká. Ez azt jeletni, hogy eddig a portfóliók 60%-ban részvényekből és 40%-ban kötvényekből álltak, de a jövőben ez lecsökken 50%-ra és 30%-ra. A maradék 20% a magántőke befektetések lesznek.

1.4. A tőzsdén jegyzett és a magántőkealapban lévő vállalatok összehasonlítása

A tőzsdén listázott vállalatokkal összehasonlítva a magántőkealapban lévőket érdekes képet tapasztalunk. A magántulajdonú vállalatok száma megközelítőleg 25-szöröse, de piaci értéke mindössze a nyolcada a tőzsdén listázottakéhoz képest (1.3 ábra). Ez abból is következik, hogy az alacsony kapitalizációjú vállalatokból van sok, melyek nem érik el azt a szintet, hogy a tőzsdén legyenek jegyezve. Szintén az 1.3 ábrán látható, hogy a legnagyobb technológiai vállalatokat tömörítő *fantasztikus hetes* (*magnificent seven*) összértéke meghaladja a magántőke szektor értékét. A *fantasztikus hetes* az Alphabet, Amazon, Apple, Meta, Microsoft, Nvidia és Tesla vállalatokat tartalmazza [28].

Elemzési és modellezési szempontból is érdemes összehasonlítani, hogy milyen különbségek vannak a két befektetési típus között. A tőzsdén elérhető részvények, kötvények és egyéb pénzügyi instrumentumok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:



1.3. ábra. A tőzsdén listázott és a magántőkealapban lévő vállalatok összehasonlítása [17]

- Akár évtizedekre visszamenőleg nyilvánosan elérhető adatok állnak rendelkezésre a modellezéshez.
- Az eszközök likvidek, vagyis azonnal lehet kereskedni velük.
- A kereskedés folytonos időben történik vagyis a kereskedési időszakban bármikor lehet venni és eladni.
- Egy eszköz teljesítményének mérése, hozama könnyen kiszámítható és összehasonlítható más eszközzel. Egy portfólióhoz könnyen lehet benchmarkot társítani.
- Nincs belépési küszöb és meghatározott érték, hogy mennyit lehet az adott eszközbe fektetni.
- Van lehetőség rövidre (short) eladni, például részvények esetében.

Ezzel szemben a magántőke befektetésekre a következők a jellemzők:

- Az adatok hozzáférhetősége limitált, valamint az adatok minősége is megkérdőjelezhető lehet. Elsősorban a vállalatok negyedéves jelentéseiből lehet a be- és kifizetésekre következtetni.
- A be- és kifizetések adott időpontokban történnek, általában negyedévente.
- Egy magántőke befektetés hozamának meghatározása nem egyértelmű. Több módszer is ismertetünk a 2.1 alfejezetben. A benchmark meghatározása és a tőzsdői befektetésekkal való összehasonlítás szintén nehéz feladat. Ezekre a 2.1.1 alfejezetben mutatunk be több mérőszámot.
- Csak egy meghatározott összeg felett lehet befektetni. Ez a tulajdonság korlátozza jelenleg leginkább a magántőke befektetéseket lakossági szinten.

- Nem lehet rövidre eladni, vagyis a magántőkealap rosszul teljesítéséből nem lehet hasznot szerezni.

A magántőke alapokra vonatkozó hozamfelbontási modellek ismertetése a 2. fejezetben kerül bemutatásra. A következő szekcióban a hagyományos hozamfelbontási módszerek kerülnek bemutatásra, melyek tehát elsősorban a tőzsdén kereskedett eszközökre, értékpapírokra alkalmazhatók.

1.5. A hagyományos hozamfelbontási módszerek

Egy befektető számára az egyik legfontosabb kérdés az lehet, hogy milyen tényezőknek köszönhető a portfólió által elért teljesítmény. A teljesítmény mérésére az elért hozam szolgál, melyet a következő módon lehet kiszámolni:

$$r_p = \frac{W_t^P}{W_0^P} - 1 \quad (1.1)$$

ahol W_0^P a portfólió kezdeti, míg W_t^P a t időpontbeli értéke. A felbontás ismeretében a befektető könnyebben tudja átsúlyozni, újra allokálni a portfóliójának komponenseit. Ezt teheti azért például, hogy csökkentse a kitétséget egy bizonyos szektorban, ha azt látja, hogy alulteljesített vagy túl nagy kockázatokat rejt.

Menchero [23] definíciója szerint a hozamfelbontás célja, hogy megmagyarázza a portfólió teljesítményét egy benchmark portfólióhoz viszonyítva, azonosítsa a többlethozam forrásait, és ezeket összekapcsolja a portfólió menedzser aktív döntéseivel. Hensel, Ezra és Ilkiw [18] a felbontást úgy határozták meg, mint egy olyan matematikai folyamat, amely egy befektetés hozamát a portfólióban implicit módon jelen lévő különböző kockázatvállalási döntésekhez köti, valamint annak vizsgálatát, hogy e kockázatok milyen mértékben lettek jutalmazva vagy büntetve a tőkepiacon. Colin [10] szerint a felbontás célja az, hogy a portfólió teljes hozamát lebontsa az egyes kockázati tényezők által generált hozamokra. Általánosságban azt mondhatjuk, hogy a hozamfelbontás megmutatja, hogy a portfólió kockázataival kapcsolatos befektetési döntések közül melyek bizonyultak sikeresnek, és melyek nem.

Lord [22] szerint egy jó felbontási módszer kritériumai a következők:

- A hozamokat konzisztens módon elemezzük.
- Jól felépített értékelési keretrendszer szükséges.
- Portfóliók és indexek elemzésének képessége.
- A felbontásban használt faktorok koherensek a portfólióstratégia döntési változóival.

- Értékpapír szintű hozamfelbontás, amely összegezhető és ellenőrizhető.
- Robusztus analitikai rendszerek és magas minőségű adatok, amelyek értelmezhető felbontást biztosítanak.

Murira és Sierra [25] szerint egyetértés van abban, hogy egy hozamfelbontási módszernek két alapvető követelményt kell kielégítenie:

- Konzisztensnek kell lennie a portfólió befektetési döntéshozatali folyamatával. A hozamfelbontás akkor lesz a leghasznosabb, ha tükrözi a befektetés kezelésének folyamatát. Ekkor lehetővé teszi a többlethozam forrásainak azonosítását és magyarázatát.
- Kompatibilisnek kell lennie a vállalat hozam- és kockázatmérési rendszereivel, mert enélkül a menedzsereknek nehézséget okozna felhasználni a hozamfelbontásból kapott információkat.

1.5.1. A Fama-felbontás

A Fama-felbontás [13] tekinthető az első hozamfelbontás modellnek. Fama javaslata szerint a hozamot két részre kell bontani:

1. Szelekciós hozamra, ami azt mutatja meg, hogy egy adott kockázati szinten melyek a legjobb értékpapírok.
2. Szisztematikus hozamra, ami a piaci ármozgásból származó kockázat eredménye.

A felbontás tehát a következő:

$$\underbrace{r_p - r_{rf}}_{\text{többlethozam}} = \underbrace{r_p - \beta \cdot (r_m - r_{rf}) - r_{rf}}_{\text{szelekciós hozam}} + \underbrace{\beta \cdot (r_m - r_{rf})}_{\text{szisztematikus hozam}}$$

ahol

- r_p a portfólió hozama.
- r_m a piaci portfólió hozama.
- r_{rf} a kockázatmentes hozam.
- β a portfólió szisztematikus kockázata.

A piaci portfólióba való fektetés esetében az egyedi kockázatok eltűnnek és a teljes kockázat a szisztematikus kockázattal egyezik meg. A portfólió menedzserek azonban a többlethozam érdekében nem a piaci portfóliót állítják össze, így a szelekciós hozam méri igazán a teljesítményüket.

1.5.2. A Brinson-felbontás

A Brinson-felbontás a hozamfelbontás egyik legismertebb módszere, amelyet Brinson, Hood és Beebower [4] dolgoztak ki. Ez a módszer azt vizsgálja, hogy a portfólió teljesítménye hogyan tér el egy benchmark portfólió teljesítményétől, és ezt három fő tényezőre bontja:

1. Allokációs hatás: Ez méri, hogy a portfólió különböző szektorokban való súlyozása hogyan járult hozzá a többlethozamhoz. Képlete a következő: $\sum_i (w_{p,i} - w_{b,i})r_{b,i}$, ahol $w_{p,i}$ a portfólióban, míg $w_{b,i}$ a benchmarkban az i -edik szektor súlya, valamint $r_{b,i}$ az i -edik szektor hozama a benchmarkban.
2. Szelekciós hatás: Ez méri, hogy a portfólióban lévő egyedi értékpapírok mennyivel teljesítettek jobban vagy rosszabbul a benchmark azonos szektorában lévő értékpapírhoz képest. A képlete: $\sum_i w_{b,i}(r_{p,i} - r_{b,i})$, ahol $r_{p,i}$ az i -edik szektor hozama a portfólióban.
3. Interakciós hatás: Ez azt méri, hogy az allokáció és a szelekció együttesen milyen hatást gyakorolt a hozamra. Ennek képlete: $\sum_i (w_{p,i} - w_{b,i})(r_{p,i} - r_{b,i})$.

Összegezve tehát:

$$\underbrace{r_p - r_b}_{\text{többlethozam}} = \underbrace{\sum_i (w_{p,i} - w_{b,i})r_{b,i}}_{\text{Allokációs hatás}} + \underbrace{\sum_i w_{b,i}(r_{p,i} - r_{b,i})}_{\text{Szelekciós hatás}} + \underbrace{\sum_i (w_{p,i} - w_{b,i})(r_{p,i} - r_{b,i})}_{\text{Interakciós hatás}} \quad (1.2)$$

1.4. Állítás. Az (1.2) egyenlet teljesül.

Bizonyítás. $\sum_i (w_{p,i} - w_{b,i})r_{b,i} + \sum_i w_{b,i}(r_{p,i} - r_{b,i}) + \sum_i (w_{p,i} - w_{b,i})(r_{p,i} - r_{b,i}) = \sum_i w_{p,i}r_{b,i} - \sum_i w_{b,i}r_{b,i} + \sum_i w_{b,i}r_{p,i} - \sum_i w_{b,i}r_{b,i} + r_p - \sum_i w_{p,i}r_{b,i} - \sum_i w_{b,i}r_{p,i} + r_b = r_p - r_b$ $\square$

1.5. Példa. Az 1.1 táblázatban a Brinson-felbontásra láthatunk példát. A két szektor amire bontjuk az értékpapírokat a részvény és a kötvény. A szelekciós hatásból láthatjuk, hogy 1,4%-os többlethozamot eredményezett a részvény szektorban az értékpapírok választása, míg a kötvénynél ez az érték -0,6%. Az allokációs hatás összesen -0,4%, ami azt jelenti, hogy a kötvény szektor súlya túl nagy volt. Ez az interakciós hatásban is megjelenik, ugyanis a benchmarknál jobban teljesítő szektor alulsúlyozása és a rosszabbul teljesítő túlsúlyozása is -0,4%-os hozamot eredményezett. A három hatást összegezve valóban visszakapjuk a többlethozamot.

A Brinson-felbontásnak csak a (1.2) egyenletben leírt legegyszerűbb esetét ismertetjük, ugyanis a magántőkealapok vizsgálatánál más megközelítést alkalmazunk.

Szektor	Súly		Hozam		Hatás		
	Portfólió	Benchmark	Portfólió	Benchmark	Allokáció	Szelekció	Interakció
Részvény	50%	70%	12,00%	10,00%	-2,00%	1,40%	-0,40%
Kötvény	50%	30%	6,00%	8,00%	1,60%	-0,60%	-0,40%
Összes	100%	100%	9,00%	9,40%	-0,40%	0,80%	-0,80%

1.1. táblázat. Brinson-felbontás

1.5.3. Faktor-felbontás

Másik nagy csoportja a hozamfelbontásnak a faktorokon alapuló felbontás. Ez egy olyan megközelítés, amely a portfólió hozamát azonosítható és mérhető kockázati tényezők (faktorok) hatásaira bontja. Ez a módszer a klasszikus Brinson-felbontással szemben nem az allokáció és az értékpapírválasztás eltéréseire összpontosít, hanem a hozamokat makrogazdasági és piaci tényezők függvényében vizsgálja. A faktor egy olyan változó, amely befolyásolja az eszközök hozamait, és amelynek hatása statisztikai vagy gazdasági modellek segítségével számszerűsíthető. Ezen modellek a legtöbb esetben regressziós modellek. Általában két fő kategóriába sorolják a faktorokat:

1. Makrogazdasági faktorok: Olyan tényezők, amelyek széles körű gazdasági hatásokkal bírnak. Ilyen például az infláció, GDP növekedés vagy az olaj árára vonatkozó faktorok.
2. Stílus és piaci faktorok: Az eszközök sajátosságaiból eredő tényezők. Gyakran használt a piaci kapitalizációból (kicsi, közepes, nagy vállalat) származó faktor vagy a momentum, ami az árfolyamok trendjeire vonatkozik.

A modell hozamszámolási formulája:

$$r_i = r_{rf} + \underbrace{\sum_j \beta_{i,j} F_j}_{\text{Faktor hozam}} + \epsilon_i \quad (1.3)$$

ahol:

- r_i az i -edik eszköz hozama.
- r_{rf} a kockázatmentes hozam.
- $\beta_{i,j}$ az i -edik eszköz érzékenysége a j -edik faktorra szemben.
- F_j a j -edik faktor hozama.
- ϵ_i az egyedi hozam.

A Fama-French modell [12] az egyik első faktormodell, amely a következő három faktor segítségével próbálja felbontani a hozamot:

1. Piaci faktor: $R_M = r_M - r_{rf}$, ahol r_M a piaci portfólió hozama.
2. Méretfaktor: A kis és a nagy piaci kapitalizációjú vállalatok részvényeinek hozamkülönbségéből számolható ki.
3. Értékfaktor: A Book-to-market mutatót használja, ami a vállalat könyv szerinti értékének és piaci kapitalizációjának aránya. A magas és alacsony mutatóval rendelkező részvények teljesítménye közti különbséget méri.

1.6. Példa. A következő táblázatban három részvény faktorok általi hozamaira láthatunk példát. Mindegyik részvény esetén a faktorok hozama meg van szorozva a faktorhoz tartozó érzékenységgel. Így kaphatók meg az egyedi faktor hozamok, melyeket összegezve kapjuk meg a részvény faktor hozamát.

Faktorok		Faktor-béta ($\beta_{i,j}$)			Egyedi faktor hozam		
Név	Hozam (F_j)	1. rv	2. rv	3. rv	1. rv	2. rv	3. rv
Piaci faktor	3,4%	1,4	0,9	0,4	4,8%	3,1%	1,4%
Méretfaktor	-2,7%	0,8	-0,4	1,7	-2,2%	1,1%	-4,6%
Értékfaktor	4,3%	0,7	1,2	-1,3	3,0%	5,2%	-5,6%
Faktor hozam					5,6%	9,3%	-8,8%

1.2. táblázat. Három részvény faktor hozamának számolása

A következő táblázatban a három részvényből álló portfólió hozamfelbontását láthatjuk. A súlyok jelentik, hogy a portfólió milyen arányban tartamazza a részvényeket. A portfólió hozamfelbontását a részvények hozamfelbontásainak súlyozott átlagaként kapjuk meg. A faktor hozamokat az 1.2 táblázatban számoltuk ki, míg az egyedi hozamok a részvény hozamának, és a kockázatmentes és faktor hozamok összegének a különbsége. A felbontás segítségével mindössze -0,2%-nyi hozamot nem sikerült a faktoroknak megmagyarázni.

	Súly	Hozam (r_i)	Kockázatmentes (r_{rf})	Faktor (r_F)	Egyedi (ϵ_i)
1. részvény	20%	7,6%	2,2%	5,6%	-0,2%
2. részvény	40%	9,9%	2,2%	9,3%	-1,6%
3. részvény	40%	-5,5%	2,2%	-8,8%	1,1%
Portfólió	100%	3,3%	2,2%	1,3%	-0,2%

1.3. táblázat. Portfólió hozamfelbontása

A jelenlegi faktor modellek már jóval összetettebb és kifinomultabb faktorokból állnak, melyek letisztult képet képesek nyújtani a portfóliót érintő kockázatokról. Ilyen faktorok például:

- Piaci hangulat (Sentiment) faktor: A piaci hangulat mérésére szolgál, azaz hogy a befektetők hajlandóbbak-e kockázatot vállalni. Megmutatja hogyan érzékelik és árazzák be a befektetők a jövőt.
- ESG faktor: Környezeti, társadalmi és irányítási kockázatok beárazása hosszú távon. Az ESG besorolása a vállalatoknak egyre fontosabb szempont a befektetők részéről.

1.5.4. Alkalmazhatóság a magántőkealapok esetén

Az eddig bemutatott hozamfelbontási modellek a következők miatt nem alkalmasak a magántőkealapok hozamfelbontására:

- A teljesítmény mérésére nem használható az (1.1) egyenletben definiált hozam, mert a magántőkealap befektetések nem likvidek, nincs napi piaci árfolyamuk.
- A befektetések hosszú távra szólnak, kezdetben általában nincsenek kifizetések. Így ilyenkor ezek a felbontások nem értelmezhetőek, nem tudják magyarázni a teljesítményt.
- Mivel a magántőkealapok egyediek, ezért nehéz összehasonlítani más befektetésekkel vagy indexekkel. Nincs kézenfekvő módszer a megfelelő benchmark megtalálására.

2. fejezet

A magántőkealapok hozamfelbontási modelljei

2.1. A teljesítmény mérése, a hozam számolása

A magántőkealapok esetében nem alkalmazható a hagyományos hozamszámolás, mivel nem likvid eszközről van szó, így nem tudunk piaci árat meghatározni. A magántőkealapokra egy pénzáramlási (cash-flow) struktúra jellemző, ami be- és kifizetésekből áll. Kezdetben a befizetések dominálnak, ekkor történik a tőkebevonás a vállalatba. Amíg nem történnek kifizetések, addig nincs jó módszer a teljesítmény mérésére. A legtöbb esetben az első kifizetésre éveket kell várni, így a teljesítményt is közép-hosszú távon tudjuk elemezni. A kiszálláshoz közelítve, ami az alap lezárását jelenti, már a kifizetések dominálnak. Ha még nem történt meg a kiszállás, akkor a magántőkealap nettó eszközértékét (Net Asset Value – NAV) is belevesszük a számolásba.

Két alapvető mutató szolgál a teljesítmény mérésére:

1. Belső megtérülési ráta (Internal Rate of Return – IRR) [14] az a hozamszint, amely mellett a befektetés nettó jelenértéke 0, vagyis:

$$\sum_{i=0}^N \frac{d_i - c_i}{(1+r)^{t_i}} = 0$$

ahol d_i a kifizetési, míg c_i a befizetési cash-flow komponensek és t_i a hozzájuk tartozó időpontok, amikor megtörténik a pénzáramlás. Ahogy azt fentebb is írtuk, a d_N -hez hozzáadódik a nettó eszközérték, ha még nem történt meg a kiszállás. Ha t_N előtt történt a kiszállás, akkor az utána lévő cash-flow komponensek nullák lesznek. Ennek a mérőszámnak több limitációja is ismert [14]:

- Matematikailag az egyenletnek több megoldása is létezhet, és ezek közül a pénzügyileg értelmezhető megoldás nem mindig egyértelmű.

- A kifizetések IRR-rel történő újrabefektetését feltételezi, ami nem mindig reális, és torzítást eredményezhet.
- Nem mindig alkalmas két befektetés összehasonlítására:

Befektetés	Futamidő	Kezdeti befektetés	Összes cash flow	IRR	Teljes hozam
<i>A</i>	1 év	-100	+120	20%	+20
<i>B</i>	5 év	-100	+200	14,87%	+100

2.1. táblázat. Két különböző időtávú befektetés IRR-alapú összehasonlítása

Azt láthatjuk, hogy az *A* befektetés IRR-je magasabb, azonban ez mégsem jelenti, hogy a befektetők ezt részesítenék előnyben. Ha például az újrabefektetés hozama az első év után lecsökken, akkor a *B* befektetés 5 éves távon jobban tud teljesíteni.

2. A tőkearányos megtérülési szorzó (Multiple of Invested Capital – MOIC) [20] megmutatja, hogy hányszorosát kapja vissza a befektető az eredetileg befektetett tőkéjéhez képest. A hozam képlete:

$$MOIC = \frac{\sum_{i=0}^N d_i}{\sum_{i=0}^N c_i} \quad (2.1)$$

A 2.1 táblázatban lévő két befektetésre kiszámolva: $MOIC_A = \frac{120}{100} = 1,2$, míg $MOIC_B = \frac{200}{100} = 2$. Tehát itt az IRR-rel ellentétben a *B* befektetés a jobb. Itt is vizsgáljuk meg a limitációkat [20]:

- Nem veszi figyelembe a pénz időértékét, nincs diszkontálás.
- Nehezen összehasonlítható különböző időtávon. Egy 1,9-es MOIC egy év alatt jobb befektetés, mint egy 2-es MOIC öt év alatt, de ezt a mutató nem veszi számításba.
- Nem mutatja a teljesítmény időbeli eloszlását. Elképzelhető, hogy egységesen történnek a kifizetések, de akár az is, hogy egy összegben a végén. Ez például kockázatot rejthet, ha hitelből történik a finanszírozás.

2.1.1. PME mérőszámok

A PME (Public Market Equivalent) olyan teljesítménymutatók összessége, amelyeket azért dolgoztak ki, hogy értékelni lehessen a magántőkealapokat a tőzsdei befektetésekhez képest, és hogy áthidalják a belső megtérülési ráta és a tőkearányos megtérülési szorzó mutatók korlátait. Bár a számítási módszerek különböznek, mindegyik arra törekszik, hogy megbecsülje: milyen hozamot lehetett volna elérni, ha a magántőkealap pénzáramait egy

részvénypiaci indexbe fektették volna. Az első PME-t Long és Nickels vezette be 1996-ban [21]. Az **LN-PME** egy magántőkealap teljesítményét az S&P500 részvényindexhez méri a magántőkealap pénzáramlásának figyelembe vételével. Egy fiktív portfóliót hoz létre az alábbi módon:

- Ha befizetés történik, akkor ehhez egyenlő mértékű index vásárlást rendelünk.
- Ha kifizetés történik, akkor ehhez vele megegyező nagyságú eladást rendelünk.
- Ha még nem történt meg a tőkealap lezárása, akkor a nettó eszközértéket (NAV_{PME}) is levonjuk, viszont a cash-flow struktúrában is feltüntetjük.

Az index árfolyamának változásával a fiktív portfólió értéke is változik. Amikor a magántőkealap értékelése elérhetővé válik, akkor ezt az értéket össze lehet hasonlítani az indexbe történő elméleti befektetés aktuális értékével. A formula a következő:

$$NAV_{PME} = \sum_{i=1}^N (c_i - d_i) \frac{I_N}{I_i} - NAV_{PE} \quad (2.2)$$

ahol I_i az index árfolyama az i időpontban. A LN-PME az a hozam, amely kielégíti az egyenletet:

$$\sum_{i=1}^N \frac{d_i - c_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{NAV_{PE}}{(1+r)^{t_N}} + \frac{NAV_{PME}}{(1+r)^{t_N}} = 0 \quad (2.3)$$

2.1. Példa. A 2.2 táblázatban láthatunk egy példát az LN-PME számolására. Azt láthatjuk, hogy az indexbe fektetéssel profittal zárt a fiktív portfólió a magántőkealaphoz képest, így magasabb lesz a végén meghatározott LN-PME, mint az IRR. A pontos számolás a Függelékben található.

Idő	Cash-flow	Index	Index hozam	Portfólió érték
t_0	-100	100	–	100
t_1	50	108	8,00%	58
t_2	60	115	6,48%	1,76
IRR: 6,39%			LN-PME: 7,47%	

2.2. táblázat. LN-PME számítása

A mutató legnagyobb korlátja akkor jelentkezik, amikor a magántőkealap szignifikánsan jobban teljesít, mint az index. Ekkor ugyanis ha gyakori, nagy mértékű kifizetések történnek, akkor a portfólió értéke negatív lehet, ami tulajdonképpen egy short pozíciónak felelne meg. Ennek kiküszöbölésére alkotta meg Rouvinez 2003-ban a **PME+** mutatót [27]. Itt az ötlet a cash-flow szerkezet módosítása egy λ tényező bevezetésével. Vezesük be a következő mennyiségeket:

- $S_c = \sum_{i=0}^N c_i \frac{I_N}{I_i}$, ahol c_i az i időpontra vonatkozó befizetést jelenti.
- $S_d = \sum_{i=0}^N d_i \frac{I_N}{I_i}$, ahol d_i az i időpontra vonatkozó kifizetést jelenti.
- NAV_{PE} , ami a magántőkealap nettó eszközértéke az utolsó vizsgált időpontban, vagyis t_N -ben. Az értéke 0, ha már megtörtént a kiszállás.
- $\lambda = \frac{S_c - NAV_{PE}}{S_d}$ a módosító tényező.
- $NAV_{PME+} = \sum_{i=0}^N (c_i - \lambda d_i) \frac{I_T}{I_i}$ a módosított cash-flow struktúrából származó fiktív portfólió értéke.

2.2. Állítás. $NAV_{PE} = NAV_{PME+}$ egyenlőség fenn áll.

Bizonyítás. $NAV_{PME+} = \sum_{i=0}^N (c_i - \lambda d_i) \frac{I_T}{I_i} = S_c - \lambda S_d = S_c - \frac{S_c - NAV_{PE}}{S_d} S_d = NAV_{PE}$ $\square$

2.3. Következmény. *Mivel itt a fiktív portfólió értéke meg fog egyezni a magántőkealap értékével a végén, így ebben az esetben már nem fog fennállni, hogy jobban teljesítés esetén short pozícióba kerülünk.*

A PME+ lesz az a hozam amire fenáll, hogy:

$$\sum_{i=0}^N \frac{\lambda d_i - c_i}{(1+r)^{t_i}} + \frac{NAV_{PE}}{(1+r)^{t_N}} = 0 \quad (2.4)$$

Az MOIC típusú piaci összehasonlításra alkotta meg Kaplan és Schoar 2005-ben a **KS-PME** mutatót [19]. A formula szintén a be- és kifizetéseket veszi figyelembe, valamint a nettó eszközértéket:

$$KS - PME = \frac{S_d + NAV_{PE}}{S_c} \quad (2.5)$$

Mivel egy szorzó típusú mutató, ezért az 1 feletti érték jelenti azt, hogy jobban teljesített a piaci indexnél. A fiktív portfólió értéke kifejezhető $NAV_{PME} = S_c - S_d - NAV_{PE}$ alakban, ezért ezt S_c -vel osztva és átrendezve a következő formulát kapjuk:

$$KS - PME = 1 - \frac{NAV_{PME}}{S_c}$$

Ebből látható, hogy a KS-PME mutató akkor lesz 1 felett, ha a NAV_{PME} érték negatív, mivel az S_c szigorúan pozitív.

A **Direkt Alfa** (α) mutatót 2014-ben vezette be Gredil, Griffiths és Stucke [16]. Ez is egy IRR típusú mutató. Legyen a cash-flow komponensek hozama $r(t) = b(t) + \alpha$ alakú, ahol $b(t)$ az index hozama. Mivel $r(t)$ és $b(t)$ folytonos kamatlábak, ezért egy c_i komponens értéke a t_N időpontban:

$$v_i(t_N) = c_i \cdot e^{\int_{t_i}^{t_N} (b(t) + \alpha) dt}$$

Mivel $\frac{I_N}{I_i} = e^{\int_{t_i}^{t_N} b(t)dt}$, ezért:

$$v_i(t_N) = c_i \cdot \frac{I_N}{I_i} e^{\int_{t_i}^{t_N} \alpha dt}$$

Az integrált kifejtve és az időről $t_i = i\Delta$ felosztást feltételezve:

$$v_i(t_N) = c_i \cdot \frac{I_N}{I_i} e^{\alpha(N-i)\Delta}$$

formulát kapjuk. Ezt összegezve az összes komponensre:

$$\sum_{i=0}^N (d_i - c_i) \cdot \frac{I_N}{I_i} e^{\alpha(N-i)\Delta} + N A V_{PE} = 0$$

majd $1 + a = e^{\alpha\Delta}$ -t bevezetve egy IRR típusú formulát kapunk:

$$\sum_{i=0}^N (d_i - c_i) \cdot \frac{I_N}{I_i} (1 + a)^{N-i} + N A V_{PE} = 0 \quad (2.6)$$

Ezt $(1 + a)^N$ -nel visszaosztva kapjuk meg a hagyományos formulát, viszont ez a művelet az a értékén nem változtat. Innen az α -t is vissza tudjuk számolni, mivel $\alpha = \frac{\ln(1+a)}{\Delta}$.

2.4. Példa. A 2.3 táblázatban egy példát láthatunk a Direkt Alfa kiszámolására. Az LN-PME mutatóval ellentétben itt a cash-flow komponensek változnak az index árváltozásának függvényében nem pedig az $N A V_{PE}$. Ahogy a táblázatban is láthatjuk, az index nagyértékű növekedése miatt a kezdeti befizetés fog nagy súllyal szerepelni. Ezért a Direkt Alfa értéke kisebb, mint az IRR. A pontos számolás a Függelékben található.

Időpont	Cash-flow	Index	Index hozama	Index súlyozott CF
t_0	-100	100		-115
t_1	50	108	8,00%	53,24
t_2	70	115	6,48%	70
IRR: 12,32%			a : 4,53%	α : 4,43%

2.3. táblázat. Direkt Alfa számítás táblázata

2.2. Egy magántőkealap hozamfelbontási modell bemutatása

A 2020-as *Private Portfolio Attribution Analysis* cikkben [5] felépített modell fogja szolgáltatni az alapját az általam felépített modellnek is. A kutatás szintén a magántőkealapok hozamfelbontására irányul. A piacot nyilvánosan elérhető cash-flow adatokkal rendelkező,

összehasonlítható magántőkealapok teljes halmazaként definiálja. Kihívást jelent, hogy olyan hosszú távon kell a magántőkealapot vizsgálni, amely alapján a becsült eredmények valós teljesítményt tudnak tükrözni. Tekintve, hogy egy tipikus magántőkealap befektetési időszaka körülbelül 5 év, majd a további pénzáramlás további 3–10 évig tarthat, gyakorlatilag nem lehetséges a befektetői képességet 1–2 éves időtávon értékelni. A felbontás célja, hogy megmutassa, hogyan járultak hozzá az alapkezelők taktikai és stratégiai allokációs döntései a teljesítményhez a piaci benchmark portfólióhoz viszonyítva. A befektető stratégiai döntései a következőkre irányulhatnak:

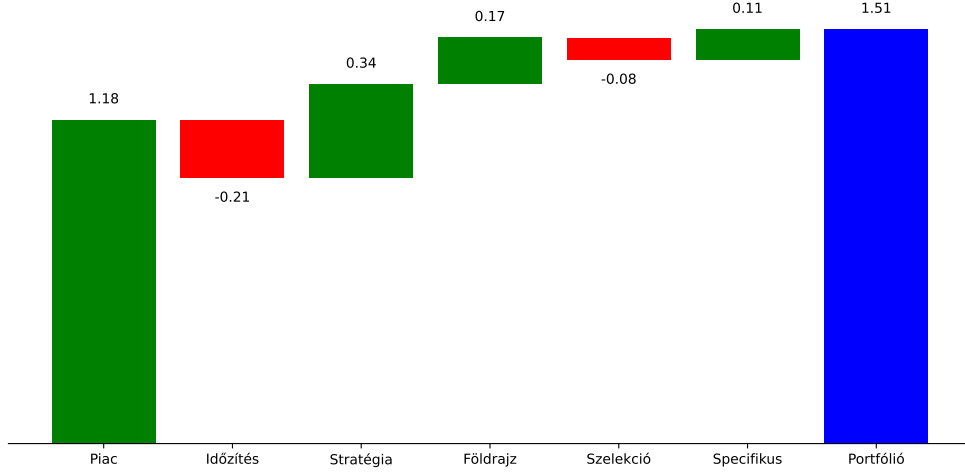
- **Időzítés (α_v):** Azt mutatja meg, hogy a tőkebefektetés olyan évjáratú magántőkealapokba történt-e, amelyek később jobban teljesítettek a piachoz képest.
- **Stratégia (α_s):** Azt mutatja meg, hogy a különböző stratégiájú (felvásárlás, kockázati tőke) magántőkealapokba való befektetés aránya jobbnak bizonyult-e, mintha a piaci arányokban történt volna a befektetés.
- **Földrajz (α_g):** A földrajzi diverzifikáció hatékonyságát vizsgálja, vagyis hogy a régiók közti elosztás növelte vagy csökkentette a teljesítményt, ha a piachoz viszonyítjuk. A régiók például lehetnek Amerika, Európa és Ázsia.
- **Szelekció (α_c):** Azt vizsgálja, hogy egy egyenlően súlyozott portfólióhoz képest a jól teljesítő magántőkealapok szerepelnek-e nagyobb súllyal.
- **Specifikus (α_ϵ):** A hozam azon része, amit a fenti faktorok nem tudnak megmagyarázni.

A felbontás formulája tehát:

$$r_p = r_m + \alpha_v + \alpha_s + \alpha_g + \alpha_c + \alpha_\epsilon \quad (2.7)$$

ahol r_p a portfólió, míg r_m a piaci portfólió hozama. A hozam mérésére az IRR és az MOIC szolgál.

2.5. Példa. A 2.1 ábrán egy magántőkealap portfólió MOIC hozamának felbontására láthatunk példát. Láthatjuk, hogy a piaci portfólió teljesítménye 1,18 volt. A portfólió a jobban teljesítő földrajzi lokációjú és stratégiájú alapokba fektetett (+0,17 és +0,34 MOIC), viszont rosszabbul teljesítő évjáratokba (-0,21 MOIC). Nem sikerült a portfólión belül a jobban teljesítő alapokba nagyobb súllyal fektetni (-0,08 MOIC). A felbontás mindössze 0,11 MOIC-t nem tud magyarázni.



2.1. ábra. Magántőkealap MOIC hozamfelbontása

2.2.1. Modell felépítése

Legyen a piacon lévő összes magántőkealap halmazának mérete M . Az alapokat 1-től M -ig indexeljük. A portfólió a piacon lévő alapok egy részhalmaza, mérete pedig N , melyre $N < M$. Mindegyik alap (v_i, g_i, s_i) karakterisztikával írható le, ahol v_i az évjárat, g_i a földrajzi régió, míg s_i a stratégia. Legyen $\mathcal{V}$ az évjáratok, $\mathcal{G}$ a földrajzi régiók és $\mathcal{S}$ a stratégiák halmaza. Ezekre egy példa lehet a következő:

$$\mathcal{V} = \{2012, 2013, 2014\} \quad \mathcal{G} = \{\text{Amerika}, \text{Ázsia}, \text{Európa}\} \quad \mathcal{S} = \{\text{Kockázati tőke}, \text{Felvásárlás}\}$$

Az időt $\{t_j\}_{j=1}^T$ felosztással vesszük, ahol $t_1 = 0$. Az i -edik alap t_j időpontban történő befizetésére a $c_i(t_j)$ jelölést, míg kifizetésre a $d_i(t_j)$ jelölést vezetjük be. Ezek az értékek lehetnek 0-k, például ha az alap évjáratát előtti időpontot nézünk. Ha egy alapot még nem zártak le a t_T időpontban, akkor a nettó eszközértékét is hozzáadjuk a d_T -hez. A piaci IRR az alábbi módon számolható:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^T \frac{d_i(t_j) - c_i(t_j)}{(1 + r_m)^{t_j}} = 0 \quad (2.8)$$

míg a piaci MOIC:

$$r_m = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^T d_i(t_j)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^T c_i(t_j)} \quad (2.9)$$

Időzítési hozam kiszámolása

Ez a hozam mutatja meg, hogy a portfólió több pénzt fektetett-e a jobban teljesítő évjáratú alapokba. Ezt úgy tudjuk kiszámolni, hogy kiszámoljuk annak az arányát, hogy a portfólió mennyit fektetett az egyes évjáratokba. Ezzel átsúlyozzuk a piacon lévő összes

alapot. Azt akarjuk elérni, hogy a piacon lévő évjáratokba fektetés aránya megegyezzen a portfólióéval és erre számolunk hozamot. A $v \in \mathcal{V}$ évjárat aránya a portfólióban:

$$W_v^P = \frac{\sum_{\{i:v_i=v, i \leq N\}} \sum_{j=1}^T c_i(t_j)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^T c_i(t_j)}$$

Ezután átsúlyozzuk az összes alap pénzáramlását:

$$c_i^{vadj}(t_j) = W_{v_i}^P \frac{c_i(t_j)}{\sum_{l=1}^T \sum_{\{k:v_k=v_i\}} c_k(t_l)} \quad i = 1, \dots, M \quad \text{és} \quad j = 1, \dots, T$$

A $d_i^{vadj}(t_j)$ hasonlóan számolható. Ebből már kiszámolható az IRR típusú r_v :

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^T \frac{d_i^{vadj}(t_j) - c_i^{vadj}(t_j)}{(1 + r_v)^{t_j}} = 0$$

és az MOIC típusú r_v is:

$$r_v = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^T d_i^{vadj}(t_j)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^T c_i^{vadj}(t_j)}$$

Végül $\alpha_v = r_v - r_m$ adja meg az Időzítési hozamot.

Stratégiai és földrajzi hozam

Ezen két hozam számolásához ugyanazt a megközelítést alkalmazták. Először is meghatározzuk $\forall v \in \mathcal{V}$ -re az évjárat piaci súlyát:

$$W_v^M = \frac{\sum_{\{i:v_i=v\}} \sum_{j=1}^T c_i(t_j)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^T c_i(t_j)}$$

Ezután $\forall (s, v)$ párra, ahol $s \in \mathcal{S}$ és $v \in \mathcal{V}$ meghatározzuk a portfólió stratégia-évjárat súlyát:

$$W_{s,v}^P = \frac{\sum_{\{i:v_i=v, s_i=s, i \leq N\}} \sum_{j=1}^T c_i(t_j)}{\sum_{\{i:v_i=v, i \leq N\}} \sum_{j=1}^T c_i(t_j)}$$

Ahhoz, hogy kiszűrjük a stratégia választás hatását, átsúlyozzuk a piacon lévő alapok pénzáramlásait a portfólió stratégia-évjárat súlyával, vagyis $\tilde{W}_{v,s} = W_v^M W_{v,s}^P$ jelöléssel:

$$c_i^{sadj}(t_j) = \tilde{W}_{v_i, s_i} \frac{c_i(t_j)}{\sum_{l=1}^T \sum_{\{k:v_k=v_i, s_k=s_i\}} c_k(t_l)} \quad i = 1, \dots, M \quad \text{és} \quad j = 1, \dots, T$$

A $d_i^{sadj}(t_j)$ tagok ugyanígy számolhatók. Ebből az előbb bemutatott módon meghatározható az IRR és a MOIC típusú r_s hozam is. Végül $\alpha_s = r_s - r_m$ képlettel kapható meg a Stratégiai hozam.

A Földrajzi hozam ugyanígy számolható, ha s helyett $g \in G$ -ket írunk.

Szelekciós hozam számolása

Ez a hozam azt mutatja meg, hogy jobban teljesített-e a portfólió annál, mintha egyenlően lett volna az alapok között szétosztva a befektetett pénzösszeg. Az egyenlően súlyozott portfólió hozamát úgy kaphatjuk meg, hogy normalizáljuk a be- és kifizetéseket az alapba történő összes befizetéssel, így gyakorlatilag minden alapba egységnyi befizetés történt, tehát a portfólió valóban egyenlően súlyozott lesz. Az így kapott pénzáramlásai a portfólióban lévő alapoknak:

$$c_i^{eq}(t_j) = \frac{c_i(t_j)}{\sum_{j=1}^T c_i(t_j)} \quad \text{és} \quad d_i^{eq}(t_j) = \frac{d_i(t_j)}{\sum_{j=1}^T c_i(t_j)}$$

Ezeket összeadva kapható meg az egyenlően súlyozott portfólió cash-flowja. Ebből a szokásos módon számolható az IRR és az MOIC típusú r_{eq} . Végül $\alpha_c = r_p - r_{eq}$ képlettel kapható meg a Szelekciós hozam.

Specifikus hozam

A hozamnak azt a részét, amit nem tudtunk megmagyarázni egyszerűen az

$$\alpha_\epsilon = r_p - r_m - \alpha_v + -\alpha_s - \alpha_g - \alpha_c$$

formulával kapjuk meg.

2.6. Példa. A következő táblázatban láthatjuk, hogy az alapok csak egy tulajdonságára fókuszálva a hozamok szeparálódnak. A cikkben lévő szimuláció beállításai szerint az évjáratok egyik csoportjába tartozó alapok jobban teljesítenek, mint a másokban csoportban lévők. Az $\mathcal{S} = \{\text{Felvásárlás, Kockázati tőke}\}$ és $\mathcal{G} = \{\text{Észak-Amerika, Világ többi része}\}$ beállítások mellett vannak jól és rosszul teljesítő alapok. Ha a portfóliót csak egy bizonyos tulajdonság szerint választjuk, akkor csak annak a hozama van rá hatással. Jól látható, hogy a különböző esetekben valóban csak az egyedi hatások jelentkeznek.

	Market Return	Timing	Strategy Select	Geo Select	Commit Sizing	Fund Select	Portfolio Return
Good vintage only	2.50	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	2.90
Bad vintage only	2.50	-0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	2.10
Venture funds only	2.50	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00	3.00
Buyout funds only	2.50	0.00	-0.49	0.00	0.00	0.00	2.01
North Amer. funds only	2.50	0.00	0.00	0.30	0.00	0.00	2.80
ROW funds only	2.50	0.00	0.00	-0.30	-0.01	0.01	2.19
Good funds overweighted	2.50	0.00	0.00	0.00	0.21	0.00	2.72
Good funds only	2.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.30	2.79
Bad funds only	2.50	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.30	2.20

2.2. ábra. Magántőkealapok MOIC hozamfelbontása [5]

Ahogy a tanulmány végén is taglalják, a modell továbbfejlesztésére több lehetőség is van. A cikkben mindössze két stratégia és földrajzi régió szerepel. Ennél részletesebb felosztással valószínűleg letisztultabb képet nyújthat a modell. Másodszor, a felbontás nem veszi figyelembe a piaci hozamokat, így a PME mutatók kiszámolása és összehasonlítása fontos lehet a teljesítmény megértésében. Harmadrészt pedig, egy új faktor bevezetése is indokolt lehet, ugyanis a modell bizonyos kölcsönhatásokat nem szűr ki és a specifikus hozamba sorolja.

A szakdolgozatban reprodukáljuk a modell eredményeit, valamint továbbfejlesztjük a stratégia és a földrajzi régió halmazok bővítésével. A PME mutatókra is felépítjük a hozamfelbontási modellt.

2.3. Shapley-algoritmus bemutatása

Ebben a szekcióban a 2021-es *Portfolio Performance Attribution via Shapley Value* [24] cikkben használt hozamfelbontási módszert mutatjuk be. Minden P portfóliót egy $x^P = (x_1^P, \dots, x_n^P)$ konfiguráció vektorral lehet leírni, ahol $x_i^P \in \{0,1\}$, azaz i -edik jellemző lehet aktív vagy inaktív. Egy ilyen jellemző lehet például, hogy egy magántőkealapokból álló portfólióban van-e egy bizonyos évjáratú alap. Összesen n jellemző van, ami 2^n konfigurációt jelent. A jellemzők növelésével a konfigurációk száma tehát exponenciálisan növekszik. Az $(1, \dots, 1) = \mathbf{1}$ konfigurációt *teljes konfigurációnak* nevezzük és azt feltételezzük, hogy a vizsgált portfólió ilyen alakú, míg a $(0, \dots, 0) = \mathbf{0}$ konfiguráció a benchmark portfólió. Egy portfólió teljesítményének értékelése egy $f : \{0,1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szolgál:

$$r = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Így a portfólió teljesítménye $r_P = f(\mathbf{1})$ lesz. A teljesítmény itt is jelenthet IRR-t vagy MOIC-t. Mindegyik jellemzőhöz hozzárendelünk egy teljesítményt, így ha az i -edik jellemző aktív, akkor az $a_i \in \mathbb{R}$ teljesítményt jelent. Ezenfelül legyen $b \in \mathbb{R}$ a benchmark portfólió teljesítménye.

Az $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ és b teljesítményeket meghatározó algoritmustól a következő kritériumokat várjuk el:

- Teljes konfiguráció teljesítményére $r_P = f(\mathbf{1}) = a_1 + \dots + a_n + b$ teljesüljön.
- A benchmark portfólió teljesítményére $f(\mathbf{0}) = b$ teljesüljön.
- Permutáció invariáns: Ha a jellemzők sorrendjét permutáljuk, akkor a hozzájuk tartozó teljesítmények is ugyanúgy permutálódnak.

- Monotonitás: Ha az f függvényt úgy változtatjuk meg, hogy az i -edik jellemző marginális teljesítménye, vagyis az $f(x+e_i)-f(x)$ nem csökken, akkor a hozzátartozó a_i teljesítmény sem csökkenhet. A marginális teljesítmény számolásánál feltesszük, hogy $x_i = 0$, tehát hogy inaktívból válik aktívvá.

Vizsgáljunk meg néhány algoritmust:

1. Egyedi hatás felbontás: Legyen $b = f(\mathbf{0})$ és $a_i = f(e_i) - f(\mathbf{0})$, ahol $i = 1, \dots, n$. Ez tehát egy olyan meghatározás, ahol mindig azt vizsgáljuk, hogy csak az adott jellemző aktív, így nem veszi figyelembe a kereszthatásokat. A kritériumok közül az elsőn kívül mindegyik teljesül rá.

2.7. Állítás. *Az egyedi hatás felbontás nem teljesíti a teljes konfiguráció teljesítményére vonatkozó feltételt.*

Bizonyítás. Vegyük a következő egyszerű példát $n = 2$ esetére:

$$f(\mathbf{0}) = 0, \quad f(e_1) = 1, \quad f(e_2) = 1, \quad f(\mathbf{1}) = 1.$$

A felbontás szerint $b = 0$, $a_1 = 1$ és $a_2 = 1$, így $1 = f(\mathbf{1}) = a_1 + a_2 + b = 2$, ami ellentmondás, tehát valóban nem teljesíti a kritériumot. $\square$

2. Sorozatos felbontás: Legyen $b = f(\mathbf{0})$ és legyen $a_i = f(e_1 + \dots + e_i) - f(e_1 + \dots + e_{i-1})$, ahol $i = 1, \dots, n$. Itt tehát lépésről lépésre számoljuk ki, hogy mennyi többletel teljesítményt jelentett az egyes jellemző aktivitása. A kritériumok tekintetében ez már teljesíti a teljes konfiguráció teljesítményére vonatkozó feltételt, viszont nem permutáció invariáns.

2.8. Állítás. *A sorozatos felbontás nem permutáció invariáns.*

Bizonyítás. A fenti példa itt is jó ellenpélda. A sorozatos felbontással $a_1 = 1$ és $a_2 = 0$ adódik. Ha viszont felcseréljük a két hatást, akkor $a_1 = 0$ és $a_2 = 1$ felbontást kapjuk, ami tehát nem egyezik meg. $\square$

3. Permutált sorozatos felbontás: Legyen π az $(1, \dots, n)$ számok egy permutációja. Permutáljuk meg a jellemzőket a π szerint. Ekkor a π permutációhoz tartozó felbontást a sorozatos felbontással megegyező módon számoljuk. Tehát a sorozatos felbontás ennek egy speciális esete, ahol $\pi = (1, \dots, n)$. Így ez a felbontás sem teljesíti a permutáció invariáns kritériumot.

A **Shapley-algoritmus** nem lesz más, mint az összes permutált sorozatos felbontás átlaga, vagyis:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \mathbf{a}_{\pi} \quad (2.10)$$

ahol $\mathbf{a}_\pi$ a π permutációhoz tartozó sorozatos felbontás. Ez a felbontás már teljesíteni fogja a permutáció invarianciát, mivel minden permutációt egyenlő súllyal vesz figyelembe.

2.9. Példa. Számoljuk ki a teljesítményeket a Shapley-algoritmus szerint a fenti példára, vagyis ahol:

$$f(\mathbf{0}) = 0, \quad f(e_1) = 1, \quad f(e_2) = 1, \quad f(\mathbf{1}) = 1.$$

A $\pi_1 = (1,2)$ permutáció esetén $a_1 = 1$ és $a_2 = 0$. A $\pi_2 = (2,1)$ permutáció esetén $a_1 = 0$ és $a_2 = 1$. Ezeket átlagolva $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_2 = \frac{1}{2}$ adódik.

A jellemzők teljesítményének kiszámolására a következő formula szolgál:

$$a_i = \sum_{x \in \mathcal{X}_i} \frac{(\mathbf{1}^T x)! (n - \mathbf{1}^T x - 1)!}{n!} (f(x + e_i) - f(x)) \quad (2.11)$$

ahol $\mathcal{X}_i = \{x \mid x_i = 0\}$, vagyis az olyan konfigurációk, ahol az i -edik jellemző inaktív. Az $(\mathbf{1}^T x)! (n - \mathbf{1}^T x - 1)!$ együttható a konfiguráció összes permutációjának száma, amihez ugyanazt az $f(x + e_i) - f(x)$ értéket számoljuk ki. Mivel az együtthatók $n!$ -ra összegződnek, így tulajdonképpen valószínűségként is felfoghatóak. Ezzel a teljesítmény számolása pedig egy várható érték.

A pontos értékek meghatározásához szükség van mind a 2^n konfiguráció kiszámolására, így ez elég nagy n -re már nem megvalósítható. Helyette Monte-Carlo szimulációt lehet alkalmazni. Ha visszatevéssel választunk N permutációt és kiszámoljuk ezek permutált sorozatos felbontását, akkor ezeket átlagolva a Shapley felbontás egy közelítését kapjuk. Ez a közelítés teljesíti a teljes konfiguráció teljesítményére vonatkozó kritériumot és N növelésével egyre kevésbé sérti a permutáció invariáns tulajdonságot.

2.4. Játékelméleti példa Shapley-algoritmussal

Az *On the Shapley value of liability games* [26] cikkben a szerzők tartozásos problémákat vizsgálnak. A tartozásos probléma lényege, hogy egy vállalat fizetéseképtelenné válása esetén milyen mértékben törleszti tartozásait a hitelezők felé. A vállalatnak lehetősége van tárgyalásokat folytatni, amelyek modellezését kooperatív játékokkal végzik. A Shapley-algoritmusból kapott értékek meghatároznak egy elosztási szabályt, amely három fő monotonitási tulajdonsággal is rendelkezik. A hitelezők jobban járnak, ha nő a követelésük vagy az eszközérték. A nagyobb követelésű hitelezők jobban részesülnek az eszközérték növekedéséből. A vállalat egy tartozás növekedéséből csak profitálhat, viszont ez nem áll fenn az eszközérték növekedésénél. A tanulmány legérdekesebb része, hogy a Shapley értékek közvetlenül számolhatók a tartozásos probléma adataiból. A játékban a vállalat egy külső szereplőként jelenik meg, és Shapley-értékének kiszámítása NP-nehéz.

2.5. Saját modell bemutatása

A saját hozamfelbontási modell az előbb bemutatott Shapley-algoritmuson alapszik. A modell a 2.2.1 szekcióban bemutatott magántőkealapokra vonatkozó karakterisztikára épít. A jellemzők, amire a Shapley-algoritmust alkalmazzuk az összes lehetséges karakterisztikus hármas, azaz:

$$a_i = (v_i, g_i, s_i) \quad i = 1, 2, \dots, |\mathcal{V}| \cdot |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{S}|$$

ahol $v_i \in \mathcal{V}, g_i \in \mathcal{G}, s_i \in \mathcal{S}$. Ha $i \neq j$, akkor $(v_i, g_i, s_i) \neq (v_j, g_j, s_j)$. A jellemzők hozamszámolása úgy történik, hogy kiindulunk egy üres portfólióból, amire a P_0 jelölést használjuk. Amikor az i -edik jellemző aktívvá válik, akkor a jellemző karakterisztikájával rendelkező alapokat hozzáadjuk a portfólióhoz, így megkapva a P_i portfóliót. A jellemzőhöz tartozó hozamot a következő módon számoljuk:

$$r_i = r_{P_i} - r_{P_{i-1}}$$

Tehát a bővített P_i portfóliónak kiszámoljuk a hozamát és kivonjuk belőle a bővítés előtti P_{i-1} portfólió hozamát. Ezt $i = 1, 2, \dots, |\mathcal{V}| \cdot |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{S}|$ -re elvégezve minden jellemzőhöz tartozó hozamot kiszámolunk. Az utolsó jellemző aktívvá válásakor a portfólió a teljes piaccal egyezik meg. Így minden permutációs felbontás esetén igaz lesz, hogy:

$$\sum_{i=1}^{|\mathcal{V}| \cdot |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{S}|} r_i = r_M \quad (2.12)$$

ahol r_M a piaci portfólió hozama. Ezt a számolást N permutációra megismételjük. A kapott értékeket átlagolva kapjuk meg a jellemzők végső hozamait (r^S), tehát:

$$r_i^S = \frac{\sum_{j=1}^N r_i^j}{N}$$

ahol r_i^j a j -edik permutációban számolt i -edik jellemzőhöz tartozó hozam.

Egy magántőkealapokból álló $P = (f_1, \dots, f_k)$ portfólió hozamfelbontásához először ki kell számolni az egyes jellemzők súlyát, vagyis hogy a portfólió értékének hányad része van olyan alapban, amelyeknek a karakterisztikus hármasa megegyezik a jellemző karakterisztikus hármasával, vagyis:

$$w_i = \frac{\sum_{(v_{f_j}, g_{f_j}, s_{f_j}) = (v_i, g_i, s_i)} W_{f_j}}{W_P}$$

ahol $(v_{f_j}, g_{f_j}, s_{f_j})$ az f_j alap karakterisztikus hármasa, míg W_{f_j} az alap értéke. W_P jelöli a portfólió értékét. A portfólió értékére úgy tekintünk, mind az összes befizetés összege.

Végül a portfólió hozamfelbontását a következő módon kapjuk meg:

$$|\mathcal{V}| \cdot |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{S}| \sum_{i=1}^{|\mathcal{V}| \cdot |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{S}|} w_i r_i + \epsilon_P = r_P \quad (2.13)$$

ahol r_P a portfólió hozama, míg ϵ_P a reziduális hozam, amit nem magyarázott a modell. A $|\mathcal{V}| \cdot |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{S}|$ -vel való beszorzásra azért van szükség, mert ahogy a (2.12) egyenletben is láthatjuk, az együtthatók összege $|\mathcal{V}| \cdot |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{S}|$. A portfólió a piac egy átsúlyozott részhalmaza, így az együtthatóknak itt is ennyire kell összegződnie. Ha az r_i együtthatója kisebb, mint egy, akkor a piachoz képest alul van súlyozva a portfólióban.

3. fejezet

Eredmények bemutatása

3.1. Valós adatok hiánya

A tőzsdei befektetéseknél az adatok nyilvánosan elérhetők és könnyen felhasználhatók elemzésekre. Bevett szokás a Bloombergen keresztül történő adatgyűjtés. A magántőke befektetéseknél nem ez a jellemző, így a modellek valós adatokon való tesztelése az adatok korlátozott hozzáférhetősége miatt nem valósult meg. Nyilvánosan elérhető adatbázis nem létezik. A Bloombergen keresztül történő adatgyűjtés sem bizonyult sikeresnek. A megtalálható adatok sok esetben hiányosak voltak, mivel a korlátolt partnerek jelentéseiből származtak, melyek nem fedik le a tőkealap pénzáramlásának egészét. Az adatok tulajdonlása kritikus, mert üzleti előnyt jelent. Ez a magántőke befektetések egyik specialitása, hogy az adat az egyik legnagyobb érték. Vannak kifejezetten erre szakodott adatszolgáltató vállalatok is, például a Preqin és a PitchBook. Ezért a modellek tesztelését generált adatokon végezzük.

3.2. Adatok generálása

A hozamfelbontó modellek tesztelését szimulált piacon végezzük, ahogy az a *Private Portfolio Attribution Analysis* [5] cikkben is megvalósult. Az adatok generálásának alapját az ott bemutatott módszer szolgálta.

A szimulált piac összesen 2400 magántőkealapból áll. Mindegyik magántőkealap legfeljebb 60 negyedévig (15 év) lehet aktív. A magántőkealap jellemzőinek meghatározása a következő módon zajlik:

- 1990 és 2009 közötti 20 évjárat közül egyenlő valószínűséggel választunk ki egyet.
- A magántőkealap stratégiája $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel kockázati tőke (Venture) vagy felvásárlás (Buyout).

- A földrajzi régió szintén ugyanakkora valószínűséggel lehet Észak-Amerika (North America) vagy a Világ többi része (Rest of World – RoW).
- Mindegyik alap $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel lehet jól (Good) vagy rosszul (Bad) teljesítő.

A cash-flow struktúra szimulálásánál külön vesszük a be- és kifizetéseket. Mivel a valós adatoknál is a vállalatok negyedéves beszámolóihoz kötik a pénzáramlásokat, ezért a generálás is negyedéves időpontokra vonatkozik [3].

- A befizetések az első 12 negyedévben történnek. A befizetések száma egy $[6,12]$ intervallumon véletlenszerűen választott egész szám. Ezután a befizetési időpontokat az $[1,12]$ intervallumról választjuk visszatevés nélkül. A pénzáramlás nagysága pedig minden befizetéshez egy $U(-1; -0,5)$ egyenletes eloszlásból választott szám.
- A magántőkealap zárásának negyedéve 40 és 60 között véletlenszerűen van kiválasztva, eddig történhetnek a kifizetések. A kifizetések számát a $[12,24]$ intervallumból választjuk egyenlő valószínűséggel. Az időpontok kiválasztása ugyanúgy történik, mint a befizetések esetében. A kifizetéseket az $U(0,2; 0,8)$ eloszlásból választjuk.

A különböző jellemzők hatásai úgy jelennek meg a cash-flowban, hogy az összes kifizetést megszorozzuk a jellemzőhöz tartozó konstanssal (λ) a következő módon:

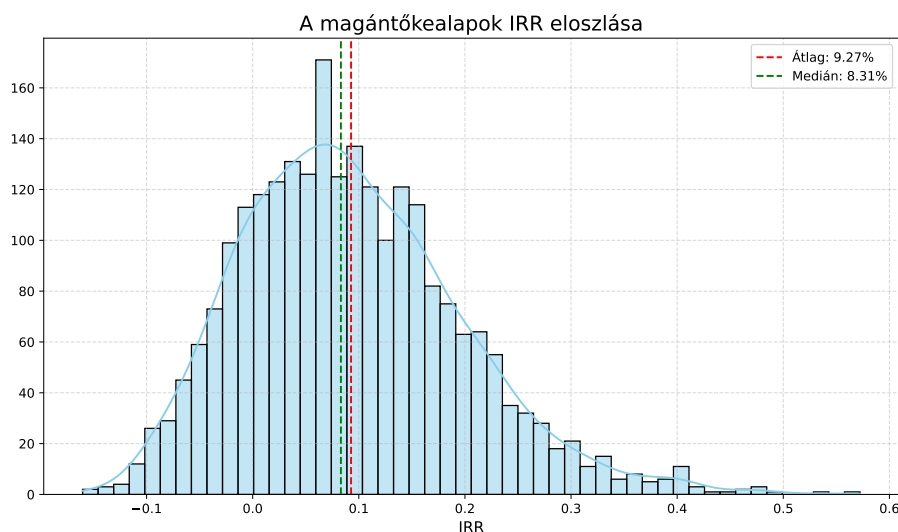
- Ha az évjárat páratlan, akkor a $\lambda_v = 1,2$, míg páros évjárat esetén $\lambda_v = 0,9$. Így lesznek jól és rosszul teljesítő évjáratok.
- Ha a magántőkealap stratégiája kockázati tőke, akkor $\lambda_s = 1,3$, míg felvásárlási stratégia esetén $\lambda_s = 1$. Tehát az a feltételezés, hogy a kockázati tőke stratégiával rendelkező alapok jobban teljesítenek.
- Ha az alap földrajzi régiója Észak-Amerika, akkor $\lambda_g = 1,25$, míg ha a Világ többi része, akkor $\lambda_g = 0,8$. Itt az a feltételezés, hogy az Észak-Amerika régiójú alapok teljesítenek jobban.
- Jól teljesítő alapok esetén $\lambda_p = 1,4$, míg rosszul teljesítő alapoknál $\lambda_p = 0,75$.

3.1. Példa. *Ilyen beállításokkal előfordulhat, hogy egy 2000-es évjáratú, felvásárlási stratégiájú, a Világ többi részéről való jól teljesítő alap rosszabbul teljesít, mint egy 2001-es, kockázati tőke stratégiájú, észak-amerikai rosszul teljesítő alap. A jól teljesítő alap összes szorzója $0,9 \cdot 1 \cdot 0,8 \cdot 1,4 = 1,008$, míg a rosszul teljesítő alapé $1,2 \cdot 1,3 \cdot 1,25 \cdot 0,75 = 1,4625$. Ez nem egy hibája a modellnek, hiszen így lesznek jól szeparálhatók a jellemzők hatásai.*

A Függelékben láthatunk példát egy magántőkealap szimulált cash-flow struktúrájára.

3.3. A magántőkealapok hozama

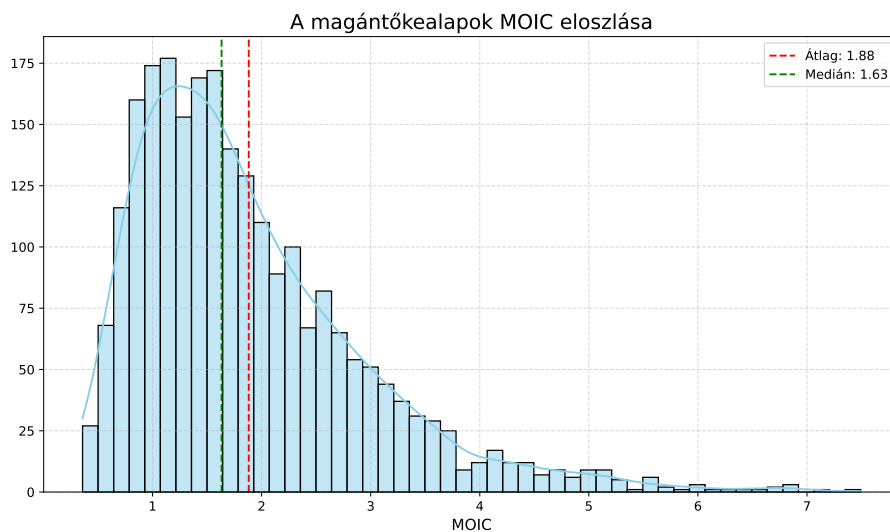
A 2. fejezetben bemutatásra került hozam mérésre szolgáló mutatókat számoljuk ki a magántőkealapokra. Az IRR kiszámolására a Python pyxirr függvényét használjuk. A többi mutatót a bemutatott formulák alapján implementáljuk. Mind a 2400 magántőkealapra kiszámolva az IRR-t az eloszlás a 3.1 ábrán látható. A szimulált adatokon számolt IRR értékek minimuma -16%, míg maximuma 57%. Az IRR-ek 93%-a kisebb, mint 25%. Az alapok körülbelül 81%-a rendelkezik pozitív IRR-rel. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy valósághoz közeli eredményeket kapunk.



3.1. ábra. A magántőkealapokra számolt IRR eloszlása

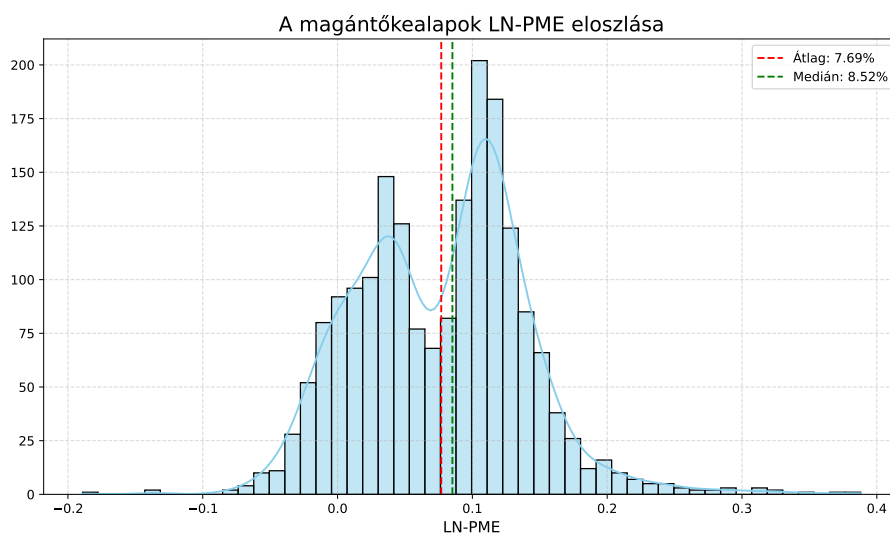
A következő mutató az MOIC, ami a befektetett tőkearányos megtérülést mutatja, ezért itt az 1 feletti érték jelenti, hogy profitot termelt a magántőkealap. Az eloszlást a 3.2 ábra mutatja. Itt is realiztikus értékeket kapunk, hiszen a legalacsonyabb érték 0,35, míg a legnagyobb megközelítőleg 7,5. Összehasonlításképp, az S&P500 index ára 1990 és 2020 között megtízszereződött. Az alapok 80%-a rendelkezik 1-nél nagyobb MOIC-vel.

A PME mutatók számolásához szükség van egy piaci indexre, aminek segítségével össze tudjuk hasonlítani a magántőkealap hozamát az indexbe való befektetéshez képest. Az LN-PME-t bemutató cikkben [21] is használt S&P500 lesz a felhasznált index. Az S&P500 tőzsdeindex az egyik leggyakrabban követett részvényindex, amely 500 amerikai tőzsdén jegyzett nagyvállalat részvényárfolyamainak súlyozott átlagát követi. Ez az index 1957 óta létezik, így tehát a vizsgált 1990 és 2024 közötti időszakra elérhető az árfolyama, amelyet a Yahoo! Finance oldalról töltöttük le. Mivel a be- és kifizetések időpontjában történnek az indexbe történő befektetések is, így a negyedéves árfolyamadatokat használtuk fel.



3.2. ábra. A magántőkealapokra számolt MOIC eloszlása

Vizsgáljuk először az LN-PME eloszlását a 3.3 ábrán, aminél tehát S&P500 index segítségével számolunk egy NAV_{PME} értéket, amit aztán az eredeti cash-flowhoz illesztünk. Az eloszlásban érdekes kép rajzolódik ki, ugyanis két érték, 4% és 11%, körül is kicsúcsosodik az eloszlás. Ez annak köszönhető, hogy az index árfolyama 1990 és 2000 között dinamikusán növekedett, majd a 2000-es Dotcom és a 2008-as pénzügyi válság miatt csökkent. 2010-től aztán újra jelentős növekedésnek indult. Ez jelentősen befolyásolja a különböző évjáratú magántőkealapok LN-PME értékét.

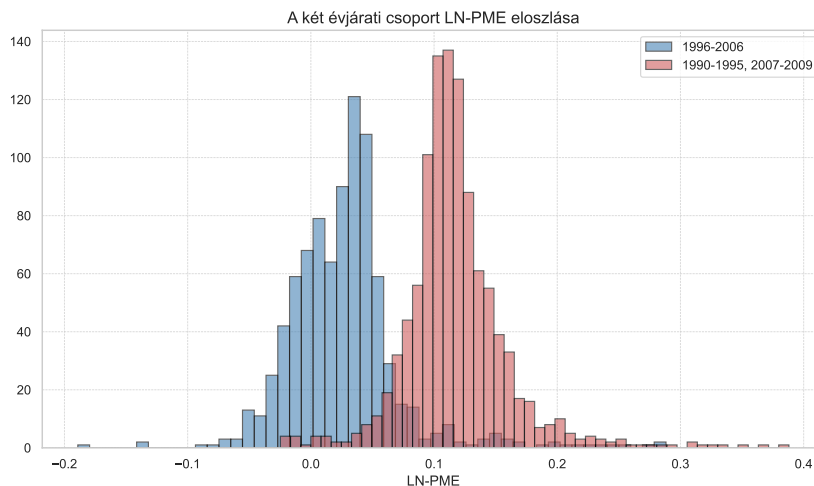


3.3. ábra. A magántőkealapokra számolt LN-PME eloszlása

Két évjáratba csoportba osztjuk az alapokat:

1. Az olyan alapok, amelyek évjáratba 1996-2006 között van jellemzően rosszul teljesítettek, mert magas áron fektettek az indexbe, amelynek a hozama az alap zárásakor alacsony volt.
2. Az 1990-1995 és 2007-2009 közötti évjáratba rendelkező alapok szignifikánsan jobban teljesítettek a másik csoporthoz képest, hiszen alacsony áron történt az indexbe való befektetés.

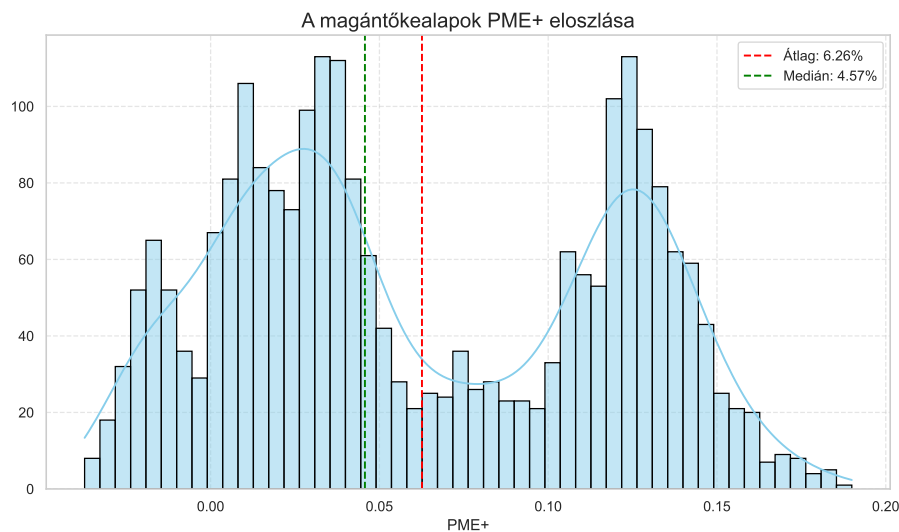
A 3.4 ábrán látható, hogy a két csoport valóban elszeparálódik egymástól, ami tehát megmagyarázza, hogy miért van két csúcsa az eloszlásnak, és rávilágít arra, hogy a magántőkealap évjáratba egy valóban fontos jellemző.



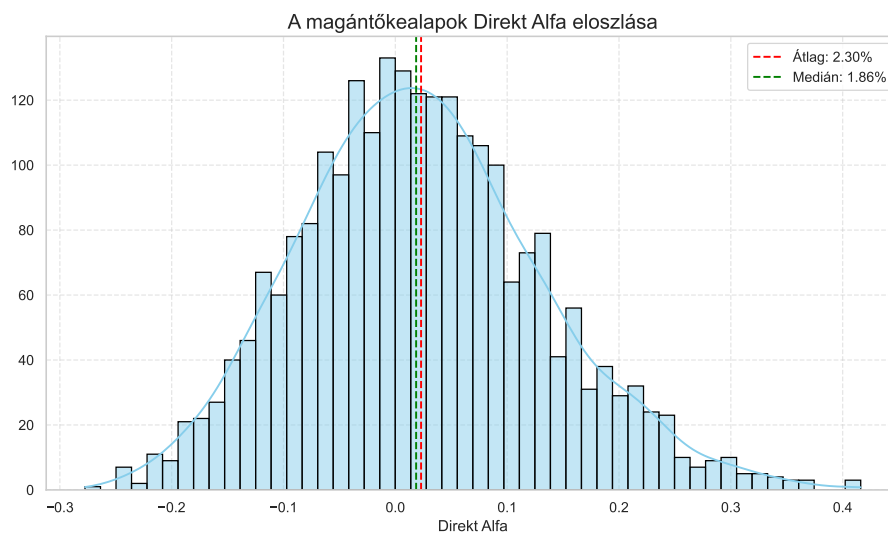
3.4. ábra. A két évjáratba csoportra számolt LN-PME eloszlása

A PME+ mutató esetében ugyanaz a jelenség figyelhető meg, mint az LN-PME-nél. A két mutató számolása csupán a korrekciós tényező miatt tér el egymástól. Az 3.5 ábrán megfigyelhető az eloszlás két csúcsa, valamint az is, hogy kevésbé jelennek meg extrém értékek. Ugyanazon két évjáratba csoportba beosztva a magántőkealapokat megint egy csúcsból álló eloszlásokat kapunk vissza, amelyek tehát megmagyarázzák a jelenséget.

Az utolsó IRR típusú mutató a Direkt alfa, ami az index árfolyamváltozásával súlyozott cash-flowból számol IRR-t. A 3.6 ábrán látható eloszlásnál több negatív extrém érték is megjelenik az IRR eloszlásához képest, ezáltal szimmetrikusabb az eloszlás. A medián és az átlag értékei is alacsonyabbak. Ebben az esetben nem jelenik meg két csúcs, hiszen itt a be- és kifizetések ellentétes jelentéssel és előjellel szerepelnek az LN-PME és a PME+-hoz képest. Ezen tulajdonságai miatt ez a mutató tekinthető a leginkább mérvadónak, amikor a magántőkealap teljesítményét a tőzsdei befektetésekkel szeretnénk összehasonlítani.

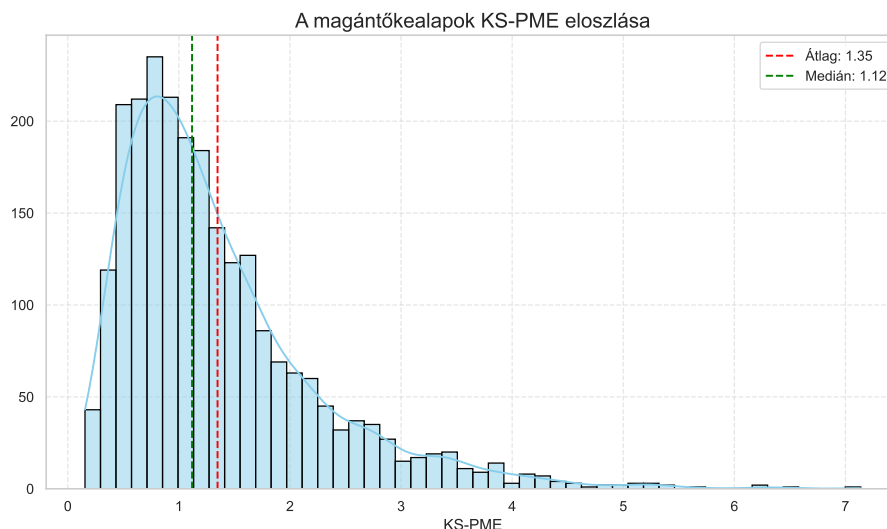


3.5. ábra. A magántőkealapokra számolt PME+ eloszlása



3.6. ábra. A magántőkealapokra számolt Direkt Alfa eloszlása

Végül pedig vizsgáljuk meg az MOIC típusú KS-PME-t is. A 3.7 ábrán észrevehetjük, hogy jóval több a rosszul teljesítő alap. A legalacsonyabb érték 0,15, míg mindössze az alapok 57%-a rendelkezik 1 feletti mutatóval. Ez azt jelenti tehát, hogy a magántőkealap jobb befektetésnek bizonyult, mint a részvényindexbe való befektetés, mert magasabb tőkearányos megtérülést lehetett elérni.



3.7. ábra. A magántőkealapokra számolt KS-PME eloszlása

3.4. Modell reprodukálás

Elsőként a 2.2. alfejezetben bemutatott modellt reprodukáljuk, majd fejlesztjük tovább. Első lépésben normalizáljuk a piacot, vagyis mindegyik magántőkealap pénzáramlását leosztjuk az összes befizetés összegével. Így tehát bármelyik alapba való befektetés egy-ségnyi-nek tekinthető. A szelekciós hatás ezáltal viszont nem jelenik meg, hiszen mindegyik alap egyenlően van súlyozva. Ezért a portfólióba kerülő alapok cash-flowját külön beszo-rozzuk még egy $U(0,5; 2)$ egyenletes eloszlásból származó számmal. Ez fogja biztosítani a szelekciós hatás megjelenését.

3.4.1. Monte-Carlo szimuláció

Az első tesztben véletlenszerűen választunk ki minden alkalommal 200 portfóliót, majd kiszámoljuk a hozamfelbontását. Mivel az alapok felépítése során nincs torzítás egyetlen jellemző irányába sem, az összes jellemzőhöz tartozó hozamnak nullához kell konvergálnia elegendően sok szimulációs próbálkozás után. A 3.1 táblázatban az MOIC típusú hozamra, míg a 3.2 táblázatban az IRR hozamra láthatjuk az eredményeket. A szimulációs szám (n) növekedésével valóban azt tapasztaljuk, hogy a hozamok átlaga a nullához konvergál mind a két típusú mutató esetén. A portfóliók átlaghozama így a piaci hozamhoz tart. A modellt leíró cikkben [5] is ugyanilyen eredményeket láthatunk, tehát a reprodukálás sikeresen megtörtént.

n	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
1	1,91	0,02	-0,01	0,04	-0,01	-0,03	1,92
5	1,91	0,00	0,01	0,00	0,02	-0,02	1,92
10	1,91	0,00	-0,01	0,01	-0,01	0,01	1,91
20	1,91	0,00	0,00	0,01	0,00	0,01	1,93
50	1,91	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,91
75	1,91	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,91
100	1,91	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,91

3.1. táblázat. Monte-Carlo szimuláció MOIC hozamfelbontásra

n	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
1	11,35%	0,27%	0,09%	0,47%	0,23%	0,1%	12,51%
5	11,35%	0,02%	0,15%	-0,06%	0,12%	-0,14%	11,44%
10	11,35%	0,08%	-0,09%	0,23%	-0,16%	-0,07%	11,34%
20	11,35%	0,00%	-0,07%	0,06%	0,01%	0,00%	11,35%
50	11,35%	-0,03%	-0,02%	0,01%	0,00%	0,04%	11,35%
75	11,35%	0,00%	-0,03%	0,00%	0,00%	0,03%	11,35%
100	11,35%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	11,35%

3.2. táblázat. Monte-Carlo szimuláció IRR hozamfelbontásra

3.4.2. Egyedi hatások vizsgálata

A következő vizsgálat a jellemzők egyedi hatásainak szeparálására szolgál. Olyan portfóliókat állítunk össze, melyek mindig egy jellemzőre koncentrálnak, például csak kockázati tőke stratégiájú magántőkealapokból áll. Az az elvárás, hogy ezekre a portfóliókra csak a jellemzőhöz tartozó hozam legyen szignifikáns, ugyanis a többi jellemzőre nincsen torzítás. A 3.3 táblázatban láthatjuk az MOIC szerinti, míg a 3.4 táblázatban az IRR szerinti hozamfelbontását a jellemzők szerint szűrt portfólióknak.

Szűrés	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
Jó évjárat	1,91	0,24	0,00	0,03	0,01	-0,03	2,16
Rossz évjárat	1,91	-0,25	0,07	0,00	0,01	-0,07	1,67
Kockázati tőke	1,91	0,00	0,27	-0,01	0,00	0,01	2,18
Felvásárlás	1,91	0,00	-0,25	0,01	0,01	-0,01	1,67
Észak-Amerika	1,91	0,00	-0,01	0,40	0,02	0,01	2,33
Világ többi része	1,91	0,00	0,01	-0,43	-0,02	0,00	1,47
Jól teljesítő	1,91	0,00	0,01	0,00	-0,02	0,57	2,47
Rosszul teljesítő	1,91	0,00	-0,01	-0,01	0,00	-0,57	1,32

3.3. táblázat. A jellemzők szerint szűrt portfóliók MOIC hozamfelbontása

Szűrés	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
Jó évjárat	11,35%	2,67%	0,16%	0,50%	0,13%	-0,63%	14,18%
Rossz évjárat	11,35%	-2,72%	1,08%	0,11%	0,05%	-1,17%	8,70%
Kockázati tőke	11,35%	0,03%	2,77%	0,04%	0,02%	-0,07%	14,14%
Felvásárlás	11,35%	0,00%	-2,88%	0,01%	0,17%	0,00%	8,65%
Észak-Amerika	11,35%	0,00%	-0,09%	3,57%	0,03%	0,03%	14,89%
Világ többi része	11,35%	0,04%	-0,02%	-4,80%	-0,18%	0,11%	6,50%
Jól teljesítő	11,35%	-0,01%	0,16%	0,00%	-0,31%	5,06%	16,25%
Rosszul teljesítő	11,35%	-0,03%	-0,17%	-0,06%	-0,01%	-6,52%	4,56%

3.4. táblázat. A jellemzők szerint szűrt portfóliók IRR hozamfelbontása

A táblázatokban a várakozásoknak megfelelően szeparálódtak a jellemzők hozamai. Ahogy az adatgenerálásnál beállítottuk a jó évjáratú alapok nagyobb hozammal rendelkeznek, mint a rossz évjáratúak. A kockázati tőke stratégiájú és az észak-amerikai alapok is jobban teljesítenek, mint a felvásárlás stratégiájú és a világ többi részéről való alapok. A legmarkánsabb különbség pedig a jól és rosszul teljesítő alapok hozama között jelentkezik. Ez annak köszönhető, hogy ennek a jellemzőhöz tartozó konstansnál (λ_p) állítottuk be a legnagyobb különbséget. Az eredmények itt is összhangban vannak a modellt leíró cikkben [5] lévő eredményekkel, tehát a reprodukálás itt is megvalósult.

3.5. A modell továbbfejlesztése

3.5.1. Stratégia és földrajzi régió halmazok bővítése

A szerzők által is javasolt fejlesztési lehetőség a stratégiák és a földrajzi régiók halmazának bővítése. Ezeket a halmazokat a következő módon bővítjük:

$$\mathcal{S} = \{\text{Kockázati tőke, Felvásárlás, Növekedési tőke}\} \quad \mathcal{G} = \{\text{Észak-Amerika, Európa, Ázsia}\}$$

Egyenlő valószínűséggel rendeljük hozzá bármelyik stratégiát és régiót a magántőke-alaphoz. Az adatgenerálásnál a λ_s és λ_g szorzókat változtatjuk meg a következő módon:

- Ha a magántőkealap stratégiája kockázati tőke, akkor $\lambda_s = 1,5$, ha növekedési tőke, akkor $\lambda_s = 1,3$, míg felvásárlás esetén $\lambda_s = 0,9$.
- Ha a magántőkealap régiója Észak-Amerika, akkor $\lambda_s = 1,25$, ha Európa, akkor $\lambda_s = 1,15$, míg Ázsia esetében $\lambda_s = 0,8$.

A többi jellemzőre vonatkozó szorzón nem változtatunk. A modell elvi felépítése sem változik, hiszen az alap modell a stratégiák és földrajzi régiók halmazára volt definiálva,

n	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
20	2,08	0,01	0,00	0,00	0,00	-0,03	2,06
50	2,08	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,08
80	2,08	0,00	0,00	0,00	-0,01	0,00	2,07
20	12,62%	0,06%	0,01%	0,08%	0,02%	-0,35%	12,44%
50	12,62%	0,00%	-0,04%	-0,04%	0,06%	0,00%	12,60%
80	12,62%	0,05%	-0,06%	-0,06%	-0,03%	0,02%	12,54%

3.5. táblázat. Monte-Carlo szimuláció MOIC és IRR hozamfelbontásra

amelyek méretére nem volt korlátozás. Vizsgáljuk meg először itt is Monte-Carlo szimulációval, hogy egyik jellemző felé sincs torzítás, azaz a hozamok átlaga nullához tart. A 3.5 táblázatot vizsgálva is azt tapasztalhatjuk, hogy a hatások átlaga az elvárásoknak megfelelően a nullához tart. Nézzük meg, hogy a stratégiai és földrajzi hozamokra vonatkozó egyedi hatások itt is szeparálódnak-e.

Szűrés	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
Kockázati tőke	2,08	0,00	0,39	-0,01	0,01	0,01	2,48
Növekedési tőke	2,08	0,01	0,11	0,00	0,00	0,00	2,20
Felvásárlás	2,08	-0,02	-0,51	0,00	0,01	0,01	1,57
Észak-Amerika	2,08	0,01	0,00	0,36	0,01	-0,01	2,45
Európa	2,08	-0,01	-0,02	0,14	-0,02	0,02	2,19
Ázsia	2,08	0,00	0,00	-0,49	0,01	0,01	1,61
Kockázati tőke	12,62%	-0,01%	3,59%	-0,11%	0,04%	0,10%	16,23%
Növekedési tőke	12,62%	0,22%	0,96%	0,04%	-0,02%	-0,04%	13,78%
Felvásárlás	12,62%	-0,24%	-5,16%	0,07%	0,09%	0,03%	7,41%
Észak-Amerika	12,62%	0,13%	-0,04%	2,67%	-0,02%	-0,09%	15,27%
Európa	12,62%	-0,08%	-0,16%	1,33%	-0,27%	0,21%	13,65%
Ázsia	12,62%	-0,01%	0,18%	-4,64%	0,21%	-0,06%	8,30%

3.6. táblázat. A jellemzők szerint szűrt portfóliók MOIC és IRR hozamfelbontása

A jellemzőkre vonatkozó hozamok itt is az elvárások szerint szeparálódnak, ahogy azt a 3.6 táblázatban láthatjuk. A kockázati tőke stratégiájú alapokat tartalmazó portfólió szignifikánsan jobban teljesített, mint a növekedési tőkére szűrt, ami viszont szintén szignifikánsan magasabb hozamot ért el, mint a felvásárlási stratégiával rendelkező portfólió. Ez jól tükrözi tehát azt, ahogy a λ_s -t beállítottuk. A földrajzi hozam tekintetében is hasonló figyelhető meg. Az észak-amerikai alapokat tartalmazó portfólió érte el a legnagyobb hozamot, míg az európai alapokra szűrt is jobban teljesített a piacon. Az ázsiai alapokat magában foglaló portfólió alulteljesített a piachoz és a többi portfólióhoz képest is. Az itt látott eredmények is szinkronban van a λ_g beállításával. A többi hatásra szűrt portfóliónál

is ugyanúgy szeparálódnak a hatások, mint az alap beállításokkal.

3.5.2. Hozamfelbontás PME mutatókkal

A másik fejlesztési lehetőség az IRR és az MOIC teljesítménymérő mutatók helyett a PME mutatók használata. Ahogy a 3.3 alfejezetben, úgy itt is az S&P500 indexet fogjuk használni a tőzsdei befektetéssel való összehasonlításra. Az MOIC helyett a KS-PME-t fogjuk használni. Az IRR helyett több lehetőség is van, azonban egyedül a Direkt alfaban nem jelenik meg az évjáratra vonatkozó torzítás, így ezt a mutatót alkalmazzuk. Ahogy a 2.2 alfejezetben bemutatott modellben, úgy itt is ugyanúgy számoljuk a különböző hatások által módosított cash-flowkat. Ezekből a pénzáramlásokból számoljuk ki az index árfolyamváltozásával súlyozott cash-flowt, amit aztán a Direkt alfa és a KS-PME számolásához használunk. Vizsgáljuk meg először itt is Monte-Carlo szimulációval, hogy véletlenszerűen választott 200 magántőkealapból álló portfólióknál a hatások hozamainak átlaga nulla-e, tehát hogy nincs torzítás egyik jellemző felé sem. A korábban látott évjáratból következő torzítás ebben az esetben is potenciálisan fennálhat, azonban a többi jellemzőre nem várunk torzítást.

n	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
1	1.90	0.05	0.03	-0.07	-0.05	-0.10	1.77
5	1.90	-0.07	-0.01	0.02	-0.03	0.06	1.88
10	1.90	-0.07	0.00	-0.03	-0.01	-0.09	1.70
20	1.90	-0.06	0.01	0.00	-0.04	0.00	1.82
50	1.90	-0.04	0.00	0.00	-0.01	0.00	1.85

3.7. táblázat. Monte-Carlo szimuláció KS-PME hozamfelbontásra

n	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
1	3,40%	0,39%	0,12%	-0,24%	-0,16%	-0,25%	3,26%
5	3,40%	-0,11%	-0,03%	0,05%	-0,08%	0,25%	3,49%
10	3,40%	-0,11%	0,00%	-0,10%	-0,06%	-0,20%	2,93%
20	3,40%	-0,02%	0,03%	-0,01%	-0,06%	0,07%	3,41%
50	3,40%	-0,02%	0,01%	0,00%	-0,04%	0,05%	3,40%

3.8. táblázat. Monte-Carlo szimuláció Direkt Alfa hozamfelbontásra

A modell futtatása az indexszel való súlyozás miatt jóval lassabb, így csak $n = 50$ -ig vizsgáljuk. A KS-PME esetében azt láthatjuk, hogy a konvergencia lassabb, mint az MOIC esetében, és az időzítési hozamban tapasztalható torzítás. Ez itt is az index árfolyamváltozásából következik. A portfóliók átlaghozama sem egyezik így meg a piaci hozammal. A Direkt alfa esetében viszont az IRR-hez hasonló konvergenciát tapasztalhatunk torzítás

nélkül. A portfóliók átlaghozama megegyezik a piaci hozammal.

Nézzük meg itt is az egyedi hatások szeparálódását:

Szűrés	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
Jó évjárat	1.90	0.60	0.12	0.21	0.03	-0.35	2.51
Rossz évjárat	1.90	-0.69	0.07	-0.42	-0.01	0.36	1.21
Kockázati tőke	1.90	-0.05	0.61	0.00	-0.09	0.03	2.40
Felvásárlás	1.90	-0.02	-0.57	-0.02	0.01	0.05	1.35
Észak-Amerika	1.90	-0.01	0.02	1.01	0.04	-0.04	2.92
Világ többi része	1.90	-0.04	0.00	-0.95	-0.03	0.07	0.95
Jól teljesítő	1.90	0.02	0.01	0.02	0.05	1.45	3.45
Rosszul teljesítő	1.90	-0.04	-0.01	0.01	0.00	-1.16	0.70

3.9. táblázat. A jellemzők szerint szűrt portfóliók KS-PME hozamfelbontása

Szűrés	Piac	Időzítés	Stratégia	Földrajz	Szelekció	Specifikus	Portfólió
Jó évjárat	3,40%	2,00%	0,37%	0,58%	0,06%	-0,96%	5,45%
Rossz évjárat	3,40%	-2,18%	0,21%	-1,30%	-0,05%	1,11%	1,17%
Kockázati tőke	3,40%	-0,10%	1,77%	0,01%	-0,20%	0,02%	4,90%
Felvásárlás	3,40%	0,00%	-1,93%	-0,07%	0,06%	0,10%	1,56%
Észak-Amerika	3,40%	-0,07%	0,05%	2,69%	0,05%	-0,09%	6,03%
Világ többi része	3,40%	-0,05%	-0,01%	-3,66%	-0,15%	0,22%	-0,25%
Jól teljesítő	3,40%	0,09%	0,05%	0,04%	0,13%	3,58%	7,30%
Rosszul teljesítő	3,40%	-0,10%	-0,05%	0,04%	0,03%	-5,34%	-2,02%

3.10. táblázat. A jellemzők szerint szűrt portfóliók Direkt Alfa hozamfelbontása

A 3.9 és 3.10 táblázatokban láthatjuk az eredményeket. Mind a KS-PME, mind a Direkt alfa mutató esetén jól látható, hogy a jellemzőkre vonatkozó hozamok szeparálódnak. Ezek alapján elmondható, hogy a PME mutatókkal történő hozamfelbontási modell is rendelkezik az eredeti modell tulajdonságaival, így a megfelelő index megválasztásával alkalmazható magántőkealapok hozamfelbontására.

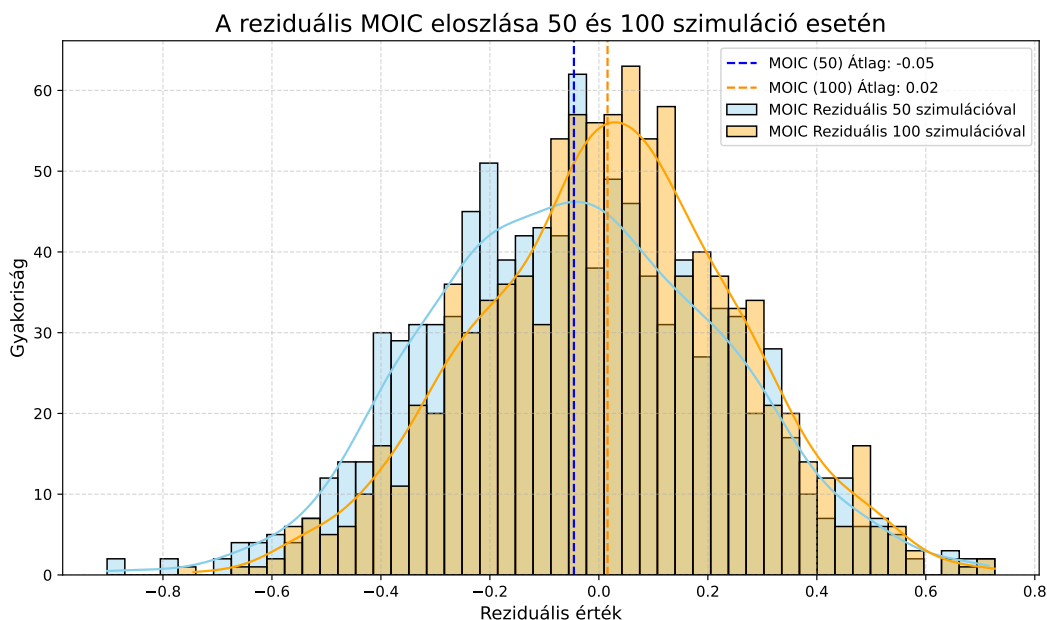
3.6. A saját modell eredményei

A saját modell tesztelése szintén egy szimulált piacon történik, amely egy egyszerűsített változata a 3.2 bekezdésben bemutatottnak. A jellemzők hozamainak pontos meghatározására szolgáló számítások száma a jellemzők számának növelésével exponenciálisan nő, így arra törekszünk, hogy olyan értéket állítsunk be, amivel értelmezhető eredményeket

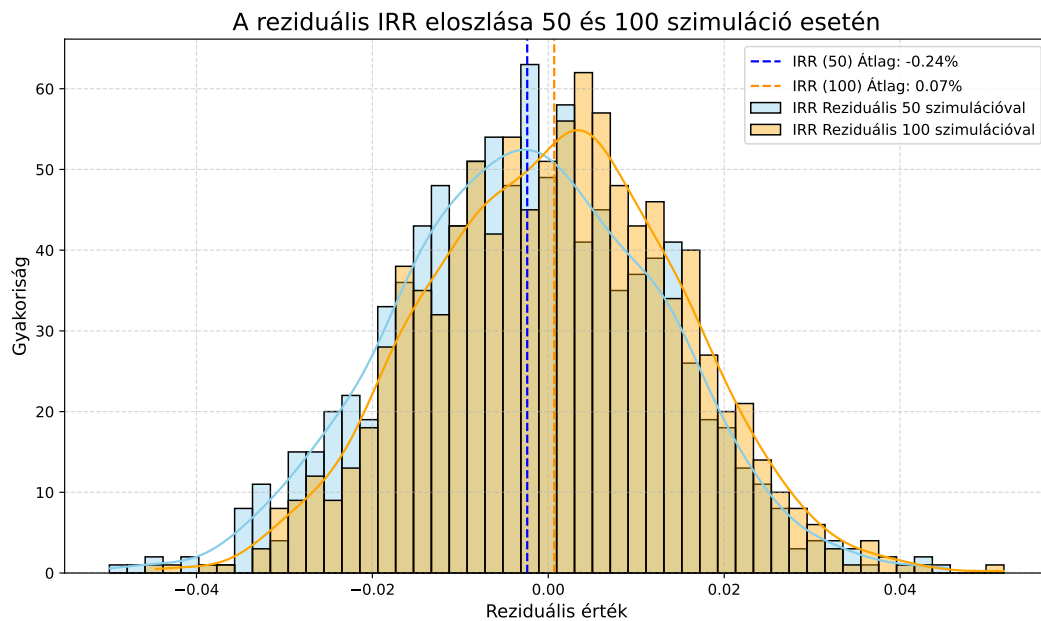
kapunk. Mivel a jellemzők száma a $|\mathcal{V}| \cdot |\mathcal{G}| \cdot |\mathcal{S}|$ szorzattal egyezik meg, ezért az eredeti 20 évjáráthoz képest csak 10, 1990-1999 közötti évjáratot állítunk be, így összesen 40 jellemző lesz. A pénzáramlásokat a 3.4 bekezdés elején bemutatott módon normalizáljuk, viszont a szelekciós hatást nem vesszük figyelembe.

3.6.1. Saját hozamfelbontás hibája

Vizsgáljuk meg elsőként, hogy az N , vagyis a permutációk számának növelésével hogyan változik a modell hibája. A modell által magyarázott és a portfólió hozamok különbségét reziduális hozamnak nevezzük, aminek az eloszlása meggyőző képet adhat a modell javulásáról. Összesen 1000 különböző 200 magántőkealapból álló portfóliónak számoljuk ki a felbontását. A 3.8 és 3.9 ábrákon láthatjuk $N = 50$ és $N = 100$ permutáció esetén az MOIC és az IRR reziduális hozamok eloszlását. Mindkét esetben azt tapasztalhatjuk, hogy az N növelésével javult a modell, hiszen az eloszlás csúcsosabb lett és az átlag is közelebb van a 0-hoz. Az MOIC esetében a szórás 0,27-ről 0,24-re, míg az IRR esetén 0,0148-ról 0,0142-re csökkent. A szélsőértékek mindkét esetben hasonló értékeket vesznek fel. Az MOIC-nél $[-0,8; 0,8]$, míg az IRR-nél $[-5\%; 5\%]$ intervallumon mozognak az értékek. Az $N = 100$ permutáció esetében az MOIC-hez tartozó 25%-os kvantilis értéke -0,17 és a 75%-os kvantilisé 0,17. Ugyanezek az értékek az IRR-nél -0,9% és 1%. Ezek alapján azt lehet mondani, hogy a modell az alapok felénél már egy használható képet tud nyújtani a hozamfelbontásra.

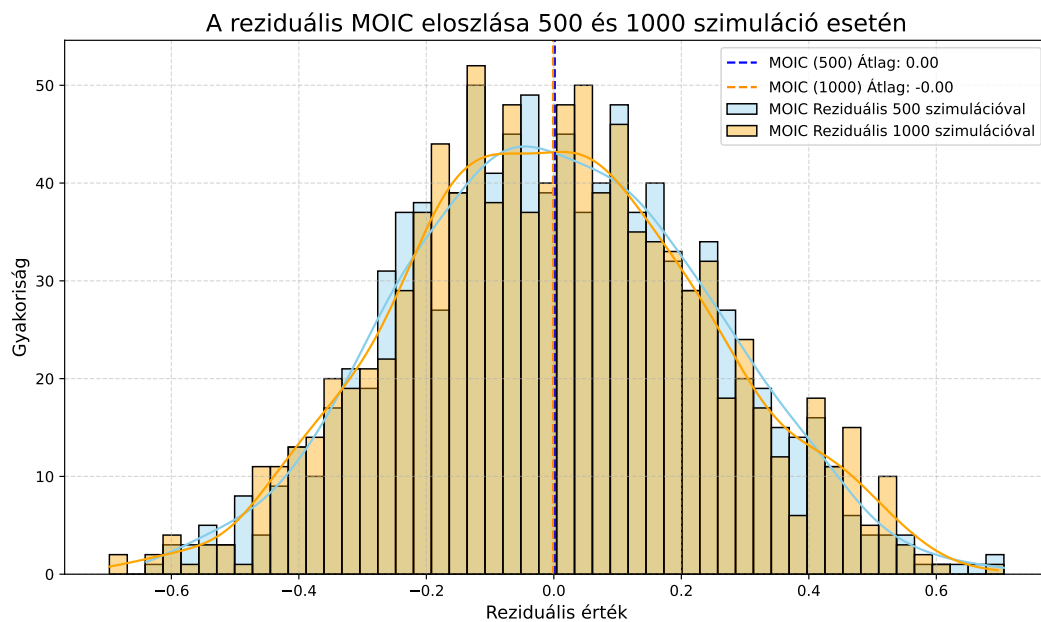


3.8. ábra. Reziduális MOIC eloszlása $N = 50$ és $N = 100$ permutációra



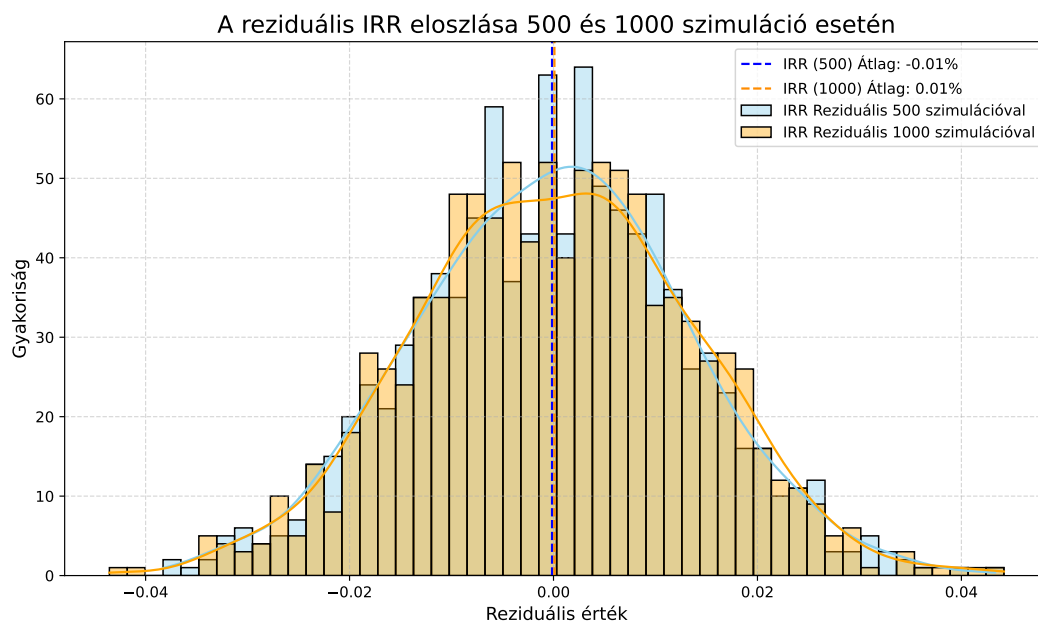
3.9. ábra. Reziduális IRR eloszlása $N = 50$ és $N = 100$ permutációra

Végezzük el a vizsgálatot $N = 500$ és $N = 1000$ permutációval is. Azt várjuk, hogy az eloszlások még jobban kicsúcsosodnak, ezáltal a szórás is alacsonyabb lesz, valamint a szélsőértékek is kisebb abszolútértékűek lesznek. A 3.10 és 3.11 ábrákon láthatjuk az eredményeket.



3.10. ábra. Reziduális MOIC eloszlása $N = 500$ és $N = 1000$ permutációra

Az MOIC esetén azt tapasztaljuk, hogy a reziduálisok átlaga nulla. Az 500 és az 1000 permutációs szimuláció eloszlása között nincs szignifikáns különbség. A szórás nem csökkent jelentősen, mindkét esetben 0,23 az értéke. A szélsőérték tekintetében csökkenés figyelhető meg, mert a $[-0,65; 0,65]$ intervallumból kerülnek ki az értékek. A 25%-os kvantilis -0,16, míg a 75%-os 0,16. Tehát itt sem figyelhető meg szignifikáns csökkenés.



3.11. ábra. Reziduális IRR eloszlása $N = 500$ és $N = 1000$ permutációra

Az IRR-t vizsgálva a reziduálisok átlaga itt is megközelítőleg nulla. A két eloszlás között nincs szignifikáns különbség. A szórás az 50 és 100 permutációs esetekhez képest lecsökkent 0,0133-ra. A reziduálisok értéke a $[-4,3\%; 4,3\%]$ intervallumról vesz fel értékeket, tehát itt is szűkült az intervallum. A kvantilisok esetében viszont nincs jelentős változás, ugyanis a 25%-os 0,9%, míg a 75%-os 0,9%. Összességében elmondható, hogy javult a modell a permutációk számának növelésével, de nem a várt ütemben. Mivel az összes lehetséges permutáció száma $40!$, így érdemes lehet tovább növelni az N értékét.

3.6.2. A piaci portfólió közelítése

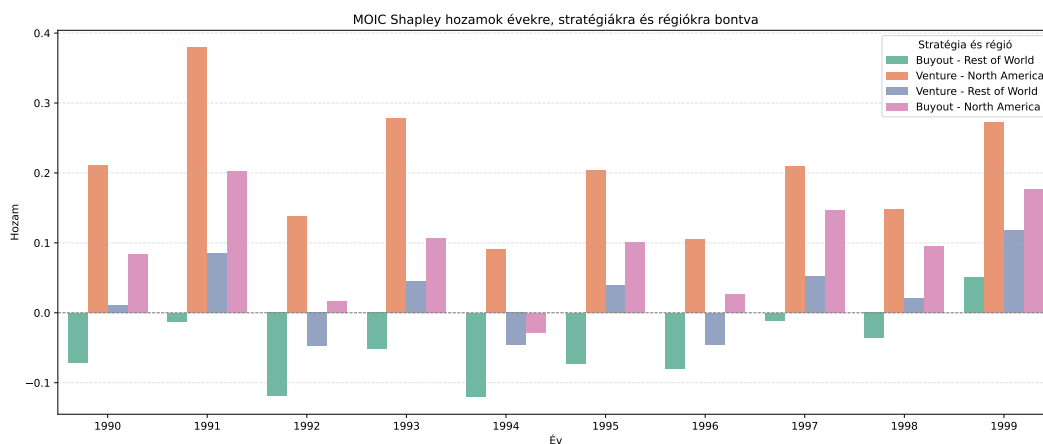
Vizsgáljuk meg, hogy a különböző permutációs számok esetén mennyire közelíti jól a piac összes magántőkealapját tartalmazó portfóliót a modell. Mivel minden permutált sorozatos felbontás teljesíti, hogy a hozamok összege éppen a piaci portfólió hozama, így azt várjuk, hogy a modell jól fogja közelíteni azt. A 3.11 táblázat foglalja össze az eredményeket. Azt láthatjuk, hogy már az $N = 100$ permutáció esetén nagyon közeli értékeket kapunk, amely aztán $N = 500$ és $N = 1000$ esetén is a valós érték körül ingadozik.

N	MOIC absz. eltérés	IRR absz. eltérés
50	0,07	0,28%
100	0,01	0,02%
500	0,02	0,05%
1000	0,03	0,03%

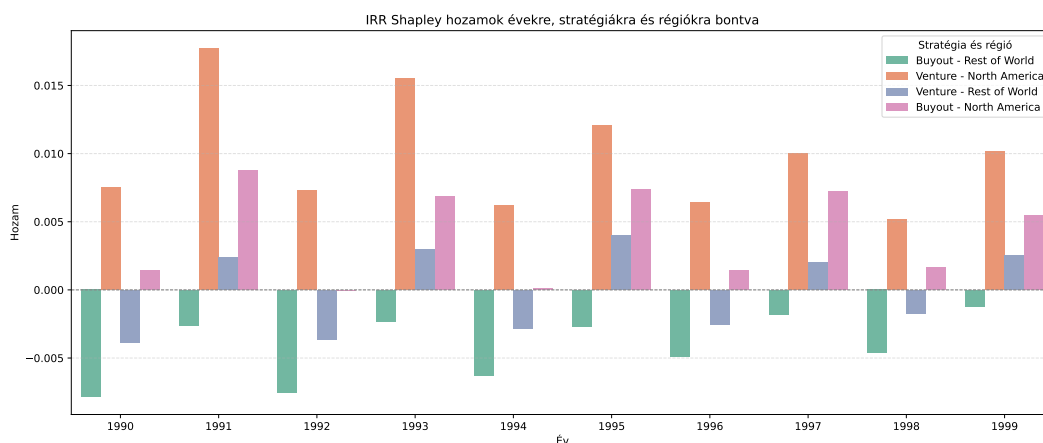
3.11. táblázat. A modell és a valós piaci értékek közötti abszolút eltérés MOIC és IRR esetén, különböző N értékek mellett

3.6.3. A jellemzők hozamai

Nézzük meg, hogy a piac szimulációjának beállításai milyen hatással van a jellemzők hozamaira. A 3.12 és 3.13 ábrákon láthatjuk az egyes jellemzők hozamát.



3.12. ábra. A jellemzők MOIC hozama $N = 1000$ esetben

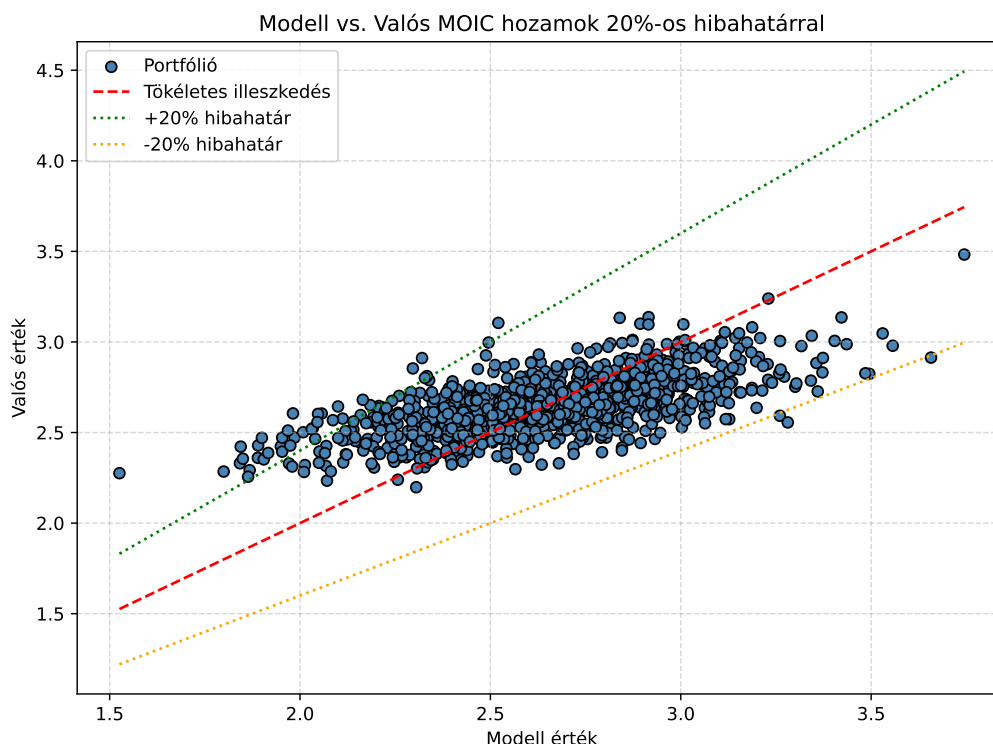


3.13. ábra. A jellemzők IRR hozama $N = 1000$ esetben

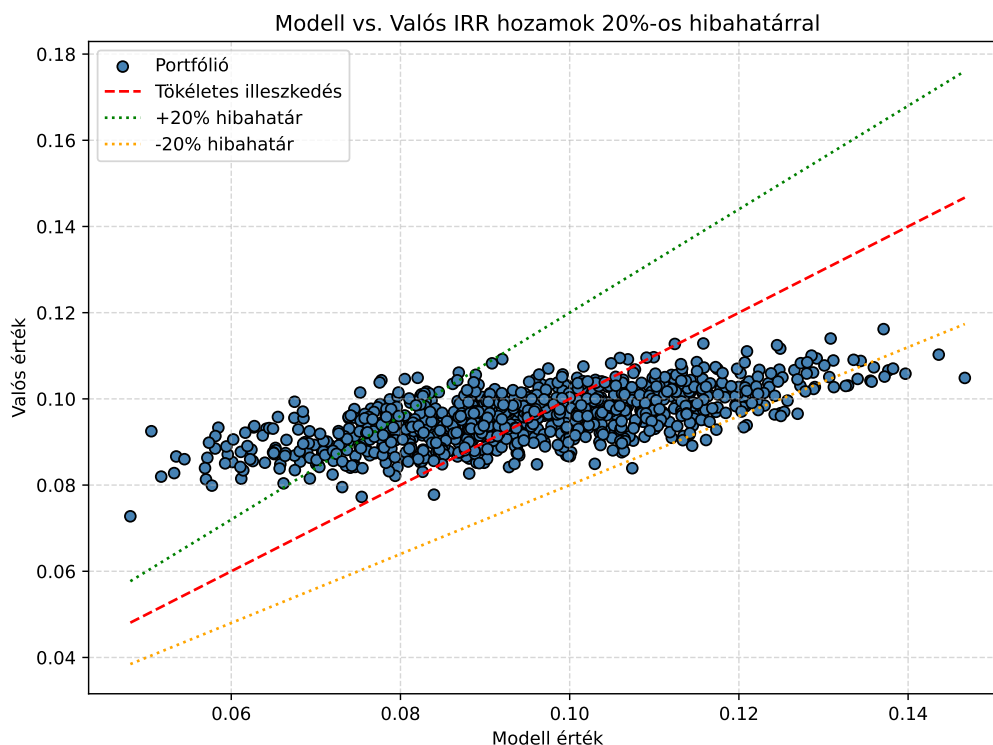
Az egyes jellemzők hozamainak egymáshoz viszonyított értéke összhangban van a piac szimulációjának beállításával. Észrevehetjük, hogy a páratlan években valóban magasabbak a hozamok. Az észak-amerikai alapok hozama is magasabb, mint a Világ többi részéről való alapoknak. A kockázati tőke stratégiájú alapok is jobban teljesítenek, mint a felvásárlási stratégiájúak, éppen ahogy elvárjuk.

3.6.4. A felbontás illeszkedése

Nézzük meg 1000, egyenként 200 magántőkealapot tartalmazó portfólióra, hogy mennyire magyarázza jól a felbontás a hozamot, amikor $N = 1000$ permutációval számoljuk a jellemzők hozamait. A 3.14 és 3.15 ábrákon láthatók az eredmények. Mindkét esetben az figyelhető meg, hogy a piaci hozamhoz közel a modell jól magyarázza a hozamot, viszont minél nagyobb az eltérés a piaci hozamhoz képest a modell egyre inkább torzít. Tehát a 20%-os hibahatárt az alacsony és a magas hozamok esetén sérti meg. Az alacsony hozamokat felülbecsüli, míg a magas hozamokat alulbecsli. Az IRR esetében jobban szóródnak a hozamok, 16% esik a hibahatáron kívülre, míg az MOIC esetén ugyanez az érték mindössze 2,5%.



3.14. ábra. A modell és a valós MOIC hozamok összehasonlítása



3.15. ábra. A modell és a valós IRR hozamok összehasonlítása

3.7. Programozási megoldások

A piac szimulálása és a modellek felépítése Python nyelven történt. Az összes kód feltöltésre került és elérhető a GitHub repóból. A programozási rész legnagyobb kihívása a Shapley algoritmus hatékony futtatása volt, amely $N = 1000$ esetre körülbelül 40 perc alatt futott le. Az adatokat a Pandas csomag segítségével tároltuk el adattáblákba. A teljes piac adattáblája több, mint százezer sorból állt, így kihívás volt a számítási műveletek hatékony implementálása is. Az ábrákat a Matplotlib és a Seaborn csomagok segítségével készítettük.

4. fejezet

Összefoglalás

Az 1. fejezetben bemutatásra került a magántőkealapok működése, stratégiái és története. Iparági előrejelzéseket vizsgálva az a várakozás, hogy egyre több ilyen típusú befektetés lesz, ami indokolttá teszi a vizsgálatot. A tőzsdei és a magántőke befektetések sajátosságait megismerve világossá vált, hogy a hagyományos hozamfelbontási módszerek nem alkalmazhatóak ebben az esetben, ezért új megközelítésre van szükség.

A 2. fejezetben bemutatásra kerültek a klasszikus hozamszámolási mutatók, vagyis az IRR és az MOIC. Ezután a magántőkealapok teljesítményének a tőzsdei befektetésekkel való összehasonlítására szolgáló PME mutatókat is definiáltuk, valamint példákon keresztül mutattuk be a kiszámolásukat. A szakdolgozat alapját adó magántőkealapok hozamfelbontását leíró cikket [5] részletesen ismertettük. Definiáltuk a különböző jellemzőkhöz tartozó hozamokat és számítási formulájukat. A Shapley-algoritmust leíró cikket [24] is bemutattuk, amely a saját modell felépítésének alapját adja. Ismertettük, hogy milyen tulajdonságokkal és számítási korlátokkal rendelkezik az algoritmus. Végül a magántőkealapok hozamfelbontására szolgáló saját modellt mutattuk be.

A 3. fejezetben került bemutatásra a piac szimulálása, melynek során ismertettük, hogy a különböző jellemzők miként hatnak a magántőkealapok cash-flow értékeire. Ezután a PME mutatók kiszámolása következett, melyhez az S&P500-at választottuk piaci indexnek. Az LN-PME és a PME+ esetén egy érdekes jelenséget figyeltünk meg, melyet az évjáratí jellemzővel tudtunk megmagyarázni. A 2.2 bekezdésben bemutatott modell reprodukálása során a kívánt eredményeket kaptuk mind a Monte-Carlo szimuláció, mind az egyedi hatások vizsgálatánál. A modellt továbbfejlesztettük a stratégia és a földrajzi halmazok bővítésével, amikkel megmaradtak a modell fontos tulajdonságai. A másik fejlesztési irány a PME mutatók segítségével számolt hozamfelbontás. A KS-PME és a Direkt Alfa mutatókkal is értelmes eredményeket kaptunk, tehát ez a modell is alkalmas a magántőkealapok hozamfelbontására. Végül a saját modell eredményeit ismertettük. A Shapley-algoritmuson alapuló hozamfelbontási modellből kapott reziduális hozamok

eloszlását vizsgáltuk a permutációs szám növelésével. A modell javulását tapasztaltuk, ám nem igazán szignifikáns mértékben. A modell képes volt a piaci portfólió hozamának megbecsülésére, és a jellemzők hozamai is tükrözik a piaci szimuláció beállításait. Végül a felbontás relatív hibáját vizsgálva azt láthattuk, hogy az MOIC esetén a 20%-os hibahatáron belül maradnak az értékek, viszont az IRR-nél ez nem mondható el. A fejezet végén összefoglaltuk, hogy a valós adatokhoz való hozzáférésnek milyen korlátai vannak.

Az elemzések és a modell továbbfejlesztése több irányban is történhet. A piac szimulálására szofisztikáltabb módszerek is rendelkezésre állnak [6]. A permutációs szám növelése mindenképpen kívánatos a modell eredményeinek javulása szempontjából, így az erre vonatkozó hatékony számolási módszer meghatározása egy fontos következő lépés. A PME mutatókkal való hozamfelbontás ezzel a modellel is kompatibilis, így ez is egy kutatási lehetőség. A legérdekesebb kérdés pedig a valós adaton való tesztelés, ami igazán megtudná mutatni, hogy a modell milyen jól tudja magyarázni a magántőkealapok hozamát.

Függelék

LN-PME számolás

Az IRR kiszámolására a következő egyenletet kell megoldani:

$$-100 + \frac{50}{1+r} + \frac{60}{(1+r)^2} = 0$$

A gyökökre $r_1 = -1,56$ és $r_2 = 0,0639$ jön ki, így az IRR 6,39% lesz. Az index hozamai:

$$I_1 = \frac{108}{100} - 1 = 8\% \quad I_2 = \frac{115}{108} - 1 = 6,48\% \quad I_3 = \frac{115}{100} - 1 = 15\%$$

A fiktív portfólió értéke:

$$W_0 = 100 \quad W_1 = 1,08 \cdot 100 - 50 = 58 \quad W_2 = 1,15 \cdot 100 - 1,648 \cdot 50 - 60 = 1,76$$

Az LN-PME kiszámítására a következő egyenletet kell felírni:

$$-100 + \frac{50}{1+r} + \frac{60}{(1+r)^2} + \frac{1,76}{(1+r)^2} = 0$$

A gyökökre $r_1 = -1,57$ és $r_2 = 0,0747$ jön ki, tehát az LN-PME értéke 7,47%.

Direkt alfa számolás

Az IRR kiszámolására a következő egyenletet kell megoldani:

$$-100 + \frac{50}{1+r} + \frac{70}{(1+r)^2} = 0$$

A gyökökre $r_1 = -1,62$ és $r_2 = 0,1232$ jön ki, így az IRR 12,32% lesz. Az index súlyozott cash-flow:

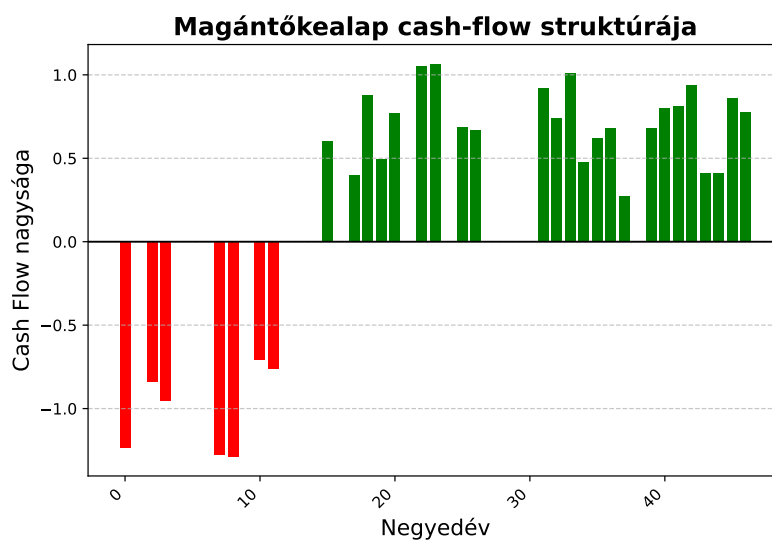
$$c_0 = 1,15 \cdot (-100) = -115 \quad c_1 = 1,0648 \cdot 50 = 53,24 \quad c_2 = 70$$

A Direkt alfa kiszámítására a következő egyenletet kell felírni:

$$-115 + \frac{53,24}{1+a} + \frac{70}{(1+a)^2} = 0$$

A gyökökre $a_1 = -1,58$ és $a_2 = 0,0453$ jön ki. Innen a Direkt alfa értékére $\alpha = \ln(1 + a_2) = \ln(1,0453) = 4,43\%$ jön ki.

Példa szimulált cash-flow struktúrára



4.1. ábra. Példa egy magántőkealap szimulált cash-flow struktúrára

Irodalomjegyzék

- [1] Coinmarketcap. <https://coinmarketcap.com/charts/>, 2025.
- [2] Companiesmarketcap. <https://companiesmarketcap.com/apple/marketcap/>, 2025.
- [3] Tanner Beverly and Joel Bernardin. Private fund quarterly statement rule breakdown. <https://www.acaglobal.com/insights/private-fund-quarterly-statement-rule-breakdown/>, 2024.
- [4] Brinson, Hood, and Beebower. Determinants of portfolio performance. Financial Analysts Journal, 42(4), 39-44., 1986.
- [5] Brown, Ethridge, Johnson, and Keck. Private portfolio attribution analysis. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3624399>, 2020.
- [6] Wen Cao and Misha van Beek. A latent factor cash flow model for alternative investment funds. Financial Analysts Journal, Forthcoming, Available at <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.5046489>, 2024.
- [7] Chuck Carroll. Four predictions for private equity in 2025. <https://www.fticonsulting.com/insights/articles/four-predictions-private-equity-2025>, 2025.
- [8] James Chen. Private equity explained with examples and ways to invest. <https://www.investopedia.com/terms/p/privateequity.asp>, 2024.
- [9] Judy Radler Cohen. What is private equity? a brief history. <https://www.financialpoise.com/what-is-private-equity-a-brief-history-2/>, 2025.
- [10] Andrew Colin. Attribution in finance. Flametree Technologies, 2014.
- [11] Alexander Edlich, Christopher Croke, Fredrik Dahlgqvist, and Warren Teichner. Global private markets report 2025: Private equity emerging from the fog. <https://www.mckinsey.com/industries/private-capital/our-insights/global-private-markets-report>, 2025.

- [12] Fama and French. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, 33(1), 3-56., 1993.
- [13] Eugene F. Fama. Components of investment performance. *The Journal of Finance*, Vol. 27, No. 3 (Jun., 1972), pp. 551-567, 1972.
- [14] Jason Fernando. Internal rate of return (irr): Formula and examples. <https://www.investopedia.com/terms/i/irr.asp>, 2025.
- [15] Larry Fink. Larry fink’s 2025 annual chairman’s letter to investors. <https://www.blackrock.com/corporate/investor-relations/larry-fink-annual-chairmans-letter>, 2025.
- [16] Stucke Gredil, Griffiths. Benchmarking private equity: The direct alpha method. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2403521>, 2014.
- [17] HarbourVest. How does the size of private markets compare to public markets? <https://www.harbourvest.com/insights-news/insights/cpm-how-does-the-size-of-private-markets-compare-to-public-markets/>, 2024.
- [18] Hensel, Ezra, and Ilkiw. The importance of the asset allocation decision. *Financial Analysts Journal*, 47(4), 65–72, 1991.
- [19] Kaplan and Schoar. Private equity performance: returns, persistence and capital flows. *The journal of finance*, 60(4), 1791-1823, 2005.
- [20] Richard Lehman. Multiple on invested capital (moic). <https://www.moonfare.com/glossary/multiple-on-invested-capital-moic>, 2025.
- [21] Austin Long and Craig Nickels. A private investment benchmark. *AIMR Conference on Venture Capital Investing* (Vol. 13, pp. 02-96), 1996.
- [22] Timothy Lord. The attribution of portfolio and index returns in fixed income. *Journal of Performance Measurement* 2 (1): 45–57, 1997.
- [23] Jose Menchero. An optimized approach to linking attribution effects over time. *Journal of Performance Measurement* 5 (1): 36–42., 2019.
- [24] Nicholas Moehle, Stephen Boyd, and Andrew Ang. Portfolio performance attribution via shapley value. <https://arxiv.org/abs/2102.05799>, 2021.
- [25] Bernand Murira and Hector Sierra. Fixed income attribution: A unified framework—part 1. *Journal of Performance Measurement* 11 (1): 23–35., 2006.

- [26] Csóka Péter, Ferenc Illés, and Tamás Solymosi. On the shapley value of liability games. *European Journal of Operational Research*, 300(1), 378-386, 2022.
- [27] Christophe Rouvinez. Private equity benchmarking with pme+. *Venture Capital Journal*, 43(8), 34-39, 2003.
- [28] Cedric Thompson. Magnificent 7 stocks: What you need to know. <https://www.investopedia.com/magnificent-seven-stocks-8402262>, 2024.
- [29] Mariana Vilaça. Largest venture capital firms by aum: Top vc firms (2025). <https://investingintheweb.com/blog/largest-venture-capital-firms/>, 2025.
- [30] Justin Walton. 10 most famous leveraged buyouts. <https://www.investopedia.com/articles/markets/111015/10-most-famous-leveraged-buyouts.asp#citation-29>, 2023.

MI-eszközhasználati nyilatkozat

Alulírott, **Kelemen Lajos**, nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI-alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
L ^A T _E X táblázatok és Python ábrák készítése	ChatGPT	Teljes dolgozat	Az MI eszközt a saját eredmények vizualizálására és táblázatok készítésére használtam.

A felsoroltakon túl más MI-alapú eszközt nem használtam.