

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM

Spread és basket opciók árazása

SZAKDOLGOZAT

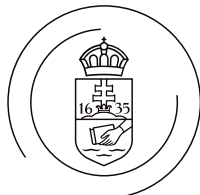
Takács Lili

Biztosítási és pénzügyi matematika MSc

Kvantitatív pénzügyek specializáció

Témavezető:

Varga László



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM



Budapest, 2025

Tartalomjegyzék

Előszó	3
1. Matematikai és pénzügyi áttekintés	5
1.1. Derivatívák bemutatása	5
1.1.1. Spread opciók	5
1.1.2. Basket opciók	8
1.2. Modellkörnyezet	10
1.2.1. Black–Scholes-modell	10
1.2.2. Bachelier-modell	12
1.3. Spread és basket opciók árazási módszerei	15
1.4. Gauss-kvadratúrák	17
1.5. Monte Carlo szimuláció	20
2. Árazás Gauss–Hermite-kvadratúrával a Black–Scholes-modellben	22
2.1. Az integrandus	22
2.2. Integrálás analitikusan, majd numerikusan	23
2.2.1. Első dimenzió mentén	23
2.2.2. Többi dimenzió mentén	25
2.3. Numerikus megfontolások	25
2.3.1. Első dimenzió megválasztása	25
2.3.2. M_j -k megválasztása	27
2.3.3. Dimenziócsökkentés	28
3. Árazás a Bachelier-modellben	29
3.1. Zárt képlet egy opció árára	29
3.2. Alkalmazás spread és basket opciókra	30
3.3. Volatilitások megfeleltetése	31
4. Vegyes modell Gauss–Hermite-kvadratúrával	33
5. Numerikus eredmények	36
5.1. Kvadratúraárazás a Black–Scholes-modellben	37
5.1.1. Első dimenzió megválasztásának hatása	37
5.1.2. M_j -k megválasztásának hatása	39
5.1.3. Árazás dimenziócsökkentéssel	39
5.1.4. Összehasonlítás a Margrabe-formulával	42
5.1.5. Ellenőrzés Monte Carlo szimulációval	42
5.2. Kvadratúraárazás a vegyes modellben	46
5.2.1. Konvergencia sebessége	46
5.2.2. Ellenőrzés Monte Carlo szimulációval	46
5.3. Modellkörnyezetek összevetése	47
Összefoglalás	50
Irodalomjegyzék	51

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt köszönettel tartozom témavezetőmnek, Varga Lászlónak, aki megismertetett dolgozatom témájával, értékes szakirodalmakra hívta fel a figyelmem, és hasznos tanácsokkal segítette munkámat. Alapos észrevételeivel nagyban hozzájárult a dolgozat végső formájához.

Továbbá köszönöm azoknak, akiktől az elmúlt évek során tanulhattam, valamint mindenkinek, aki mellett volt és támogatott ebben az időszakban.

Előszó

A spread és basket opciók olyan pénzügyi származtatott termékek, amelyek több eszköz árának lineáris kombinációja alapján biztosítanak kifizetéseket. A spread opciók lehetőséget adnak az árkülönbszerekre vonatkozó opciós ügyletek kötésére, míg a basket opciók esetében egy meghatározott elemszámú eszközkosár, vagyis az alaptermékek súlyozott árösszege képezi az opció alapját. Ezen egzotikus derivatívák kiemelt szerepet töltenek be a pénzügyi piacokon, mivel lehetőséget nyújtanak a több eszköz közötti árelmozdulásokból fakadó kockázatok kezelésére, valamint az ezekre épülő spekulációra. A spread opciók elsősorban az árupiacokon, azokon belül is az energiaderivatívák piacán népszerűek, míg a basket opciók széles körben előfordulnak részvények és devizák esetén is.

A szakdolgozat célja, hogy részletesen bemutassa a spread és basket opciók árazási módszereit. Ezen termékek értékelése komoly kihívást jelent a Black–Scholes-piacon, mivel a legtöbb esetben nem lehetséges analitikusan megadni az árat. Ennek oka, hogy a kifizetésfüggvényben lognormális változók összege szerepel, ami azonban általában nem lognormális eloszlást eredményez. Így közelítő eljárás alkalmazása szükséges, a dolgozat keretein belül egy Gauss–Hermite-kvadratúrát alkalmazó árazási módszert ismertetünk.

Mint említettük, mindkét származtatott termék gyakran árucikkekre vonatkozik, így előfordulhat, hogy az alaptermékek ára negatívra fordul. Ilyen helyzetekben a Bachelier-modell jelenthet megoldást, amelyben az árfolyamokat aritmetikai Brown-mozgásként kezeljük. Ebben a környezetben az egzotikus opciók árazása egyszerűbbé válik, mivel az árak lineáris kombinációja normális eloszlású. Ezzel a kérdéssel is foglalkozunk a dolgozatban.

Az 1. fejezetben részletesen bemutatjuk a két származtatott terméket, különös figyelmet fordítva alkalmazási területeikre. Ezt követően ismertetjük a szükséges matematikai alapokat, valamint áttekintjük a Black–Scholes- és Bachelier-modelleket,

amelyek keretrendszerként szolgálnak a későbbi fejezetekben.

A Black–Scholes-modellel kezdünk, a 2. fejezet a Gauss–Hermite-kvadratúrát alkalmazó árazási módszerre összpontosít lognormális eloszlások feltételezése esetén. A módszer bemutatása mellett különböző numerikus megfontolásokra is kitérünk, amelyek javítják az eljárás hatékonyságát és gyorsítják a konvergenciát. Ezt követően a 3. fejezetben zárt képletet adunk a Bachelier-modellben egy egyszerű call opció értékére, majd ezt kiterjesztjük a spread és basket opciók árazására. A 4. fejezetben bevezetjük a vegyes modellt, amely lehetővé teszi olyan spread opciók árazását, ahol a két alaptermék dinamikája eltérő. Ebben a részben ismét a Gauss–Hermite-kvadratúra technikáját alkalmazzuk a numerikus közelítéshez. Ez tudomásom szerint saját munkám eredménye.

A módszerek értékeléséhez az 5. fejezetben numerikus teszteket végzünk mindhárom modell implementációjával. Megvizsgáljuk a közelítő módszerek pontosságát, és összehasonlítjuk a különböző modellekben fennálló árakat. A dolgozat utolsó részében összefoglaljuk az eredményeket, és javaslatokat teszünk a módszerek további finomítására, kiterjesztésére.

1. fejezet

Matematikai és pénzügyi áttekintés

1.1. Derivatívák bemutatása

A fejezet célja a spread és basket opciók részletes bemutatása, beleértve azok jellemző alkalmazási területeit is. A fejezethez felhasznált szakirodalom [7], [29], [31], [13].

1.1.1. Spread opciók

Spread opció alatt egy olyan egzotikus opciót értünk, melynek kifizetésfüggvénye két alaptermék értékének különbségétől függ. Európai típusú termék esetén csak lejáratkori értékek szerepelnek a payoff formulában. A spread opciót meghatározza a két alaptermék, az opció típusa (call vagy put), T lejárat, illetve K kötési árfolyama. A klasszikus opciókkal szemben eltérés, hogy esetünkben K nincs a pozitív félegyenesre korlátozva, hiszen két eszközár különbsége negatív is lehet.

Jelöljük $c(t)$ -vel és $p(t)$ -vel a call, illetve put opció árát t időpontban. Ahol szükségesnek érezzük, az alaptermékeket, illetve a kötési árfolyamot alsó indexben tüntetjük fel.

Call opció esetén a kifizetésfüggvény a következő:

$$c(T) = (S_1(T) - S_2(T) - K)^+. \quad (1.1)$$

Egy put spread opció értéke T -ben ezzel szemben:

$$p(T) = (K - S_1(T) + S_2(T))^+. \quad (1.2)$$

A put-call paritás a klasszikus opciókhoz hasonlóan felírható. Indoklásként használhatjuk ugyanazt az érvelést, $S_1 - S_2$ -re cserélve az alapterméket. A kockázatmentes kamatlábat r -rel jelölve

$$c(0) - p(0) = S_1(0) - S_2(0) - e^{-rT}K, \quad (1.3)$$

így a későbbi árazási módszerek esetén elegendő call opciókkal foglalkoznunk.

Érdemes észrevenni, hogy valójában a negatív kötési árfolyam sem ad új esetet. Amennyiben $K < 0$,

$$c_{S_1, S_2, K}(0) = p_{S_2, S_1, -K}(0), \quad (1.4)$$

hiszen a kifizetésfüggvényeik megegyeznek,

$$(S_1(T) - S_2(T) - K)^+ = (-K - S_2(T) + S_1(T))^+. \quad (1.5)$$

Hasonlóan

$$p_{S_1, S_2, K}(0) = c_{S_2, S_1, -K}(0). \quad (1.6)$$

A való életben leggyakrabban az árucikkek piacán találkozhatunk spread opciókkal, azonban nem kizárólag. Mivel a modellkörnyezet kialakításához feltételezéseket kell tennünk az alaptermékek dinamikáját illetően, így nélkülözhetetlen a gyakran előforduló esetek ismerete.

Spread opciókat gyakran kötnek egyazon termék különböző előfordulási helyeire, ezek az úgynevezett location spreadek. Árucikkeknél a kezelési, szállítási, tárolási költségek nem elhanyagolhatóak, így arbitrázsmentes piacon sem várhatjuk el, hogy különböző piacokon egyezzenek az árak. A calendar spreadek adott alaptermék különböző időpontra vonatkozó árainak különbségére vonatkoznak. Amennyiben az egyik alaptermék nyersanyag, a másik egy késztermék, úgynevezett processing spreadként hivatkozunk az opcióra. Ekkor az előállítási költségekre spekulálunk az opció megkötésével. Szólhat a spread opció egyazon árucikk különböző minőségi osztályaira is, ezek a quality spreadek.

A következőkben konkrét, gyakran kereskedett spread opciókra nézünk példákat.

Energiapiac

Crack spread A crack spread a nyersolaj egyidejű vásárlása vagy eladása a finomított kőolajtermékek eladásával vagy vásárlásával szemben. Valójában a nyersolajra, fűtőolajra, illetve ólmozatlan benzinre vonatkozó napi futures árak alapján számítják a különbözetet. A spreadre vonatkozó opció a New York-i árutőzsdén is elérhető. Spekuláció mellett olajfinomítók kockázatkezelésére is alkalmas termék. Gyakori típusai:

- 1:1:0 benzin spread: egy egység ólmozatlan benzin és nyersolaj különbözetére szóló opció,
- 1:0:1 fűtőolaj spread: egy egység fűtőolaj és nyersolaj különbözetére szóló opció,
- 3:2:1 crack spread: három egység nyersolaj értékéből vonjuk ki egy egység fűtőolaj és két egység ólmozatlan benzin árát. Valójában itt három alaptermék jelenik meg, így formailag nem spread opcióról van szó. Azonban, mint basket opció, tudjuk majd árazni ezt az esetet is.

Spark spread Itt is egy ipari folyamatot szeretnénk modellezni, a földgáz elektromos árammá alakításának költségét. Ezt úgy érjük el, hogy egy gázerőmű üzemeltetéséhez szükséges mennyiségű üzemanyag, illetve a működtetéssel elérhető mennyiségű áram különbségére kötjük az opciót. Mivel árucikkekről van szó, így általában határidős árakról beszélünk. Ilyen például a

- 4:3 vagy 5:3 spark spread, ahol négy vagy öt egység áram, illetve három egység földgáz különbsége érdekel minket.

Valójában tökéletes hedge-hez az szükséges, hogy a két termék aránya, az úgynevezett heat rate legyen, ez az erőmű hatékonyságát fejezi ki.

Az opció eggyel fejlettebb formáját képezik a tolling agreementek. Ez egy olyan derivatíva, mely tulajdonosának egy meghatározott időszakban azt a jogot biztosítja, hogy egy erőművet üzemeltessen. Azaz kifizetésfüggvénye a spark spread opció payoffjának integrálja az ügylet időtartamára nézve. Az Európai Unió területén gáz-, illetve szén erőmű üzemeltetéséhez tanúsítvánnyal (EECS) kell rendelkezni, ezekkel a piacon is kereskednek. Gyakran ezek költségét is figyelembe veszi a kifizetésfüggvény.

Dark spread Hasonlít a spark spreadre, azonban itt egy szénérőmű profitjára szeretnénk opciót kötni. Azaz a két alaptermék a kőszén és az elektromos áram.

Mezőgazdasági határidős piacok

Leginkább agrárcikkre vonatkozó processing spread opciókról beszélhetünk. Ilyen például a Chicagói Kereskedelmi Igazgatóság (CBOT) tőzsdéjén kereskedhető crush spread. Az alapanyag a feldolgozatlan szójabab, a feldolgozott termékek a szójaolaj és a takarmányként használt szójaliszt. A név eredete a feldolgozás módjára, a préselésre utal. A feldolgozás során keletkező arányok alapján gyakori a 10:11:9 arányban való üzletkötés. Valójában ez is egy basket opció.

Deviza- és fixed income piacok

Gyakoriak a különböző országok eltérő devizában megadott swap rátájára vonatkozó spread opciók (quanto-swaptions). Az Amerikai Egyesült Államok kötvénypiacán ismertek az úgynevezett NOB (Notes-Bonds), TED (Treasury Bills-EuroDollars), illetve MOB (Municipal-Treasury) spreadek. Az első eltérő lejáratú időpontokhoz tartozó hozamgörbepontokra való spekuláció eszköze. A TED-nél pedig a két eszköz kibocsátója különbözik, így az állampapírok által nyújtott, illetve a bankközi kamatok (LIBOR) egymáshoz viszonyított változására tudunk fogadni. A MOB is hasonló célt szolgál, azonban itt az állami és önkormányzati hozamokat hasonlítjuk össze.

1.1.2. Basket opciók

A basket opciók, mint ahogyan a név is jelzi, több eszközből álló portfólióra szólnak. A szakdolgozat keretein belül ugyanúgy csak európai típusú opciókkal foglalkozunk, ahol a kifizetés csak a lejárat időpontjában fennálló áraktól függ. A spread opciók egy speciális esetét képezik a basket opcióknak. Az egyértelmű megadáshoz tudnunk kell az opció típusát (call vagy put), T lejáratát, a kosarat alkotó eszközöket és w_i súlyukat, valamint a K kötési árfolyamot. A kifizetésfüggvény call esetén

$$c(T) = \left(\sum_{k=1}^N w_k S_k(T) - K \right)^+, \quad (1.7)$$

putnál

$$p(T) = \left(K - \sum_{k=1}^N w_k S_k(T) \right)^+. \quad (1.8)$$

Gyakran kikötik, hogy w_i súlyok pozitívak legyenek, mi nem fogunk ezzel élni. Egyrészt ekkor nem fednék le az összes piacon előforduló basket opciót, másrészt a további fejezetekben bemutatott árazási eljárások negatív súlyok előfordulása esetén is működnek. Gyakori választás szokott lenni az egyenlő súlyozás.

Fontos különbséget tenni az index opciók és a basket opciók között. Míg az index opciók esetén az eszközök listája, súlya, száma változhat a lejáratidőn belül, a basket opcióknál ezek rögzített értékek. Egy másik különbség, hogy az index opciók gyakran tőzsdén kereskedett termékek, ezzel szemben a gyakran teljesen személyre szabott basket opciókkal szinte csak OTC piacokon találkozhatunk.

Természetesen továbbra is igaz marad a put-call paritás,

$$c(0) - p(0) = \sum_{k=1}^N w_k S_k(T) - e^{-rT} K, \quad (1.9)$$

illetve a negatív K -tól ugyanúgy megszabadulhatunk. Ehhez egyszerűen cseréljük le K és az összes w_i súly előjelét, valamint call helyett put, put helyett call opciót árazunk.

A kosár összetevőire nincs kikötésünk, alább átvesszük a leggyakrabban előforduló típusokat. Ettől eltérő, például kötvényeket tartalmazó, vagy multi-asset basket opciók is elképzelhetők.

Részvények Gyakoriak a részvénykosarak, ilyenkor általában egy-egy szektorba vagy országba tartozó cégek az összetevők. Lehetnek akár részvényindexek is az alkotóelemek.

Árucikkek Árucikkekre vonatkozó, több mint kételemű basketokat már az előző fejezetben is láttunk. Ezek általában processing spread opciók, mint például a crack vagy crush opciók, a súlyok gyakran a gyártási folyamatban megjelenő arányok szerint alakulnak. De elképzelhető olyan kosár is, ahol minden súly pozitív, ezzel például az energiaárak általános emelkedésére vagy gyengülésére lehet spekulálni.

Deviza Elterjedtek a valutakosarakra vonatkozó opciók. A basket több devizát tartalmaz, általában valamilyen régióra, vagy fejlett/fejlődő piacokra fókuszál a termék.

A szakirodalomban a következő érvek jelennek meg a basket opciók mellett:

- Olcsóbb megvenni egy basket opciót, mint a kosárba tartozó egyszerű opciókat. Hacsak nem tökéletesen korreláltak az eszközök, akkor a kosár volatilitása kisebb lesz, mint a megfelelő súlyokkal ellátott egyedi szórásnégyzetek összege. Természetesen az is igaz, hogy míg az egyedi, például ATM opcióknál egy-egy kívánt eszközárelmozdulás esetén is jár kifizetés, addig a basket opcióknál csak akkor történik lehívás, hogyha ez a súlyozott átlagra is igaz.
- Ezen kívül tranzakciós költségek terén is jobban járunk, ha csak egy, többféle eszközt lefedő ügyletet kötünk. Így hatékony és költségkímélő eszköz lehet portfóliók kockázatkezelésekor.
- Jó választás lehet olyan befektetőknek is, akiknek nem egyes eszközökről, hanem bizonyos szektorokról, régiókról, iparágakról van határozott elképzelésük. Az index opciókkal szemben ezek a termékek teljesen testreszabhatóak és ugyanúgy alkalmasak az egyedi kockázatok diverzifikációjára. Azonban ennek ára van, a korlátozott likviditás.

1.2. Modellkörnyezet

A szakdolgozat egyik célja, hogy a Black–Scholes-modell mellett bemutassa a Bachelier-modellt, mint alternatív árazási megközelítést. A két modell eltérő feltételezéseket tesz a piac működéséről és az alaptermékek árfolyamdinamikájáról. A Black–Scholes-modell a hozamok lognormális eloszlását feltételezi, míg a Bachelier-modell az árfolyamok normális eloszlásán alapul. Segítségünkre lesz [26] és [9].

1.2.1. Black–Scholes-modell

A Black–Scholes-modell feltételezései a piacról a következők:

- Nincs arbitrázslehetőség.
- A piaci szereplők bármilyen összegben, akár tört egységekben is kölcsönözhetnek és hitelezhetnek ugyanazzal a konstans kockázatmentes kamatlábbal.

- A befektetők bármilyen mennyiségben, akár tört egységekben is vásárolhatnak és eladhatnak kockázatos eszközöket, azaz a shortolás is lehetséges.
- A kereskedésnek nincsenek tranzakciós költségei, adói vagy egyéb díjai, és a likviditás tökéletes.

Általában kötvény-részvény piacként emlegetik a Black–Scholes-modell piacát, azonban a kockázatos eszközökre nem feltétlenül kell részvényként tekintenünk. A lényeg, hogy három kategóriába soroljuk az elérhető termékeket: származtatott eszköz, kockázatos alaptermék és kockázatmentes befektetési lehetőség. Ahhoz, hogy a derivatív terméket árazni tudjuk, a kockázatos alaptermék dinamikájáról is feltételeznünk kell valamit. A Black–Scholes-modellben a kockázatos alaptermékek geometriai Brown-mozgást követnek.

A kockázatmentes bankbetétre egy determinisztikus

$$dB(t) = rB(t) dt, \quad (1.10)$$

míg a kockázatos eszközökre sztochasztikus differenciálegyenleteket írhatunk fel. Minden $i = 1, \dots, N$ -re:

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t) dt + S_i(t) \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_j(t). \quad (1.11)$$

Itt $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{i,j})_{i=1,\dots,N, j=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ és $\mathbf{W}(t) = (W_j(t))_{j=1,\dots,d}$ egy d -dimenziós Wiener-folyamat értéke t -ben. Definiáljuk a market price of risk (MPR) fogalmát. A $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^d$ MPR, amennyiben

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = r \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{\mu}. \quad (1.12)$$

Itt $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^N$, minden koordinátája 1. Belátható, hogy amennyiben nem létezik MPR, a piac nem arbitrázsmentes. Tegyük fel tehát, hogy nem ez a helyzet, valamint a Novikov-feltétel teljesül $\boldsymbol{\nu}$ -re és $\boldsymbol{\sigma} + \text{diag}[\boldsymbol{\nu}]$ -re. Ekkor B korlátos variációjú ármérce, a részvényárak lokális martingál komponense pedig rendelkezik a martingálreprezentációs tulajdonsággal. A

$$d\mathbb{Q} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^d \nu_j^2 dt + \int_0^T \sum_{j=1}^d \nu_j dW_j(t) \right) d\mathbb{P} \quad (1.13)$$

definícióval élve, $(B(t), \mathbb{Q})$ ármérce pár lesz. Így a Black–Scholes-piac teljes. Minden derivatív termékhez létezik önfinanszírozó stratégia, mely előállítja a kifizetésfüggvény értékét. Érdekes még megemlíteni az árazási formulát, mely $B(t) = e^{rt}$ választással

$$C_t(X) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}(X | \mathcal{F}_t) \quad (1.14)$$

alakra egyszerűsödik egy X kifizetés esetén.

Amennyiben az eszközök száma megegyezik a meghajtó Wiener-folyamatok számával, valamint σ invertálható, akkor létezik az MPR. Ebben az esetben áttérhetünk egy jobban kezelhető jelölésre, mely a későbbiekben praktikusabb lesz. Legyen a továbbiakban

$$dS_k(t) = \mu_k S_k(t) dt + \sigma_k S_k(t) dW_k(t). \quad (1.15)$$

Itt $W_k(t)$ a k . terméket meghajtó Brown-mozgás. Ezek egy többdimenziós Brown-mozgás lineáris transzformációjával származtathatóak, páronkénti korrelációjuk ρ_{kj} , $|\rho_{kj}| \neq 1$. Vegyük be az osztalékfizetés lehetőségét is, legyen q_i az i . alaptermék osztalékfizetési rátája.

A megfelelő $\mathbb{Q}$ kockázatsemleges mérték alatt megváltoznak a drift együtthatók:

$$dS_k(t) = (r - q_k) S_k(t) dt + \sigma_k S_k(t) dW_k(t). \quad (1.16)$$

1.2.2. Bachelier-modell

A Bachelier-modell piacról alkotott feltételezései megegyeznek a Black–Scholes-modellével a dinamikát kivéve:

- A kockázatos alaptermékekre szóló határidős termékek árfolyama aritmetikai Brown-mozgást végez konstans volatilitással.

Történelmileg megelőzi a Black–Scholes-modellt, mivel a matematikai alapú eszközárzás első példáját Bachelier 1900-ban, Ph.D. munkájában ([2]) mutatta be, míg a Black–Scholes-formuláról publikáció ([4]) 1973-ban jelent meg először. A modell hosszú ideig elfeledésbe merült, mivel a normális eloszlásból adódó nem kívánatos tulajdonsága, miszerint negatív árakat is generálhatott, problémát jelentett a piaci alkalmazásokban. Emellett empirikusan igazolható volt a Black-Scholes-modell fő feltételezése, miszerint a napi hozamok arányosnak tekinthetők a részvényár adott szintjével.

A Bachelier-modell a 21. században nyert újra népszerűséget, amikor a piacon korábban lehetetlennek gondolt negatív árak jelentek meg. A 2008-as válság után néhány fejlett országban a kamatlábak negatívba fordultak, így a kereskedéshez használt opcióárazási modelleket át kellett alakítani az új környezethez. A Covid-19 miatti lezárások hirtelen visszavetették az olaj iránti keresletet, így a történelemben először 2020 áprilisában az olaj futures árak egy napra negatívba fordultak. Ezeknél a helyzeteknél a korábban limitációként kezelt negativitás pont hogy előny lett és sok helyen ideiglenesen átálltak a Bachelier-modell alkalmazására.

Az árupiacokon a szerződések jellemzően a forward árakra vonatkoznak. A Black–Scholes-modellben az alaptermékek árfolyama geometriai Brown-mozgást követ

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t) dt + S_i(t) \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_j(t), \quad (1.17)$$

emiatt a határidős árfolyam dinamikája is geometriai Brown-mozgás a következő paraméterekkel

$$dF_i(t) = (\mu_i - r) F_i(t) dt + F_i(t) \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_j(t), \quad (1.18)$$

mivel $S_i(t) = e^{-r(T-t)} F_i(t)$. Ezt az Itô-formula alkalmazásával könnyedén ellenőrizhetjük. Így a határidős árfolyam lognormális eloszlású.

A Bachelier-modellben aritmetikai Brown-mozgást feltételezünk a határidős árfolyamokról. Legyen a T -ben lejáró forward vektor dinamikája

$$dF_i(t) = (\mu_i - r) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_j(t). \quad (1.19)$$

Ez nem jár együtt azzal, hogy az alaptermékek is aritmetikai Brown-mozgást végeznek. A dinamika az osztalékmentes esetben megadható mint

$$dS_i(t) = [rS_i(t) + e^{-r(T-t)}(\mu_i - r)] dt + e^{-r(T-t)} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_j(t). \quad (1.20)$$

Gyakran úgy definiálják a Bachelier-modellt, hogy nem a határidős, hanem a spot árfolyamokról teszik fel, hogy aritmetikai Brown-mozgást követnek. A fő különbség a volatilitás dinamikájában lesz. Azonban az alternatív felírásban is fennáll a forward

árfolyamok normális eloszlása, így a forward szórásának kiszámolásával ugyanúgy alkalmazhatóak a későbbiekben levezetett formulák.

Térjünk azonban vissza (1.20) egyenlethez, az Itô-formula segítségével számoljuk ki a diszkontált részvényárfolyamok dinamikáját is:

$$d\hat{S}(t) = e^{-rT}(\mu_i - r) dt + e^{-rT} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_j(t). \quad (1.21)$$

Szinte ugyanazt az érvelést használva elmondhatjuk, hogy az MPR feltétel szükséges az arbitrázsmentességhez. Amennyiben $\mu - r \cdot \mathbf{1}$ nem tartozna bele σ képterébe, elő tudnánk állítani egy olyan portfóliót, melynek kezdőösszege 0, értékfolyamata determinisztikus és nemnegatív. Sőt, ugyanazt a ν által meghatározott Radon–Nikodym-deriváltat kell használnunk a driftek eltüntetésére is. Az ezzel definiált $\mathbb{Q}$ alatt az alaptermékek dinamikája

$$dS_i(t) = rS_i(t) dt + e^{-r(T-t)} \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_j(t) \quad (1.22)$$

lesz, a kockázatmentes forward dinamika pedig megadható, mint

$$dF_i(t) = \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j} dW_j(t). \quad (1.23)$$

Természetesen amennyiben megegyezik az alaptermékek és a meghajtó Wiener-folyamatok száma, itt is átírhatjuk a vektoros jelölést úgy, hogy minden alapterméket egy-egy önálló Wiener-folyamat hajtson meg. Ekkor meg kell adnunk a köztük lévő $\rho_{ij} \in (-1, 1)$ korrelációkat.

A Bachelier-modell is teljes lesz, hiszen $(B(t), \mathbb{Q})$ ármércepár, valamint továbbra is fennáll a martingálreprezentáció. Így az ár egyértelmű, továbbra is használható az általános árazási formula.

A call opció árára zárt képlet adható a Bachelier-modellben is. Ezt a 3. fejezetben vezetjük le. Spread és basket opciók árazásánál továbbá rendkívül szerencsések vagyunk, hiszen normális változók összege is normális eloszlású, így ezen, több eszköztől függő opciók árára is tudunk formulát szolgáltatni.

1.3. Spread és basket opciók árazási módszerei

Az eszközök árazására különböző módszerek állnak rendelkezésre, melyek választása elsősorban a modell bonyolultságától, a kívánt eredmény pontosságától és a számítási költségektől függ. A legelőnyösebb, ha analitikus formulánk van az árra, azonban ez a Black–Scholes-piac mellett nem áll fenn általánosan spread és basket opcióknál. Amennyiben megelégszünk közelítő eredménnyel is, gyors megoldást jelenthetnek a különböző zárt képlettel megadható approximációk. Hátrányuk, hogy pontosságuk nagyban függ a megadott paraméterektől, így nehéz kontrollálni az elkövetett hibát. Konvergens árazási módszernek nevezzük azokat a determinisztikus eljárásokat, amelyek a lépésszám növelésével minden paraméterkombináció esetén a pontos árhoz konvergálnak. Ilyenek például bizonyos numerikus integrálást használó módszerek. Külön szokás említeni a szimulációval történő árazást, mely az előző kategóriával ellentétben ismételt futtatás esetén nem feltétlen ugyanazt az eredményt adja, azonban a szimulációk számát növelve az eredmény egy valószínűséggel tart a pontos árhoz.

Tekintsük át először spread opciók Black–Scholes-piac alatti árazását. Analitikus formula csak csereopciókra létezik, vagyis olyan spread opciókra, ahol $K = 0$. Ez a Margrabe-képlet [25]. Legyen két kockázatos eszköz kezdeti ára $S_i(0)$, volatilitása σ_i , osztalékfizetési rátája q_i ($i = 1, 2$ esetén), a köztük fennálló korreláció pedig ρ_{12} . A kifizetésfüggvény T -ben $(S_1(T) - S_2(T))^+$. Ekkor az opció ára $t = 0$ -ban megadható, mint

$$e^{-q_1 T} S_1(0) \Phi(d_1) - e^{-q_2 T} S_2(0) \Phi(d_2) \quad \text{ahol,} \quad (1.24)$$

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_1(0)}{S_2(0)} + (q_2 - q_1 + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}, \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}.$$

Általános esetben a legismertebb modell Kirk approximációja. Kirk a második eszköz árának és a kötési árfolyamnak az összegét egy lognormális változóval közelíti, majd erre alkalmazza a Margrabe-képletet. Kirk ötletét viszi tovább Carmona és Durrenman [7], valamint Bjersund és Stensland [3] publikációja. Viszonylag pontos alsó korlátot vezetnek le a spread opciók árára, amely még mindig zárt képletként adható meg.

Megjelentek Fourier-transzformációt felhasználó módszerek is, először Dempster

és Hong alkalmazta két dimenzióban [12]-ben. Később Hurd és Zhou [17], majd Caldana és Fusai [6] ugyanúgy Fourier-transzformációt használnak az árazáshoz. Elmondható, hogy a Black–Scholes-modellen kívül már sztochasztikus volatilitás és ugró folyamatok esetén is ismertek Fourier-transzformációt alkalmazó árazási módszerek.

Érdemes szót ejteni a numerikus integrálást alkalmazó módszerekről is. Pearson [28] már 1999-ben írt ilyen módszerről. Joshi és Yang [20]-ben publikált CMS spread opciók árazásáról, amelyhez Gauss–Hermite- és Gauss–Legendre-kvadratúrát alkalmaztak. Van Belle, Vanduffel és Yao ugyanúgy Gauss-kvadratúrákat használ [32]-ben, sikerül hatékonyan számolható eljárást adniuk a Black–Scholes-modell, illetve Variance Gamma és Normal Inverse Gaussian folyamatok mellett is. Meg kell még említenünk Choi cikkét, [8]-t, mely közös keretben vizsgálja ázsiai, basket és spread opciók árazását. A 2. fejezet főként ezt a cikket dolgozza fel.

Emellett természetesen alkalmazhatunk Monte Carlo szimulációt is az árazáshoz, tetszőleges szóráscsökkentő módszerrel kiegészítve. Ez főleg akkor lehet hasznos, hogyha a feltételezett dinamika bonyolult. Illik megemlítenünk a momentum módszereket is, egy ilyen ötletet mutat be Deelstra, Petkovic és Vanmaele cikke, [11]. Alternatíva lehet még a termékektől függően a Bachelier-modellben, vagy ennek valamilyen továbbfejlesztésében való árazás is, ahol zárt képlet adható. Ezt a 3. fejezetben ismertetjük.

Basket opciók esetén az analitikus közelítések lényege általában megegyezik, megpróbálják a változók összegének eloszlását valamilyen ismert eloszlással közelíteni. Általában a módszerek megegyeznek az ázsiai opcióknál használható eljárásokkal. Levy [23]-ben lognormális eloszlást, Milevsky és Posner [27]-ben a gamma eloszlás reciprokát, Borovkova társaival [5]-ben eltolt lognormális eloszlást, Zhou és Wang is transzformált lognormális eloszlást alkalmaz [33]-ban. A módszerek során a közelítő eloszlások paramétereit úgy választják meg általában, hogy a momentumok megegyezzenek az elméleti eloszlásokéval. Általában igaz, hogy ezek a módszerek csak bizonyos paraméterhatárok közt szerepelnek jól, például a negatív súlyok rendszerint rontják a teljesítményt.

Más eredmények azt használják ki, hogy a geometriai közép jó közelítése az aritmetikai átlagnak. Így Monte Carlo szimuláció során jól alkalmazható kontrollváltozóként, ezt például Krekelék [21] cikke taglalja. A geometriai közepet másféleképpen

is alkalmazták, Curran [10]-ben feltételes várható értéket vesz erre nézve. Li és társainak [24] írása is felhasználja a geometriai közepet, a pozitív súlyú eszközök összegét helyettesítik a geometriai átlaggal. Ezután Taylor-sorba fejtéssel adnak meg zárt alakú közelítő formulát.

Közös módszer a spread opciókkal Carmona és Durrleman [7] approximációs eljárását bemutató cikke, illetve a szakdolgozat egyik fő forrása, Choi [8] publikációja. Choi Gauss–Hermite-kvadratúrát alkalmaz többdimenzióban, a konvergencia gyorsítása érdekében főkomponens-analízis segítségével választja meg a tengelyirányokat, illetve végez dimenziócsökkentést.

Érdekes alternatíva lehet a basketeknél ritkábban használt Fourier-transzformáció, mely például Leentvaar és Oosterlee [22] írásában jelenik meg párhuzamos formában, vagy Alexander és Venkatramanan cikke [1], mely összetett csereopciókra bontja fel a basket árazását. Ne feledkezzünk meg emellett a Bachelier-modellről sem, mely piaci környezettől és alaptermékektől függően jó illeszkedést szolgáltat, és ami mellett zárt képlet adható a basket opciók árára.

A szakdolgozat keretén belül ezek közül bővebben két, merőben eltérő modellezést, illetve árazást vizsgálunk meg. A 2. fejezetben a Gauss–Hermite-kvadratúrán alapuló módszert tekintjük át részletesen, míg a 3. fejezet témája a Bachelier-modellben alkalmazható analitikus formula. Ezután egy vegyes modellt nézünk meg, melyben az eszközök eltérő dinamikát követnek, az árazáshoz itt is Gauss–Hermite-kvadratúrát használunk.

1.4. Gauss-kvadratúrák

A 2. fejezetben bemutatandó módszer sikere a Gauss-kvadratúra nevű integrálközelítés rendkívüli pontosságán múlik. A kapcsolódó elméletet röviden [14], [15] és [19] alapján tekintjük át.

A Gauss-kvadratúrákkal az a célunk, hogy egy $f \in C[a, b]$ függvényre a képletben szereplő integrált egy véges összeggel közelítsük:

$$\int_a^b g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^M s_i f(z_i). \quad (1.25)$$

Feltesszük, hogy $g \in C[a, b]$, illetve $g > 0$ (a, b) -n. Bevezetjük $\langle h_1, h_2 \rangle = \int_a^b g(x)h_1(x)h_2(x) dx$ skalárszorozást. Nevezzük M -et a kvadratúra rendjének, ezt adottnak tekintjük. Az s_i súlyok, illetve z_i osztópontok függenek M megválasztásától, azonban f -től nem.

Célunk, hogy ne közelítést, hanem pontos eredményt kapjunk minden $f \in \mathbb{P}_d[x]$ polinomra, ahol d a lehető legnagyobb. Könnyen belátható, hogy $d = 2M$ nem elérhető, ehhez válasszuk $f(x) = \prod_{i=1}^M (x - z_i)^2 \in \mathbb{P}_{2M}[x]$ polinomot. A kiszámítandó integrál mindenképp szigorúan pozitív lesz, azonban a közelítő összeg 0, hiszen f -be csak a zérushelyein helyettesítünk be.

Legyenek ezentúl $p_0, p_1, \dots$ az előbb definiált skalárszorozatra nézve ortogonális polinomok, melyek főegyütthatója 1. Egyszerűen belátható, hogy p_n -nek (a, b) -n belül n egyszeres zérushelye van. Ehhez definiáljuk $u(x) = \prod_{i=1}^j (x - \xi_i)$ -t, ahol ξ_i -k a p_n olyan (a, b) -beli gyökei, ahol a polinom előjelet vált (tehát ahol a multiplicitás páratlan). Ekkor $p_n(x)u(x)$ nem vált előjelet, így $|\langle p_i, u \rangle| > 0$. Mivel p_n ortogonális minden n -nél kisebb fokú polinomra, így u fokszáma n . Azaz n darab egyszeres gyök van (a, b) -ben. Így értelmes a következő definíció: adott M mellett legyen z_i a p_M polinom i . zérushelye, továbbá a hozzá tartozó súly

$$s_i = \int_a^b g(x) \prod_{j=1, j \neq i}^M \frac{x - z_j}{z_i - z_j} dx. \quad (1.26)$$

Ez a választás garantálja, hogy minden $f \in \mathbb{P}_{2M-1}[x]$ -re a kvadratúra formula pontos eredményt szolgáltat. Ha $f \in \mathbb{P}_{M-1}[x]$, észrevehetjük, hogy a közelítő összegben a szummát és az integrálást felcserélve

$$\int_a^b g(x) \sum_{i=1}^M f(z_i) \prod_{j=1, j \neq i}^M \frac{x - z_j}{z_i - z_j} dx \quad (1.27)$$

a szumma épp az f Lagrange-féle interpolációját adja, mely mivel f foka M -nél kisebb, így pontosan visszaadja f -et. Így itt tényleg teljesül az állítás.

Amennyiben f foka magasabb, egyértelműen felbontható $f = up_M + v$ alakban, ahol $u, v \in \mathbb{P}_{M-1}[x]$. Az ortogonalitásból következik, hogy

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)f(x) dx &= \int_a^b g(x)[u(x)p_M(x) + v(x)] dx = \\ &= \langle u, p_M \rangle + \int_a^b g(x)v(x) dx = \int_a^b g(x)v(x) dx. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Mivel osztópontoknak p_M gyökeket választottuk, így közelítő összegnek $\sum_{i=1}^M s_i v(z_i)$ -t kapunk. Így az integrálközelítés pontos, hiszen $v \in \mathbb{P}_{M-1}[x]$ -re már láttuk, hogy egyezik az integrál és a kvadratúra eredménye.

Természetesen a közelítést elsősorban nem polinomokon szeretnénk alkalmazni. Általánosabban, $f \in C^{2M}[a, b]$ esetén

$$\int_a^b g(x)f(x) dx - \sum_{i=1}^M s_i f(z_i) = \frac{f^{(2M)}(\xi)}{(2M)!} \langle p_M, p_M \rangle \quad (1.29)$$

fennáll valamely $\xi \in [a, b]$ -re. A gyakorlatban ez a hibabecslés azonban nehezen használható.

Bár eddig egy dimenzióról beszéltünk, a módszer többdimenziós integrálok közelítésére is alkalmas. Például kétdimenzióban M_1 és M_2 rendeket alkalmazva a közelítés a következő alakot veszi fel:

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} g(x)f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{M_1} \sum_{j=1}^{M_2} s_i^{M_1} s_j^{M_2} f(z_i^{M_1}, z_j^{M_2}). \quad (1.30)$$

Gauss–Hermite-kvadratúra

Amennyiben az integrálási tartományt az egész számegyenesnek választjuk, és $g(x) = e^{-x^2}$, az eljárás Gauss–Hermite-kvadratúra néven ismert. Az elnevezés onnan ered, hogy az ortogonális polinomok éppen a Hermite-polinomok lesznek, azaz

$$p_i(x) = (-1)^i e^{x^2} (e^{-x^2})^{(i)}. \quad (1.31)$$

Ekkor a súlyok megadhatók, mint

$$s_i = \frac{2^{M-1} M! \sqrt{\pi}}{M^2 [p_{M-1}(z_i)]^2}. \quad (1.32)$$

Mind a felosztópontok, mind a súlyok numerikusan számolhatóak, illetve sok programcsomagban megtalálhatóak. Az implementáció során a Numpy Python könyvtár `polynomial.hermite.hermgauss` függvényét használtuk.

1.5. Monte Carlo szimuláció

Hogy a Gauss–Hermite-kvadratúrát használó árazási módszerek implementációjának helyességéről megbizonyosodjunk, a 5. fejezetben összehasonlító teszteket végzünk Monte Carlo szimuláció segítségével. Ehhez tekintsük át röviden a Monte Carlo szimuláció módszerét [16] segítségével, illetve nézzük meg, hogyan alkalmazható az elmélet a mi feladatunkra. Adottak $S_1, \dots, S_N$ folyamatok, illetve g mérhető függvényünk. Szeretnénk $\mathbb{E}[g(S_1, \dots, S_N)]$ -t meghatározni. Esetünkben a folyamatok az alaptermékek áralakulásai, a g függvény pedig a kifizetésfüggvény diszkontáltja. A várható értéket a kockázatmentes mérték, $\mathbb{Q}$ alatt kell meghatároznunk.

Szimuláljunk egymástól függetlenül R realizációt a folyamatok alakulására. Ekkor a nagy számok erős törvénye szerint

$$\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R g(S_1^i, \dots, S_N^i) \longrightarrow \mathbb{E}[g(S_1, \dots, S_N)] \quad (1.33)$$

egy valószínűséggel, amennyiben $R \rightarrow \infty$.

Amennyiben a derivatíva útvonalfüggő, az egész $[0, T]$ intervallumra szükséges szimulálnunk az alaptermékek áralakulását. Ekkor valamilyen diszkretizációs eljárást, például az Euler–Maruyama vagy a Milstein-eljárást alkalmazhatjuk. Akkor is szükség lehet felosztani az időtengelyt és közelítést alkalmazni a növekményekre, amennyiben a g függvény csak T -beli értékektől függ, azonban nem tudjuk $S_1, \dots, S_N$ együttes eloszlását T -ben.

A mi esetünk szerencsés, hiszen a Black–Scholes-modellben a $[0, T]$ -re számolt loghozamok többdimenziós normális eloszlást követnek. Így elég R -szer ebből az N -dimenziós eloszlásból, a Cholesky-faktorizáció segítségével értékeket generálnunk. Azaz, legyen X^i egy N -dimenziós standard normális eloszlásból generált vektor, ezt használjuk az i . realizációhoz. Jelöljük Σ -val az alaptermékek logaritmusának T időponthoz tartozó kovarianciamátrixát. Végezzük el a Cholesky-faktorizációt, legyen $\Sigma = CC^T$. Ekkor ebben a realizációban a j . termék ára T -ben:

$$S_j(T) = S_j(0)e^{(r-q_j)T-1/2\sigma_j^2+\mathbf{C}_{j*}X^i}. \quad (1.34)$$

Bachelier-modell szerint megadott dinamika esetén nincs nagy eltérés, hiszen itt maguk a forward árak normális eloszlásúak.

$$S_j(T) = S_j(0)e^{(r-q_j)T} + \mathbf{C}_{j*}X^i \quad (1.35)$$

Ezt kell kiszámolnunk mindegyik alaptermékre, illetve megismételnünk R -szer mindig új, az előzőektől független standard normális vektort felhasználva. Ezután behelyettesítjük a kifizetésfüggvény diszkontáltjába az $S_j(T)$ értékeket, ezt p_i -vel jelöljük. A végső becslésünk $\mathbb{E}[g(S_1, \dots, S_N)]$ -re $\frac{1}{R} \sum_{i=1}^R p_i$.

A becslés pontossága az iterációk számának növelésével javítható. Ehhez számoljuk ki a kapott realizációk átlagát és szórását. Ennek segítségével felírható a becslésünk standard hibája:

$$m_R = \sum_{i=1}^R p_i, \quad s_R = \sqrt{\sum_{i=1}^R (p_i - m)^2}, \quad se_R = \frac{s_R}{\sqrt{R}}. \quad (1.36)$$

A standard hiba segítségével konfidenciaintervallumot is készíthetünk a becslésre. Az $1 - \alpha$ megbízhatóságú konfidencia-intervallum megadható mint:

$$[m_R - \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \cdot se_R, m_R + \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \cdot se_R]. \quad (1.37)$$

Tovább növelhetjük a konvergencia sebességét különböző szóráscsökkentő módszerek alkalmazásával. A legismertebb az antitetikus változók módszere, illetve a kontrollváltozók használata. A következőkben az antitetikus változók előnyét mutatjuk be. Ennek során a generált X^i változók mellett ezek ellentettjére, $-X^i$ -re is kiszámoljuk a g függvény értékét. Legyen az így kapott két realizáció p_i^+ és p_i^- . Használjuk ezután $\hat{p}_i = \frac{p_i^+ + p_i^-}{2}$ -t p_i helyett. Mivel

$$\sigma^2(\hat{p}) = \frac{\sigma^2(p^+) + \sigma^2(p^-) + 2\sigma(p^+)\sigma(p^-)\text{corr}(p^+, p^-)}{4}, \quad (1.38)$$

így a módszer akkor eredményez jelentős javulást, amennyiben p^+ és p^- negatívan korreláltak. Az előjel megcserélése valójában a háttérben a Brown-mozgás trajektóriájának tükrözését okozza. Így egy monoton kifizetésfüggvény esetén elmondhatjuk, hogy valószínűleg p_i^+ és p_i^- közül az egyik esetben az opció jóval értékesebb lesz, mint a másikban. Ezen kívül a standard normális változók ellentettjének bevitelével azt is elérjük, hogy a véletlen értékek szimmetriája fennálljon és a várható érték feltétlen 0 legyen. Így általában az antitetikus változókkal számolt standard hiba kisebb lesz, mint a kétszer annyi trajektóriát felhasználó becslés hibája.

2. fejezet

Árazás Gauss–Hermite-kvadratúrával a Black–Scholes-modellben

Először a Black–Scholes-piacon szeretnénk hatékonyan kiszámolni a spread és basket opciók árát. Mint ahogy a 1.3. fejezetben említettük, nincs zárt képletünk, így numerikus módszert keresünk. A fejezet [8]-t dolgozza fel, annak jelöléseit is felhasználva. A bemutatott árazás spread opciókra nagyrészt megegyezik [32] Black–Scholes modellre adott megoldásával, azonban az optimális első dimenzió megválasztása miatt, melyet az 2.3.1. fejezetben mutatunk majd be, túlmutat annak hatékonyságán.

2.1. Az integrandus

A Black–Scholes-piacon, melyet 1.2.1. fejezetben érintettünk, szeretnénk beárazni a spread, illetve basket opciókat. Induljunk ki a $\mathbb{Q}$ alatti dinamikából,

$$dS_k(t) = (r - q_k)S_k(t) dt + \sigma_k S_k(t) dW_k(t), \quad (2.1)$$

ahol $W_k(t)$ a k . terméket meghajtó Brown-mozgás, melyekről feltételezzük, hogy páronkénti korrelációjuk ρ_{kj} .

Írjuk fel az árfolyamok logaritmusának dinamikáját:

$$d \log(S_k(t)) = (r - q_k - \frac{1}{2}\sigma_k^2) dt + \sigma_k dW_k(t). \quad (2.2)$$

Ezek együttesen egy többdimenziós Gauss-folyamatot követnek, $\log(S_i(s))$ és $\log(S_j(t))$ kovarianciája $\rho_{ij}\sigma_k\sigma_j \min(s, t)$. Jelölje Σ a T -beli árfolyamok kovarian-

ciamátrixát. Mivel Σ pozitív definit mátrix, így alkalmazhatjuk rá a Cholesky-felbontást: $VV^T = \Sigma$. A felbontás nem egyértelmű, V -t bármilyen ortogonális mátrixszal megszorozva továbbra is fennáll az egyenlőség. Az árfolyamok T -beli $\mathbb{Q}$ alatti eloszlását felírhatjuk V segítségével, mint

$$S_k(T) \stackrel{d}{=} S_k(0) \exp \left((r - q_k)T - \frac{1}{2} \Sigma_{kk} + \mathbf{V}_{k*} \mathbf{Z} \right), \quad (2.3)$$

ahol $\mathbf{Z}$ egy N dimenziós standard normális változókból álló vektor és $\mathbf{V}_{k*}$ a $\mathbf{V}$ mátrix k indexszel jelölt sora.

A kifejezés elején felfedezhetjük a határidős árfolyamot, ezt F_k -val jelölve és behelyettesítve:

$$S_k(T) \stackrel{d}{=} F_k \exp \left(-\frac{1}{2} \Sigma_{kk} + \mathbf{V}_{k*} \mathbf{Z} \right). \quad (2.4)$$

A call opció kifizetése T időpontban az árfolyamok lineáris kombinációjának és a kötési árfolyam különbségének pozitívrésze, azaz

$$\left(\sum_{k=1}^N w_k S_k(T) - K \right)^+. \quad (2.5)$$

Jelölje $\varphi_N(\mathbf{z})$ az N dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényét. A kifizetésfüggvény segítségével felírhatjuk a call árát, mint

$$c = e^{-rT} \int_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N} \left(\sum_{k=1}^N w_k F_k \exp \left(-\frac{1}{2} \Sigma_{kk} + \mathbf{V}_{k*} \mathbf{z} \right) - K \right)^+ \varphi_N(\mathbf{z}) d\mathbf{z}. \quad (2.6)$$

Míg spread opciók esetén $K = 0$ kötési árfolyam mellett a fenti kifejezésnek van zárt alakja, ez a Margrabe-képlet, addig általános esetben sajnos nem fejezhető ki elemi függvényekkel az integrálás eredménye. Így numerikus megoldások után kell néznünk.

2.2. Integrálás analitikusan, majd numerikusan

2.2.1. Első dimenzió mentén

Először szeretnénk belül z_1 szerint elvégezni az integrálást, hogy egy dimenzióval kisebb problémát kapjunk. Azaz keressük C_{BS} -t, hogy

$$c = e^{-rT} \int_{\dot{\mathbf{z}}} C_{\text{BS}} d\dot{\mathbf{z}}, \quad \text{ahol} \quad \dot{\mathbf{z}} = (0, z_2, \dots, z_N)^T. \quad (2.7)$$

Ez a lépés még analitikusan elvégezhető, ehhez először vegyük észre, hogy $\Sigma_{kk} = \sum_{j=1}^N V_{kj}^2$. Válasszuk ketté az exponensben szereplő kifejezést aszerint, hogy függ-e az első dimenziótól vagy sem:

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N V_{kj}^2 + \mathbf{V}_{k*} \mathbf{z}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=2}^N V_{kj}^2 + \mathbf{V}_{k*} \dot{\mathbf{z}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} V_{k1}^2 + V_{k1} z_1\right). \quad (2.8)$$

Jelöljük ezentúl az első exponenst $f_k(\dot{\mathbf{z}})$ -vel.

$$C_{\text{BS}}(\dot{\mathbf{z}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_k w_k F_k f_k(\dot{\mathbf{z}}) \exp\left(-\frac{1}{2} V_{k1}^2 + V_{k1} z_1\right) - K \right)^+ \varphi_1(z_1) dz_1 \quad (2.9)$$

Próbáljuk meg meghatározni, hol pozitív a kifizetésfüggvény. Tegyük fel, hogy V mellett egyértelműen létezik z_1 minden $\dot{\mathbf{z}}$ -re, hogy

$$\sum_k w_k F_k f_k(\dot{\mathbf{z}}) \exp\left(-\frac{1}{2} V_{k1}^2 + V_{k1} z_1\right) = K. \quad (2.10)$$

Ehhez azt fogjuk megkövetelni, hogy a kifizetésfüggvény z_1 -ben szigorúan monoton nőjön. Legyen a nullhely $-d(\dot{\mathbf{z}})$. A zérushely meghatározásához például Newton-módszert használhatunk. A feltevés nem minden V -re igaz, azonban egy megfelelő ortogonális transzformációval elérhető, hogy fennálljon ez a tulajdonság. Ezt 2.3.1. fejezetben ismertetjük majd. Tehát

$$C_{\text{BS}}(\dot{\mathbf{z}}) = \sum_k w_k F_k f_k(\dot{\mathbf{z}}) \int_{-d(\dot{\mathbf{z}})}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} V_{k1}^2 + V_{k1} z_1\right) \varphi_1(z_1) dz_1 - K \int_{-d(\dot{\mathbf{z}})}^{\infty} \varphi_1(z_1) dz_1. \quad (2.11)$$

Az első integrandusban teljes négyzetet képezhetünk, így

$$\int_{-d(\dot{\mathbf{z}})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z_1 - V_{k1})^2\right) dz_1 = \Phi(d(\dot{\mathbf{z}}) + V_{k1}) \quad \text{és} \quad (2.12)$$

$$C_{\text{BS}}(\dot{\mathbf{z}}) = \sum_k w_k F_k f_k(\dot{\mathbf{z}}) \Phi(d(\dot{\mathbf{z}}) + V_{k1}) - K \Phi(d(\dot{\mathbf{z}})). \quad (2.13)$$

2.2.2. Többi dimenzió mentén

Sajnos a további dimenziók mentén már csak numerikusan tudunk integrált számolni. Erre a célra a Gauss–Hermite-kvadratúrát fogjuk felhasználni, melyet az 1.4. fejezetben ismertettünk. Az $N - 1$ dimenziós téren kell kiválasztanunk a rácspontokat, illetve megállapítanunk a hozzá tartozó súlyokat.

Jelölje M_j a j . dimenzióban a pontok számát, legyenek $z_1^{M_j}, \dots, z_{M_j}^{M_j}$ az osztópontok, $s_1^{M_j}, \dots, s_{M_j}^{M_j}$ pedig a pontokhoz tartozó súlyok. Mivel az első dimenzióban már elvégeztük az integrálást, ezért $M_1=1$, z_1 helyére mindig 0-t írunk be, a súly is természetesen 1. Összesen $M = \prod_{j=2}^N M_j$ rácsponton kell behelyettesítenünk. Egy pont súlyát a koordinátáihoz tartozó súlyok összeszorzásával kapjuk meg. A call ára tehát

$$c = e^{-rT} \int_{\mathbf{z}} C_{\text{BS}}(\mathbf{z}) \varphi_{N-1}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \approx e^{-rT} \sum_{m_2=1}^{M_2} \cdots \sum_{m_N=1}^{M_N} s_{m_2}^{M_2} \cdots s_{m_N}^{M_N} \cdot C_{\text{BS}}(0, z_{m_2}^{M_2}, \dots, z_{m_N}^{M_N}). \quad (2.14)$$

2.3. Numerikus megfontolások

2.3.1. Első dimenzió megválasztása

Az első dimenzió analitikus integrálása több, mint dimenziócsökkentés. Habár szükségünk van egy zérushely meghatározására, viszont el kívánjuk kerülni a K körüli töréspont numerikus integrálását. Ennek a pontnak a környezetében sűrű diszkretizációra lenne szükségünk a pontos eredmény eléréséhez. Ezután C_{BS} már sima, így a legszámításgényesebb dimenziót sikerül kihagynunk az analitikus formula segítségével.

Szeretnénk V ügyes megválasztásával a legjobban kihasználni ezt a lehetőséget. Két kritériumnak kell eleget tennie V -nek amellet, hogy a kovarianciamátrix négyzetgyöke.

1. A (2.10) egyenletben minden K -ra és $\mathbf{z}$ -re egyértelmű megoldásnak kell léteznie.

Ehhez elegendő megkövetelnünk, hogy $w_k V_{k1} > 0$ fennálljon minden k -ra. Az egyértelműséghez szükséges, hogy (2.10) bal oldala monoton legyen minden z_i -ben. Amennyiben $V_{k1} < 0$, az exponens csökkenő, a hozzá tartozó súlynak

negatívnak kell lennie, hogy monoton növekvő tagot kapjunk. Fordított esetben, ha az elem pozitív, akkor az exponenciális rész monoton nő, ha megköveteljük $w_k > 0$ -t, akkor az egész tag is növekedni fog. Így ha van pozitív w_k , akkor $(0, \infty)$ az értékkészlet része lesz, ha pedig van negatív w_k is, $(-\infty, \infty)$ -t is mind felveszi a függvény. Spread opcióknál tehát negatív K -ra is van megoldás.

2. Minimalizálni szeretnénk $|\partial d(\dot{\mathbf{z}})/\partial z_j|$ -t, $j \geq 2$ -re. Emögött az az intuíció, hogy ha $d(\dot{\mathbf{z}})$ lassan változik $\dot{\mathbf{z}}$ -ben, akkor numerikusan pontosabban integrálható.

Legyen $\mathbf{C}$ a Cholesky-faktorizációval kapott mátrix, keressünk egy $\mathbf{Q}$ valós mátrixot úgy, hogy $\mathbf{V} = \mathbf{C}\mathbf{Q}$ megfeleljen a feltételnek.

Használjunk lineáris közelítést: $\exp(-\frac{1}{2}V_{kj}^2 + V_{kj}z_j) \approx 1 + V_{kj}z_j$, amennyiben $\|\mathbf{V}\|_F \ll 1$. Ezt visszahelyettesítve (2.10) egyenletbe, majd elhagyva a másodrendű tagokat,

$$\sum_k w_k F_k + \sum_k w_k F_k (\mathbf{V}_{k*} \dot{\mathbf{z}} + V_{k1} z_1) = K. \quad (2.15)$$

Fejezzük ki ebből z_1 -et, majd deriváljuk le a kifejezést z_j szerint.

$$\frac{\partial d(\dot{\mathbf{z}})}{\partial z_j} \approx \frac{\mathbf{g}^T \mathbf{V}_{*j}}{\mathbf{g}^T \mathbf{V}_{*1}} = \frac{\mathbf{g}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}_{*j}}{\mathbf{g}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}_{*1}}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{g} = \frac{(w_1 F_1, \dots, w_N F_N)^T}{\|(w_1 F_1, \dots, w_N F_N)^T\|} \quad (2.16)$$

Válasszuk $\mathbf{Q}_{*1}$ -et úgy, hogy $\mathbf{C}^T \mathbf{g}$ -vel egyirányú legyen. Ekkor maximalizáljuk a nevezőt és egyben $\mathbf{Q}_{*1}$ többi oszlopra való merőlegessége miatt $j \geq 2$ -re $\mathbf{g}^T \mathbf{C} \mathbf{Q}_{*j} = 0$ is fennáll. Azaz

$$\mathbf{Q}_{*1} = \frac{\mathbf{C}^T \mathbf{g}}{\sqrt{\mathbf{g}^T \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{g}}} \quad \text{és így} \quad \mathbf{V}_{*1} = \mathbf{C} \mathbf{Q}_{*1} = \frac{\mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{g}}{\sqrt{\mathbf{g}^T \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{g}}}. \quad (2.17)$$

Sajnos ez a választás nem feltétlen elégíti ki az 1. pontnál megfogalmazott kritériumot. Emiatt V_{k1} -et módosítani kell, ha $w_k V_{k1} > 0$ nem teljesül.

$$V_{k1}^{(\text{mod})} = \begin{cases} V_{k1} & \text{ha } w_k V_{k1} > 0 \\ \varepsilon \text{sign}(w_k) \sqrt{\Sigma_{kk}} & \text{ha } w_k V_{k1} \leq 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

ahol $\varepsilon > 0$ kicsi. Így elérjük, hogy a feltételünk teljesüljön, V_{k1} pozitív lesz, emellett kellően kicsi. Ezután normáljuk $\mathbf{V}_{*1}^{(\text{mod})}$ -et egység hosszúra, hogy az ortonormáltság később teljesülhessen és számoljuk ki $\mathbf{Q}_{*1} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{V}_{*1}^{(\text{mod})}$ -t újra.

Ezáltal sikeresen meghatároztuk $\mathbf{Q}_{*1}$ -t, most egy olyan ortogonális mátrixot kell alkotnunk, melynek ez az első oszlopa. Válasszuk a megfelelő Householder-mátrixot, $\mathbf{R}$ -t, mely az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots)^T \in \mathbb{R}^N$ vektort a $\mathbf{Q}$ első oszlopába tükrözi. Ehhez normálvektorként $\mathbf{v} = (\mathbf{Q}_{*1} - \mathbf{e}_1)/|\mathbf{Q}_{*1} - \mathbf{e}_1|$ -t kell használnunk. Így

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^T, \quad \text{mellyel} \quad \mathbf{R}_{*1} = \mathbf{Q}_{*1} \quad \text{és} \quad \mathbf{C}\mathbf{R}_{*1} = \mathbf{V}_{*1}. \quad (2.19)$$

$\mathbf{V}$ további oszlopait $|\mathbf{V}_{*j}|$ szerint szeretnénk sorba rendezni. Ez a numerikus integrálás szempontjából lényegtelen, hiszen a többi dimenzió már ugyanazt az eljárást alkalmazzuk, azonban a 2.3.3. fejezetben bemutatott dimenziócsökkentésnél szükségünk lesz rá. Ehhez $\mathbf{C}\mathbf{R}$ további oszlopainak szinguláris érték szerinti felbontását fogjuk felhasználni. Legyen $\mathbf{C}(\mathbf{R}_{*2} \dots \mathbf{R}_{*N}) = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$, ahol $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times (N-1)}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ diagonális átlójában csökkenő sajátértékekkel, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ és $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{L}^T\mathbf{L} = \mathbf{I}$. Válasszuk

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{pmatrix} \quad \text{-t,} \quad (2.20)$$

ekkor $\mathbf{Q}$ valóban ortogonális. Innen adódik $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_{*1} \quad \mathbf{U}\mathbf{D})$, melynek első oszlopa teljesíti a két megfogalmazott feltételt, és a további oszlopok norma szerint vannak rendezve $\mathbf{D}$ főátlója miatt.

$\mathbf{V}$ megállapítása során sehol nem használtuk fel K -t, így ha az opciót több kötési árfolyamra is be szeretnénk árazni, csak egyszer szükséges elvégeznünk a fejezetben leírtakat.

2.3.2. M_j -k megválasztása

Az egyes dimenziókban a rácspontok számának meghatározása (M_j , $j = 2, \dots, N$) kulcsfontosságú lépés a becslés során. A pontosság növelése érdekében a minél nagyobb M_j értékekben vagyunk érdekeltek, azonban a számítási kapacitás korlátait is figyelembe kell venni.

Tipikus választás, amikor minden dimenzióban ugyanakkora felosztást veszünk. Azonban okosabban járunk el, ha kihasználjuk, hogy az egyes dimenziók mentén C_{BS} nem ugyanolyan gyorsan változik, és több pontot helyezhetünk a kritikusabb területekre. Az előző alfejezetben már becslést adtunk $|\partial d(\mathbf{z})/\partial z_j|$ -ra. A Cauchy–

Schwarz-egyenlőtlenséget a számlálóra használva felülről tudjuk becsülni:

$$\left| \frac{\partial d(\dot{\mathbf{z}})}{\partial z_j} \right| \approx \left| \frac{\mathbf{g}^T \mathbf{V}_{*j}}{\mathbf{g}^T \mathbf{V}_{*1}} \right| \leq \frac{|\mathbf{V}_{*j}|}{|\mathbf{g}^T \mathbf{V}_{*1}|}. \quad (2.21)$$

Vegyük tehát ilyen arányban az egyes dimenziók felosztópontjainak számát. Jelölje $[x]$ az egészre való kerekítést, és legyen λ a felhasznált pontok számára vonatkozó paraméterünk. Ezt a kívánt pontosság szerint választjuk meg. Ekkor definiáljuk M_j -t úgy, mint

$$M_j = \left\lceil \frac{|\mathbf{V}_{*j}|}{|\mathbf{g}^T \mathbf{V}_{*1}|} \lambda + 1 \right\rceil \quad \text{minden } j \geq 2 \text{ -re.} \quad (2.22)$$

2.3.3. Dimenziócsökkentés

Az árazási módszer legfőbb gyengesége, hogy az alaptermékek számának növelésével exponenciálisan nő a szükséges pontok száma, hiszen egyre több dimenzió mentén kell integrálnunk. A főkomponens-analízis ebben nyújthat segítséget. A 2.3.1. fejezetben bemutatott eljárás eredményeképp V mátrix oszlopai a második oszloptól kezdve csökkenő súlyok szerint vannak rendezve. N' dimenziót szeretnénk meghagyni, ahol a varianciahányad értéke miatt úgy gondoljuk, hogy $N' < j \leq N$ -re $|\mathbf{V}_{*j}|$ kicsi. Emiatt ezeknek a dimenzióknak a hatása $d(\dot{\mathbf{z}})$ -re nézve elhanyagolható.

Legyen $\ddot{\mathbf{z}} = (0, z_2, \dots, z_{N'}, 0, \dots, 0)^T$, ahol már nemcsak az első, hanem az utolsó $N - N'$ dimenziót is kinullázzuk. Feltételezésünk szerint tehát $d(\dot{\mathbf{z}}) \approx d(\ddot{\mathbf{z}})$. Emiatt $C_{\text{BS}}(\dot{\mathbf{z}})$ már csak $f_k(\dot{\mathbf{z}})$ -n keresztül függ az elhagyni kívánt dimenzióktól. Legyen

$$f_k(\ddot{\mathbf{z}}) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N'} V_{kj}^2 + \mathbf{V}_{k*} \ddot{\mathbf{z}} \right). \quad (2.23)$$

Ennek segítségével a közelítő ár megadható, először $C_{\text{BS}}(\ddot{\mathbf{z}})$ -t definiálva, majd csak az első N' dimenzió mentén numerikusan integrálva. Legyen

$$C_{\text{BS}}(\ddot{\mathbf{z}}) = \sum_{k=1}^N w_k F_k f_k(\ddot{\mathbf{z}}) \Phi(d(\ddot{\mathbf{z}}) + V_{k1}) - K \Phi(d(\ddot{\mathbf{z}})), \quad \text{ekkor} \quad (2.24)$$

$$c \approx e^{-rT} \sum_{m_2=1}^{M_2} \cdots \sum_{m_{N'}=1}^{M_{N'}} s_{m_2}^{M_2} \cdots s_{m_{N'}}^{M_{N'}} \cdot C_{\text{BS}}(0, z_{m_2}^{M_2}, \dots, z_{m_{N'}}^{M_{N'}}, 0, \dots, 0). \quad (2.25)$$

Így összesen $M' = \prod_{j=2}^{N'} M_j$ ponton kell behelyettesítenünk.

3. fejezet

Árazás a Bachelier-modellben

Az 1.2.2. fejezetben már röviden bemutattunk a Bachelier-modell mögött álló feltételezéseket és motivációt. Előfordulnak olyan spread opciók, amelyeknél az alaptermék ára negatív is lehet, illetve léteznek olyan konstrukciók is, ahol maga az alaptermék egy árkülönbség (például olajpiaci spread opciók, melyeket az alaptermékek árának különbsége alapján jegyeznek). Ilyen esetekben a geometriai Brown-mozgás nem töltheti be az árfolyamat szerepét, viszont egy megfelelően skálázott Brown-mozgás már alkalmas lehet erre. A következőkben levezetjük az árazásra vonatkozó parciális differenciálegyenletet, illetve a call opció árát megadó zárt formulát. Megnézzük, hogyan számíthatjuk át a Black–Scholes-modell volatilitását a képlet alkalmazásához. Végezetül megadjuk a spread és basket opciók árára vonatkozó formulát. A fejezethez felhasznált szakirodalom [9], [30] és [18].

3.1. Zárt képlet egy opció árára

Vegyünk először egy olyan piacot, ahol egy kockázatos alaptermék van csak jelen. A Bachelier-modellben a határidős árfolyamokra normális eloszlását feltételezzük, azaz, hogy F aritmetikai Brown-mozgást követ,

$$dF(t) = (\mu - r) dt + \sigma dW(t), \quad (3.1)$$

ahol μ és σ paraméterek ugyanúgy a driftért és a volatilitásért felelnek, azonban értékeik nem feltétlen egyeznek a Black–Scholes-modellbeli értékekkel.

Az 1.2.2. fejezetben már meghatároztuk a kockázatmentes mértéket. Nézzük a

dinamikát a $\mathbb{Q}$ alatt, ezt (1.23) egyenletben már ismertettük:

$$dF(t) = \sigma dW(t). \quad (3.2)$$

Azaz a forward ára a t pillanatban éppen $N(F(t), \sigma^2(T-t))$ normális eloszlású. Így $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}((F(T) - K)^+ | F(t))$ -t felírva a következő integrált kell kiszámolnunk:

$$c(t, F(t)) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(t) + \sigma\sqrt{T-t}y - K \right)^+ e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (3.3)$$

Tovább számolva és a $d = \frac{F(t)-K}{\sigma\sqrt{T-t}}$ jelölést használva

$$\begin{aligned} c(t, F(t)) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(K-F(t))/\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} \left(F(t) + \sigma\sqrt{T-t}y - K \right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(K-F(t))/\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} (F(t) - K) e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \\ &+ \frac{e^{-r(T-t)}\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{(K-F(t))/\sigma\sqrt{T-t}}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= e^{-r(T-t)} \left[(F(t) - K)\Phi(d) + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Hasonlóan adódik a put opció ára is, ami a következő:

$$p(t, F(t)) = e^{-r(T-t)} \left[(K - F(t))\Phi(-d) + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right]. \quad (3.5)$$

3.2. Alkalmazás spread és basket opciókra

Vegyük most egy spread vagy basket opciót a Bachelier-modellben. Adottak

$$dF_k(t) = (\mu_k - q_k - r) dt + \sigma_k dW_k(t) \quad (3.6)$$

határidősárfolyam-dinamikák, az eszközök kezdőértékei $S_k(0)$. $W_k(t)$ a k . terméket meghajtó Brown-mozgás, páronkénti korrelációjuk ρ_{kj} . A kifizetésfüggvényünk

$$\left(P(T) - K \right)^+, \quad \text{ahol} \quad P(T) = \sum_{k=1}^N w_k S_k(T). \quad (3.7)$$

Spread opcióknál két termékünk van, $w_1 = 1$ és $w_2 = -1$. Basket opcióknál általában feltesszük, hogy a súlyok pozitívak, de ez matematikai szempontból nem

szükséges.

A Black–Scholes-modellnél problémánk adódott abból, hogy lognormális változók lineáris kombinációja nem lognormális, így nem tudtuk alkalmazni a klasszikus call opciók árát megadó Black–Scholes-képletet. A Bachelier-modell alatt viszont az alaptermékek tetszőleges időpontbeli ára normális eloszlású, szintúgy, mint ezek lineáris kombinációja. Így tudjuk a spread és basket opciók árazásához az előbb kiszámolt zárt képletet használni, ezt [9] részletezi.

Állapítsuk meg a paramétereket:

$$\mu_P = \sum_{k=1}^N w_k \mu_k, \quad q_P = \sum_{k=1}^N w_k q_k, \quad \sigma_P = \sqrt{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N w_k w_j \rho_{kj} \sigma_k \sigma_j}. \quad (3.8)$$

Amennyiben t időpillanatban vagyunk, a $P(t)$ kezdeti érték $\sum_{k=1}^N w_k S_k(t)$, a P -re vett határidős árfolyam $P(t)e^{(r-q_P)(T-t)}$.

A (3.4) képletbe beírva a spread/basket call ára

$$e^{-r(T-t)} \left[(P(t)e^{(r-q_P)T} - K) \Phi(d) + \frac{\sigma_P \sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2} \right], \quad (3.9)$$

$$\text{ahol } d = \frac{P(t)e^{(r-q_P)(T-t)} - K}{\sigma_P \sqrt{T-t}}. \quad (3.10)$$

3.3. Volatilitások megfeleltetése

Fontos, hogy a Bachelier-modell szórása nem ugyanazzal a jelentéssel bír, mint a Black–Scholes-modellben. Itt $F(t)$ változásának szórását nem relatív, hanem abszolút értelemben adjuk meg, így nem használhatjuk ugyanazt az értéket. Ha az a célunk, hogy pontosan egyezzen a két modell által adott ár, kiszámolhatjuk az implikált volatilitást. Most nem erre koncentrálnunk, közelítő képletet szeretnénk megadni a szórásra úgy, hogy ehhez ne legyen szükség a Black–Scholes-modellbeli ár kiszámolására.

Amennyiben adott σ_i^{BS} Black–Scholes-modellbeli volatilitás, akkor a leggyakrabban választás a Bachelier-modellben $\sigma_i^{BS} F_i(0)$ használata. Ezzel rövid lejáratokra ATM opciók esetén egész közeli eredményeket kapunk. Schachermayer és Teichmann [30]-ben vizsgálta az eltérés mértékét, arra jutottak, hogy $\mathcal{O}((\sigma_i^{BS} \sqrt{T})^3)$ a nagyságrendje.

Mi egy másik módszert valósítunk meg. Azt szeretnénk elérni, hogy a két modell esetén az opció árában szereplő véletlen tag azonos szórással rendelkezzen. Ehhez spread opció esetén a két eszköz különbségét, basket esetén a súlyozott kosár értékét tekintjük, majd analitikusan, a Black–Scholes-modellben megadott volatilitások segítségével kiszámoljuk a T -beli szórást. Ugyanezt megismételjük a Bachelier-modellben megadott dinamikák segítségével is, a volatilitásokra paraméterként tekintve. Ezután egyenlővé tesszük a két oldalt, majd megoldjuk az egyenletet σ_i^{BAC} -okra. Mivel több ismeretlenünk van, ezért azzal a megszorítással élünk, hogy minden értéket $\nu\sigma_i^{BS}F_i(0)$ alakban keressük, így igazából ν -t szeretnénk meghatározni. Ez numerikusan megtehető.

4. fejezet

Vegyes modell

Gauss–Hermite-kvadratúrával

A következőkben szeretnénk megvizsgálni azt az esetet, ahol az alaptermékekről bizonyos okokból eltérő dinamikát feltételezünk. Ez a fejezet teljes egészében önálló munka eredménye. Például érdemes lehet ezt a típusú modellt megfontolni, ha a spread opció egy energiahordozó és a belőle előállítható energia árára vonatkozik. Ekkor a spread opció felfogható úgy, mint egy hedge az erőmű működtetésére. Az energiahordozó (például uránium, szén) ára feltételezhetően nem lesz negatív, így szívesen maradnánk a geometriai Brown-mozgás feltételezésénél. Azonban az áram kereslete változékony, tárolása nehézkes, a termelés pedig sok esetben nem kapcsolható le egy pillanat alatt. Így ennél az alapterméknel érdemes lehet normális eloszlást feltenni.

Szeretnénk tehát beárazni egy olyan spread opciót, ahol az egyik termék árfolyama geometriai Brown-mozgást követ, a másik termék pedig a Bachelier-modellben megkövetelt dinamikának tesz eleget. Vegyük észre, hogy elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, ahol az első változó lognormális, hiszen amennyiben ez nem állna fenn, (1.4) és (1.6) segítségével a megfelelő alakra hozható a feladat.

A lognormális eszköz dinamikája

$$dF_1(t) = (\mu_1 - r)F_1(t) dt + \sigma_1 F_1(t) dW_1(t). \quad (4.1)$$

Ahhoz, hogy a diszkontált részvényárfolyam martingál legyen, a forward árak is martingálnak kell lennie, így keressük $\widetilde{W}_1(t)$ -t, hogy

$$dF_1(t) = \sigma_1 F_1(t) d\widetilde{W}_1(t). \quad (4.2)$$

Ez ugyanaz a feladat, mint amit a Black–Scholes-modellnél néztünk, $d\widetilde{W}_1(t) = dW_1(t) + \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} dt = dW_1(t) + \lambda_1 dt$ jó választás.

Vegyünk $W_2(t)$ független Brown-mozgást és legyen a két eszközt meghajtó folyamatok korrelációja $\rho \in (-1, 1)$. Ekkor a második eszköz dinamikája megadható, mint

$$dF_2(t) = (\mu_2 - r) dt + \rho\sigma_2 dW_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2 dW_2(t). \quad (4.3)$$

Válasszuk meg $\widetilde{W}_2(t)$ -t a következő módon:

$$d\widetilde{W}_2(t) = dW_2(t) + \left(\frac{\mu_2 - r}{\sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2} - \frac{\rho(\mu_1 - r)}{\sqrt{1 - \rho^2}\sigma_1} \right) dt = dW_2(t) + \lambda_2 dt. \quad (4.4)$$

Átírva (4.3) egyenletet $\widetilde{W}_1(t)$ -re és $\widetilde{W}_2(t)$ -re

$$dF_2(t) = \rho\sigma_2 d\widetilde{W}_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2 d\widetilde{W}_2(t) \quad \text{adódik.} \quad (4.5)$$

Ez pont az, amit szerettünk volna elérni, hiszen amennyiben találunk olyan mérték-váltást, amely után $\widetilde{W}_1(t)$ és $\widetilde{W}_2(t)$ független Wiener-folyamatok, akkor ez alatt a mérték alatt mindkét forward árfolyam martingál lesz. Alkalmazzuk a többdimenziós Girszanov-tételt. Eszerint

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \lambda_1 dW_1(s) - \int_0^T \lambda_2 dW_2(s) - \frac{T}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right) \quad (4.6)$$

Radon–Nikodym-derivált által meghatározott $\mathbb{Q}$ mérték alatt $\widetilde{W}_1(t)$ és $\widetilde{W}_2(t)$ független Wiener-folyamatok lesznek, így ez lesz a megfelelő kockázatmentes mértékünk.

Vizsgáljuk most a T -beli eloszlásokat $\mathbb{Q}$ alatt. Ehhez vegyük Z , illetve $Y \sim N(0, 1)$ eloszlású független változókat. Ekkor

$$\begin{pmatrix} F_1(T) \\ F_2(T) \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} F_1(0) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \sigma_1 \sqrt{T} Z} \\ F_2(0) + \rho\sigma_2 \sqrt{T} Z + \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2 \sqrt{T} Y \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

A 2. fejezetben végzett számoláshoz hasonlóan írjuk fel a kifizetésfüggvény kockázatmentes mérték alatti várható értékének diszkontáltját.

$$c = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_1(0) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \sigma_1 \sqrt{T} z} - F_2(0) - \rho\sigma_2 \sqrt{T} z - \right. \quad (4.8)$$

$$\left. - \sqrt{1 - \rho^2}\sigma_2 \sqrt{T} y - K \right)^+ \cdot \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z^2 + y^2)} dy dz. \quad (4.9)$$

Jelöljük a zárójelen belül az y -tól nem függő tagokat $f(z)$ -vel. Legyen tehát

$$f(z) = F_1(0) \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 T + \sigma_1 \sqrt{T}z} - F_2(0) - \rho\sigma_2\sqrt{T}z - K. \quad (4.10)$$

Keressük meg azt a tartományt, ahol a kifizetés nemnegatív. Mivel a payoff y -nak lineáris függvénye, rögzített z mellett keressük tehát y azon értékét, ahol a kifizetés éppen 0. Legyen ez a határ $d(z)$.

$$d(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{1 - \rho^2\sigma_2\sqrt{T}}} \quad (4.11)$$

Így már az integrálási határok módosításával megszüntethetjük a pozitív-rész-vételt:

$$c = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{d(z)} \left(f(z) - \sqrt{1 - \rho^2\sigma_2\sqrt{T}}y \right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z^2+y^2)} dy dz. \quad (4.12)$$

Végezzük el az y változó szerinti integrálást. Az eredmény

$$c = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(z)\Phi(d(z)) + \sqrt{1 - \rho^2\sigma_2\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d(z)^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz. \quad (4.13)$$

Ez az alak már alkalmas arra, hogy a megmaradó dimenzióban Gauss–Hermite-kvadratúra segítségével elvégezzük az integrálást. Jelölje M a pontok számát, legyenek $z_1, \dots, z_M$ a felosztópontok, $s_1, \dots, s_M$ pedig a pontokhoz tartozó súlyok. A call opció ára közelíthető a következő alakban:

$$c \approx e^{-rT} \sum_{m=1}^M s_m \cdot \left(f(z_m)\Phi(d(z_m)) + \sqrt{1 - \rho^2\sigma_2\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d(z_m)^2} \right). \quad (4.14)$$

A volatilitások konverziójával ennél a modellnél is foglalkoznunk kell. A 3.3. fejezetben ismertetett megoldások továbbra is alkalmazhatóak.

5. fejezet

Numerikus eredmények

Ebben a fejezetben a korábban bemutatott árazási módszerek pontosságát fogjuk megvizsgálni. Az implementáció Python programnyelven történt. A tesztek során $T = 1$, $r = 5\%$, $q_i = 0$ értékeket használunk, amennyiben ezt másképp nem jelezzük.

Először a Black–Scholes-modell alatti Gauss–Hermite-kvadratúrát alkalmazó árazással foglalkozunk. Megvizsgáljuk, milyen mértékben javítják a pontosságot a 2.3. fejezetben bemutatott kiegészítések. Megnézzük az első dimenzió ügyes megválasztásának hatását egy szemléletes példán, majd egy konvergenciatesztben. Ezután azt teszteljük, hogy az egyes dimenziók mentén, ha 2.3.2. fejezet szerint választjuk meg az M_j értékeket, milyen javulást érhetünk el az egyenletes verzióhoz képest. Ezt követően a dimenziócsökkentés hibáit próbáljuk megbecsülni.

Ezután összehasonlító teszteket végzünk. Monte Carlo szimulációval is implementáltuk az árazást, ehhez szeretnénk hasonlítani a Gauss–Hermite-kvadratúrát felhasználó számolás eredményét. Az összehasonlítás előtt egy külön tesztben vizsgáljuk a módszer konvergenciáját, illetve az antitetikus változók használatának előnyét. A Monte Carlo szimuláción kívül a Margrabe-képlet eredményeit is összevetjük ezzel az árazási módszerrel.

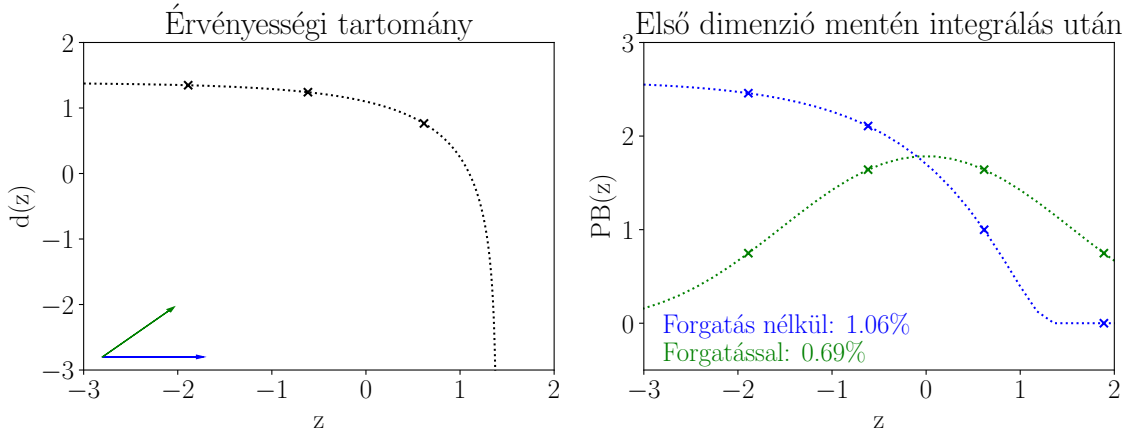
Áttérve a vegyes modellben megvalósított kvadratúras árazásra, ugyanúgy megvizsgáljuk a konvergencia gyorsaságát, illetve összemérjük a Monte Carlo szimuláció eredményeivel. Végezetül a Black–Scholes-, Bachelier- és vegyes modellekben kapott árak viszonyát vizsgáljuk.

5.1. Kvadratúraárazás a Black–Scholes-modellben

5.1.1. Első dimenzió megválasztásának hatása

Elméleti példa

2.3.1. fejezetben megnéztük, miként érdemes megválasztani az első dimenziót, azaz elforgatni a koordinátarendszert, hogy a leginkább számításigényes integrálást analitikusan végezhesük. Nézzük meg egy szemléletes példán, melyet [8] cikk inspirált. Egy kételemű basket put opciót árazunk be $r = 0\%$ mellett, a paraméterek úgy vannak megválasztva, hogy a kifizetésfüggvény $(4 - e^y - e^z)^+$, ahol y és z standard normális eloszlásúak. A numerikus integrálás lépéseit a $[-3, 2]$ intervallumon vizsgáljuk.



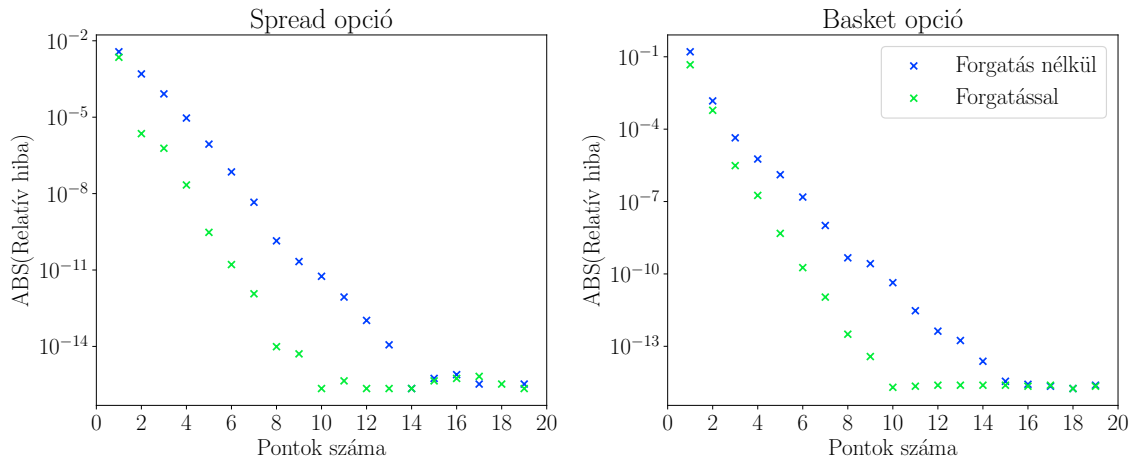
1. ábra. Első dimenzió megválasztásának hatása

1. ábra bal oldala mutatja az érvényességi tartományt. A $z \mapsto d(z)$ görbe alatti területen áll fenn $4 - e^y - e^z \geq 0$, hiszen pont így definiáltuk $d(z)$ -t (2.10)-ben. Ezt a területet szeretnénk meghatározni. A sarokban jelöltük az eredeti (kék), illetve az optimálisan elforgatott (zöld) koordinátarendszer első egységvektorát. Mivel a kifizetésfüggvény szimmetrikus a két eszközben, így ez a koordinátarendszer az eredeti 45° -os elforgatottja lesz. Az első dimenzió szerinti integrálás eredménye egy függvény, $PB(z)$. Ezt mutatja be a jobb oldali ábra a két különböző koordinátarendszer esetén. Ez az elvégzett integrálás analitikusan történt, viszont $PB(z)$ -t már a Gauss–Hermite-kvadratúra segítségével közelítjük. Ennek kijelölt pontjait zöld és kék X-ekkel jelöltük $n = 6$ rend esetén. A vizsgált intervallumba 4 pont esik, ezen függvényértékek súlyozott összegeként becsüljük a területet. Az eredmények relatív eltérése a pontos értéktől forgatás nélkül 1,06%, forgatással 0,69%. A második ver-

zió előnyének oka az ábrán is látszik. Az eljárás során úgy választjuk meg az első dimenziót, hogy az integrálás után kapott eredmény a lehető legsimább legyen, ezáltal könnyebben közelíthető legyen egy polinommal. Ezzel szemben az eredeti, kék görbe log 4-ben törlik, így a numerikus integrálás nagyobb hibát eredményez.

Hatása a konvergenciára

A következőkben egy-egy spread, illetve basket opción nézzük meg a Gauss-Hermite-kvadratúra integrálközelítés konvergenciáját. A spread opciónál $S_1(0) = 120$, $S_2(0) = 100$, $K = 20$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$, $\rho = 0,5$ értékeket választottuk. A háromelemű, egyenlő ($w_i = 1/3$) súlyozású basket opció árazási paraméterei: $S_1(0) = 120$, $S_2(0) = 80$, $S_3(0) = 100$, $K = 100$, $\sigma_i = 20\%$, illetve az egyes alaptermékek korrelációja pároként 0,5. A közelítés rendjét 1 és 20 között vizsgáljuk, a basket opciónál az $M_2 = M_3$ megszorítást tesszük. A dimenzióként eltérő felosztáspontok hatását a következő tesztben próbáljuk megállapítani. Két esetet vizsgálunk, amikor alkalmazzuk 2.3.1. fejezetben leírtakat, illetve amikor az eredeti dimenzió szerint integrálunk. A 2. ábra y tengelyén logaritmikus skálán jelenítjük meg a teljesen konvergált ($n = 300$) eredménytől számolt relatív hiba abszolút értékét, azaz a kisebb rend segítségével és $n = 300$ -zal vett ár abszolút különbségét vesszük, majd elosztjuk a teljesen konvergált eredménnyel.



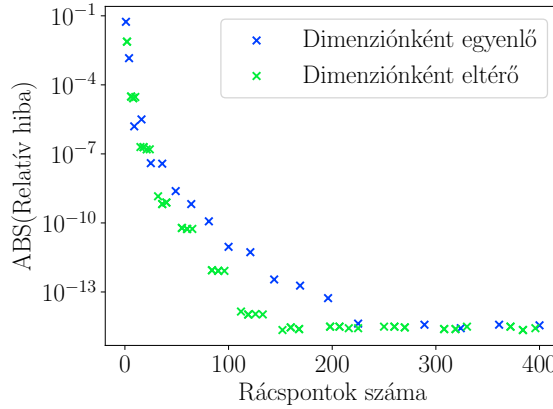
2. ábra. Kvadratúras numerikus integrálás konvergenciája

A két példában azt tapasztaljuk, hogy a forgatás nélküli esetben 16, a fejlettebb módszernél pedig 10 felosztópont után már nem javul jelentősen a közelítés. Ennél kevesebb osztópont választása esetén is sokkal jobban teljesít a forgatásos módszer.

A konvergencia rettentően gyors, a hiba exponenciálisan javul a pontok számának növelésével, 20 rendnél elérjük a 10^{-15} mértékű pontosságot.

5.1.2. M_j -k megválasztásának hatása

2.3.2. fejezetben megvizsgáltuk, hogyan érdemes megválasztani a rácspontok számát az egyes dimenziókban. Most megnézzük, mennyivel lesz gyorsabb a konvergencia, ha eszerint járunk el, és nem ugyanannyi felosztópontot használunk a második és harmadik dimenzió mentén egy háromelemű basket opciónál. Ugyanazt a példát használjuk, mint az előző tesztnél, csak a szórásokat módosítjuk, legyen $\sigma_1 = 50\%$, $\sigma_2 = 30\%$, $\sigma_3 = 10\%$. Az első dimenziót optimálisan választjuk meg. A 3. ábrán az x tengelyen most $M_2 \cdot M_3$ -t jelenítjük meg.



3. ábra. Rácspontrendek megválasztásának hatása a konvergenciára

Az optimálisan megválasztott ráccsal gyorsabb konvergenciát értünk el, a példánkban $\lambda = 33$ után már nem változott jelentősen az ár, ugyanúgy 10^{-15} nagyságrend közelében maradt a hiba a teljesen konvergált eredményhez képest. Ez 152 rácspontnak felelt meg. Ezzel szemben az egyenlő felosztást használó módszer $n = 20$ -ra 400 rácspontot használva is "csak" 10^{-11} közelséget volt képes elérni.

5.1.3. Árazás dimenziócsökkentéssel

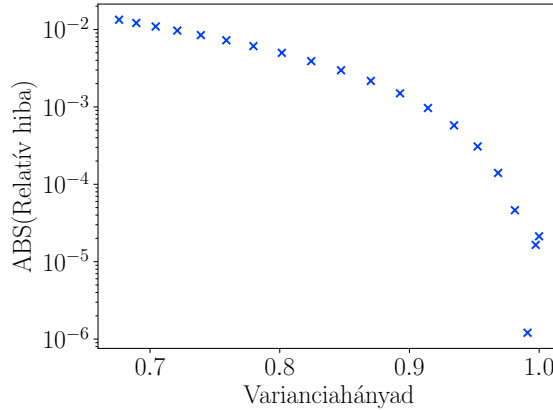
Varianciahányad szerepe

A következőkben a 2.3.3. fejezetben leírt főkomponens-analízist használó dimenziócsökkentést teszteljük. A főkomponens-analízisben fontos mutató a kumulált varianciahányad, mely azt fejezi ki, hogy az első néhány kiválasztott főkomponens a teljes adathalmaz varianciájának mekkora részét magyarázza. Kiszámításához a meg-

tartandó főkomponensekhez tartozó sajátértékek összegét kell osztanunk az összes sajátérték összegével.

A következő példában egy háromelemű, egyenlő súlyozású basketet nézünk, ahol $S_i(0) = 100$, $K = 100$, az egyes alaptermékek korrelálatlanok. Továbbá $\sigma_1 = 50\%$, $\sigma_2 = 50\%$, a harmadik eszköz szórását pedig 0,5% és 50% között változtatjuk. Ahogy a szórás 0-ba tart, úgy a kovarianciamátrix sajátértékei $[1, 1, 0]$ -hoz tartanak. Így ha egy dimenziót hagyunk el, a kumulált varianciahányad 1-hez tart. A másik szélsőérték, ha mindhárom szórás megegyezik, ekkor a sajátértékek is egyenlőek, és a megmaradó varianciahányad $2/3$.

A különböző volatilitásokra $\lambda = 4$ mellett meghatároztuk az árat egy főkomponens elhagyásával, illetve a teljes modellel is. A relatív hibák abszolútértékét a kumulált varianciahányad függvényében 4. ábra mutatja.



4. ábra. Kumulált varianciahányad és relatív hiba kapcsolata

A várakozásunknak megfelelően a kumulált varianciahányadban csökkenő a hibafüggvény, azonban még a $2/3$ -os esetben is csak alig 1%-os eltérés keletkezett a harmadik főkomponens elhagyásával.

További példák dimenziócsökkentésre

Dimenziócsökkentést sokelemű basketeknél érdemes alkalmazni, így most egy nyolc eszközből álló, egyenlő súlyozású kosárt választunk tesztetnek. Az opció at-the-money, az eszközök közti korreláció mindenhol 0,5, a szórások értéke 20%. A nagy számításigény miatt $\lambda = 3$ -ra vizsgáljuk az eredményeket, melyeket 1. táblázat tartalmaz.

Mivel a termékek egyezők, így egy kivételével a kovarianciamátrix mindegyik sajátértéke megegyezett. Emiatt egy újabb főkomponenst bevéve mindig ugyanannyi-

Főkomponensek száma	Kumulált varianciarány	Relatív hiba
1	0,5625	0,0061%
2	0,6250	0,0053%
3	0,6875	0,0041%
4	0,7500	0,0036%
5	0,8125	0,0028%
6	0,8750	0,0023%
7	0,9375	0,0009%

1. táblázat. Relatív hibák különböző főkomponensekre - nyolcelemű basket

val nő a varianciarányok összege. A relatív hibák 0,01% alatt maradnak, még az egykomponensű modellnél is.

A 2.3.3. fejezetben leírtuk, hogy mindig a legkisebb súlyú komponenseket hagyjuk el, kihasználjuk, hogy a 2.3.1. részben alkalmazott szinguláris érték szerinti felbontás rendezzi is sajátérték szerint az oszlopokat. Azonban amennyiben korrekcióra van szükség, mert $w_k V_{k1} > 0$ nem áll fenn, nem biztos, hogy az első dimenzió lesz a legnagyobb sajátértéke. Ekkor a varianciarányok összege kisebb lehet, mint amire számítanánk, illetve a hibák is megnőhetnek. Erre nézünk egy példát.

Egy háromelemű, egyenlő súlyozású és szórású, at-the-money basketet veszünk. Legyen $\rho_{12} = \rho_{13} = -0,5$ és $\rho_{23} = -0,3$. Nem teljesül a feltétel, így korrekciót kell alkalmazni. Ennek eredményeképp az első főkomponens súlya csak 6,5% lesz.

Komponensek száma	Kumulált varianciarány	Relatív hiba
1	0,065	1,2486%
2	0,567	0,5050%

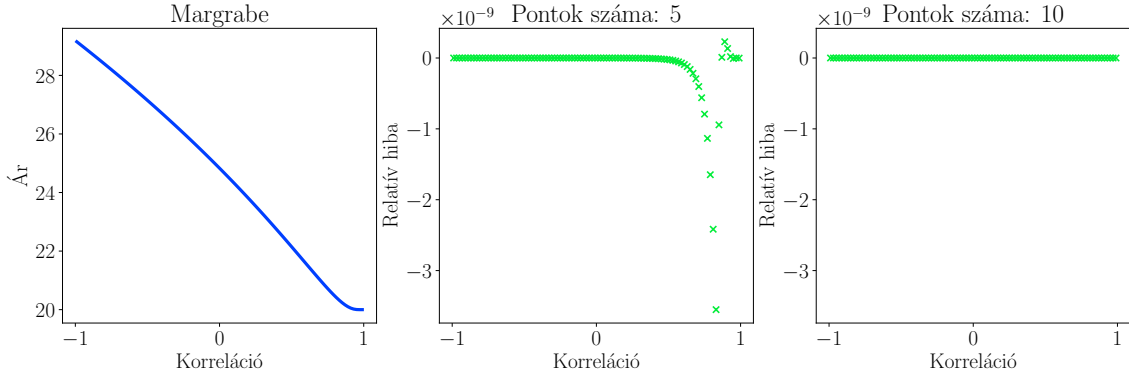
2. táblázat. Relatív hibák különböző főkomponensekre - háromelemű basket negatív korrelációkkal

A 2. táblázat mutatja be eredményeinket. Egy komponens esetén 1,25% a relatív hiba, amennyiben csak egy komponenset hagyunk el, még mindig csak 57% körüli összes varianciarányot és 0,51% eltérést tapasztalunk.

Természetesen a példában fennálló eset nem egy tipikus kosár. Ameddig a súlyok és a korrelációk pozitívak, nem érhet minket ilyen meglepetés, így a leggyakrabban előforduló esetekben nyugodtan alkalmazható a dimenziócsökkentés.

5.1.4. Összehasonlítás a Margrabe-formulával

A Margrabe-formula [25] zárt képletet ad egy csereopció árazására a Black–Scholes-modell keretei között. Mivel a csereopciók speciális spread opciók, így $K = 0$ esetén pontos eredményt kaphatunk a Margrabe-képlettel. Ezt használjuk ki az $S_1(0) = 120$, $S_2(0) = 100$, $K = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$ adatokkal meghatározott spread opció árának vizsgálatához. A korrelációt $-0,99$ és $0,99$ között változtatjuk.



5. ábra. Összehasonlítás $K = 0$ mellett a Margrabe-formulával

A 5. ábra bal oldali része mutatja az ár alakulását, mint látjuk, a derivatíva értéke a korreláció monoton csökkenő függvénye. A középső grafikonon az 5 felosztásponttal kiszámolt árakat hasonlítottuk a Margrabe-formula eredményéhez. A relatív hibák 10^{-9} nagyságrend alatt maradnak mindvégig. Egy szingularitást tapasztalunk $0,83$ környékén. Ez az a pont, ahol szükségessé válik a 2.3.1. fejezetben bemutatott korrekció, ugyanis $w_k V_{k1} > 0$ nem teljesül. A jobb oldali ábra 10 felosztópont segítségével történő árazás hibáit mutatja be. Ezzel már nem tapasztalunk kiemelt jelentőségű pontot, a módszer egyenletesen 10^{-15} nagyságrendű hiba mellett árazza a call opciót.

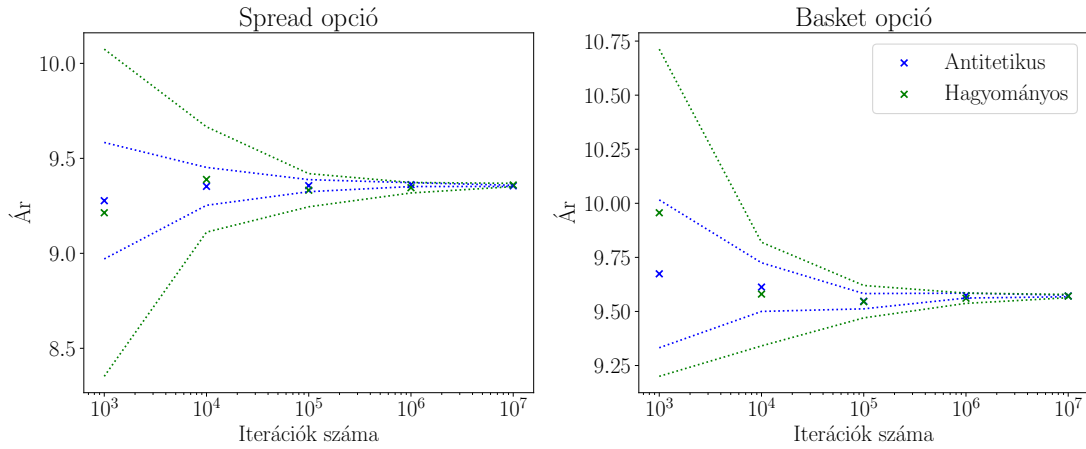
5.1.5. Ellenőrzés Monte Carlo szimulációval

Konvergencia vizsgálata

A kvadraturás árazási módszer ellenőrzéséhez Monte Carlo szimulációt fogunk alkalmazni. Az antitetikus változók módszerét is implementáltuk a szórás csökkentése érdekében, valamint 95%-os konfidenciaintervallumot készítünk. A basket opcióknál a 1.5. fejezetben leírtak szerint implementáltuk az antitetikus változók módszerét. A spread opcióknál még tovább mentünk, $X^i = [X_1^i, X_2^i]^T$ -ből négy esetet készítünk

és ezen kiértékelt kifizetésfüggvények átlagával számolunk tovább. A négy véletlen pár: $[X_1^i, X_2^i]^T$, $[X_1^i, -X_2^i]^T$, $[-X_1^i, X_2^i]^T$, $[-X_1^i, -X_2^i]^T$. Ebben a tesztben szeretnénk megbizonyosodni róla, hogy a szimuláció megfelelő lépésszám esetén konvergál.

A konvergencia sebességét egy-egy spread, illetve basket opció néztük meg. A spread opciónál $S_1(0) = 120$, $S_2(0) = 100$, $K = 20$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\%$, $\rho = 0,5$. A háromelemű, egyenlő ($w_i = 1/3$) súlyozású basket opció paraméterei: $S_1(0) = 120$, $S_2(0) = 80$, $S_3(0) = 100$, $K = 100$, $\sigma_i = 20\%$, illetve az egyes alaptermékek korrelációja pároként 0,5. Az eredményeket a 6. ábra mutatja be.



6. ábra. Monte Carlo szimuláció konvergenciája

A futtatás során 10^7 -szer generáltunk T -beli eszközárakat, majd az első $n = 10^3, \dots, 10^7$ értéket használva állapítottuk meg a derivatíva árát. Láthatjuk, hogy a módszer konvergál, az antitetikus változókat használó verzió gyorsabban, szűkebb konfidenciaintervallumokkal. 10^7 iteráció esetén mindkét esetben az antitetikus módszernél a konfidenciaintervallumok hossza 0,01 alatti, így úgy ítéljük meg, hogy ez az ismétlésszám elegendő lesz a későbbi tesztek során a Gauss–Hermite-kvadratúrás árazás ellenőrzéséhez.

Összehasonlítás

Mind spread, mind basket opciókból tíz tesztet választunk ki, amelyeket Gauss-Hermite-kvadratúrával és Monte Carlo szimulációval is beárazunk. A szimulációhoz antitetikus változókat és 10^7 lépést fogunk használni. A másik módszernél spread opcióknál $n = 10$, basket opcióknál $\lambda = 4$ beállításokat alkalmazunk. Célunk,

hogy minél változatosabb esetekben összevessük az eredményeket a 95%-os megbízhatósági szintű konfidenciaintervallummal.

A vizsgált spread opciók adatait a 3. táblázat tartalmazza. Az a) eset már ismerős lehet a fejezet korábbi tesztjeiből, egy ATM call opcióról van szó. A b), illetve c) elem ennek módosítottja, egy ITM, illetve OTM opció. Ezután a korrelációt változtatjuk, d)-nél erős pozitív, e)-nél 0, f)-nél negatív lineáris kapcsolat van a két alaptermék között. A következő két esetben a volatilitást növeljük, g)-ben mindkét, h)-nál csak az egyik terméknél. Ezután megnézzük egy put opciót i)-ben, majd egy olyan esetet, ahol az osztalékfizetési ráta nem nulla j)-ben. Itt $q_1 = 3\%$ és $q_2 = 2\%$.

	S_1, S_2	K	σ_1, σ_2	ρ
a)	120, 100	20	20%, 20%	0,5
b)	120, 100	-20	20%, 20%	0,5
c)	120, 100	60	20%, 20%	0,5
d)	120, 100	20	20%, 20%	0,95
e)	120, 100	20	20%, 20%	0
f)	120, 100	20	20%, 20%	-0,5
g)	120, 100	20	90%, 90%	0,5
h)	120, 100	-20	90%, 5%	0,5
i)	120, 100	20	20%, 20%	0,5
j)	120, 100	20	20%, 20%	0,5

3. táblázat. Spread opció tesztesetek adatai

A 4. táblázat tartalmazza az eredményeket, mindegyik esetben a konfidenciaintervallumba esett a kvadratúra árazás eredménye.

	Monte Carlo	Alsó határ	Felső határ	Kvadratúra	Benne?
a)	9,3546	9,3515	9,3578	9,3566	Igen
b)	39,3706	39,3687	39,3725	39,3716	Igen
c)	0,6482	0,6470	0,6494	0,6478	Igen
d)	3,6717	3,6705	3,6729	3,6725	Igen
e)	12,9093	12,9045	12,9141	12,9097	Igen
f)	15,6351	15,6285	15,6416	15,6355	Igen
g)	39,3331	39,2991	39,3670	39,3160	Igen
h)	33,4016	33,3633	33,4399	33,3890	Igen
i)	39,3713	39,3691	39,3736	39,3716	Igen
j)	8,3508	8,3478	8,3539	8,3529	Igen

4. táblázat. Monte Carlo konfidenciaintervallumok spread opciókra

Minél változatosabb eseteket szerettünk volna a basket opcióknál is használni. A részletes paramétereket az 5. táblázat tartalmazza. Az a) eset egy ATM, a b)

egy ITM, a c) egy OTM háromelemű basketre vonatkozó call opció. A d), illetve e) eseteknél a korrelációkra fókuszáltunk, az egyiknél az alaptermékek között magas, a másikonál negatív korrelációs értékeket adtunk meg. Az f) esetben egy magas szórásokkal rendelkező put opciót vizsgáltunk. A g), illetve h) esetek egy négy- és hatelemű basketre vonatkoznak. Erre az utolsó két esetre a dimenziócsökkentést is teszteltük, g)-nél 3, h)-nál 4 főkomponenst tartottunk meg. Ezekre a továbbiakban i) és j) esetként fogunk hivatkozni. Figyeltünk arra, hogy negatív súlyok is előforduljanak, mint a b) illetve a h) és j) basketnél.

	N	S_i	w_i	K	σ_i	ρ
a)	3	120, 80, 100	mind 1/3	100	mind 20%	mind 0,5
b)	3	180, 40, 50	2/3, 1/2, -1/6	100	mind 20%	mind 0,5
c)	3	180, 40, 50	1/12, 1/4, 2/3	100	mind 20%	mind 0,5
d)	3	120, 80, 100	mind 1/3	100	mind 20%	0,7, 0,8, 0,9
e)	3	120, 80, 100	mind 1/3	100	mind 20%	-0,5, -0,5, -0,3
f)	3	120, 80, 100	mind 1/3	100	90%, 70%, 80%	mind 0,5
g)	4	120, 80, 100, 70	mind 1/4	100	10%·i	mind 0,5
h)	6	120, 80, 100, 120, 80, 100	1/4, 1/4, 1/4, 1/4, -1/4, -1/4	80	mind 20%	0,4+ i-j ·0,1

5. táblázat. Basket opció tesztesetek adatai

Az eredményeket a 6. táblázatban közöljük. Egyedül az utolsó basketnél nem kaptunk a konfidenciaintervallumba eső árat. Itt a hatelemű basketet négy főkomponens segítségével közelítettük, így $-0,21\%$ -os hibát ejtettünk a Monte Carlo szimuláció eredményéhez képest. Tekintve, hogy egy ötdimenziós rács helyett csak egy háromdimenziós mentén számoltuk ki az integrálandó függvény értékeit, ez még mindig kis eltérésnek tekinthető.

	Monte Carlo	Alsó határ	Felső határ	Kvadrátúra	Benne?
a)	9,1046	9,1011	9,1082	9,1066	Igen
b)	36,9483	36,9452	36,9513	36,9480	Igen
c)	0,0070	0,0069	0,0072	0,0071	Igen
d)	9,9261	9,9219	9,9302	9,9260	Igen
e)	5,1988	5,1976	5,2001	5,1990	Igen
f)	23,4238	23,4189	23,4287	23,4243	Igen
g)	5,7471	5,7431	5,7511	5,7433	Igen
h)	7,2700	7,2667	7,2732	7,2687	Igen
i)	5,7471	5,7431	5,7511	5,7433	Igen
j)	7,2700	7,2667	7,2732	7,2547	Nem

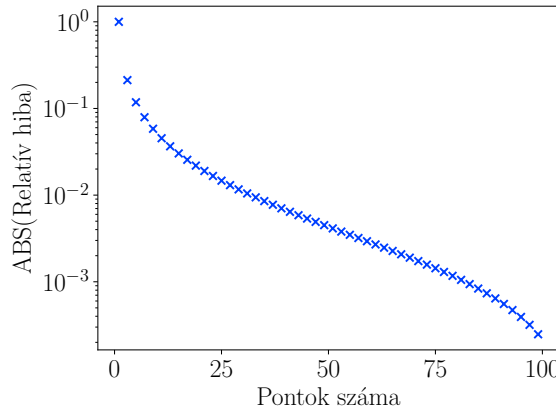
6. táblázat. Monte Carlo konfidenciaintervallumok basket opciókra

Összességében elmondható, hogy a Gauss-Hermite kvadraturán alapuló módszer spread és basket opciók árazására egy gyors és a legtöbb esetben nagyon pontos árat szolgáltat.

5.2. Kvadraturaárazás a vegyes modellben

5.2.1. Konvergencia sebessége

Az integrálközelítés konvergenciájának sebességét szeretnénk felmérni a megfelelő rend megválasztásához. Az összehasonlíthatóság érdekében az 5.1.1. fejezetben megválasztott spread opcióra ismételjük meg a tesztet. A második termék árfolyamát fogjuk normális változóként kezelni, a szórását ugyanúgy 20%-on hagyjuk. Az eredményeket a 7. ábra mutatja be.



7. ábra. Kvadratúras numerikus integrálás konvergenciája

A módszer konvergál, azonban a Black-Scholes-modellben tapasztalt sebességhez képest jóval lassabban. Mivel a kvadratura integrálás módszerének sikere azon múlik, hogy az integrálandó függvény mennyire közelíthető egy polinommal, így a teljesítmény nagyban függ C_{BS} -től. A modellkörnyezet váltásakor ez természetesen megváltozott, így $n = 100$ felosztásponttal is 10^{-3} nagyságrendű hibát vétünk az $n = 300$ esethez képest.

5.2.2. Ellenőrzés Monte Carlo szimulációval

A vegyes modellben is implementáltuk a kvadraturaárazást, illetve Monte Carlo szimulációval is meghatároztuk néhány esetben az árat. Ugyanazokat a teszteseteket választottuk, mint 5.1.5. fejezetben. Mindig a második terméket fogjuk normális

eloszlásúnak választani. A szimulációk számát nem módosítottuk, a kvadrátúraárazáshoz $n = 300$ rendet használtunk a tapasztalt lassú konvergencia miatt.

	Monte Carlo	Alsó határ	Felső határ	Kvadrátúra	Benne?
a)	9,9754	9,9655	9,9854	9,9738	Igen
b)	39,1879	39,1731	39,2026	39,1996	Igen
c)	1,1120	1,1086	1,1154	1,1212	Nem
d)	9,9425	9,9326	9,9524	9,9395	Igen
e)	10,0175	10,0075	10,0275	10,0118	Igen
f)	10,0543	10,0443	10,0643	10,0498	Igen
g)	41,8258	41,7550	41,8966	41,7677	Igen
h)	34,3584	34,2995	34,4172	34,3367	Igen
i)	39,5012	39,4895	39,5129	39,5029	Igen
j)	8,9742	8,9649	8,9836	8,9680	Igen

7. táblázat. Monte Carlo konfidenciaintervallumok spread opciókra

A 7. táblázat tartalmazza az eredményeket, egy eset kivételével a konfidenciaintervallumba esett a kvadrátúrák árazás eredménye. A c) sorban az eltérés az intervallum felső határától kevesebb, mint egy ezred. Ez az eset egy OTM opció volt.

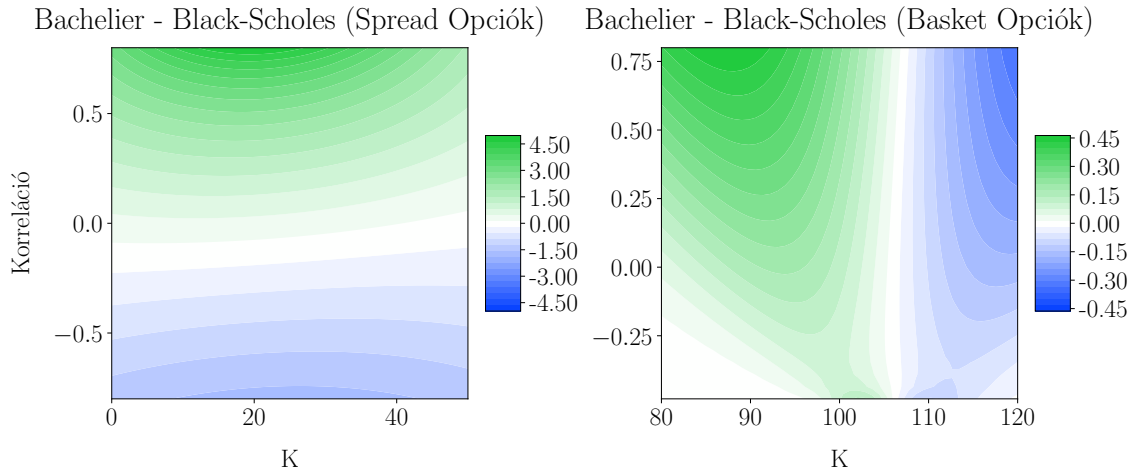
Összességében elmondhatjuk, hogy a vegyes modellre adott eljárásunk képes beárazni a spread opciókat, azonban magasabb rend szükséges a konvergenciához. Sajnos az általunk használt Numpy könyvtár `polynomial.hermite.hermgauss` függvénye csak $n = 300$ -ig tartalmazza a szükséges súlyokat és osztópontokat, így magasabb rendnél nem tudtuk tesztelni a modellt. Az viszont látszik, hogy érdemes lenne az 2.3.1. fejezethez hasonlóan az első dimenzió optimális kiválasztásával javítani a pontosságon.

5.3. Modellkörnyezetek összevetése

Szeretnénk megvizsgálni, hogyan viszonyulnak egymáshoz a különböző modellekben fennálló árak. Ehhez az 5.1.1. fejezetben használt spread és basket opciót vizsgáljuk különböző kötési árfolyamok és korrelációk esetén. A Bachelier-, illetve vegyes modell esetén az alaptermékek volatilitását természetesen megváltoztatjuk. A 3.3. fejezetben említett módszert alkalmazzuk, azaz úgy állítjuk be a normális eloszlású eszközökhöz tartozó szórásokat, hogy a spread vagy basket szórása megegyezzen a modellek között.

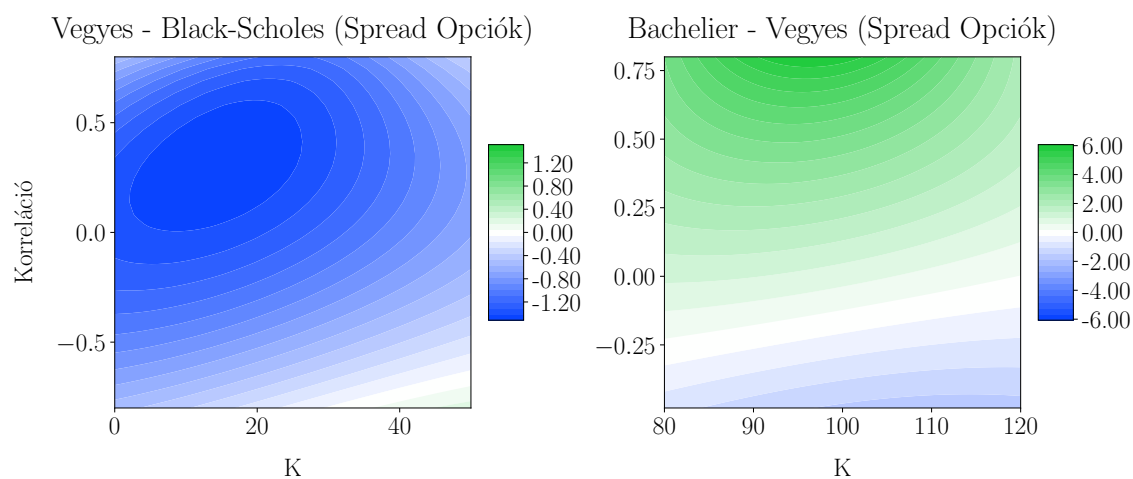
A 8. ábrán a Bachelier-modell áraiból vontuk ki a Black–Scholes-modellbeli értékeket. A színskálát úgy állítottuk be, hogy a 0 értéknél fehér színt alkalmazunk. A zöld területeken a Bachelier-modell ad nagyobb árat, a kék részen ellenkező irányú a reláció. Spread opcióknál azt tapasztaljuk, hogy a különbségek a korreláció emelésével nőnek. Amennyiben K szerint ábrázoljuk az eltéréseket, a hiba abszolút értékben annál nagyobb lesz, minél közelebb vagyunk az ATM esethez.

A basket opciónál az eltérés abszolút értéke a korrelációval együtt növekszik. Az ATM kötési árfolyamhoz közel, kissé felette megegyezik a két modell által adott ár, függetlenül a korrelációtól. Ennél nagyobb K -kra a Black–Scholes-, kisebb K -kra a Bachelier-környezetben lesz magasabb az opciós díj. Az eltérések nagyságrendje sokkal kisebb, mint ahogy azt a spread opcióknál tapasztaltuk.



8. ábra. Black–Scholes-modell és Bachelier-modell

A spread opció esetén a differenciát felbontottuk a vegyes modellel való eltérések összegére, ezt a 9. ábra mutatja be. Eszerint a vegyes modell szinte minden korreláció-kötési árfolyam pár esetén kevesebbre árazta be a terméket, mint a Black–Scholes-modell, kivétel a nagyon magas K és erősen negatív korreláció esete. A különbség abszolút értéke ATM ár körül, enyhén pozitív korrelációt feltételezve a legnagyobb. A Bachelier-moddal vett eltérések felülete a 8. ábrán látottakhoz hasonló dinamikát mutat.



9. ábra. Elterések a vegyes modellhez képest

Azt tapasztaltuk, hogy az árak a kötési árfolyam és a korreláció széles skálán történő változtatása esetén is közel maradnak egymáshoz a volatilitások megfelelő konverziója esetén.

Összefoglalás

A szakdolgozat a spread és basket opciók árazási módszereit vizsgálta, hangsúlyozva a pénzügyi derivatívák ezen típusainak alkalmazási lehetőségeit is. A dolgozat során először részletesen bemutatottuk a termékeket és a szükséges matematikai hátteret. A dolgozat két fontos modellt vizsgált: a Black–Scholes- és Bachelier-modelleket.

Előbbi esetén nem alkalmazhatók egyszerű analitikus képletek, közelítő megoldások után kellett néznünk. A dolgozat keretein belül Gauss–Hermite-kvadratúrával történő árazási eljárást vizsgáltunk. Emellett azt is bemutatottuk, hogyan alkalmazható a Bachelier-modell akkor, amikor az alaptermékek árfolyama negatív értékeket is felvehet. Itt zárt képlettel adtuk meg az árat. A szakdolgozatban ismertetett vegyes modell, amelyet saját ötletként dolgoztam ki, lehetőséget biztosított arra, hogy olyan spread opciókat is beárazzunk Gauss–Hermite-kvadratúra segítségével, ahol a két alaptermék eltérő dinamikával rendelkezett.

A dolgozat végén a különböző módszerek hatékonyságát és pontosságát numerikus tesztekkel értékeltük, és összevetettük az egyes modellek által adott eredményeket. Összességében a tesztek sikeresnek mondhatók, az összehasonlító tesztek során kiderült, hogy az implementációk helyesek, illetve rendkívül gyorsan konvergálnak.

A szakdolgozatomat egy rövid kitekintéssel szeretném zárni, amelyben ismertetem a felmerült lehetséges további kutatási irányokat. Egyrészt a kvadratúraintegrálást alkalmazó módszert a Black–Scholes-modellen túl más modellkörnyezetekben is érdemes lenne alkalmazni. Van Belle, Vanduffel és Yao [32]-ben Variance Gamma és Normal Inverse Gaussian környezetben ad közelítést spread opciók esetén, eredményeket esetlegesen általánosíthatnánk basket opciókra is. Továbbá, a 4. fejezetben a vegyes modellt csupán két eszközre és spread opciókra vizsgáltuk, így a konvergencia gyorsításán kívül egy lehetséges kiterjesztés lehetne, hogy minden alaptermék esetében szabadon meghatározhassuk, hogy aritmetikai vagy geometriai Brown-mozgással modellezzük a forward árfolyamot.

Irodalomjegyzék

- [1] Carol Alexander és Aanand Venkatramanan. „Analytic Approximations for Multi-Asset Option Pricing”. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics* 22.4 (2012), 667–689. old.
- [2] Louis Bachelier. „Théorie de la spéculation”. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. 17. köt. 1900, 21–86. old.
- [3] Petter Bjerksund és Gunnar Stensland. „Closed form spread option valuation”. *Quantitative Finance* 14.10 (2014), 1785–1794. old.
- [4] Fischer Black és Myron Scholes. „The pricing of options and corporate liabilities”. *Journal of political economy* 81.3 (1973), 637–654. old.
- [5] Svetlana Borovkova, Ferry J Permana és H vd Weide. „A closed form approach to the valuation and hedging of basket and spread options”. *Journal of Derivatives* 14.4 (2007), 8. old.
- [6] Ruggero Caldana és Gianluca Fusai. „A general closed-form spread option pricing formula”. *Journal of Banking & Finance* 37.12 (2013), 4893–4906. old.
- [7] René Carmona és Valdo Durrleman. „Pricing and hedging spread options”. *Siam Review* 45.4 (2003), 627–685. old.
- [8] Jaehyuk Choi. „Sum of all Black–Scholes–Merton models: An efficient pricing method for spread, basket, and Asian options”. *Journal of Futures Markets* 38.6 (2018), 627–644. old.
- [9] Jaehyuk Choi, Minsuk Kwak, Chyng Wen Tee és Yumeng Wang. „A Black–Scholes user’s guide to the Bachelier model”. *Journal of Futures Markets* 42.5 (2022), 959–980. old.
- [10] Michael Curran. „Valuing Asian and portfolio options by conditioning on the geometric mean price”. *Management science* 40.12 (1994), 1705–1711. old.

- [11] Griselda Deelstra, Alexandre Petkovic és Michele Vanmaele. „Pricing and hedging Asian basket spread options”. *Journal of computational and applied mathematics* 233.11 (2010), 2814–2830. old.
- [12] Michael Alan Howarth Dempster és SS George Hong. „Spread option valuation and the fast Fourier transform”. *Mathematical Finance—Bachelier Congress 2000: Selected Papers from the First World Congress of the Bachelier Finance Society, Paris, June 29–July 1, 2000*. Springer. 2002, 203–220. old.
- [13] Gary Dillon és Brett Darley. „-Basket currency options”. *Corporate Management* 46.11 (1994), 500–502. old.
- [14] Hamza Fawzi. *Mathematical Tripos IB Numerical Analysis - előadásjegyzet*. 2019.
- [15] Csaba Hegedűs. „Numerikus analízis”. (2008).
- [16] John Hull. *Options Futures And Other Derivatives*. Pearson, 2009.
- [17] Thomas R Hurd és Zhuowei Zhou. „A Fourier transform method for spread option pricing”. *SIAM Journal on Financial Mathematics* 1.1 (2010), 142–157. old.
- [18] Kazuhiro Iwasawa. „Analytical formula for the European normal Black Scholes formula”. (2013).
- [19] Peter Jäckel. „A note on multivariate Gauss-Hermite quadrature”. *London: ABN-Amro. Re* (2005).
- [20] Mark Joshi és Chao Yang. „Fast and accurate pricing and hedging of long-dated CMS spread options”. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 13.06 (2010), 839–865. old.
- [21] Martin Krekel, Johan De Kock, Ralf Korn és Tin-Kwai Man. „An analysis of pricing methods for baskets options”. *Wilmott* 3.2004 (2004), 82–89. old.
- [22] CCW Leentvaar és Cornelis W Oosterlee. „Multi-asset option pricing using a parallel Fourier-based technique”. *Journal of Computational Finance* 12.1 (2008), 1. old.
- [23] Edmond Levy. „Pricing European average rate currency options”. *Journal of International Money and Finance* 11.5 (1992), 474–491. old.
- [24] Minqiang Li, Jieyun Zhou és Shi-Jie Deng. „Multi-asset spread option pricing and hedging”. *Quantitative Finance* 10.3 (2010), 305–324. old.
- [25] William Margrabe. „The value of an option to exchange one asset for another”. *The journal of finance* 33.1 (1978), 177–186. old.
- [26] László Márkus. „Eszközár folyamatok modellezése, valamint európai és amerikai opciók árazása”. *egyetemi jegyzet, ELTE* (2017).

- [27] Moshe Arye Milevsky és Steven E Posner. „A closed-form approximation for valuing basket options”. *Journal of Derivatives* 5 (1998), 54–61. old.
- [28] Neil D Pearson. „An efficient approach for pricing spread options”. *Available at SSRN 7010* (1999).
- [29] Andrea Roncoroni, Gianluca Fusai és Mark Cummins. *Handbook of multi-commodity markets and products: Structuring, trading and risk management*. John Wiley & Sons, 2015.
- [30] Walter Schachermayer és Josef Teichmann. „How close are the option pricing formulas of Bachelier and Black–Merton–Scholes?”: *Mathematical Finance: an international journal of mathematics, statistics and financial economics* 18.1 (2008), 155–170. old.
- [31] Xia Su. „Essays on basket options hedging and irreversible investment valuation”. Dissz. Universitäts-und Landesbibliothek Bonn, 2008.
- [32] Jente Van Belle, Steven Vanduffel és Jing Yao. „Closed-form approximations for spread options in Lévy markets”. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 35.3 (2019), 732–746. old.
- [33] Jinke Zhou és Xiaolu Wang. „Accurate closed-form approximation for pricing Asian and basket options”. *Applied stochastic models in business and industry* 24.4 (2008), 343–358. old.

MI-eszközhasználati nyilatkozat

Alulírott, Takács Lili, nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI-alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	Felhasznált eszköz	Felhasználás helye	Megjegyzés
Nyelvhelyesség	GPT	Teljes dolgozat	Helyesírás-ellenőrzés, egyes mondatok stilisztikai átnézése, esetleges újrafogalmazása

A felsoroltakon túl más MI-alapú eszközt nem használtam.