

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Folyadékdinamikai stacionárius parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása

MSC SZAKDOLGOZAT

Lados Bálint István

Alkalmazott matematikus MSc
Alkalmazott analízis specializáció

TÉMAVEZETŐ:

Karátson János

Alkalmazott Analízis és
Számításmatematikai Tanszék



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

BUDAPEST, 2025

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Absztrakt nyeregpon-t-feladatok	2
1.1. Nyeregpon-t-feladatok megoldhatósága	2
1.2. Galjorkin-módszer nyeregpon-t-feladatokra	4
2. Iteratív módszerek nyeregpon-t-feladatok megoldására	5
2.1. A Schur-féle komplementeroperátorra vonatkozó módszerek	5
2.1.1. Szimmetrikus operátorokra alkalmazható módszerek	5
2.1.2. Nem szimmetrikus operátorokra alkalmazható módszerek	7
2.2. Az operátormátrixszal felírt nagy rendszerre vonatkozó módszerek	10
2.2.1. Szimmetrikus indefinit mátrixokra alkalmazható módszerek	10
3. A Stokes-feladat	14
3.1. Megoldhatóság	14
3.2. Az Uzawa- és Krylov–Uzawa-algoritmus	15
3.3. A nagy rendszer megoldása	17
3.4. Numerikus tesztek	19
4. Az Oseen-egyenlet	30
4.1. Megoldhatóság	30
4.2. A CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus	31
4.3. A nagy rendszer megoldása	35
4.4. Numerikus tesztek	40
Hivatkozások	50

Bevezetés

Összenyomhatatlan folyadékok stacionárius áramlásának egyik alapvető modelljét a Navier–Stokes-egyenletek írják le, melyek linearizált változataként tekinthetünk a Stokes-feladatra és az Oseen-egyenletre. Utóbbi a folyadék viszkozitását és az áramlás során fellépő konvekciós folyamatok leírását is magában foglalja. Ezek olyan elliptikus másodrendű parciális differenciálegyenletek, melyek ismeretlen függvényként a folyadék sebességét és a nyomást tartalmazzák. Ebben a dolgozatban kétdimenziós korlátos tartományon homogén Dirichlet peremfeltétel mellett vizsgáljuk a Stokes-feladat és az Oseen-egyenlet elméleti tulajdonságait és numerikus megoldási módszereit, illetve ezen belül áttekintjük az Uzawa-típusú iterációkat és a végeselem-módszerrel kapott lineáris egyenletrendszer iteratív megoldásának lehetőségeit, és az egyenlet paramétereinek függvényében elméleti számításokkal és numerikus tesztek segítségével összehasonlítjuk az egyes megoldási módszerek hatékonyságát. A szakdolgozat elkészítésének szerkesztését képezte a módszerek MATLAB programnyelven való implementálása is.

A szakdolgozat első fejezetében absztrakt nyeregpon-feladatok megoldhatóságát tárgyaljuk az általánosabb nem szimmetrikus esetben korlátos lineáris operátorokkal és bilineáris formákkal megadott feladatokra egyaránt. Meghatározzuk az ún. Schur-féle komplementeroperátor koercivitási és korlátossági együtthatóját, mely alapvető fontosságú lesz később az iteratív módszerek elméleti vizsgálata során. A fejezet végén kitérünk a nyeregpon-feladatokra alkalmazott Galjorkin-módszer tulajdonságaira is.

A második fejezetben áttekintjük a Schur-féle komplementeroperátorra vonatkozó Uzawa-típusú iteratív módszereket a szimmetrikus és a nem szimmetrikus esetben egyaránt, majd megvizsgáljuk a szimmetrikus esetben a végeselemes nagy egyenletrendszerre alkalmazható iteratív módszereket is. Az egyenletesen pozitív esetben az egyszerű iteráció, a konjugált gradiens-módszer és a MINRES algoritmus leírását és ismert konvergenciabecsléseit, illetve ezek nyeregpon-feladatra alkalmazott változatát mutatjuk be. A nem szimmetrikus esetben a prekondicionált CGN- és GCR-módszert tekintjük át hasonló keretek között, és összehasonlítjuk a lineáris becsléseiket. A végeselem-módszeres diszkretizáció esetében a szimmetrikus indefinit mátrixszal felírt nagy egyenletrendszerre alkalmazott prekondicionált MINRES- és CGN-módszer konvergenciájának tulajdonságait vizsgáljuk, ahol a prekondicionálásban a diszkrét Laplace- és tömegmátrixot használjuk. Ezzel a prekondicionáló mátrixszal kiszámítjuk nyeregpon-feladatokra a konvergenciabecsléseket az előző fejezet eredményeit felhasználva.

Az első két fejezetben tárgyalt elméleti eredmények alkalmazásaként a harmadik fejezetben a Stokes-feladatot, a negyedik fejezetben pedig az Oseen-egyenletet tanulmányozzuk részletesen. Először felírjuk őket nyeregpon-feladatként, majd a megoldhatóságukat vizsgáljuk. Ezután a Stokes-feladatnál az Uzawa- és a Krylov–Uzawa-algoritmus konvergenciáját vizsgáljuk, az Oseen-egyenletnél pedig levezetjük a CGN- és a GCR-Uzawa-algoritmust, majd külön megvizsgáljuk a konvekció nélküli és a konvekciót tartalmazó esetet is. Hasonlóan vizsgáljuk a nagy rendszer esetét is, ahol a viszkozitási paraméter különböző konkrét és aszimptotikus értékeire megadjuk, hogy a CGN-módszer vagy a MINRES lineáris becslése a jobb. Végül mindkét fejezetet numerikus tesztekkel zárjuk. Ismertetjük a végeselem-módszer implementációját, tesztfeladatokat dolgozunk ki, elemezzük a módszerek konvergenciáját, ábrákat készítünk a numerikus megoldásról, és összehasonlítjuk a korábban bemutatott megoldási módszerek hatékonyságát konkrét feladatok esetén. A numerikus tesztek alapján felállítunk egy sorrendet a megoldási módszerek között. Ezt utána összevetjük az elméleti becslésekkel, mely részben megmagyarázza a numerikus tesztek eredményeit.

1. Absztrakt nyeregpon-feladatok

Ez a fejezet az [1] könyv 12.1.1. fejezetének a felépítését követi, és általánosítja a nyeregpon-feladatok megoldhatóságával kapcsolatos eredményeket a nem szimmetrikus operátorok esetére is. Ez később alkalmazható lesz a Stokes-feladatra és az Oseen-egyenletre egyaránt. Az 1.2. állításban meghatározott koercivitási és korlátossági együtthatók fontosak lesznek az iteratív módszerek konvergenciájának vizsgálatakor. A megoldhatóság után külön alfejezetben vizsgáljuk a nyeregpon-feladatokra alkalmazott Galjorkin-módszert és a diszkretizált feladat megoldhatóságát.

1.1. Nyeregpon-feladatok megoldhatósága

Legyen H, K valós Hilbert-tér, $f \in H$ adott függvény, illetve $A : H \rightarrow H$ és $B : K \rightarrow H$ korlátos lineáris operátor, ahol az A egyenletes pozitivitása helyett most csak a koercivitását követeljük meg, tehát az A lehet nem szimmetrikus operátor is. A koercivitás szerint létezik olyan $m_A > 0$ konstans, melyre

$$\langle Au, u \rangle \geq m_A \|u\|^2 \quad (\forall u \in H).$$

Tekintsük az alábbi nyeregpon-feladatot:

$$\begin{cases} Au + Bp = f \\ B^*u = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Mivel az A operátor egy koercív korlátos lineáris operátor, ezért bijekció, így létezik A^{-1} . Ennek segítségével u kifejezhető az első egyenletből:

$$u = A^{-1}(f - Bp), \quad (2)$$

és ez behelyettesíthető a második egyenletbe:

$$B^*A^{-1}(f - Bp) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Sp := B^*A^{-1}Bp = B^*A^{-1}f =: \tilde{f},$$

ahol $S : K \rightarrow K$ a Schur-féle komplementeroperátor. Mivel a (2) egyenletből p ismeretében u egyértelműen meghatározható, ezért elég az $Sp = \tilde{f}$ egyenlet megoldhatóságát vizsgálni. Ha megmutatjuk, hogy az S lineáris operátor korlátos és koercív, akkor S bijekció, tehát létezik egyértelműen $p \in K$, amely teljesíti az operátoregyenletet. Az S operátor koercivitásához szükséges az ún. inf-sup-feltétel teljesülése:

1.1. Definíció. Az (1) általános nyeregpon-feladatra teljesül az *inf-sup-feltétel*, ha létezik olyan $\gamma > 0$ konstans, melyre

$$\inf_{p \in K \setminus \{0\}} \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{\langle Bp, u \rangle}{\|p\| \|u\|} = \gamma > 0.$$

1.2. Állítás. Az $S := B^*A^{-1}B$ operátor korlátos és koercív a K Hilbert-térben az $m := \frac{m_A \gamma^2}{\|A\|^2}$ és $M := \frac{\|B\|^2}{m_A}$ konstansokkal, ha az inf-sup-feltétel teljesül γ -val, és m_A az A operátor koercivitási konstansa.

Bizonyítás.

(i) *Korlátosság.*

Az A operátor koercivitása és a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség szerint

$$m_A \|u\|^2 \leq \langle Au, u \rangle \leq \|Au\| \|u\| \Rightarrow m_A \|u\| \leq \|Au\| \Rightarrow \|u\| \leq \frac{1}{m_A} \|Au\|.$$

Az $u := A^{-1}v$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\|A^{-1}v\| \leq \frac{1}{m_A} \|v\| \Rightarrow \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m_A}.$$

Ezt felhasználva az S operátorra adódik, hogy

$$\|S\| = \|B^* A^{-1} B\| \leq \|B^*\| \|A^{-1}\| \|B\| = \|A^{-1}\| \|B\|^2 \leq \frac{\|B\|^2}{m_A}.$$

(ii) *Koercivitás.*

Az A operátor korlátossága miatt

$$\|v\| = \|AA^{-1}v\| \leq \|A\| \|A^{-1}v\| \Rightarrow \frac{1}{\|A\|} \|v\| \leq \|A^{-1}v\|.$$

Az $u := A^{-1}v$ helyettesítéssel kapjuk az A koercitásából és az előző becslésből, hogy

$$\langle Au, u \rangle \geq m_A \|u\|^2 \Rightarrow \langle A^{-1}v, v \rangle \geq m_A \|A^{-1}v\|^2 \geq \frac{m_A}{\|A\|^2} \|v\|^2.$$

Ezt felhasználva az S operátorra adódik, hogy

$$\langle Sp, p \rangle = \langle B^* A^{-1} Bp, p \rangle = \langle A^{-1} Bp, Bp \rangle \geq \frac{m_A}{\|A\|^2} \|Bp\|^2 \geq \frac{m_A \gamma^2}{\|A\|^2} \|p\|^2 \quad (\forall p \in K). \quad \square$$

1.3. Állítás. Ha A egyenletesen pozitív operátor, akkor az 1.2. állításban az S operátor alsó határa $m = \frac{\gamma^2}{\|A\|}$.

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy ebben az esetben $\langle A^{-1}v, v \rangle \geq \frac{1}{\|A\|} \|v\|^2 \quad (\forall v \in H)$.

$$\langle A^{-1}v, v \rangle = \left\langle A^{-\frac{1}{2}}v, A^{-\frac{1}{2}}v \right\rangle = \|A^{-\frac{1}{2}}v\|^2 \geq \frac{1}{\|A\|} \|v\|^2,$$

ahol az utolsó becslés azért teljesül, mert az $u := A^{-\frac{1}{2}}v$ jelöléssel

$$\|v\|^2 = \|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \leq \|A^{\frac{1}{2}}\|^2 \|u\|^2 = \|A\| \|A^{-\frac{1}{2}}v\|^2. \quad \square$$

1.4. Következmény. Legyen H, K valós Hilbert-tér, illetve $A : H \rightarrow H$ és $B : K \rightarrow H$ korlátos lineáris operátor, emellett legyen A koercív is. Ha az inf-sup-feltétel teljesül, akkor bármely $f \in H$ függvény esetén létezik egyértelműen $(u, p) \in H \times K$ megoldása az (1) feladatnak.

Ezek az eredmények közvetlenül átvihetők bilineáris formákkal megadott feladatokra is:

$$\begin{cases} \langle Au, v \rangle + \langle Bp, v \rangle = \langle f, v \rangle & (\forall v \in H) \\ \langle Bq, u \rangle = 0 & (\forall q \in K) \end{cases} \quad (3)$$

Legyen $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ és $b : K \times H \rightarrow \mathbb{R}$ az a bilineáris forma, melyre $a(u, v) := \langle Au, v \rangle$ és $b(p, v) := \langle Bp, v \rangle$. A $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi v := \langle f, v \rangle$ korlátos lineáris funkcionált bevezetve az (1) feladat átírható

$$\begin{cases} a(u, v) + b(p, v) = \phi v & (\forall v \in H) \\ b(q, u) = 0 & (\forall q \in K) \end{cases} \quad (4)$$

alakba. A korlátos bilineáris formák Riesz-reprezentációjával pedig egy ilyen feladat átírható az (1) alakba. Az inf-sup-feltétel ezzel a felírással

$$\inf_{p \in K \setminus \{0\}} \sup_{u \in H \setminus \{0\}} \frac{b(p, u)}{\|p\| \|u\|} =: \gamma > 0.$$

Mivel az A, B operátorok korlátossága és koercivitása érvényes lesz az a, b bilineáris formákra is, ezért az 1.4. megoldhatósági tétel átvihető.

1.5. Következmény. Legyen H, K valós Hilbert-tér, illetve $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ és $b : K \times H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos bilineáris forma, emellett legyen a koercív is. Ha az inf-sup-feltétel teljesül, akkor bármely $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál esetén létezik egyértelműen $(u, p) \in H \times K$ megoldása a (4) feladatnak.

1.2. Galjorkin-módszer nyeregpon-feladatokra

Tekintsünk egy (1) alakú általános nyeregpon-feladatot, és írjuk fel az ehhez tartozó variációs problémát bilineáris formák segítségével, ami a (4)-nél megadott feladatot eredményezi. Legyenek $V_h \subset H$ és $P_h \subset K$ adott véges dimenziós alterek, és keressük azon $(u^h, p^h) \in V_h \times P_h$ függvényt, amelyre

$$\begin{cases} a(u^h, v^h) + b(p^h, v^h) = \phi v^h & (\forall v^h \in V_h) \\ b(q^h, u^h) = 0 & (\forall q^h \in P_h) \end{cases} \quad (5)$$

A diszkretizált feladat megoldhatóságát az 1.5. állítás szerint vizsgálhatjuk. Az a és b bilineáris formák korlátosak lesznek az A és B operátor korlátossága miatt, és hasonló okokból az a koercív is. Azonban az inf-sup-feltétel csak akkor fog teljesülni, ha a V_h és P_h alterekre további feltételeket teszünk.

1.6. Definíció. A V_h és P_h altér teljesíti az *LBB-feltételt* vagy a *diszkrét inf-sup-feltételt*, ha a h rácsparamétertől függetlenül létezik olyan $\gamma_0 > 0$ állandó, amelyre

$$\inf_{p^h \in P_h \setminus \{0\}} \sup_{u^h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{b(p^h, u^h)}{\|p^h\|_K \|u^h\|_H} \geq \gamma_0.$$

Ekkor a V_h és P_h altér *LBB-stabil* párt alkot.

1.7. Állítás. Ha az *LBB-feltétel* teljesül, akkor létezik egyértelműen $(u_*^h, p_*^h) \in V_h \times P_h$ megoldása az (5) feladatnak.

A Galjorkin-módszerrel kapott lineáris egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} A_h & B_h \\ B_h^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^h \\ s^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

alakban írható fel, ahol c^h és s^h a bázisfüggvények együtthatóit adja meg az u^h -t és p^h -t előállító lineáris kombinációban. A módszer konvergenciáját a Céa-lemmához hasonló tétel biztosítja, melynek részletei a Stokes-feladatra kidolgozva megtalálható a [2] könyv 3.4. fejezetében.

2. Iteratív módszerek nyeregpont-feladatok megoldására

Az iteratív módszerek alapgondolata az, hogy a feladat nehézsége miatt a pontos megoldás kiszámítása helyett a megoldást egy függvénysorozat szerint közelítjük, melyet rekurzívan számolunk, és az egyes iterációs lépések során az eredetinél könnyebb feladatokat oldunk meg. Ezek a módszerek alkalmazhatóak közvetlenül az operátorokkal megadott feladatokra, illetve használhatóak a Galjorkin-módszerrel kapott diszkretizált feladatra és az ebből származtatott lineáris egyenletrendszer megoldására is. Ebben a fejezetben áttekintjük a dolgozatban használt szimmetrikus és nem szimmetrikus iteratív módszerek algoritmusát, a konvergenciájukkal kapcsolatos eredményeket, és alkalmazhatóságukat az előző fejezetben ismertetett nyeregpont-feladatra felírt $Sp = f$ operátoregyenlet megoldására.

2.1. A Schur-féle komplementeroperátorra vonatkozó módszerek

2.1.1. Szimmetrikus operátorokra alkalmazható módszerek

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy a nyeregpont-feladatban szereplő A operátor szimmetrikus, ezért az $S := B^*A^{-1}B$ operátor is szimmetrikus, és így ha A koercív, akkor S egyenletesen pozitív operátor.

Legyen K valós Hilbert-tér, $S : K \rightarrow K$ egyenletesen pozitív korlátos lineáris operátor, tehát vannak olyan $M \geq m > 0$ állandók, melyekre

$$m\|p\|^2 \leq \langle Sp, p \rangle \leq M\|p\|^2 \quad (\forall p \in K).$$

2.1. Algoritmus. *Egyszerű iteráció.*

- Legyen $p_0 \in K$ tetszőleges kezdőfüggvény, $\alpha > 0$ adott paraméter.
- Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már p_k -t ismerjük:

$$p_{k+1} := p_k - \alpha(Sp_k - \tilde{f})$$

2.2. Állítás. *Ha $0 < \alpha < \frac{2}{M}$, akkor a 2.1. algoritmus lineárisan konvergál az $Sp = \tilde{f}$ egyenlet p^* megoldásához. Az optimális α paraméter $\frac{2}{m+M}$, melyre*

$$\|p_k - p^*\| \leq \frac{1}{m} \|Sp_0 - \tilde{f}\| \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^k.$$

2.3. Következmény. *Szimmetrikus Schur-féle komplementeroperátor esetén az egyszerű iteráció optimális α paramétere*

$$\alpha_{opt} := \frac{2\|A\|^2 m_A}{m_A^2 \gamma^2 + \|A\|^2 \|B\|^2},$$

a konvergenciabecslés pedig

$$\|p_k - p^*\| \leq \frac{\|A\|^2}{m_A \gamma^2} \|Sp_0 - \tilde{f}\| \left(\frac{\|A\|^2 \|B\|^2 - m_A^2 \gamma^2}{\|A\|^2 \|B\|^2 + m_A^2 \gamma^2} \right)^k.$$

2.4. Algoritmus. *Konjugált gradiens-módszer (CG).*

- Legyen $p_0 \in K$ tetszőleges kezdőfüggvény és $d_0 := r_0 = Sp_0 - \tilde{f}$.
- Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már p_k, d_k, r_k -t ismerjük:

$$\begin{cases} \alpha_k := -\frac{\|r_k\|^2}{\langle Sd_k, d_k \rangle} \\ p_{k+1} := p_k + \alpha_k d_k \\ r_{k+1} := r_k + \alpha_k Sd_k \\ \beta_k := \frac{\|r_{k+1}\|^2}{\|r_k\|^2} \\ d_{k+1} := r_{k+1} + \beta_k d_k \end{cases}$$

2.5. Állítás. A 2.4. algoritmus lineárisan konvergál az $Sp = \tilde{f}$ egyenlet p^* megoldásához, és

$$\|p_k - p^*\|_S \leq 2\|p_0 - p^*\|_S \left(\frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} \right)^k.$$

2.6. Következmény. Szimmetrikus Schur-féle komplementeroperátor esetén a konjugált gradiens-módszer konvergenciabecslése:

$$\|p_k - p^*\|_S \leq 2\|p_0 - p^*\|_S \left(\frac{\|A\|\|B\| - m_A \gamma}{\|A\|\|B\| + m_A \gamma} \right)^k.$$

2.7. Algoritmus. *MINRES*

- Legyen $p_0 \in K$ tetszőleges kezdőfüggvény, $v_0 := w_0 = w_1 = 0$, $v_1 := \tilde{f} - Sp_0$, $\gamma_1 := \|v_1\|$, $\eta := \gamma_1$, $s_0 := s_1 = 0$, és $c_0 := c_1 = 1$.
- Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már $p_{k-1}, v_k, w_k, \gamma_k, s_k, c_k$ -t ismerjük:

$$\begin{cases} v_k := \frac{v_k}{\gamma_k}; \delta_k := \langle Sv_k, v_k \rangle \\ v_{k+1} := Sv_k - \delta_k v_k - \gamma_k v_{k-1}; \gamma_{k+1} := \|v_{k+1}\| \\ \alpha_0 := c_k \delta_k - c_{k-1} s_k \gamma_k; \alpha_1 := \sqrt{\alpha_0^2 + \gamma_{k+1}^2} \\ \alpha_2 := s_k \delta_k + c_{k-1} c_k \gamma_k; \alpha_3 := s_{k-1} \gamma_k \\ c_{k+1} := \frac{\alpha_0}{\alpha_1}; s_{k+1} := \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1} \\ w_{k+1} := \frac{v_k - \alpha_3 w_{k-1} - \alpha_2 w_k}{\alpha_1} \\ p_k := p_{k-1} + c_{k+1} \eta w_{k+1} \\ \eta := -s_{k+1} \eta \end{cases}$$

2.8. Állítás. A 2.7. algoritmus lineárisan konvergál az $Sp = \tilde{f}$ egyenlet p^* megoldásához, és

$$\|r_k\| \leq 2\|r_0\| \left(\frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} \right)^k. \quad (7)$$

2.9. Következmény. Szimmetrikus Schur-féle komplementeroperátor esetén a MINRES konvergenciabecslése:

$$\|r_k\| \leq 2\|r_0\| \left(\frac{\|A\|\|B\| - m_A \gamma}{\|A\|\|B\| + m_A \gamma} \right)^k.$$

2.1.2. Nem szimmetrikus operátorokra alkalmazható módszerek

Amennyiben az A operátor nem szimmetrikus, az S operátor sem szimmetrikus, ezért nem szimmetrikus iteratív módszerekre is szükség lesz a nyeregpont-feladatok megoldásához. A dolgozatban az egyszerű iteráció nem szimmetrikus változata mellett két általánosan elterjedt módszert fogunk vizsgálni: az egyik a CGN-módszer, mely a konjugált gradiens módszer alkalmazása a szimmetrizált normálegyenletre, a másik pedig a GCR-módszer, amely a reziduális hibát minimalizálja. Az alapvető algoritmusok megtalálhatóak a [3] könyvben.

Legyen K valós Hilbert-tér, $S : K \rightarrow K$ koercív korlátos lineáris operátor, tehát vannak olyan $M \geq m > 0$ állandók, melyekre

$$m\|p\|^2 \leq \langle Sp, p \rangle \quad \text{és} \quad \|Sp\| \leq M\|p\| \quad (\forall p \in K).$$

2.10. Állítás. Ha $0 < \alpha < \frac{2m}{M^2}$, akkor a 2.1. algoritmus lineárisan konvergál az $Sp = \tilde{f}$ egyenlet p^* megoldásához. Az optimális α paraméter $\frac{m}{M^2}$, melyre

$$\|p_k - p^*\| \leq \frac{1}{m} \|Sp_0 - \tilde{f}\| \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^{\frac{k}{2}}.$$

2.11. Következmény. Nem szimmetrikus Schur-féle komplementeroperátor esetén az egyszerű iteráció optimális α paramétere

$$\alpha_{opt} := \frac{m_A^3 \gamma^2}{\|A\|^2 \|B\|^4},$$

a konvergenciabecslés pedig

$$\|p_k - p^*\| \leq \frac{\|A\|^2}{m_A \gamma^2} \|Sp_0 - \tilde{f}\| \left(1 - \left(\frac{m_A \gamma}{\|A\| \|B\|}\right)^4\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Amennyiben az iteratív módszereket közvetlenül alkalmazzuk a megoldandó egyenletre, a konvergencia lassú lehet, ezért általában az egyenletet prekondicionáljuk egy egyenletesen pozitív P operátor segítségével, és az eredeti helyett a $P^{-1}Sp = P^{-1}\tilde{f}$ egyenletet oldjuk meg. Ebben a formában lett megadva a CGN-módszer 2.12. és a GCR-módszer 2.13. algoritmusai.

Legyen a P által indukált energia-skalárszorzat $\langle x, y \rangle_P := \langle Px, y \rangle$, és az ehhez tartozó P -norma $\|x\|_P := \sqrt{\langle x, x \rangle_P}$, amely megjelenik az algoritmusokban és a konvergenciabecslésekben egyaránt. Prekondicionálás esetén az algoritmusokban az $x = P^{-1}y$ alakú lépéseknél P^{-1} meghatározása helyett a $Px = y$ alakú egyszerűbb segédfeladatot oldjuk meg.

Az $r_k := P^{-1}Sp_k - P^{-1}\tilde{f}$ reziduális hibavektor P -normája a k . iteratív lépésben lineárisan becsülhető, ami a $P^{-1}S$ operátor m koercivitási és M korlátossági együtthatójától függ:

$$\begin{aligned} m &:= \inf \{ \langle P^{-1}Sp, p \rangle_P : \|p\|_P = 1 \} = \inf \{ \langle Sp, p \rangle : \|p\|_P = 1 \} > 0 \\ M &:= \|P^{-1}S\|_P = \sup \{ \langle Sp, q \rangle : \|p\|_P = \|q\|_P = 1 \} \end{aligned} \tag{8}$$

2.12. Algoritmus. Prekondicionált CGN

```

 $p_0 := \mathbf{0};$ 
 $r_0 := P^{-1}Sp_0 - P^{-1}\tilde{f};$ 
 $s_0 := P^{-1}S^*r_0;$ 
 $d_0 := s_0;$ 
 $k := 0;$ 
while  $\|r_k\|_P > TOL$  do
     $x_k := P^{-1}Sd_k;$ 
     $\alpha_k = -\frac{\|s_k\|_P^2}{\|x_k\|_P^2};$ 
     $p_{k+1} := p_k + \alpha_k d_k;$ 
     $r_{k+1} := r_k + \alpha_k x_k;$ 
     $s_{k+1} := P^{-1}S^*r_{k+1};$ 
     $\beta_k = \frac{\|s_{k+1}\|_P^2}{\|s_k\|_P^2};$ 
     $d_{k+1} := s_{k+1} + \beta_k d_k;$ 
     $k := k + 1;$ 
end

```

2.13. Algoritmus. Prekondicionált GCR

```

 $p_0 := \mathbf{0};$ 
 $r_0 := P^{-1}Sp_0 - P^{-1}\tilde{f};$ 
 $d_0 := r_0;$ 
 $x_0 := P^{-1}Sd_0;$ 
 $k := 0;$ 
while  $\|r_k\|_P > TOL$  do
     $\alpha_k := -\frac{\langle r_k, x_k \rangle_P}{\|x_k\|_P^2};$ 
     $p_{k+1} := p_k + \alpha_k d_k;$ 
     $r_{k+1} := r_k + \alpha_k x_k;$ 
     $s_k := P^{-1}Sr_{k+1};$ 
    for  $i = 0, 1, \dots, k$  do
         $\beta_{i,k} := -\frac{\langle s_k, x_i \rangle_P}{\|x_i\|_P^2};$ 
    end
     $d_{k+1} := r_{k+1} + \sum_{i=0}^k \beta_{i,k} d_i;$ 
     $x_{k+1} := s_k + \sum_{i=0}^k \beta_{i,k} x_i;$ 
     $k := k + 1;$ 
end

```

2.14. Állítás. A 2.12. és 2.13. algoritmus lineárisan konvergál az $Sp = \tilde{f}$ egyenlet p^* megoldásához, és

$$\text{a CGN-módszer lineáris becslése:} \quad \|r_k\|_P \leq 2\|r_0\|_P \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^k; \quad (9)$$

$$\text{a GCR-módszer lineáris becslése:} \quad \|r_k\|_P \leq \|r_0\|_P \left(1 - \frac{m^2}{M^2} \right)^{\frac{k}{2}}. \quad (10)$$

2.15. Következmény. Nem szimmetrikus Schur-féle komplementeroperátor esetén a CGN-módszer konvergenciabecslése:

$$\|r_k\|_P \leq 2\|r_0\|_P \left(\frac{\|A\|^2\|B\|^2 - m_A^2\gamma^2}{\|A\|^2\|B\|^2 + m_A^2\gamma^2} \right)^k$$

2.16. Következmény. Nem szimmetrikus Schur-féle komplementeroperátor esetén a GCR-módszer konvergenciabecslése:

$$\|r_k\|_P \leq \|r_0\|_P \left(1 - \left(\frac{m_A\gamma}{\|A\|\|B\|} \right)^4 \right)^{\frac{k}{2}}$$

2.17. Megjegyzés. A 2.16. következményben szereplő becslés nagyságrendileg ugyanaz, mint a nem szimmetrikus egyszerű iteráció 2.11. következménybeli konvergenciabecslése. A gyakorlati alkalmazásoknál azonban a GCR-módszer jellemzően ennél lényegesen gyorsabban konvergál, tehát ez az elméleti becslés pesszimista a tapasztalt konvergenciához képest.

A két módszer lineáris becslését összehasonlíthatjuk aszerint, hogy mely m és M számok esetén lesz a GCR-módszer (10) becslésében szereplő felső korlát kisebb a CGN-módszer (9) becslésében találhatóánál. Ezzel kapcsolatban idézem egy korábbi eredményemet a [4] TDK dolgozatomból:

2.18. Tétel. Legyen $k \in \{1, \dots, N\}$ egy tetszőleges index. A GCR-módszer lineáris becslése a k . iteratív lépésben pontosan akkor lesz jobb a CGN-módszer lineáris becslésénél, ha $\frac{M}{m} > L_k$, ahol m és M a (8) szerint értendő, és L_k az egyértelműen létező valós gyöke az

$$f_k(x) = (1 - 4^{\frac{1}{k}})x^3 + (3 + 4^{\frac{1}{k}})x^2 + 3x + 1$$

harmadfokú polinomnak.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_k	2.7423	5.5708	8.4388	11.3158	14.1962	17.0783	19.9614	22.8450	25.7291	28.6134

1. táblázat. Az L_k sorozat első tíz tagja.

Az L_k sorozat szigorú monoton növekedéséből következik az alábbi állítás:

2.19. Állítás. Ha a CGN-módszer lineáris becslése jobb a GCR-módszer becslésénél egy adott $k' \in \{1, \dots, N\}$ indexre, akkor bármely későbbi $k \in \{k', \dots, N\}$ index esetén is jobb lesz.

2.20. Megjegyzés. Amennyiben a Schur-féle komplementeroperátor szimmetrikus, a 2.7. MINRES és a 2.13. GCR-módszer (prekondicionálás nélkül, azaz a $P := I$ esetben) reziduális hibavektorai megegyeznek (lásd [5], p. 244), ezért a reziduális norma (7) és (10) lineáris becslése egyszerre teljesül, tehát vehetjük a (7) és (10)-ben szereplő becslések minimumát, és ezt összehasonlíthatjuk a CGN-módszer (9) becslésével.

2.21. Állítás. Legyen K valós Hilbert tér és $S : K \rightarrow K$ egyenletesen pozitív korlátos lineáris operátor. Ekkor bármely $f \in K$ esetén az $Sp = \tilde{f}$ operátoregyenletre alkalmazott CGN- és MINRES-módszer lineáris konvergenciabecslése közül mindig a MINRES becslése az élesebb. A két konvergenciabecslés pontosan akkor esik egybe, ha az S határai egybeesnek, azaz $m = M$. Ez csak akkor lehetséges, ha $S = mI$ alakú, ahol $m > 0$.

Bizonyítás. A 2.20. megjegyzés szerint a (7) és (10)-ben szereplő becslések minimumát kell összehasonlítani a (9) becsléssel. Megmutatjuk, hogy a becslések minimuma helyett önmagában csak a (7) becslés is élesebb a CGN-módszer becslésénél. A $\kappa := \frac{M}{m} \geq 1$ állandó bevezetésével a vizsgálandó egyenlőtlenség:

$$\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \leq \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}.$$

Az $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ függvény szigorúan monoton növekvő a pozitív félegyenesen. Ha $\kappa > 1$, akkor $\sqrt{\kappa} < \kappa$, tehát $f(\sqrt{\kappa}) < f(\kappa)$, ezért az egyenlőtlenség szigorúan teljesül. Ha $\kappa = 1$, akkor $\sqrt{\kappa} = \kappa$, vagyis a két becslés megegyezik. Egyenlőség tehát pontosan akkor teljesül, ha

$$\kappa = \frac{M}{m} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m = M.$$

Ha $m = M$, akkor az S határai egybeesnek, így

$$m\|p\|^2 \leq \langle Sp, p \rangle \leq m\|p\|^2 \quad \Rightarrow \quad m\|p\|^2 = m\langle p, p \rangle = \langle mIp, p \rangle = \langle Sp, p \rangle \quad (\forall p \in K).$$

Ez pedig az S önadjungáltsága miatt pontosan akkor teljesül, ha $S = mI$. □

2.22. Megjegyzés. Ha a GCR-módszerrel oldunk meg egy egyenletesen pozitív operátorra felírt operátoregyenletet, akkor a GCR-módszer (10) konvergenciabecslése helyett a szimmetria miatt áttérhetünk a MINRES 2.8. állításban megadott becslésére a 2.20. megjegyzés szerint. A CGN-módszerrel összevetve tehát a 2.21. állítás szerint a GCR-módszer konvergenciabecslése mindig jobb lesz (vagy esetleg azonos) a szimmetrikus esetben.

2.23. Következmény. Szimmetrikus Schur-féle komplementeroperátor esetén a CGN-módszer és a MINRES konvergenciabecslése pontosan akkor esik egybe, ha

$$\gamma = \frac{\sqrt{\|A\|}\|B\|}{\sqrt{m_A}}.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha $m_A = \|A\|$ és $\gamma = \|B\|$, ami miatt $A = m_AI$ alakú.

Bizonyítás. A 2.21. állítás szerint azt kell megvizsgálni, hogy $m = M$ mikor teljesül, ahol az 1.2. és 1.3. állítás szerint $m = \frac{\gamma^2}{\|A\|}$ és $M = \frac{\|B\|^2}{m_A}$.

$$\frac{\gamma^2}{\|A\|} = \frac{\|B\|^2}{m_A} \Leftrightarrow m_A \gamma^2 = \|A\| \|B\|^2 \Rightarrow \gamma = \frac{\sqrt{\|A\|}\|B\|}{\sqrt{m_A}}.$$

Mivel $1 \leq \frac{\|A\|}{m_A}$ és $1 \leq \frac{\|B\|}{\gamma}$, ezért $1 \leq \frac{\sqrt{\|A\|}\|B\|}{\sqrt{m_A}\gamma}$, ami csak akkor teljesülhet egyenlőséggel, ha külön-külön $m_A = \|A\|$ és $\gamma = \|B\|$. Az A önadjungáltsága miatt a határok egybeesése a 2.21. állítás bizonyításához hasonlóan itt is magával vonja az $A = m_AI$ feltételt. $\square$

2.2. Az operátormátrixsal felírt nagy rendszerre vonatkozó módszerek

2.2.1. Szimmetrikus indefinit mátrixokra alkalmazható módszerek

Az $Sp = \tilde{f}$ operátoregyenletet megoldó Uzawa-típusú algoritmusok helyett a nyeregpon-feladat speciális alakjának kihasználása nélkül közvetlenül megoldhatjuk az alábbi nagy egyenletrendszert is:

$$Gv := \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ B_h^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^h \\ \mathbf{s}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^h \\ 0 \end{bmatrix} := \mathbf{g},$$

ahol az A_h, B_h mátrix az A és B operátor, az $\mathbf{f}^h$ vektor pedig az f függvény megfelelő vége-selem-módszerrel kapott diszkretizáltjai. A lineáris egyenletrendszer G mátrixa pontosan akkor szimmetrikus, ha A_h szimmetrikus, azonban ettől nem lesz G pozitív definit, sőt igazolható, hogy G indefinit. A koercivitás hiányában az előző alfejezetekben bemutatott egyszerű iteráció és a konjugált gradiens-módszer (közvetlenül) nem használható. A szimmetrikus esetben a bemutatott iteratív módszerek közül a MINRES, a nem szimmetrikus esetben pedig a CGN- és a GCR-módszer alkalmazható a prekondicionált $P^{-1}Gv = P^{-1}\mathbf{g}$ egyenletre, ahol P szimmetrikus pozitív definit mátrix.

A továbbiakban ezen alfejezeten belül feltesszük, hogy az A_h mátrix szimmetrikus.

Ha A_h szimmetrikus és M_h a nyomáshoz tartozó tömegmátrix, akkor a

$$\tilde{P} := \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & M_h \end{bmatrix}$$

prekondicionáló mátrix jó választás lehet, lásd [2] 4.2.1. fejezetét.

2.24. Állítás. Az $M_h^{-1}B_h^T A_h^{-1}B_h$ mátrix sajátértékei az $[m, M]$ intervallumban vannak, ahol m és M az S operátor határai az 1.6. definíció szerinti diszkrét inf-sup-konstanssal.

Bizonyítás. Lásd [2] 3.22. tételét.

2.25. Állítás. A $\tilde{P}^{-1}G$ mátrix sajátértékei az

$$\left[\frac{1 - \sqrt{1+4M}}{2}, \frac{1 - \sqrt{1+4m}}{2} \right] \cup \{1\} \cup \left[\frac{1 + \sqrt{1+4m}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1+4M}}{2} \right]$$

intervallumokban helyezkednek el.

Bizonyítás. A számolás menete a [2] 4.2.1. fejezetét követi. Az alábbi sajátérték-feladatot kell megoldani:

$$\begin{bmatrix} A_h & B_h \\ B_h^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} A_h & 0 \\ 0 & M_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix}.$$

Ez átírható az alábbi alakba:

$$\begin{cases} A_h \mathbf{u} + B_h p = \lambda A_h \mathbf{u} \\ B_h^T \mathbf{u} = \lambda M_h p \end{cases}$$

A $\lambda = 1$ biztosan sajátérték azon sajátvektorokkal, ahol $p = 0$, és $\mathbf{u}$ -ra teljesül az, hogy $B_h^T \mathbf{u} = 0$. Itt kihasználjuk, hogy létezik ilyen $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektor, mert B_h^T téglalapmátrix. Tegyük fel, hogy $\lambda \neq 1$. Ekkor az első egyenletből kifejezhetjük az $\mathbf{u}$ változót:

$$B_h p = (\lambda - 1)A_h \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{u} = (\lambda - 1)^{-1}A_h^{-1}B_h p$$

Helyettesítsük be $\mathbf{u}$ -t a második egyenletbe:

$$(\lambda - 1)^{-1}B_h^T A_h^{-1}B_h p = \lambda M_h p \Rightarrow B_h^T A_h^{-1}B_h p = \lambda (\lambda - 1)M_h p =: \mu M_h p$$

A 2.24. állítás szerint $\mu \in [m, M]$. A $\lambda^2 - \lambda - \mu = 0$ másodfokú egyenlet megoldásával a μ ismeretében kifejezhetők a λ sajátértékek:

$$\lambda_1(\mu) = \frac{1 - \sqrt{1+4\mu}}{2} < 0 \quad \text{és} \quad \lambda_2(\mu) = \frac{1 + \sqrt{1+4\mu}}{2} > 1$$

A keresett intervallumok végpontjait ezek szélsőértékei határozzák meg:

$$\begin{aligned} \min_{\mu \in [m, M]} \lambda_1(\mu) &= \frac{1 - \sqrt{1+4M}}{2}; & \max_{\mu \in [m, M]} \lambda_1(\mu) &= \frac{1 - \sqrt{1+4m}}{2} \\ \min_{\mu \in [m, M]} \lambda_2(\mu) &= \frac{1 + \sqrt{1+4m}}{2}; & \max_{\mu \in [m, M]} \lambda_2(\mu) &= \frac{1 + \sqrt{1+4M}}{2} \end{aligned}$$

Ezek ismeretében már megadható az állításban szereplő intervallumok uniója. □

2.26. Algoritmus. Prekondicionált MINRES a $P^{-1}Gx = P^{-1}g$ megoldására.

- Legyen $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tetszőleges kezdővektor, ahol N a G mátrix oszlopainak száma. Legyen továbbá $v_0 := w_0 = w_1 = \mathbf{0}$, $\gamma_0 := 0$, $v_1 := g - Gx_0$. Oldjuk meg a $Pz_1 = v_1$ egyenletrendszer, majd legyen $\gamma_1 := \sqrt{\langle z_1, v_1 \rangle}$, $\eta := \gamma_1$, $s_0 := s_1 = 0$ és $c_0 := c_1 = 1$.

- Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már $x_{k-1}, v_k, w_k, \gamma_k, z_k, s_k, c_k$ -t ismerjük:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_k := \frac{z_k}{\gamma_k}; \delta_k := \langle Gz_k, z_k \rangle \\ v_{k+1} := Gz_k - \frac{\delta_k}{\gamma_k} v_k - \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}} v_{k-1} \\ Pz_{k+1} := v_{k+1}; \gamma_{k+1} := \sqrt{\langle z_{k+1}, v_{k+1} \rangle} \\ \alpha_0 := c_k \delta_k - c_{k-1} s_k \gamma_k; \alpha_1 := \sqrt{\alpha_0^2 + \gamma_{k+1}^2} \\ \alpha_2 := s_k \delta_k + c_{k-1} c_k \gamma_k; \alpha_3 := s_{k-1} \gamma_k \\ c_{k+1} := \frac{\alpha_0}{\alpha_1}; s_{k+1} := \frac{\gamma_{k+1}}{\alpha_1} \\ w_{k+1} := \frac{z_k - \alpha_3 w_{k-1} - \alpha_2 w_k}{\alpha_1} \\ x_k := x_{k-1} + c_{k+1} \eta w_{k+1} \\ \eta := -s_{k+1} \eta \end{array} \right.$$

2.27. Állítás. Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ olyan konstansok, melyekre $P^{-1}G$ negatív sajátértékei a $[-a, -b]$, pozitív sajátértékei a $[c, d]$ intervallumban helyezkednek el, és a két intervallum hossza megegyezik. Ekkor a 2.26. prekondicionált MINRES lineárisan konvergál, és

$$\|r_{2k}\|_{P^{-1}} \leq 2\|r_0\|_{P^{-1}} \left(\frac{\sqrt{ad} - \sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}} \right)^k.$$

Bizonyítás. Lásd a [2] könyv 4.14. tételét.

2.28. Állítás. A 2.27. állítás teljesül a $\tilde{P}$ prekondicionáló mátrix esetén az

$$a := \frac{\sqrt{1+4m} + \sqrt{1+4M}}{2} - 1; \quad b := \frac{\sqrt{1+4m} - 1}{2}; \quad c := 1; \quad d := \frac{1 + \sqrt{1+4M}}{2}$$

pozitív számokkal.

Bizonyítás. A 2.25. állításban megadott két intervallum hossza megegyezik, azonban a második intervallumot meg kell növelni annyival, hogy a bal végpontja az 1 legyen. Ezzel megkaptuk a c és a d számokat. Az intervallum hossza $\frac{1+\sqrt{1+4m}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{1+4m}}{2}$ -vel nőtt, tehát az első intervallum bal végpontját ennyivel csökkenteni kell, hogy az intervallumok hossza ismét azonos legyen:

$$\frac{1 - \sqrt{1+4M}}{2} - \frac{-1 + \sqrt{1+4m}}{2} = 1 + \frac{-\sqrt{1+4M} - \sqrt{1+4m}}{2}$$

Az a szám ennek az ellentettje lesz, a b pedig az eredeti intervallum jobb végpontjának az ellentettje. $\square$

2.29. Következmény. A $\tilde{P}^{-1}Gv = \tilde{P}^{-1}g$ egyenletre alkalmazott MINRES lineárisan konvergál, méghozzá

$$\|r_{2k}\|_{\tilde{P}^{-1}} \leq 2\|r_0\|_{\tilde{P}^{-1}} \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k, \text{ ahol } \kappa = \frac{(\sqrt{1+4m} + \sqrt{1+4M} - 2)(1 + \sqrt{1+4M})}{2(\sqrt{1+4m} - 1)}.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.27. állításban szereplő konvergenciatételt a 2.28. állításban kiszámolt együttthatókkal, és bevezetjük a $\kappa := \frac{ad}{bc}$ jelölést. $\square$

2.30. Állítás. Legyenek $a \leq b < 0 < c \leq d$ olyan konstansok, melyekre $P^{-1}G$ negatív sajátértékei az $[a, b]$, pozitív sajátértékei a $[c, d]$ intervallumban helyezkednek el. Ekkor a 2.12. prekondicionált CGN-módszer lineárisan konvergál, és

$$\|r_k\|_P \leq \frac{2\|r_0\|_P}{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^k + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^k}, \quad (11)$$

ahol $\xi = \frac{\tilde{M} + \tilde{m}}{\tilde{M} - \tilde{m}}$ az $\tilde{m} := \min\{b^2, c^2\}$ és $\tilde{M} := \max\{a^2, d^2\}$ számokkal.

Bizonyítás. Lásd [5] 4. fejezetét.

2.31. Állítás. A (11) becslés átírható az alábbi alakba:

$$\|r_k\|_P \leq \frac{\|r_0\|_P}{\text{ch}(k \text{arch}(\xi))}. \quad (12)$$

Bizonyítás. Vezessük be az $\eta := \text{arch}(\xi)$ változót! Ezt megtehetjük, hiszen $\xi \geq 1$ biztosan teljesül. Ekkor $\xi = \text{ch}(\eta)$, és így $\sqrt{\xi^2 - 1} = \sqrt{\text{ch}^2(\eta) - 1} = \text{sh}(\eta)$. Ezzel az átalakítással:

$$\|r_k\|_P \leq \frac{2\|r_0\|_P}{(\text{ch}(\eta) + \text{sh}(\eta))^k + (\text{ch}(\eta) - \text{sh}(\eta))^k} = \frac{2\|r_0\|_P}{e^{k\eta} + e^{-k\eta}} = \frac{\|r_0\|_P}{\text{ch}(k\eta)} = \frac{\|r_0\|_P}{\text{ch}(k \text{arch}(\xi))}. \quad \square$$

2.32. Következmény. Bármely $k \in \mathbb{N}^+$ index esetén a (11)-ben szereplő ξ -től függő felső becslés szigorúan monoton csökkenő függvény.

Bizonyítás. Tekintsük a (11)-el ekvivalens (12) alakot! Az arch függvény szigorúan monoton növekvő, ezért a $k \text{arch}$ is az, és pozitív értékeket vesz fel. A ch függvény a pozitív félegyenesen szigorúan monoton növekvő, ezért a $k \text{arch}$ -al vett kompozíciója is az lesz. Mivel a kompozíciófüggvény értékkészlete is pozitív, így ennek reciproka szigorúan monoton csökkenő. $\square$

2.33. Állítás. A 2.30. állítás teljesül a $\tilde{P}$ prekondicionáló mátrix esetén az

$$a := \frac{1 - \sqrt{1 + 4M}}{2}; \quad b := \frac{1 - \sqrt{1 + 4m}}{2}; \quad c := 1; \quad d := \frac{1 + \sqrt{1 + 4M}}{2}$$

pozitív számokkal.

Bizonyítás. A 2.25. állítás közvetlen következménye. $\square$

2.34. Következmény. A $\tilde{P}^{-1}Gv = \tilde{P}^{-1}g$ egyenletre alkalmazott CGN-módszer lineárisan konvergál. A becslésben szereplő $\tilde{M}$ és $\tilde{m}$ konstansok:

$$\tilde{M} = \frac{1 + 2M + \sqrt{1 + 4M}}{2}; \quad \tilde{m} = \begin{cases} \frac{1 + 2m - \sqrt{1 + 4m}}{2} & , \text{ ha } 0 < m < 2 \\ 1 & , \text{ ha } 2 \leq m \end{cases}$$

Bizonyítás. A 2.33. állításban szereplő számokkal kell meghatározni a 2.30. állítás szerint az $\tilde{m} := \min\{b^2, c^2\}$ és $\tilde{M} := \max\{a^2, d^2\}$ számokat.

Mivel az a és a d az $\frac{1}{2}$ -hez képest szimmetrikusan helyezkedik el, ezért $|a| < |d|$ minden esetben, tehát $a^2 < d^2$, és így $\tilde{M} = d^2 = \frac{2 + 4M + 2\sqrt{1 + 4M}}{4} = \frac{1 + 2M + \sqrt{1 + 4M}}{2}$.

Ha $m = 0$, akkor $b = 0$, $m = 2$ esetén pedig $b = -1$. A b az m függvényében szigorúan monoton csökkenő, ezért pozitív m számok esetén b mindig negatív, és ennek megfelelően b^2 szigorúan monoton növekvő pozitív m számokra, és pontosan akkor teljesül $b^2 < c^2 = 1$, ha $m \in (0, 2)$. $\square$

3. A Stokes-feladat

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartomány szakaszonként sima peremmel, és legyen $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ egy adott függvény, mely a tartományban fellépő külső erőhatást írja le. Tekintsük az alábbi másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszert homogén Dirichlet peremfeltétel mellett, ahol az ismeretlen függvények közül $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ a stacionárius áramlás sebességvektorát adja meg, $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pedig a nyomást írja le.

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Ezt az elliptikus PDE-rendszert *Stokes-feladatnak* nevezzük. A $-\Delta$ operátort és a peremfeltételt koordinátánként kell értelmezni.

3.1. Megoldhatóság

A következő állítás segítségével a Stokes-feladat megoldhatóságát visszavezetjük általános nyeregpon-feladatok megoldhatóságára.

3.1. Állítás. A $\nabla : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^2$ operátor adjungáltjára teljesül, hogy

$$\nabla^* \mathbf{u} = -\operatorname{div} \mathbf{u} \quad (\forall \mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2).$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} = -\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u}$ teljesül minden $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2$ és $p \in H^1(\Omega)$ függvényre. Ehhez felhasználjuk az ismert $\operatorname{div}(p\mathbf{u}) = \nabla p \cdot \mathbf{u} + p \operatorname{div} \mathbf{u}$ azonosságot. A bizonyítás befejezéséhez a Gauss–Ostrogradszkij-tételre és a peremfeltétel felhasználására van még szükség:

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(p\mathbf{u}) = \int_{\partial\Omega} (p\mathbf{u}) \cdot \vec{\mathbf{n}} \, dS = 0. \quad \square$$

Ezek alapján a Stokes-feladat az alábbi nyeregpon-feladat alakjában vizsgálható:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla^* \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Mivel tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ konstans esetén $\nabla p = \nabla(p + c)$, ezért a (14) nyeregpon-feladat egyértelmű megoldhatóságához szükséges, hogy bevezessük a megszorított

$$\dot{L}^2(\Omega) := \{p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p = 0\} \quad (15)$$

teret. A Green-formula és a 3.1. állítás felhasználásával a Stokes-feladat gyenge megoldását az alábbi módon definiálhatjuk:

3.2. Definíció. Az $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times \dot{L}^2(\Omega)$ függvénpárt a Stokes-feladat *gyenge megoldásának* nevezzük, ha

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} & (\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2) \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & (\forall q \in \dot{L}^2(\Omega)) \end{cases},$$

ahol $\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} := \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2$ a Frobenius-skalárszorzat.

3.3. Megjegyzés. Az általános nyeregpont-feladat bilineáris formákkal vett (4) szerinti felírásában a Stokes-feladat esetében $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$, $b(p, \mathbf{v}) = -\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}$, $\phi \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$, a megfelelő Hilbert-terek pedig $H = H_0^1(\Omega)^2$ és $K = \dot{L}^2(\Omega)$. Az a szimmetrikus korlátos koercív bilineáris forma $m_A = \|a\| = 1$ állandókkal, a b korlátos bilineáris forma $\|b\| = 1$ állandóval, a ϕ korlátos lineáris funkcionál, lásd [1] 12.1.2. fejezetét.

3.4. Definíció. A Stokes-feladathoz tartozó *inf-sup-feltétel* az, hogy létezik olyan $\gamma > 0$ konstans, melyre

$$\inf_{\substack{p \in \dot{L}^2(\Omega) \\ p \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^2 \\ \mathbf{u} \neq 0}} \frac{-\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u}}{\|p\|_{L^2} \|\mathbf{u}\|_{H_0^1}} = \gamma > 0, \quad (16)$$

ahol $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H_0^1} := \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$ és $\|\mathbf{u}\|_{H_0^1} := \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{H_0^1}}$.

3.5. Állítás. Bármely $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ függvény esetén létezik egyetlen gyenge megoldása a Stokes-feladatnak.

Bizonyítás. A bizonyítás a bilineáris formákkal megadott általános nyeregpont-feladatok 1.5. megoldhatósági tételén alapul. Megmutatható, hogy az inf-sup-feltétel a Stokes-feladat esetében teljesül. A bizonyítás részletei megtalálhatóak a [1] könyv 12.1.2. fejezetében. $\square$

Fontos megjegyezni, hogy a γ inf-sup-konstans az Ω tartománytól függ, és nincs rá általános képlet, azonban értéke becsülhető, és speciális tartományokon meg is adható pontosan. Ennek vizsgálatával később külön foglalkozunk, mert a dolgozatban szereplő iterációs módszerek konvergenciája erősen függ a γ értékétől.

3.2. Az Uzawa- és Krylov–Uzawa-algoritmus

Uzawa-algoritmusnak nevezzük az $S p = \tilde{f}$ operátoregyenletre alkalmazott 2.1. egyszerű iterációt, ahol most $A = -\Delta$ és $B = \nabla$, így $S p := -\operatorname{div}(-\Delta)^{-1} \nabla p$ és $\tilde{f} := -\operatorname{div}(-\Delta)^{-1} \mathbf{f}$. Az $S : \dot{L}^2(\Omega) \rightarrow \dot{L}^2(\Omega)$ Schur-féle komplementeroperátor egyenletesen pozitív és korlátos, határai pedig az 1.2. és 1.3. állítás illetve a 3.3. megjegyzés szerint:

$$\gamma^2 \|p\|_{L^2}^2 \leq \langle S p, p \rangle_{L^2} \leq \|p\|_{L^2}^2 \quad (\forall p \in \dot{L}^2(\Omega)), \quad (17)$$

ahol $\gamma > 0$ az inf-sup-konstans az Ω tartományon. Az egyszerű iterációnál tetszőleges $p_0 \in \dot{L}^2(\Omega)$ függvényből kiindulva az iterációs lépés:

$$p_{k+1} := p_k - \alpha(S p_k - \tilde{f}),$$

ahol α a lépésköz nagyságát meghatározó választható paraméter. Ha bevezetjük az

$$\mathbf{u}_{k+1} := (-\Delta)^{-1}(\mathbf{f} - \nabla p_k) \quad (18)$$

változót, akkor az Uzawa-algoritmust operátorszinten a 3.6. algoritmus szerinti alakban írhatjuk fel.

3.6. Algoritmus. *Uzawa-algoritmus operátorszinten.*

- Legyen $p_0 \in \dot{L}^2(\Omega)$ tetszőleges kezdőfüggvény és $\alpha > 0$ adott paraméter.

- Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már p_k -t ismerjük:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u}_{k+1} + \nabla p_k = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}_{k+1}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$p_{k+1} := p_k - \alpha \operatorname{div} \mathbf{u}_{k+1}$$

A 2.3. következmény szerint a 3.3. megjegyzésben szereplő konstansokkal számolva az iteráció optimális α paramétere $\alpha_{\text{opt}} := \frac{2}{1+\gamma^2}$, mely lineáris konvergenciát eredményez a $q := \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}$ konvergenciahányadossal, azaz létezik olyan $c > 0$ konstans, hogy

$$\|p_k - p^*\|_{L^2} \leq c \left(\frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2} \right)^k. \quad (19)$$

Amennyiben γ értéke 0-hoz közeli, a konvergenciahányados 1-hez közeli értéket vesz fel, ami lassú konvergenciát eredményez. A konvergenciát gyorsíthatjuk, ha az operátoregyenletet másik iterációs módszer segítségével oldjuk meg. Amennyiben az egyszerű iteráció helyett a 2.4. konjugált gradiens-módszert használjuk, megkapjuk az ún. Krylov–Uzawa-algoritmust. A (18)-ban bevezetett $\mathbf{u}_{k+1}$ és a $\mathbf{z}_k := \Delta^{-1} \nabla d_k$ változó segítségével az algoritmus [6] alapján az alábbi formában írható fel:

3.7. Algoritmus. Krylov–Uzawa-algoritmus operátorszinten.

- Legyen $p_0 \in \dot{L}^2(\Omega)$ tetszőleges kezdőfüggvény.

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}_0|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$d_0 := r_0 = \operatorname{div} \mathbf{u}_0$$

- Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már $p_k, \mathbf{u}_k, d_k, r_k$ -t ismerjük:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{z}_k + \nabla d_k = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_k|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_k := -\frac{\|r_k\|_{L^2}^2}{\langle \operatorname{div} \mathbf{z}_k, d_k \rangle_{L^2}}$$

$$p_{k+1} := p_k + \alpha_k d_k$$

$$\mathbf{u}_{k+1} := \mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{z}_k$$

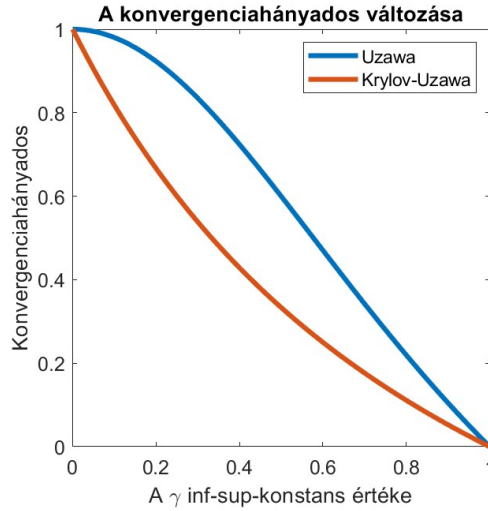
$$r_{k+1} := r_k + \alpha_k \operatorname{div} \mathbf{z}_k$$

$$\beta_k := \frac{\|r_{k+1}\|_{L^2}^2}{\|r_k\|_{L^2}^2}$$

$$d_{k+1} := r_{k+1} + \beta_k d_k$$

Az Uzawa-algoritmussal összevetve a Krylov–Uzawa-algoritmus több változót használ, és az α_k, β_k együtthatók meghatározása is növeli az iterációnkénti számítási költséget, azonban a konvergenciahányados ennél a módszernél a 2.6. következmény szerint $\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$, amely az 1. ábra szerint tetszőleges $\gamma \in (0, 1)$ esetén kisebb az Uzawa-algoritmusnál szereplő hányadosnál.

3.8. Megjegyzés. A p_k -ra vonatkozó L^2 -beli konvergenciabecslés teljesül az $\mathbf{u}_{k+1}$ -re is a H_0^1 -normában, azaz $\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}^*\|_{H_0^1} \leq \|p_k - p^*\|_{L^2}$. Ez igazolható a [6] végén található számolással analóg módon.



1. ábra. Az Uzawa- és a Krylov–Uzawa-algoritmus konvergenciahányadosa a γ függvényében.

3.3. A nagy rendszer megoldása

A 2.2.1. fejezet szerint a nagy lineáris egyenletrendszert szimmetrikus esetben megoldhatjuk a MINRES- vagy a CGN-módszerrel. A javasolt $\tilde{P}$ prekondicionáló mátrix esetén a két módszer konvergenciabecslése itt is a $m = \gamma^2$ és $M = 1$ állandóktól függ. Ebben az alfejezetben azt vizsgáljuk, hogy a Stokes-feladat esetén hogyan néznek ki a becslések, és a két becslés hogyan viszonyul egymáshoz a γ függvényében.

3.9. Állítás. *Stokes-feladat esetén a $\tilde{P}^{-1}Gv = \tilde{P}^{-1}g$ egyenletre alkalmazott MINRES lineárisan konvergál, méghozzá páros k indexekre*

$$\|r_k\|_{\tilde{P}^{-1}} \leq 2\|r_0\|_{\tilde{P}^{-1}} \left(\frac{\sqrt{\kappa_1} - 1}{\sqrt{\kappa_1} + 1} \right)^{\frac{k}{2}}, \text{ ahol } \kappa_1 = \frac{(\sqrt{1+4\gamma^2} + \sqrt{5} - 2)(1 + \sqrt{5})}{2(\sqrt{1+4\gamma^2} - 1)}. \quad (20)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.29. következményt az $m = \gamma^2$ és $M = 1$ állandókkal. $\square$

3.10. Állítás. *Stokes-feladat esetén a $\tilde{P}^{-1}Gv = \tilde{P}^{-1}g$ egyenletre alkalmazott CGN-módszer lineárisan konvergál, méghozzá*

$$\|r_k\|_{\tilde{P}} \leq \frac{\|r_0\|_{\tilde{P}}}{\text{ch}\left(k \text{ arch}\left(\frac{\kappa_2+1}{\kappa_2-1}\right)\right)}, \text{ ahol } \kappa_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + 2\gamma^2 - \sqrt{1+4\gamma^2}}. \quad (21)$$

Bizonyítás. A 2.30. és 2.31. állítást használjuk a 2.34. következménnyel és az $m = \gamma^2$ ill. $M = 1$ állandókkal. Mivel $\gamma^2 \leq \frac{1}{2} < 2$ (lásd (24)), ezért az $m < 2$ esetet kell használni $\tilde{m}$ megadásánál. $\square$

3.11. Megjegyzés. A prekondicionált esetben a MINRES-el előállított reziduális hibavektorok $\tilde{P}^{-1}$ normája megegyezik a GCR-módszerrel kapott reziduális hibavektorok $\tilde{P}$ -normájával, ha az egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus.

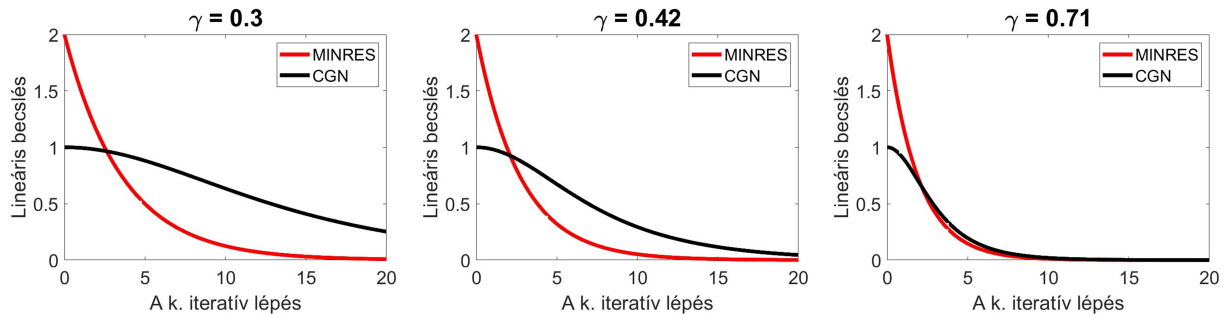
3.12. Állítás. *Legyen $0 < \gamma \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ az Ω tartomány inf-sup-konstansa. Ekkor létezik egyértelműen egy $L_\gamma > 1$ szám, amire teljesül, hogy a CGN-módszer (21) becslése és a MINRES (20) becslése megegyezik $k = L_\gamma$ esetén (a $k \in \mathbb{R}^+$ kiterjesztés mellett), és a $k = 0, 1, \dots, \lfloor L_\gamma \rfloor$ indexekre a CGN-módszer becslése jobb a MINRES becslésénél, a $k = \lfloor L_\gamma \rfloor, \dots, N$ indexekre pedig a MINRES becslése a jobb. Ha $\gamma \in [0.26, 0.71]$, akkor $L_\gamma \in [1.9, 2.94]$.*

Bizonyítás. A vizsgálandó függvények komplikáltsága miatt az állítást MATLAB-ban igazoltam numerikus számítások segítségével. A 2. ábrán látható néhány γ értékre a MINRES- és a CGN-módszer lineáris becslése. Ugyanez látható logaritmikus skálán a 3. ábrán. Az ábrákon jól látszik az L_γ metszéspont, és a becslések egymáshoz képesti viszonya a metszéspont előtt és után. Az L_γ értékkészlete látható a 4. ábrán a $[0.26, 0.71]$ intervallumban.

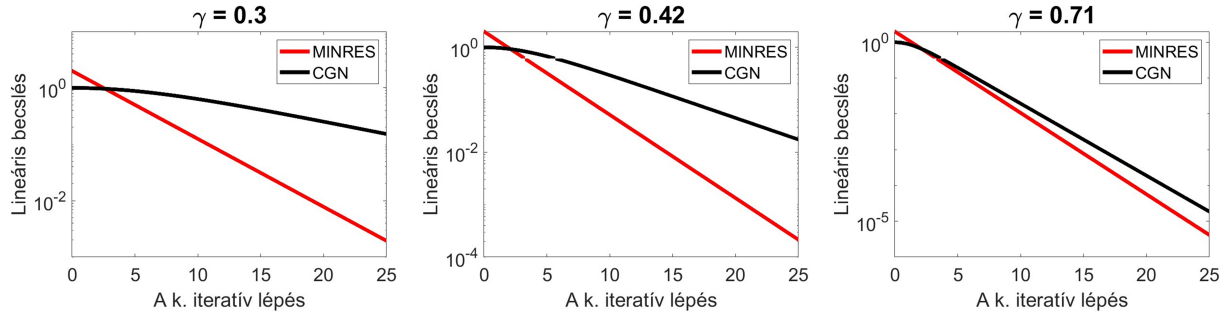
Az $L_\gamma > 1$ igazolásához ellenőrizhetjük, hogy $k = 0$ és $k = 1$ esetén még biztosan a CGN-módszer becslése a jobb. A $k = 0$ esetben (a kezdeti reziduális hibától eltekintve) a grafikonokon is látszik, hogy a CGN becslése 1, a MINRES becslése pedig mindig 2. A $k = 1$ esetben pedig azt kell ellenőriznünk, hogy

$$\frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2 + 1} < 2\sqrt{\frac{\sqrt{\kappa_1} - 1}{\sqrt{\kappa_1} + 1}}.$$

Ennek numerikus ellenőrzése szintén a 4. ábrán látható. □



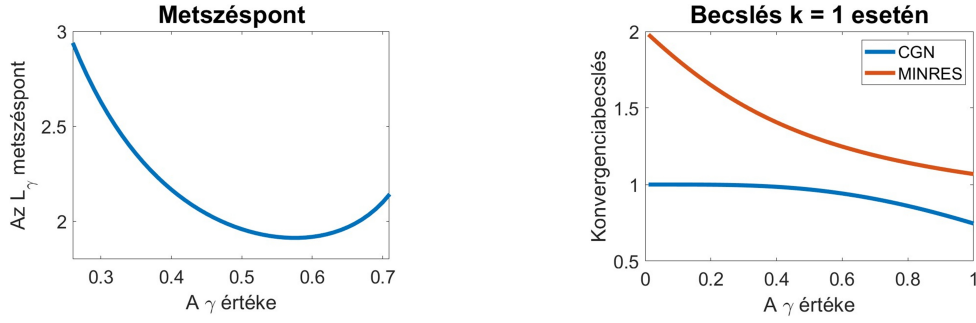
2. ábra. A MINRES- és a CGN-módszer lineáris becslése $\gamma = 0.3, 0.42, 0.71$ értékekre.



3. ábra. A MINRES- és a CGN-módszer lineáris becslése logaritmikus skálán ábrázolva $\gamma = 0.3, 0.42, 0.71$ értékekre.

3.13. Állítás. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}^+$ indexre a CGN-módszer (21) becslése és a MINRES (20) becslése szigorúan monoton csökken a γ függvényében.

Bizonyítás. A MINRES esetében az $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ szigorú monoton növekedése miatt elég $\kappa_1(\gamma)$ szigorú monoton csökkenését megmutatni. Ez rögtön látszik a $\kappa_1(\gamma) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{1+4\gamma^2-1}} \right)$ átirásból. A CGN esetében pedig a $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ függvény szigorú monoton csökkenése és a 2.32. következmény miatt szintén azt kell megmutatni, hogy $\kappa_2(\gamma)$ szigorúan monoton csökkenő. Ehhez elég megmutatni, hogy a $h(x) = \frac{1}{1+x-\sqrt{1+2x}}$ szigorúan monoton csökkenő. Viszont az $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ szigorú monoton csökkenése miatt elég megmutatni a $z(x) = x - \sqrt{1+2x}$ szigorú monoton növekedését. Kiszámíthatjuk, hogy $z'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$, ami pozitív, ha $x > 0$, tehát z a vizsgált intervallumon valóban szigorúan monoton növekvő. □



4. ábra. Bal oldalt látható a MINRES- és a CGN-módszer lineáris becslésének L_γ metszéspontja a $\gamma \in [0.26, 0.71]$ intervallumban, jobb oldalt pedig a két módszer lineáris becslése a $k = 1$ esetben γ függvényében.

3.4. Numerikus tesztek

Az 1.2. alfejezetben bemutatott Galjorkin-módszert használhatjuk a Stokes-feladat numerikus megoldására. Ehhez először olyan $V_h \subset H_0^1(\Omega)^2$ és $P_h \subset \dot{L}^2(\Omega)$ altérket kell keresni, ahol teljesül az 1.6. definíció szerinti LBB-feltétel. Jelölje P_k az Ω tartomány egy alkalmas háromszögelésén azon függvények halmazát, amelyek a háromszögekre megszorítva k -adfokú polinomok. Legyen továbbá $\hat{P}_k$ a P_k megszorítása azon függvényekre, melyekre $\int_\Omega p = 0$ is teljesül.

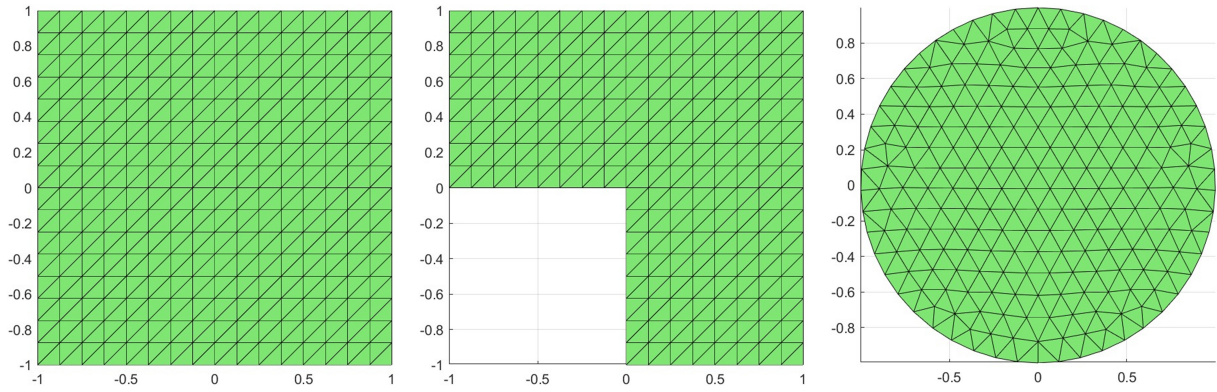
Ismert, hogy a $(P_1, \hat{P}_0)$ altérpárra nem teljesül az LBB-feltétel, azonban a $(P_2, \hat{P}_1)$ párra már igen, lásd [2] 3.3. fejezetét. Ebben az esetben tehát V_h koordinátáinként és háromszögenként másodfokú polinomokból áll, P_h pedig olyan nulla átlagú függvényeket tartalmaz, melyek a háromszögeken elsőfokú polinomok. Ezeket *Taylor–Hood-elemeknek* nevezzük, és a numerikus teszteknel ezt az altérpárt használjuk. Megmutatható, hogy ha a megoldás elég sima, akkor ezekkel az elemekkel a végelem-módszer konvergenciájának a sebessége $O(h^2)$, ahol h a háromszögelés finomságát meghatározó paraméter. Megjegyzendő, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{N}^+$ esetén a $(P_{k+1}, \hat{P}_k)$ altérre is teljesül az LBB-feltétel. Ezeket általánosított Taylor–Hood-elemeknek nevezzük.

A numerikus megoldáshoz a [10] MATLAB programnyelvet használtam, a programok alapját pedig a [9] iFEM programcsomag képezte. Ez tartalmazta a Stokes-feladat diszkretizációját Taylor–Hood-elemekkel négyzeten, L-alakú tartományon és körön egyaránt, a lineáris egyenletrendszer megoldását néhány beépített módszerrel, és a numerikus megoldás ábrázolását a p^h -ra és az $\mathbf{u}^h$ két komponensére külön. Ezeket az alapfunkciókat kiegészítettem egyrészt a dolgozatban bemutatott iteratív módszerek programozásával, másrészt ábrázoltam az $\mathbf{u}^h$ -t vektormezőként és áramvonalak segítségével is. Emellett ábrázoltam az $\mathbf{f}$ vektormezőt is, hogy össze lehessen hasonlítani az $\mathbf{u}^h$ sebességmezővel.

A végelem-módszer implementációjának első lépése, hogy el kell készíteni az Ω tartomány háromszögelését. Három tartomány esetében végeztem teszteket:

1. $\Omega_1 := [-1, 1]^2$ egy négyzet, egyenletes háromszögeléssel.
2. $\Omega_2 := [-1, 1]^2 \setminus [-1, 0]^2$ egy L-alakú tartomány, egyenletes háromszögeléssel.
3. $\Omega_3 := B_1(\mathbf{0})$ az origó közepű egységkör, a beépített közelítő háromszögeléssel.

Az $n \in \mathbb{N}$ paraméter a rácsfinomságot adja meg. Négyzet alakú tartomány esetén ez soronként és oszloponként 2^{n+1} db négyzet háromszögekre bontását jelenti az átlók mentén a $\hat{P}_1$ altérben, a P_2 altérben pedig a még egyvel sűrűbb 2^{n+2} -es rácsfelosztást.



5. ábra. Az Ω_1 , Ω_2 és Ω_3 tartomány háromszögelése $n = 3$ paraméter mellett.

A következő lépés az, hogy el kell készíteni a diszkretizációs mátrixokat. Ehhez választunk egy alkalmas $\{\psi_k\} \subset P_2$ és $\{\phi_k\} \subset \mathring{P}_1$ bázist mindkét alterben, és a megoldást ezen bázisfüggvények lineáris kombinációjaként keressük alkalmas c^h és s^h együtthatóvektorokkal. A megfelelő bilineáris formákba a tesztfüggvény helyére az adott bázisfüggvényt helyettesítve:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^h : \nabla \psi_i &= \sum_{j=1}^{N_u} c_j \int_{\Omega} \nabla \psi_j : \nabla \psi_i =: \sum_{j=1}^{N_u} c_j a_{ij} \quad (i = 1, \dots, N_u) \\ - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \psi_i &= \sum_{j=1}^{N_p} s_j \int_{\Omega} -(\phi_j \partial_x \psi_i + \phi_j \partial_y \psi_i) =: \sum_{j=1}^{N_p} s_j b_{ij} \quad (i = 1, \dots, N_u) \end{aligned}$$

Ezek meghatározzák az A_h és B_h merevségi mátrixokat. A mátrix elemeinek meghatározásához integrálokat kell számolnunk, azonban ezeket nem számítjuk ki pontosan, hanem egy alkalmas másodrendű kvadrátúra-formula segítségével közelítjük. A lineáris egyenletrendszert a (6) alakban írhatjuk fel, ahol a jobb oldalra az $f_i = \int_{\Omega} f \psi_i$ ($i = 1, \dots, N_u$) integrálok közelítése kerül.

A nagy lineáris egyenletrendszer megoldása helyett használhatjuk az Uzawa-algoritmust is végeselemes diszkretizációval. Ehhez szükség van még a $\mathring{P}_1$ -beli M_h tömegmátrixra, melynek komponenseit az

$$m_{ij} := \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \quad (i, j = 1, \dots, N_p)$$

integrálok közelítő meghatározásával tudjuk megadni.

A programunk teszteléséhez először olyan feladatokat fogunk vizsgálni, ahol ismerjük a pontos megoldást, és ennek segítségével mindhárom tartomány esetében teszteljük a végeselem-módszer konvergenciáját. A lineáris egyenletrendszert a 3.3. alfejezetben ismertetett valamelyik iteratív módszerrel megoldhatjuk, vagy használhatjuk a MATLAB beépített egyenletmegoldóját is. A kidolgozott feladatokat a 3.14., 3.15. és 3.16. példa tartalmazza, numerikus megoldásuk a MATLAB beépített egyenletmegoldójával a 6., 7. és 8. ábrán látható, a konvergenciájukat jellemző adatsorokat pedig a 2., 3. és 4. táblázat szemlélteti.

A példák megadásánál nehézséget jelentett, hogy olyan $\mathbf{u}$ függvényt kellett találni, ami az adott tartomány peremén teljesíti a homogén Dirichlet peremfeltételt, és emellett divergenciamentes is, míg a p függvény megválasztásánál arra kellett figyelni, hogy az adott tartományon vett integrálja nulla legyen, amit megfelelő páratlansági és antiszimmetrikus tulajdonságok biztosításával lehetett elérni.

3.14. Példa. Tekintsük az $\Omega_1 = [-1, 1]^2$ négyzetet, és az alábbi $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és p függvényt:

$$u_1(x, y) := (x^2 - 1)^2(y^2 - 1)y; \quad u_2(x, y) := -(x^2 - 1)(y^2 - 1)^2x; \quad p(x, y) := \frac{x^3}{3}.$$

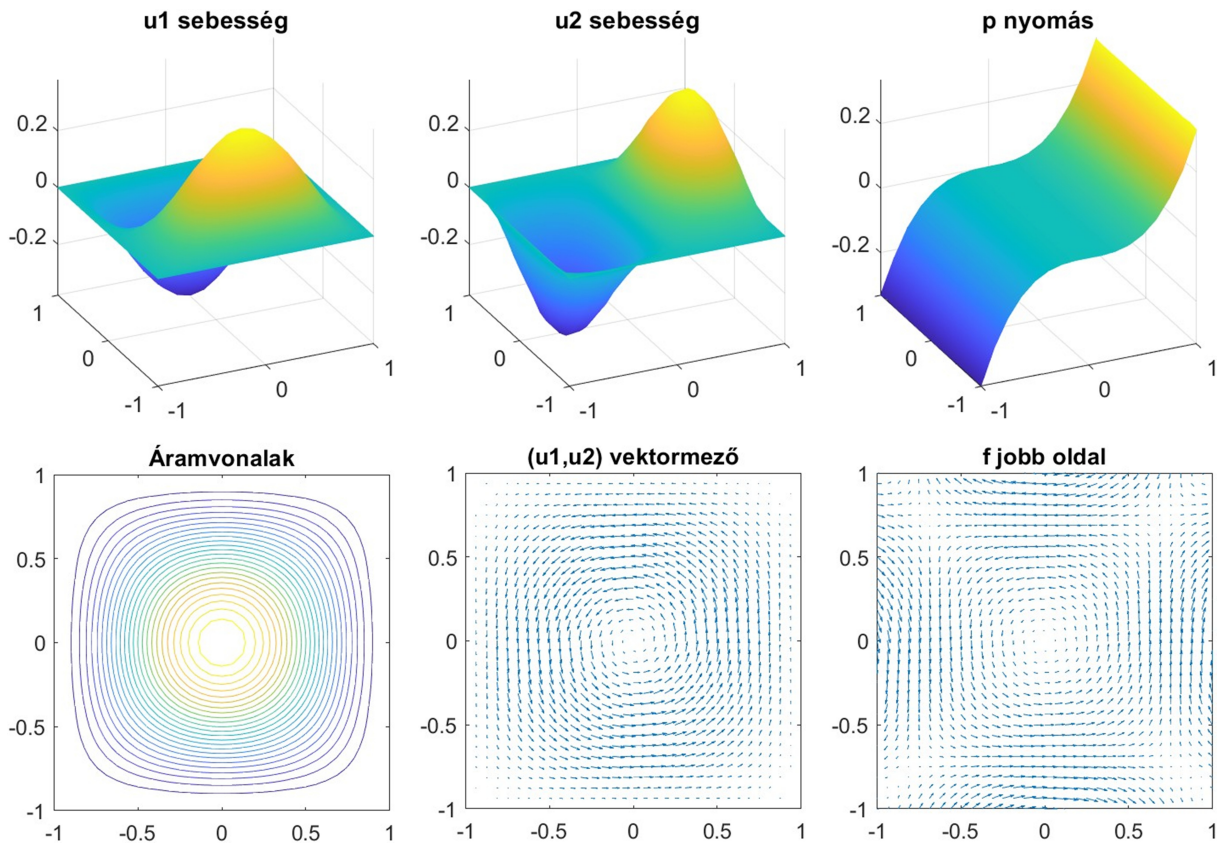
A homogén Dirichlet peremfeltétel teljesül, mert $\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{0}$, ha $x = \pm 1$ vagy $y = \pm 1$.

Számoljuk ki az u_1, u_2, p függvények parciális deriváltjait!

$$\begin{aligned} \partial_x u_1(x, y) &= 4(x^2 - 1)(y^2 - 1)xy; & \partial_x u_2(x, y) &= -(3x^2 - 1)(y^2 - 1)^2; \\ \partial_y u_1(x, y) &= (x^2 - 1)^2(3y^2 - 1); & \partial_y u_2(x, y) &= -4(x^2 - 1)(y^2 - 1)xy; \\ \partial_x^2 u_1(x, y) &= 4(3x^2 - 1)(y^2 - 1)y; & \partial_x^2 u_2(x, y) &= -6x(y^2 - 1)^2; \\ \partial_y^2 u_1(x, y) &= 6y(x^2 - 1)^2; & \partial_y^2 u_2(x, y) &= -4(x^2 - 1)(3y^2 - 1)x; \\ \partial_x p(x, y) &= x^2; & \partial_y p(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Megállapítható, hogy $\text{div } \mathbf{u} = \partial_x u_1 + \partial_y u_2 = 0$. A jobb oldalon szereplő $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ függvény:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= -\partial_x^2 u_1(x, y) - \partial_y^2 u_1(x, y) + \partial_x p(x, y) = -4(3x^2 - 1)(y^2 - 1)y - 6y(x^2 - 1)^2 + x^2; \\ f_2(x, y) &:= -\partial_x^2 u_2(x, y) - \partial_y^2 u_2(x, y) + \partial_y p(x, y) = 6x(y^2 - 1)^2 + 4(x^2 - 1)(3y^2 - 1)x + 0. \end{aligned}$$



6. ábra. A 3.14. példa numerikus megoldása $n = 2$ paraméter mellett.

3.15. Példa. Tekintsük az $\Omega_2 = [-1, 1]^2 \setminus [-1, 0]^2$ L-alakú tartományt, és az alábbi $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és p függvényt:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &:= (1 - \cos(2\pi x)) \sin(2\pi y); & u_2(x, y) &:= -(1 - \cos(2\pi y)) \sin(2\pi x); \\ p(x, y) &:= \sin(\pi x) \cos(\pi y). \end{aligned}$$

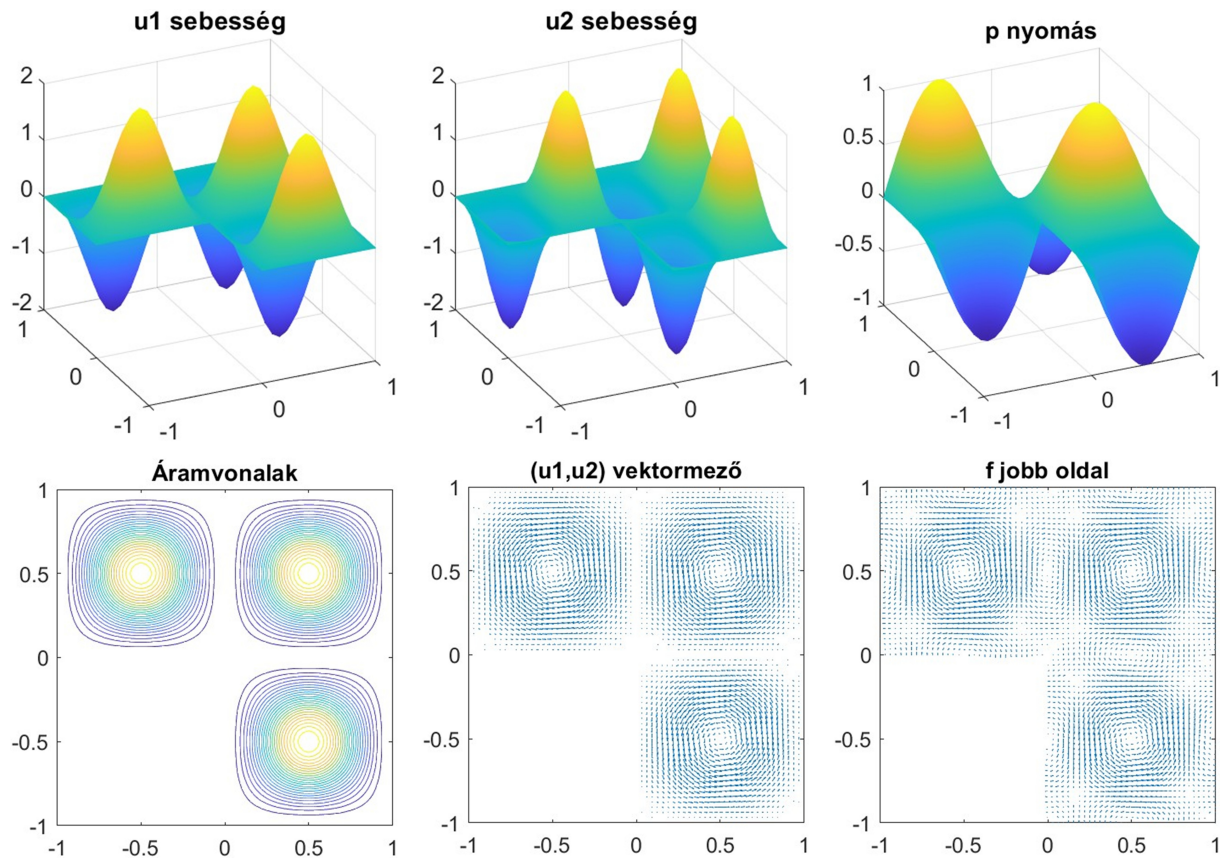
A homogén Dirichlet peremfeltétel teljesül, mert $\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{0}$, ha $x \in \{0, \pm 1\}$ vagy $y \in \{0, \pm 1\}$.

Számoljuk ki az u_1, u_2, p függvények parciális deriváltjait!

$$\begin{aligned} \partial_x u_1(x, y) &= 2\pi \sin(2\pi x) \sin(2\pi y); & \partial_x u_2(x, y) &= -2\pi(1 - \cos(2\pi y)) \cos(2\pi x); \\ \partial_y u_1(x, y) &= 2\pi(1 - \cos(2\pi x)) \cos(2\pi y); & \partial_y u_2(x, y) &= -2\pi \sin(2\pi y) \sin(2\pi x); \\ \partial_x^2 u_1(x, y) &= 4\pi^2 \cos(2\pi x) \sin(2\pi y); & \partial_x^2 u_2(x, y) &= 4\pi^2(1 - \cos(2\pi y)) \sin(2\pi x); \\ \partial_y^2 u_1(x, y) &= -4\pi^2(1 - \cos(2\pi x)) \sin(2\pi y); & \partial_y^2 u_2(x, y) &= -4\pi^2 \cos(2\pi y) \sin(2\pi x); \\ \partial_x p(x, y) &= \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y); & \partial_y p(x, y) &= -\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y). \end{aligned}$$

Megállapítható, hogy $\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial_x u_1 + \partial_y u_2 = 0$. A jobb oldalon szereplő $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ függvény:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= 4\pi^2(1 - 2\cos(2\pi x)) \sin(2\pi y) + \pi \cos(\pi x) \cos(\pi y); \\ f_2(x, y) &:= -4\pi^2(1 - 2\cos(2\pi y)) \sin(2\pi x) - \pi \sin(\pi x) \sin(\pi y). \end{aligned}$$



7. ábra. A 3.15. példa numerikus megoldása $n = 3$ paraméter mellett.

3.16. Példa. Tekintsük az $\Omega_3 = B_1(\mathbf{0})$ egységkörlapot, és az alábbi $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és p függvényt:

$$u_1(x, y) := -y(1 - x^2 - y^2); \quad u_2(x, y) := x(1 - x^2 - y^2); \quad p(x, y) := \arctan(x) \arctan(y).$$

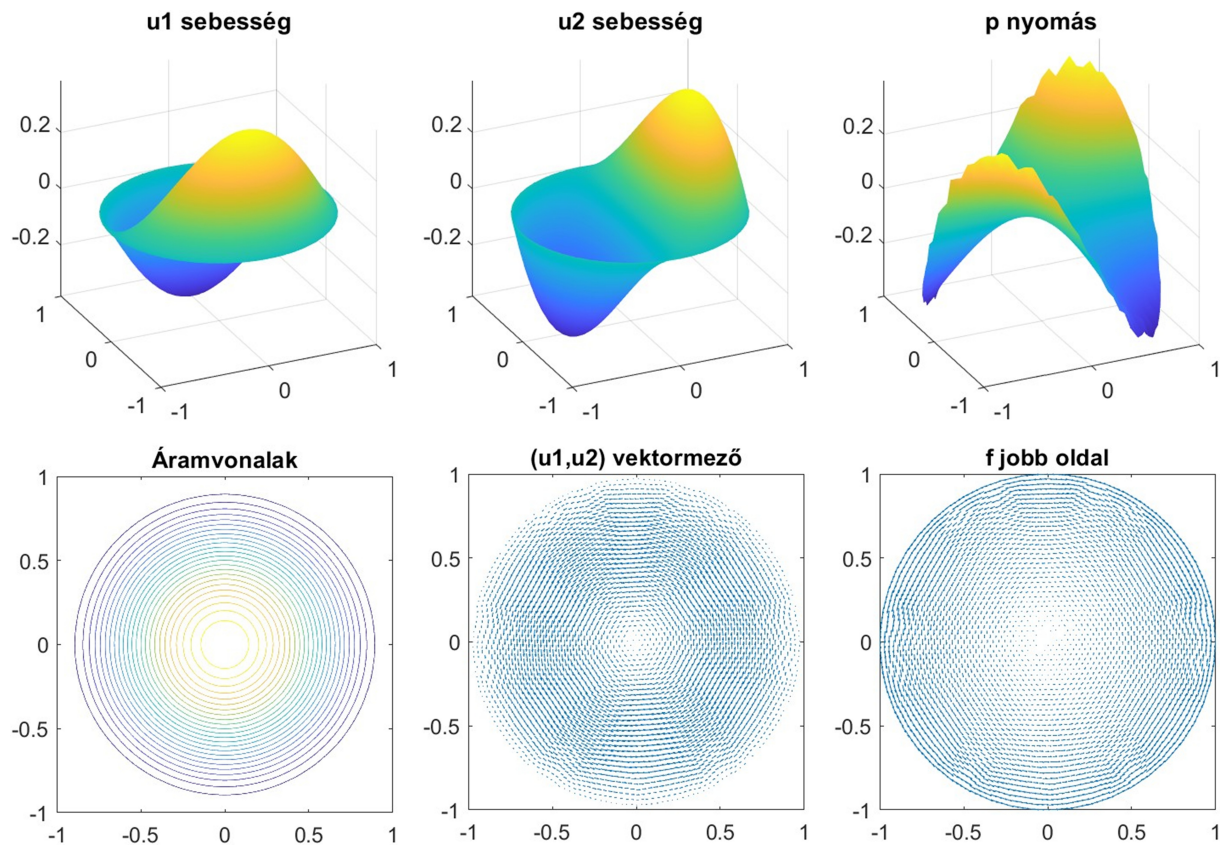
A homogén Dirichlet peremfeltétel teljesül, mert $\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{0}$, ha $x^2 + y^2 = 1$.

Számoljuk ki az u_1, u_2, p függvények parciális deriváltjait!

$$\begin{aligned} \partial_x u_1(x, y) &= 2xy; & \partial_x u_2(x, y) &= 1 - 3x^2 - y^2; \\ \partial_y u_1(x, y) &= -1 + x^2 + 3y^2; & \partial_y u_2(x, y) &= -2xy; \\ \partial_x^2 u_1(x, y) &= 2y; & \partial_x^2 u_2(x, y) &= -6x; \\ \partial_y^2 u_1(x, y) &= 6y; & \partial_y^2 u_2(x, y) &= -2x; \\ \partial_x p(x, y) &= \frac{\arctan(y)}{1 + x^2}; & \partial_y p(x, y) &= \frac{\arctan(x)}{1 + y^2}. \end{aligned}$$

Megállapítható, hogy $\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial_x u_1 + \partial_y u_2 = 0$. A jobb oldalon szereplő $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ függvény:

$$f_1(x, y) := -8y + \frac{\arctan(y)}{1 + x^2}; \quad f_2(x, y) := 8x + \frac{\arctan(x)}{1 + y^2}.$$



8. ábra. A 3.16. példa numerikus megoldása $n = 3$ paraméter mellett.

n	0	1	2	3	4	5	6
$\ \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^*\ _{H_0^1}$	0.0717	0.0118	0.00171	2.29e-04	2.97e-05	3.79e-06	4.78e-07
$\mathbf{u}^h$ rendje		2.60	2.80	2.89	2.95	2.97	2.99
$\ p^h - p^*\ _{L^2}$	0.0960	0.0147	0.00309	7.54e-04	1.88e-04	4.70e-05	1.17e-05
p^h rendje		2.71	2.25	2.036	2.0038	2.00031	2.00000

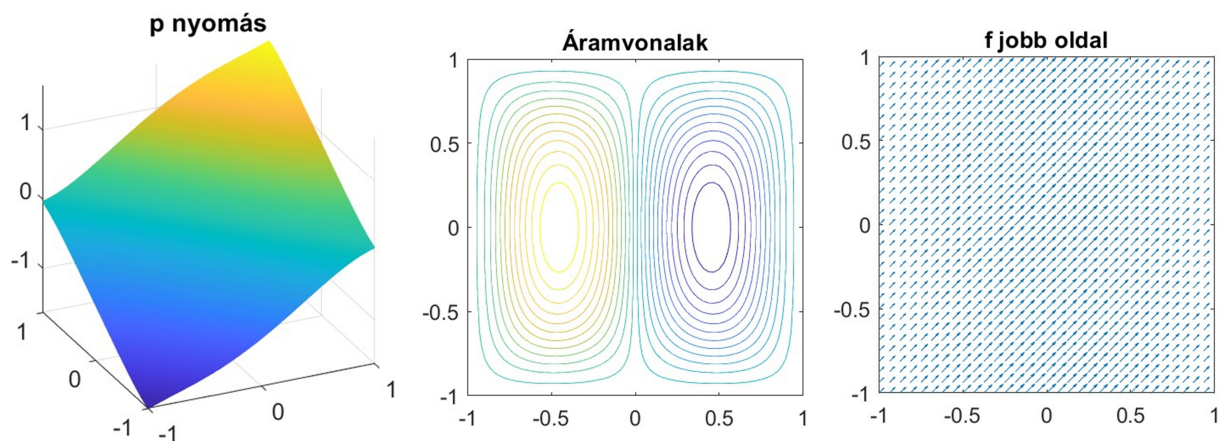
2. táblázat. A numerikus és a pontos megoldás rácspontokon vett különbségének a normája és a konvergencia rendje különböző n paraméterekre a 3.14. példában.

n	0	1	2	3	4	5	6
$\ \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^*\ _{H_0^1}$	3.104	0.783	0.131	0.0178	0.00229	2.89e-04	3.63e-05
$\mathbf{u}^h$ rendje		1.99	2.58	2.88	2.96	2.99	2.99
$\ p^h - p^*\ _{L^2}$	2.284	0.341	0.0361	0.00657	0.00157	3.89e-04	9.72e-05
p^h rendje		2.74	3.24	2.46	2.069	2.0081	2.0010

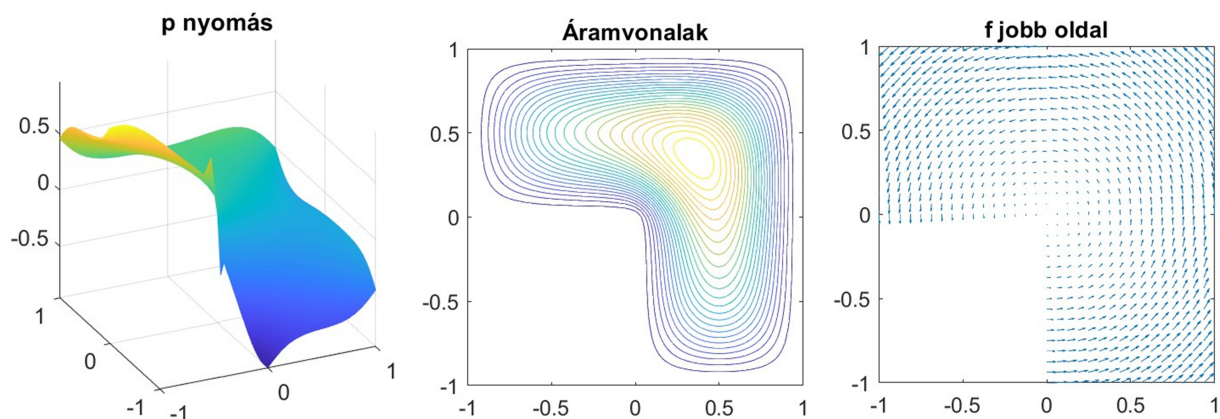
3. táblázat. A numerikus és a pontos megoldás rácspontokon vett különbségének a normája és a konvergencia rendje különböző n paraméterekre a 3.15. példában.

n	0	1	2	3	4	5	6
$\ \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^*\ _{H_0^1}$	1.446	0.608	0.185	0.0591	0.0209	0.00737	0.00260
$\mathbf{u}^h$ rendje		1.25	1.72	1.64	1.501	1.503	1.502
$\ p^h - p^*\ _{L^2}$	0.00431	0.0329	0.0159	0.00655	0.00218	7.48e-04	2.64e-04
p^h rendje		-2.93	1.04	1.29	1.59	1.54	1.504

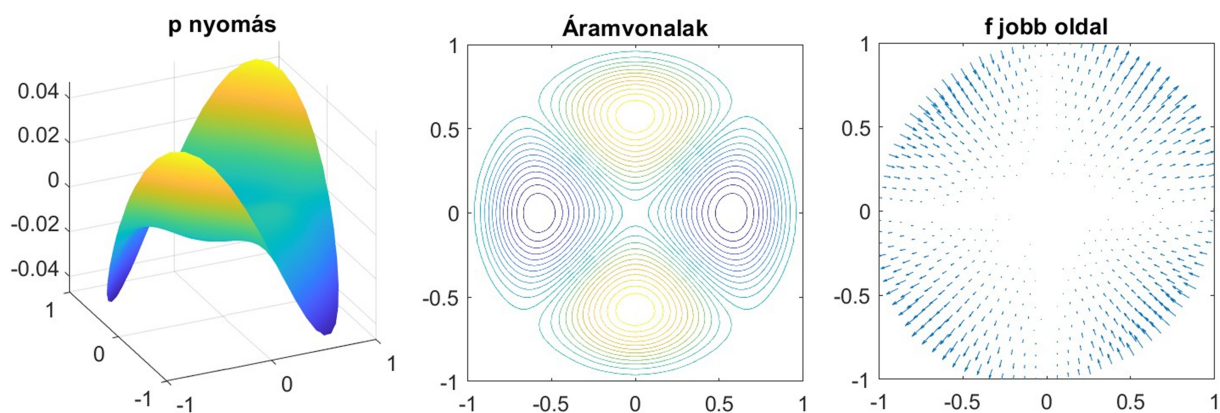
4. táblázat. A numerikus és a pontos megoldás rácspontokon vett különbségének a normája és a konvergencia rendje különböző n paraméterekre a 3.16. példában.



9. ábra. A Stokes-feladat numerikus megoldása $n = 3$ paraméter mellett négyzeten az $\mathbf{f}(x,y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnyel.



10. ábra. A Stokes-feladat numerikus megoldása $n = 3$ paraméter mellett L-alakú tartományon az $\mathbf{f}(x,y) = (-y, x)$ függvénnyel.



11. ábra. A Stokes-feladat numerikus megoldása $n = 3$ paraméter mellett körlapon az $\mathbf{f}(x,y) = ((1 - \cos(x)) \sin(y), (1 - \cos(y)) \sin(x))$ függvénnyel.

A 9., 10. és 11. ábrán néhány további feladat megoldása látható, ahol a pontos megoldás nem ismert, de a végeselem-módszerrel numerikusan közelíthető. Érdekes megfigyelni egyrészt a keletkező örvényeket, melyeket az áramvonalak szemléltetnek, másrészt azt, hogy az $\mathbf{f}$ jobb oldal és a sebességkomponensek ill. a nyomás grafikonja nagyon szoros kapcsolatban áll egymással.

A táblázatok adataiból jól látszik, hogy mindhárom tartományon konvergál a pontos megoldáshoz a numerikus módszer. Az $\mathbf{u}^h$ konvergenciáját H_0^1 -normában, míg a p^h konvergenciáját L^2 -normában kell mérni. Ezeket a diszkrét esetben az adott vektor A_h -normája illetve M_h -normája adja meg. Az elmélet szerint az implementált módszerek másodrendben konvergálnak, azonban a tapasztalt konvergencia harmad- illetve másodrendű a négyzet és az L-alakú tartomány esetében, a kör lapnál pedig a rend 1.5-re csökken a sebességnél és a nyomásnál egyaránt. A 8. ábrán a kör lap esetében a nyomás grafikonján megfigyelhető, hogy a közelítés hibája elsősorban a tartomány pereménél jelentkezik nagyobb mértékben, és a kör lap háromszögelése sem teljesen egyenletes, de ez nem magyarázza meg teljeskörűen a rendcsökkenést. A négyzet és az L-alakú tartomány esetében pedig a vártnál jobb harmadrend *szuperkonvergenciát* jelent, mely a tartományok szabályos alakja és egyenletes rácsfelosztása miatt jelentkezik. Ezzel kapcsolatban a [7] jegyzet 2.6. fejezete tartalmaz releváns eredményeket.

A 3.2. alfejezetben operátorszinten bemutatott Uzawa- és Krylov–Uzawa-algoritmust szeretnénk a végeselem-módszer segítségével véges dimenziós altérben mátrixszinten megvalósítani. Ehhez a 3.6. és 3.7. algoritmust szeretnénk átírni végeselemes gyenge alakra. A megvalósítás módját az Uzawa-algoritmus esetében részletesen tárgyaljuk, a többi esetben pedig néhány általános megjegyzés mellett nagyon hasonlóan elvégezhető az implementáció.

3.17. Algoritmus. Uzawa-algoritmus gyenge alakban.

- Legyen $p_0^h \in P_h$ tetszőleges kezdőfüggvény és $\alpha > 0$ adott paraméter.
- Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már p_k^h -t ismerjük:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_{k+1}^h : \nabla \mathbf{v}^h - \int_{\Omega} p_k^h (\operatorname{div} \mathbf{v}^h) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^h \quad (\forall \mathbf{v}^h \in V_h) \\ \int_{\Omega} p_{k+1}^h q^h &= \int_{\Omega} p_k^h q^h - \alpha \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_{k+1}^h) q^h \quad (\forall q^h \in P_h) \end{aligned}$$

3.18. Algoritmus. Uzawa-algoritmus mátrixszinten.

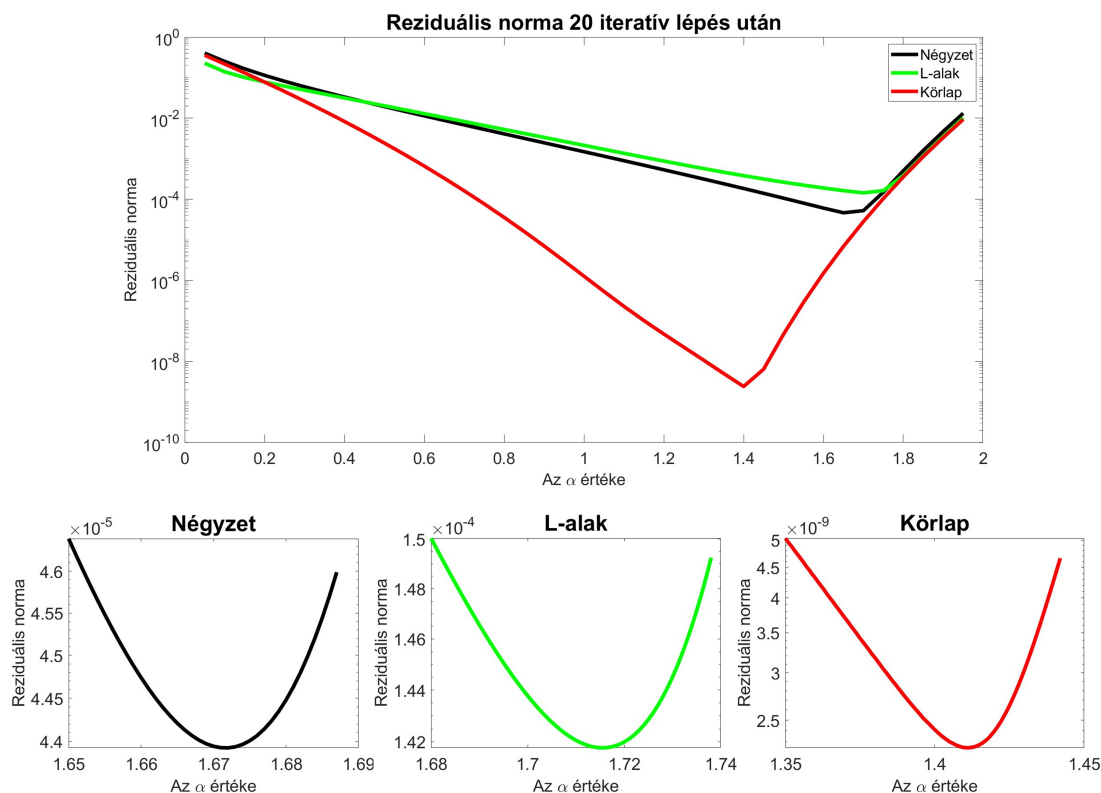
- Legyen $p_0^h \in \mathbb{R}^{N_p}$ tetszőleges kezdővektor és $\alpha > 0$ adott paraméter.
- Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már p_k^h -t ismerjük:

$$\begin{aligned} A_h \mathbf{u}_{k+1}^h &= \mathbf{f}^h - B_h p_k^h \\ M_h p_{k+1}^h &= M_h p_k^h + \alpha B_h^T \mathbf{u}_{k+1}^h \end{aligned}$$

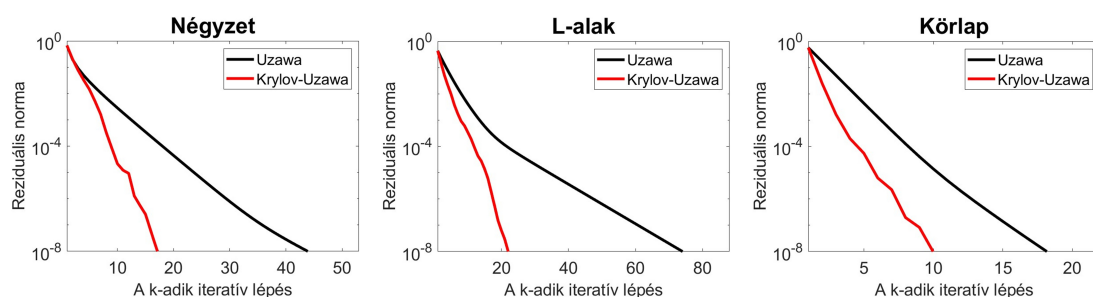
A konvergencia vizsgálatához ki kell számítani lépésenként az

$$M_h r_{k+1}^h = -B_h^T \mathbf{u}_{k+1}^h$$

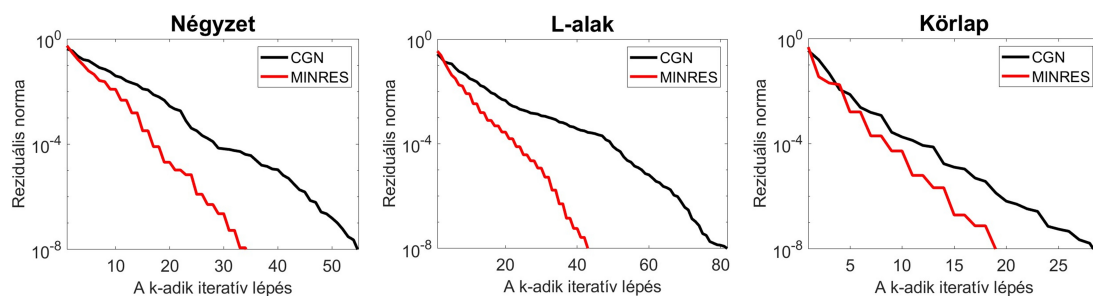
reziduális hibavektorokat is. A közelítés hibáját az $\|r_k\|_{L^2} := \sqrt{\langle M_h r_k^h, r_k^h \rangle}$ számsorozat adja meg, ahol a vektorok skaláris szorzata a szokásos értelemben vett euklideszi skalárszorzat. Ha valahol pedig két vektor L^2 -es skalárszorzatát kell kiszámolni, akkor azt $\langle v^h, z^h \rangle_{L^2} := \langle M_h v^h, z^h \rangle$ szerint számíthatjuk ki.



12. ábra. A Stokes-feladat numerikus megoldása az Uzawa-algoritmussal $n = 3$ paraméter mellett 20 iteratív lépésig az $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvény esetén. A felső ábrán az elért reziduális norma látható nagyobb lépésközzel mindhárom tartomány esetén, alul pedig külön-külön kinagyítva az optimális α körüli értékek az egyes tartományokon.



13. ábra. Az Uzawa- és a Krylov–Uzawa-algoritmus konvergenciájának összehasonlítása a ki-mért α_{opt} paraméterre mindhárom tartomány esetén az $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvényre.



14. ábra. A nagy egyenletrendszerre alkalmazott preconditionált CGN- és MINRES-algoritmus konvergenciájának összehasonlítása mindhárom tartomány esetén az $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvényre.

Az Uzawa-algoritmus tartalmaz egy választható α paramétert. Az optimális paraméter megválasztásához egy adott $\mathbf{f}$ függvényre futtatjuk az algoritmust különböző $\alpha \in (0, 2)$ értékekre mindhárom tartományon 20 iteratív lépésig, és megvizsgáljuk, hogy az utolsó lépésben mekkora volt a reziduális hibavektor normája. A 12. ábrán láthatóak a grafikonok. A numerikus teszt eredménye szerint az optimális α_{opt} érték négyzeten 1.672, L-alakon 1.715, körlapon pedig 1.411. Ez egyben becslést is ad a γ inf-sup-konstansra, mivel $\gamma = \sqrt{\frac{2}{\alpha_{\text{opt}}}} - 1$. Ennek megfelelően γ hozzávetőlegesen 0.443 négyzeten, 0.408 L-alakon és 0.646 körlapon.

A γ -ra adott tapasztalati becslések nagyságrendileg közelítik az elmélet szerint várt γ értéket. A γ néhány speciális Ω tartomány esetén megadható, ezzel kapcsolatban a [8] cikk 2.2. fejezete tartalmaz eredményeket. Egyrészt az általunk vizsgált kétdimenziós esetben általánosan elmondható, hogy $\gamma \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, másrészt bizonyítható, hogy az Ω_3 körlap esetén $\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$. Az Ω_1 négyzetre a pontos érték nem ismert, de $\gamma_1 \in [0.382, 0.427]$ biztosan teljesül. Az Ω_2 L-alakú tartományra nincsenek éles becslések, de $\gamma_2 \in [0.160, 0.427]$ teljesül.

A 13. ábrán megfigyelhető mindhárom tartomány esetén a mért α_{opt} paraméterrel futtatott Uzawa-algoritmus és a Krylov–Uzawa-algoritmus futása során előállt reziduális normák konvergenciája. Várakozásunknak megfelelően mindhárom esetben a Krylov–Uzawa-algoritmus konvergál gyorsabban. Az 1. ábra szerint várhatóan az L-alakú tartomány esetében lesz a legnagyobb a különbség a két algoritmus konvergenciája között, a körlapnál a nagy γ_3 konstans miatt pedig a legkisebb. Ezt láthatjuk a 13. ábra grafikonjain is. Megfigyelhető emellett az is, hogy kisebb lépésszámokat tapasztalunk olyan tartományokon, melyeknek nagyobb a γ konstansa. Ez megfelel annak, hogy az 1. ábra szerint γ növelésével mindkét módszer konvergenciahányadosa szigorúan monoton csökken és közelít a nullához.

A 14. ábrán ugyanazt a feladatot oldjuk meg, csak az Uzawa-algoritmus helyett a (6) nagy egyenletrendszerre alkalmazott preconditionált CGN- és MINRES-módszer konvergenciája látható. Megfigyelhető, hogy a MINRES konvergenciája mindhárom esetben lényegesen jobb, ami nem váratlan, hiszen a MINRES kimondottan szimmetrikus mátrixokra lett kifejlesztve, míg a CGN általánosabb nem szimmetrikus mátrixokra is alkalmazható, ami megnöveli a számítási komplexitását. Ugyanakkor érdemes mégis bevenni az összehasonlításba a CGN-módszert, mert ha a Stokes-feladat egyenletében a másodrendű tagot megszoroznánk egy viszkozitást leíró $\nu > 0$ számmal, akkor elegendően kis ν esetén a MINRES konvergenciája lelassul, és a CGN lényegesen jobban teljesít. Ennek részletes elméleti és numerikus elemzése a következő fejezetben található.

A nagy egyenletrendszerre alkalmazott módszerek elméleti konvergenciáját a Stokes-feladatra (azaz $\nu := 1$ viszkozitási paraméter esetén) a 3.3. alfejezetben vizsgáltuk. Megállapítható, hogy a numerikus eredmények teljes összhangban vannak az elmélet alapján vártakkal. A 3.12. állításban megmutattuk, hogy az első pár lépésben a CGN-módszer van előnyösebb helyzetben, majd legkésőbb a 3. iteratív lépéstől kezdve a MINRES lineáris becslése a jobb, tehát azt várjuk, hogy a numerikus teszteknel is ez fog érvényesülni. A 14. ábra grafikonjain látható, hogy a $k = 1$ első ábrázolt iteratív lépésnél mindhárom esetben a CGN-hez tartozó reziduális norma a kisebb, majd utána a MINRES látványosan átveszi a vezetést.

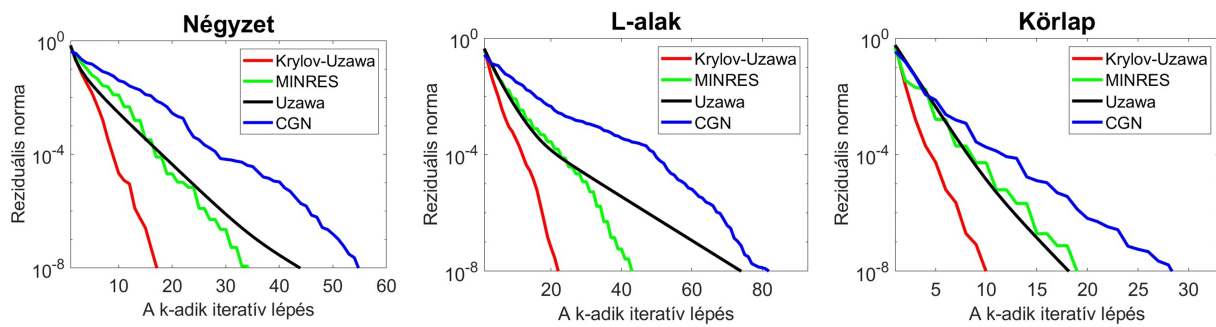
Egy másik fontos tulajdonság, ami megfigyelhető a 14. ábra grafikonjain az az, hogy a γ növekedésével a konvergencia felgyorsul, azaz egy adott toleranciaszint eléréséhez nagyobb γ esetén kevesebb iteratív lépésre van szükség. Látható az ábrákon, hogy a legkisebb γ -val rendelkező L-alakú tartomány esetén tapasztaljuk a legnagyobb lépésszámokat. A négyzeten már kevesebb lépés szükséges, és végül a lehető legnagyobb γ inf-sup-konstanssal rendelkező körlapon a leg-

gyorsabb a konvergencia. Ezt várjuk a 3.13. állítás alapján, hiszen a γ növelésével a lineáris becslések egyre csökkennek. Emellett nagyobb γ -ra az S operátor határai is egyre közelebb kerülnek egymáshoz, ami szintén a gyorsabb konvergencia mellett szól.

A 15. ábrán láthatóak a 13. és 14. ábra közös grafikonjai, melyek segítségével összehasonlítható egymás mellett mind a négy iteratív módszer konvergenciája. Ezek alapján megállapítható, hogy a vizsgált Stokes-feladatnál a módszerek hatékonyságának sorrendje jellemzően:

1. Krylov–Uzawa-algoritmus.
2. A nagy rendszerre alkalmazott prekondicionált MINRES.
3. Uzawa-algoritmus az optimális α_{opt} paraméterrel.
4. A nagy rendszerre alkalmazott prekondicionált CGN-módszer.

Megjegyzendő azonban egyrészt, hogy a körlapnál például 10^{-8} toleranciaszintig a MINRES és az Uzawa-algoritmus konvergenciája nagyon hasonló. Másrészt pedig fontos szem előtt tartani, hogy a különböző módszereknél más normában mérjük a konvergenciát: Uzawa-típusúnál a természetes norma a függvénytérbeli L^2 -norma, míg a prekondicionált nagy rendszernél a MINRES-nél a $\tilde{P}^{-1}$ -, a CGN-nél pedig a $\tilde{P}$ -norma.



15. ábra. A 13. és 14. ábra grafikonjainak egyesítése, mely tartományonként szemlélteti mind a négy iteratív módszer konvergenciáját a vizsgált Stokes-feladatra.

4. Az Oseen-egyenlet

A Stokes-feladat általánosításaként írhatjuk fel az Oseen-egyenletet, mely az előzőekhez képest kiegészül egy $\nu > 0$ viszkozitási együtthatóval, és a differenciálegyenlethez hozzávesszük a $\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}$ konvekciós tagot, ahol $\mathbf{w} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ egy adott vektormező, melyre $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

4.1. Megoldhatóság

A Stokes-feladathoz hasonlóan az Oseen-egyenlet is nyeregpont-feladatként vizsgálható. Az Oseen-egyenlet gyenge megoldását az alábbi módon definiálhatjuk:

4.1. Definíció. Az $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(\Omega)^2 \times \dot{L}^2(\Omega)$ függvénpárt az Oseen-egyenlet *gyenge megoldásának* nevezzük, ha

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} & (\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2) \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & (\forall q \in \dot{L}^2(\Omega)) \end{cases}.$$

4.2. Megjegyzés. Az általános nyeregpont-feladat bilineáris formákkal vett (4) szerinti felírásában az Oseen-egyenlet esetében

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\nu \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}); \quad b(p, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}; \quad \phi \mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

a megfelelő Hilbert-terek pedig $H = H_0^1(\Omega)^2$ és $K = \dot{L}^2(\Omega)$. A Stokes-feladathoz képest tehát csak az a bilineáris forma definíciója változik. Most az a bilineáris forma egyenletes pozitivitása helyett csak a gyengébb koercivitási feltétel teljesül, mivel a konvekciós tag nem szimmetrikus. Az a tehát általánosan egy nem szimmetrikus korlátos koercív bilineáris forma $m_A = \nu$ és $M = \nu + C_{\Omega} \|\mathbf{w}\|_{L^{\infty}}$ állandókkal, ahol C_{Ω} a Poincaré–Friedrichs-egyenlőtlenség konstansa, lásd [1] 8.1.2. állítását. Azonban ha a konvekciós tag nélkül (azaz a $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ esetben) nézzük az Oseen-egyenletet, akkor a szimmetria teljesül, mert erre a viszkozitási paraméter bevezetése nincs hatással. A Stokes-feladathoz hasonlóan b korlátos bilineáris forma $\|b\| = 1$ állandóval, a ϕ pedig korlátos lineáris funkcionál. Mivel a b bilineáris forma és a H, K Hilbert-terek ugyanazok, mint a Stokes-feladatnál, ezért az inf-sup-konstans 3.4-beli definíciója sem változik.

4.3. Állítás. Bármely $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^2$ függvény esetén létezik egyetlen gyenge megoldása az Oseen-egyenletnek.

Bizonyítás. Az 1.5. következmény feltételei teljesülnek a Stokes-feladathoz hasonlóan. $\square$

4.2. A CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus

Szeretnénk a 3.2. alfejezet mintájára Uzawa-típusú iteratív módszerrel megoldani az Oseen-egyenletet. Az Oseen-egyenlet nem szimmetrikus konvekciós tagja miatt az S Schur-féle komplementeroperátor nem lesz önadjungált, tehát nem is egyenletesen pozitív, így a 2.1.2. alfejezet módszereit lehet alkalmazni ebben az esetben.

4.4. Állítás. Az Oseen-egyenlethez tartozó $S = -\operatorname{div}(-\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1} \nabla$ Schur-féle komplementeroperátor határai

$$m = \frac{\nu\gamma^2}{(\nu + C_\Omega \|\mathbf{w}\|_{L^\infty})^2} \quad \text{és} \quad M = \frac{1}{\nu}.$$

Bizonyítás. Formálisan elegendően sima függvényekre $\langle -\Delta u, v \rangle_{L^2} = \langle u, v \rangle_{H_0^1}$ teljesül a Green-formula és a homogén Dirichlet peremfeltétel miatt, ezért $\langle u, v \rangle_{L^2} = \langle (-\Delta)^{-1} u, v \rangle_{H_0^1}$, melynek segítségével formálisan ill. gyenge alakban definiálhatók az alábbi operátorok:

- $B : \dot{L}^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)^2$ legyen az a korlátos lineáris operátor, melyre gyenge alakban

$$\langle Bp, \mathbf{v} \rangle_{H_0^1} = - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (\forall p \in \dot{L}^2(\Omega), \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2),$$

azaz formálisan $B = (-\Delta)^{-1} \nabla$.

- $A : H_0^1(\Omega)^2 \rightarrow H_0^1(\Omega)^2$ legyen az a korlátos lineáris operátor, melyre $A = \begin{pmatrix} \widetilde{A_0} \\ \widetilde{A_0} \end{pmatrix}$, ahol gyenge alakban

$$\langle \widetilde{A_0} u, v \rangle_{H_0^1} = \int_\Omega (\nu \nabla u \cdot \nabla v + (\mathbf{w} \cdot \nabla u) v) \quad (\forall u, v \in H_0^1(\Omega)),$$

azaz formálisan $\widetilde{A_0} = (-\Delta)^{-1} A_0$, ahol az $A_0 := -\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla$ operátor egy konvekció-diffúziós feladatot ír le. Az $\widetilde{A_0}$ operátor határai (lásd [1], 8.1.2. állítás):

$$\nu \|u\|_{H_0^1}^2 = \langle \widetilde{A_0} u, u \rangle_{H_0^1} \quad (\forall u \in H_0^1(\Omega));$$

$$\langle \widetilde{A_0} u, v \rangle_{H_0^1} \leq (\nu + C_\Omega \|\mathbf{w}\|_{L^\infty}) \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \quad (\forall u, v \in H_0^1(\Omega)).$$

- $B^* : H_0^1(\Omega)^2 \rightarrow \dot{L}^2(\Omega)$ legyen az a korlátos lineáris operátor, melyre gyenge alakban

$$\langle B^* \mathbf{v}, q \rangle_{L^2} = - \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{v}) q = \langle Bq, \mathbf{v} \rangle_{H_0^1} \quad (\forall p \in \dot{L}^2(\Omega), \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2),$$

azaz formálisan $B^* = -\operatorname{div}$.

Vizsgáljuk meg először az $S = B^* A^{-1} B$ operátor koercivitását! Az $\widetilde{A_0}$ ismert határait és az 1.2. állítás bizonyításában szereplő eredményt felhasználva

$$\langle \widetilde{A_0}^{-1} v, v \rangle_{H_0^1} \geq \frac{\nu}{(\nu + C_\Omega \|\mathbf{w}\|_{L^\infty})^2} \|v\|_{H_0^1}^2 \quad (\forall v \in H_0^1(\Omega)).$$

Ezzel pedig az S operátor alsó határa:

$$\begin{aligned}\langle Sp, p \rangle_{L^2} &= \langle B^* A^{-1} Bp, p \rangle_{L^2} = \langle A^{-1} Bp, Bp \rangle_{H_0^1} \geq \frac{\nu}{(\nu + C_\Omega \|\mathbf{w}\|_{L^\infty})^2} \|Bp\|_{H_0^1}^2 \geq \\ &\geq \frac{\nu \gamma^2}{(\nu + C_\Omega \|\mathbf{w}\|_{L^\infty})^2} \|p\|_{L^2}^2 \quad (\forall p \in \dot{L}^2(\Omega)).\end{aligned}$$

Ezután vizsgáljuk meg az S operátor korlátosságát! A becsléseknél az alábbi ismert eredmény használható (lásd [1], 12.1.9. tétel):

$$\langle B^* \mathbf{v}, q \rangle_{L^2} \leq \|\mathbf{v}\|_{H_0^1} \|q\|_{L^2} \quad (\forall q \in \dot{L}^2(\Omega), \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2).$$

Ezzel pedig az S operátor felső határa:

$$\begin{aligned}\langle Sp, q \rangle_{L^2} &= \langle A^{-1} Bp, Bq \rangle_{H_0^1} \leq \|A^{-1} Bp\|_{H_0^1} \|Bq\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\nu} \|Bp\|_{H_0^1} \|Bq\|_{H_0^1} \leq \\ &\leq \frac{1}{\nu} \|p\|_{L^2} \|q\|_{L^2} \quad (\forall p, q \in \dot{L}^2(\Omega)),\end{aligned}$$

ahol az utolsó becslés a

$$\|Bp\|_{H_0^1}^2 = \langle Bp, Bp \rangle_{H_0^1} = \langle B^* Bp, p \rangle_{L^2} \leq \|Bp\|_{H_0^1} \|p\|_{L^2}$$

összefüggés miatt teljesül. □

A 2.1. egyszerű iteráció a nem szimmetrikus esetben is alkalmazható lenne, azonban a lineáris konvergenciához szükséges feltétel a 2.10. és a 4.4. állítás szerint

$$\alpha < \frac{2\nu^3 \gamma^2}{(\nu + C_\Omega \|\mathbf{w}\|_{L^\infty})^2},$$

amely kis viszkozitási együttható esetén csak kis lépésközt enged meg, és jelentősen lassítja a konvergencia sebességét. Egy lehetséges megoldás lehet, ha a Krylov–Uzawa-algoritmus mintájára az operátoregyenletet a nem szimmetrikus operátorok esetén használható CGN- vagy GCR-módszerrel oldjuk meg. Az alábbiakban ezt a két iterációs módszert fogjuk levezetni az Oseen-egyenlet esetében.

A módszerek alapját a 2.12. és a 2.13. algoritmus képezi, melyeket most prekondicionálás nélkül, azaz $P := I$ választás mellett fogjuk alkalmazni az $Sp = \tilde{f}$ egyenletre, ahol az Oseen-egyenlet esetében $A = -\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla$ és $B = \nabla$, így

$$S = -\operatorname{div}(-\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1} \nabla \quad \text{és} \quad \tilde{f} = -\operatorname{div}(-\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1} \mathbf{f}.$$

Az Uzawa-algoritmushoz hasonló módszert itt is az $\mathbf{u}_{k+1} := (-\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1}(\mathbf{f} - \nabla p_k)$, a $\mathbf{z}_k := -(-\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1} \nabla d_k$, és a CGN-módszer esetében a $\mathbf{v}_k := -(-\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1} \nabla r_{k+1}$, míg a GCR-módszer esetében a $\mathbf{v}_k := -(-\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1} \nabla r_{k+1}$ változó bevezetésével kapjuk a korábban látott átírások segítségével.

A CGN-módszernél $\mathbf{v}_k$ egy S^* -ra felírt operátoregyenlet megoldása, ahol S^* megadható

$$S^* = \nabla^*((-\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1})^*(-\operatorname{div})^* = -\operatorname{div}((-\nu\Delta + \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1})^* \nabla = -\operatorname{div}(-\nu\Delta - \mathbf{w} \cdot \nabla)^{-1} \nabla$$

alakban, mivel a konvekciós tag antiszimmetrikus.

Fontos megjegyezni, hogy míg a Stokes-feladatnál az Uzawa-algoritmus iterációs lépésenként 1-1 Poisson-egyenlet megoldását követelte meg, ezeknél az algoritmusoknál iterációs lépésenként 2-2 konvekció-diffúziós egyenletet kell megoldani, ami tovább növeli a módszerek számítási költségeit.

4.5. Algoritmus. A CGN-Uzawa-algoritmus operátorszinten.

Legyen $p_0 \in \dot{L}^2(\Omega)$ tetszőleges kezdőfüggvény.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -v\Delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}_0|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \\ r_0 &:= \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \\ & \begin{cases} -v\Delta \mathbf{v}_0 - \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}_0 + \nabla r_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_0|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \\ s_0 &:= \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \\ d_0 &:= s_0 \end{aligned}$$

Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már $p_k, \mathbf{u}_k, r_k, d_k, s_k$ -t ismerjük:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -v\Delta \mathbf{z}_k + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}_k + \nabla d_k = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_k|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \\ x_k &:= \operatorname{div} \mathbf{z}_k \\ \alpha_k &:= -\frac{\|s_k\|_{L^2}^2}{\|x_k\|_{L^2}^2} \\ p_{k+1} &:= p_k + \alpha_k d_k \\ \mathbf{u}_{k+1} &:= \mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{z}_k \\ r_{k+1} &:= r_k + \alpha_k x_k \\ & \begin{cases} -v\Delta \mathbf{v}_k - \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}_k + \nabla r_{k+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_k|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \\ s_{k+1} &:= \operatorname{div} \mathbf{v}_k \\ \beta_k &:= \frac{\|s_{k+1}\|_{L^2}^2}{\|s_k\|_{L^2}^2} \\ d_{k+1} &:= s_{k+1} + \beta_k d_k \end{aligned}$$

4.6. Algoritmus. A GCR-Uzawa-algoritmus operátorszinten.

Legyen $p_0 \in \dot{L}^2(\Omega)$ tetszőleges kezdőfüggvény.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -v\Delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \nabla p_0 = \mathbf{f} \\ \mathbf{u}_0|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \\ r_0 &:= \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \\ d_0 &:= r_0 \\ & \begin{cases} -v\Delta \mathbf{z}_0 + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}_0 + \nabla d_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_0|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \\ x_0 &:= \operatorname{div} \mathbf{z}_0 \end{aligned}$$

Minden $k \in \mathbb{N}$ -re, ha már $p_k, \mathbf{u}_k, r_k, d_k, x_k$ -t ismerjük:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -v\Delta \mathbf{z}_k + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{z}_k + \nabla d_k = \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_k|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \\ \alpha_k &:= -\frac{\langle r_k, x_k \rangle_{L^2}}{\|x_k\|_{L^2}^2} \\ p_{k+1} &:= p_k + \alpha_k d_k \\ \mathbf{u}_{k+1} &:= \mathbf{u}_k + \alpha_k \mathbf{z}_k \\ r_{k+1} &:= r_k + \alpha_k x_k \\ & \begin{cases} -v\Delta \mathbf{v}_k + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}_k + \nabla r_{k+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_k|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \\ s_k &:= \operatorname{div} \mathbf{v}_k \\ \beta_{i,k} &:= -\frac{\langle s_k, x_i \rangle_{L^2}}{\|x_i\|_{L^2}^2} \quad (i = 0, \dots, k) \\ d_{k+1} &:= r_{k+1} + \sum_{i=0}^k \beta_{i,k} d_i \\ x_{k+1} &:= s_k + \sum_{i=0}^k \beta_{i,k} x_i \end{aligned}$$

4.7. Állítás. Legyen $\mathbf{w} = \rho \mathbf{w}_0$, ahol $\rho > 0$, és $\mathbf{w}_0 \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ egy adott divergenciamentes vektormező. A k . iteratív lépésben a GCR-Uzawa lineáris becslése pontosan akkor jobb a CGN-Uzawa lineáris becslésénél, ha

$$\rho > \frac{v(\sqrt{L_k}\gamma - 1)}{C_\Omega \|\mathbf{w}_0\|_{L^\infty}}.$$

Bizonyítás. Azt kell vizsgálni a 2.18. tétel szerint, hogy $\frac{M}{m} > L_k$ mikor teljesül. A 4.4. állításban kiszámolt határok szerint

$$\frac{M}{m} = \frac{\frac{1}{v}}{\frac{v\gamma^2}{(v+C_\Omega\rho\|\mathbf{w}_0\|_{L^\infty})^2}} = \frac{(v+C_\Omega\rho\|\mathbf{w}_0\|_{L^\infty})^2}{v^2\gamma^2} = \left(\frac{v+C_\Omega\rho\|\mathbf{w}_0\|_{L^\infty}}{v\gamma} \right)^2 > L_k,$$

ami pedig pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{v+C_\Omega\rho\|\mathbf{w}_0\|_{L^\infty}}{v\gamma} > \sqrt{L_k}.$$

Ezt átrendezve megkapjuk a keresett egyenlőtlenséget. □

4.8. Következmény. Ha van olyan $k' \in \{1, \dots, N\}$ index, amelyre $L_{k'} < \frac{1}{\gamma^2}$, akkor bármely $k \in \{1, \dots, k'\}$ index esetén a GCR-Uzawa lineáris becslése jobb a CGN-Uzawa lineáris becslésénél függetlenül attól, hogy az Oseen-egyenlet milyen v viszkozitási paramétert és $\mathbf{w}$ vektormezőt tartalmaz.

Bizonyítás. A 4.7. állításban szereplő alsó becslésben ezzel a feltétellel $\sqrt{L_{k'}}\gamma - 1 < 0$, tehát

$$\rho > 0 > \frac{v(\sqrt{L_{k'}}\gamma - 1)}{C_\Omega \|\mathbf{w}_0\|_{L^\infty}},$$

amely tetszőleges pozitív ρ esetén teljesül. Mivel az L_k sorozat a 2.19. állítás szerint szigorúan monoton növekszik, így

$$\sqrt{L_k}\gamma - 1 < \sqrt{L_{k'}}\gamma - 1 < 0$$

teljesül bármely $k \in \{1, \dots, k'\}$ index esetén. □

4.9. Megjegyzés. Néhány konkrét γ konstansra érdemes megadni a 4.8. következményben szereplő k' indexet az 1. táblázat segítségével:

- $\gamma = 0.3 \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} \approx 11.11 \Rightarrow k' = 3$ (de majdnem 4-re is teljesül).
- $\gamma = 0.42 \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} \approx 5.67 \Rightarrow k' = 2$.
- $\gamma = 0.71 \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} \approx 1.98$, tehát nincs ilyen k' .

4.10. Állítás. Ha az Oseen-egyenletben $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, akkor az $S = -\operatorname{div}(-v\Delta)^{-1}\nabla$ operátor határai

$$\frac{\gamma^2}{v} \|p\|_{L^2}^2 \leq \langle Sp, p \rangle_{L^2} \leq \frac{1}{v} \|p\|_{L^2}^2 \quad (\forall p \in \dot{L}^2(\Omega)). \quad (23)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.2. és 1.3. állítást az $m_A = \|A\| = v$ konstansokkal. □

4.11. Megjegyzés. Ha az Oseen-egyenletben $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, akkor megkapjuk a Stokes-feladatot $v = 1$ választás esetén. A 4.10. állításban szereplő eredmény biztosítja, hogy tetszőleges $v > 0$ viszkozitási paraméter választása esetén is a Stokes-feladathoz tartozó konvergenciahányadost kapjuk a (9) és a (10) konvergenciabecslésekből, hiszen ezek csak a $\kappa := \frac{M}{m}$ hányadostól függenek, ahol most $m = \frac{\gamma^2}{v}$ és $M = \frac{1}{v}$, ezért $\kappa = \frac{v}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}$, amely v értékétől független.

4.12. Állítás. Ha az Oseen-egyenletben $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, akkor a MINRES algoritmus lineáris becslése jobb a CGN-módszer lineáris becslésénél bármely $k \in \mathbb{N}$ index esetén.

Bizonyítás. A 2.21. állítás szerint a MINRES algoritmus becslése mindig jobb a CGN-módszer becslésénél, és ugyanolyan jó csak abban az esetben lehetne, ha a 2.23. következmény szerint $\gamma = \|B\| = 1$. Ez azonban az általunk vizsgált kétdimenziós feladatok esetében nem lehetséges, mert ismert, hogy

$$\gamma \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71 < 1. \quad (24)$$

Ennek az eredménynek a levezetése megtalálható a [8] cikk 2.2. fejezetében. $\square$

4.13. Állítás. A $\rho = 0$ esetben a GCR-módszer konvergenciája mindig gyorsabb a CGN-módszerhez képest.

Bizonyítás. A 2.22. megjegyzés szerint ilyenkor a GCR és a MINRES konvergenciája megegyezik, a $\rho = 0$ paraméter pedig a $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ vektormezőt eredményezi, ezért alkalmazható a 4.12. állítás. $\square$

4.3. A nagy rendszer megoldása

A 2.2.1. fejezet szerint a nagy lineáris egyenletrendszert szimmetrikus esetben megoldhatjuk a MINRES- vagy a CGN-módszerrel. Ezt a Stokes-feladatnál vizsgáltuk a 3.3. fejezetben. Az Oseen-egyenletnél azonban a nagy rendszer csak akkor lesz szimmetrikus, ha $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, és ilyenkor csak a viszkozitási paraméter bevezetése jelenti a változást a Stokes-feladathoz képest. Látni fogjuk azonban, hogy míg a 3.12. állítás és a Stokes-feladatra végzett későbbi numerikus tesztek szerint is a $\nu = 1$ esetben a MINRES észszerű γ konstansok esetén gyorsabban konvergál a CGN-módszernél, addig $\nu \ll 1$ esetén ez megfordulhat.

A javasolt $\tilde{P}$ prekondicionáló mátrix esetén a két módszer konvergenciabecslése a 4.10. állításban megadott határok szerint az $m = \frac{\gamma^2}{\nu}$ és $M = \frac{1}{\nu}$ állandóktól függ a szimmetrikus esetben. A következőkben megvizsgáljuk, hogy ν és γ függvényében hogyan néznek ki az egyes módszerek konvergenciabecslései, és hogyan viszonyulnak ezek egymáshoz.

4.14. Állítás. Szimmetrikus Oseen-egyenlet esetén a $\tilde{P}^{-1}Gv = \tilde{P}^{-1}g$ egyenletre alkalmazott MINRES lineárisan konvergál, méghozzá páros k indexekre a $\mu := \frac{1}{\nu}$ bevezetésével

$$\|r_k\|_{\tilde{P}^{-1}} \leq 2\|r_0\|_{\tilde{P}^{-1}} \left(\frac{\sqrt{\kappa_1} - 1}{\sqrt{\kappa_1} + 1} \right)^{\frac{k}{2}}, \text{ ahol } \kappa_1 = \frac{(\sqrt{1+4\mu\gamma^2} + \sqrt{1+4\mu} - 2)(1 + \sqrt{1+4\mu})}{2(\sqrt{1+4\mu\gamma^2} - 1)}. \quad (25)$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 2.29. következményt az $m = \frac{\gamma^2}{\nu}$ és $M = \frac{1}{\nu}$ állandókkal. $\square$

4.15. Állítás. Szimmetrikus Oseen-egyenlet esetén a $\tilde{P}^{-1}Gv = \tilde{P}^{-1}g$ egyenletre alkalmazott CGN-módszer lineárisan konvergál, méghozzá a $\mu := \frac{1}{\nu}$ bevezetésével

$$\|r_k\|_{\tilde{P}} \leq \frac{\|r_0\|_{\tilde{P}}}{\text{ch}\left(k \operatorname{arch}\left(\frac{\kappa_2+1}{\kappa_2-1}\right)\right)}, \text{ ahol } \kappa_2 = \begin{cases} \frac{1+2\mu+\sqrt{1+4\mu}}{1+2\mu\gamma^2-\sqrt{1+4\mu\gamma^2}}, & \text{ha } 0 < \mu\gamma^2 < 2 \\ \frac{1+2\mu+\sqrt{1+4\mu}}{2}, & \text{ha } 2 \leq \mu\gamma^2 \end{cases}. \quad (26)$$

Bizonyítás. A 2.30. és 2.31. állítást használjuk a 2.34. következménnyel és az $m = \frac{\gamma^2}{\nu}$ ill. $M = \frac{1}{\nu}$ állandókkal. $\square$

4.16. Állítás. $\lim_{v \rightarrow \infty} 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1} \left(\frac{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} - 1}{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} + 1} \right)^{\frac{k}{2}} = 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1} (\sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma)^k$ teljesül bármely $\gamma > 0$ konstans és bármely $k \in \mathbb{N}$ index esetén.

Bizonyítás. Legyen $\gamma > 0$ tetszőleges rögzített szám, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített index. A folytonosság miatt elég a $\lim_{v \rightarrow \infty} \kappa_1(v, \gamma)$ határértéket meghatározni. Szintén a folytonosság miatt az $\eta := \frac{4}{v} = 4\mu$ változó bevezetésével vizsgálhatjuk az $\eta \rightarrow 0$ határértéket:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \kappa_1(v, \gamma) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 + \eta\gamma^2} + \sqrt{1 + \eta} - 2)(1 + \sqrt{1 + \eta})}{2(\sqrt{1 + \eta\gamma^2} - 1)} = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{(1 + \sqrt{1 + \eta})}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{1 + \eta} - 1}{\sqrt{1 + \eta\gamma^2} - 1} \right) = 1 + \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta} - 1}{\sqrt{1 + \eta\gamma^2} - 1} = \\ &= 1 + \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \eta\gamma^2}}{\gamma^2 \sqrt{1 + \eta}} = 1 + \frac{1}{\gamma^2} \end{aligned}$$

Az utolsó sorban a kritikus határérték kiszámítására a L'Hôpital-szabályt használtuk. Ezt felhasználva a keresett határérték:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1} \left(\frac{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} - 1}{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} + 1} \right)^{\frac{k}{2}} &= 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1} \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} + 1} \right)^{\frac{k}{2}} = \\ &= 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1} \left(\gamma \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} - 1 \right) \right)^k = 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1} (\sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma)^k. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. □

4.17. Állítás. $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch} \left(k \text{ arch} \left(\frac{\kappa_2(v, \gamma) + 1}{\kappa_2(v, \gamma) - 1} \right) \right)} = \|r_0\|_{\tilde{p}}$ teljesül bármely $\gamma > 0$ konstans és bármely $k \in \mathbb{N}$ index esetén.

Bizonyítás. Legyen $\gamma > 0$ tetszőleges rögzített szám. A folytonosság miatt elég a belső függvény határértékét kiszámítani. A becslésben a κ_2 első esetét kell használni, mert bármely $\gamma > 0$ esetén elegendően nagy v -re $\mu\gamma^2 = \frac{\gamma^2}{v} < 2$.

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\kappa_2(v, \gamma) + 1}{\kappa_2(v, \gamma) - 1} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{v} + \sqrt{1 + \frac{4}{v}} + 1 + \frac{2\gamma^2}{v} - \sqrt{1 + \frac{4\gamma^2}{v}}}{1 + \frac{2}{v} + \sqrt{1 + \frac{4}{v}} - 1 - \frac{2\gamma^2}{v} + \sqrt{1 + \frac{4\gamma^2}{v}}} = \frac{1 + 0 + \sqrt{1} + 1 + 0 - \sqrt{1}}{1 + 0 + \sqrt{1} - 1 - 0 + \sqrt{1}} = 1$$

Ezt felhasználva a keresett határérték:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch} \left(k \text{ arch} \left(\frac{\kappa_2(v, \gamma) + 1}{\kappa_2(v, \gamma) - 1} \right) \right)} = \frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch}(k \text{ arch}(1))} = \frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch}(0)} = \|r_0\|_{\tilde{p}}. \quad \square$$

4.18. Következmény. Legyen $\gamma > 0$ tetszőleges rögzített szám. A $v \rightarrow \infty$ aszimptotikus esetben az

$$L_\gamma := \frac{\log \frac{1}{2}}{\log(\sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma)}$$

számra teljesül, hogy a CGN-módszer (26) becslése és a MINRES (25) becslése megegyezik $k = L_\gamma$ esetén (a $k \in \mathbb{R}^+$ kiterjesztés mellett), és a $k = 0, 1, \dots, \lfloor L_\gamma \rfloor$ indexekre a CGN-módszer becslése jobb a MINRES becslésénél, a $k = \lceil L_\gamma \rceil, \dots, N$ indexekre pedig a MINRES becslése a jobb. Ha $\gamma \in [0.26, 0.71]$, akkor $L_\gamma \in [1.04, 2.70]$.

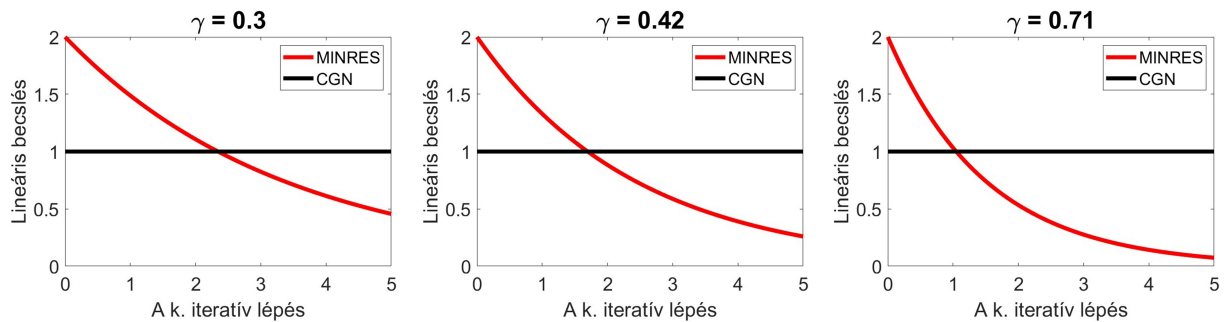
Bizonyítás. A 4.16. és a 4.17. állításban szereplő határértékek egyenlőségét vizsgáljuk.

$$2(\sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma)^k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad k \log(\sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma) = \log \frac{1}{2}$$

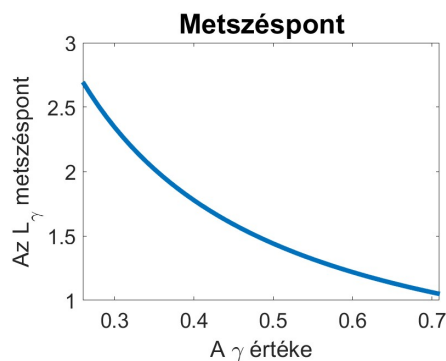
Ezzel meghatároztuk az L_γ -t. A CGN-hez tartozó becslés egy k -tól független pozitív szám, míg a MINRES-hez tartozó becslés k -tól függ, és tart a 0-hoz, ha $k \rightarrow \infty$. Nyilván ez azért teljesül, mert a k -adik hatványra emelt mennyiség 1-nél kisebb:

$$\sqrt{\gamma^2 + 1} - \gamma < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\gamma^2 + 1} < 1 + \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^2 + 1 < \gamma^2 + 1 + 2\gamma \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \gamma$$

Ebből és a folytonosságból következik, hogy a $k \geq \lceil L_\gamma \rceil$ indexekre a MINRES becslése a jobb, a többi indexre pedig a CGN becslése a jobb. A numerikus tesztek eredménye a 16. és a 17. ábrán látható. $\square$



16. ábra. A MINRES- és a CGN-módszer lineáris becslése $\gamma = 0.3, 0.42, 0.71$ értékekre a $v \rightarrow \infty$ aszimptotikus esetben.



17. ábra. A MINRES- és a CGN-módszer lineáris becslésének L_γ metszéspontja a $\gamma \in [0.26, 0.71]$ intervallumban a $v \rightarrow \infty$ aszimptotikus esetben.

4.19. Állítás. $\lim_{v \rightarrow 0^+} 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1} \left(\frac{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} - 1}{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} + 1} \right)^{\frac{k}{2}} = 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1}$ teljesül bármely $\gamma > 0$ konstans és bármely $k \in \mathbb{N}$ index esetén.

Bizonyítás. Legyen $\gamma > 0$ tetszőleges rögzített szám, $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített index. A folytonosság miatt elég a $\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} - 1}{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} + 1}$ határértéket meghatározni. Szintén a folytonosság miatt az $\eta := \frac{4}{v} = 4\mu$ változó bevezetésével vizsgálhatjuk az $\eta \rightarrow \infty$ határértéket:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} - 1}{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} + 1} &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(\sqrt{1 + \eta\gamma^2} + \sqrt{1 + \eta} - 2)(1 + \sqrt{1 + \eta})} - \sqrt{2(\sqrt{1 + \eta\gamma^2} - 1)}}{\sqrt{(\sqrt{1 + \eta\gamma^2} + \sqrt{1 + \eta} - 2)(1 + \sqrt{1 + \eta})} + \sqrt{2(\sqrt{1 + \eta\gamma^2} - 1)}} = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(\sqrt{\frac{1}{\eta} + \gamma^2} + \sqrt{\frac{1}{\eta} + 1} - \frac{2}{\sqrt{\eta}})(\frac{1}{\sqrt{\eta}} + \sqrt{\frac{1}{\eta} + 1})} - \sqrt{2(\sqrt{\frac{1}{\eta^2} + \frac{\gamma^2}{\eta}} - \frac{1}{\eta})}}{\sqrt{(\sqrt{\frac{1}{\eta} + \gamma^2} + \sqrt{\frac{1}{\eta} + 1} - \frac{2}{\sqrt{\eta}})(\frac{1}{\sqrt{\eta}} + \sqrt{\frac{1}{\eta} + 1})} + \sqrt{2(\sqrt{\frac{1}{\eta^2} + \frac{\gamma^2}{\eta}} - \frac{1}{\eta})}} = \frac{\sqrt{\gamma + 1}}{\sqrt{\gamma + 1}} = 1 \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a folytonosság miatt:

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1} \left(\frac{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} - 1}{\sqrt{\kappa_1(v, \gamma)} + 1} \right)^{\frac{k}{2}} = 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1} (1)^{\frac{k}{2}} = 2\|r_0\|_{\tilde{p}-1}. \quad \square$$

4.20. Állítás. $\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch}\left(k \text{ arch}\left(\frac{\kappa_2(v, \gamma) + 1}{\kappa_2(v, \gamma) - 1}\right)\right)} = \|r_0\|_{\tilde{p}}$ teljesül bármely $\gamma > 0$ konstans és bármely $k \in \mathbb{N}$ index esetén.

Bizonyítás. Legyen $\gamma > 0$ tetszőleges rögzített szám. A folytonosság miatt elég a belső függvény határértékét kiszámítani, és az eredeti helyett vizsgálhatjuk a $\mu \rightarrow \infty$ határértéket. A becslésben a κ_2 második esetét kell használni, mert bármely $\gamma > 0$ esetén elegendően kicsi v -re $\mu\gamma^2 = \frac{\gamma^2}{v} \geq 2$.

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\kappa_2(v, \gamma) + 1}{\kappa_2(v, \gamma) - 1} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{3 + 2\mu + \sqrt{1 + 4\mu}}{-1 + 2\mu + \sqrt{1 + 4\mu}} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{\mu} + 2 + \sqrt{\frac{1}{\mu^2} + \frac{4}{\mu}}}{-\frac{1}{\mu} + 2 + \sqrt{\frac{1}{\mu^2} + \frac{4}{\mu}}} = \frac{2}{2} = 1$$

Ezt felhasználva a folytonosság miatt:

$$\lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch}\left(k \text{ arch}\left(\frac{\kappa_2(v, \gamma) + 1}{\kappa_2(v, \gamma) - 1}\right)\right)} = \frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch}(k \text{ arch}(1))} = \frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch}(0)} = \|r_0\|_{\tilde{p}}. \quad \square$$

4.21. Következmény. Legyen $\gamma > 0$ tetszőleges rögzített szám. A $v \rightarrow 0^+$ aszimptotikus esetben a CGN-módszer becslése jobb a MINRES becslésénél tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ index esetén.

Bizonyítás. A 4.19. és 4.20. állításban szereplő határértékek γ -tól és k -tól függetlenek, és a kettő közül a CGN-módszer becslésében szereplő konstans szorzó a kisebb. $\square$

4.22. Állítás. Legyen $\gamma > 0$ tetszőleges rögzített szám. A $\nu := \frac{\gamma^2}{2}$ esetben a CGN-módszer becslése jobb a MINRES becslésénél tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ index esetén.

Bizonyítás. A becslésekben $\mu = \frac{1}{\nu} = \frac{2}{\gamma^2}$. A MINRES lineáris becslésében:

$$\kappa_1 = \frac{(\sqrt{1+4\mu\gamma^2} + \sqrt{1+4\mu} - 2)(1 + \sqrt{1+4\mu})}{2(\sqrt{1+4\mu\gamma^2} - 1)} = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\gamma^2}}\right)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{\kappa_1} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\gamma^2}}}{2}$$

Ezt felhasználva a MINRES lineáris becslése:

$$2\|r_0\|_{\tilde{p}^{-1}} \left(\frac{\sqrt{\kappa_1} - 1}{\sqrt{\kappa_1} + 1} \right)^{\frac{k}{2}} = 2\|r_0\|_{\tilde{p}^{-1}} \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\gamma^2}}}{3 + \sqrt{1 + \frac{8}{\gamma^2}}} \right)^{\frac{k}{2}} \quad (27)$$

A CGN-módszer lineáris becslésében ennél a kritikus ν értéknél a κ_2 mindkét esetben ugyanazt az értéket veszi fel, méghozzá:

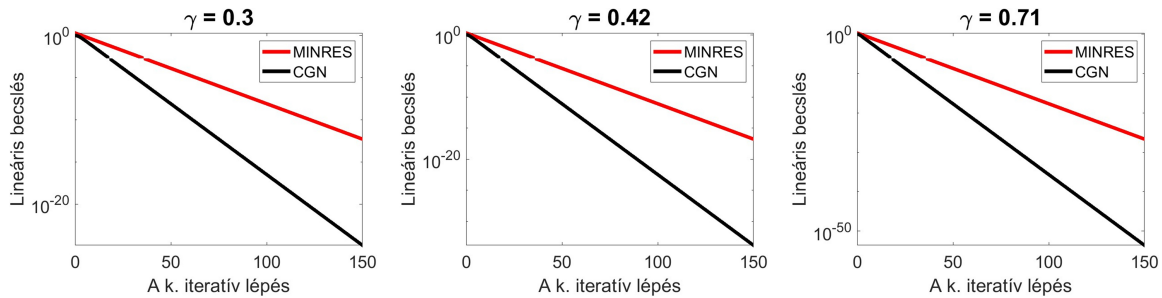
$$\kappa_2 = \frac{1 + \frac{4}{\gamma^2} + \sqrt{1 + \frac{8}{\gamma^2}}}{2}$$

Ezt felhasználva a CGN-módszer lineáris becslése:

$$\frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch}\left(k \text{arch}\left(\frac{\kappa_2+1}{\kappa_2-1}\right)\right)} = \frac{\|r_0\|_{\tilde{p}}}{\text{ch}\left(k \text{arch}\left(\frac{3 + \frac{4}{\gamma^2} + \sqrt{1 + \frac{8}{\gamma^2}}}{-1 + \frac{4}{\gamma^2} + \sqrt{1 + \frac{8}{\gamma^2}}}\right)\right)} \quad (28)$$

Annak eldöntéséhez, hogy melyik becslés ad jobb konvergenciát, a (27) és (28) k -tól függő függvényeket kell összehasonlítani tetszőleges $\gamma > 0$ rögzített paraméter esetén. Ennek precíz analitikus vizsgálata a függvények komplikáltsága miatt nehézkes, ezért helyette MATLAB-ban numerikus vizsgálatokat végeztem. Néhány konkrét γ értékre a 18. ábra grafikonjain látható, hogy minden iteratív lépésben a CGN-módszerhez tartozó becslés a kisebb. $\square$

4.23. Megjegyzés. A 4.17., 4.19. és 4.20. állításban az aszimptotikus eset konvergenciabecslése k -tól független, azaz úgy tűnhet, hogy a módszerek nem konvergálnak. Fontos viszont megjegyezni, hogy bármely $\nu > 0$ paraméter esetén a konvergenciahányados 1-nél kisebb, tehát az iteratív módszerek konvergálnak, csak esetleg az aszimptotikus értékekhez közelítve csökken a konvergencia sebessége.



18. ábra. A MINRES- és a CGN-módszer lineáris becslése logaritmikus skálán a $\gamma = 0.3, 0.42, 0.71$ értékekre a $\nu = \frac{\gamma^2}{2}$ esetben.

4.4. Numerikus tesztek

A 3.4. fejezethez hasonlóan az Oseen-egyenlet esetén is végeselem-módszer segítségével diskretizáljuk a peremérték-feladatot, és vagy a 4.2. fejezetben bemutatott nem szimmetrikus Uzawa-típusú algoritmusokat használjuk, vagy közvetlenül megoldjuk a 4.3. fejezetben tárgyalt nagy lineáris egyenletrendszer.

Mivel az Oseen-egyenlet esetén az a bilineáris forma kiegészült a konvekciós taggal és a v paraméterrel, így az A_h merevségi mátrix definíciója is változik:

$$\int_{\Omega} (v \nabla \mathbf{u}^h : \nabla \psi_i + (\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{u}^h) \cdot \psi_i) = \sum_{j=1}^{N_u} c_j \int_{\Omega} (\nabla \psi_j : \nabla \psi_i + (\mathbf{w} \cdot \nabla \psi_j) \cdot \psi_i) =: \sum_{j=1}^{N_u} c_j a_{ij} \quad (i = 1, \dots, N_u)$$

Az A_h mátrix definícióján kívül a numerikus módszer konstrukciója és implementációja megegyezik a Stokes-feladatnál leírtakkal.

Az Oseen-egyenlet megoldására készített MATLAB programot is érdemes tesztelnünk, ezért a 3.14. példában bemutatott tesztfeladatot módosítjuk úgy, hogy a megadott függvények az Oseen-egyenlet pontos megoldásai legyenek. Az ezzel kapcsolatos számolást a 4.24. példában részletezzük, a módszer konvergenciáját jellemző adatsorokat pedig az 5. táblázat szemlélteti. A táblázat adatai azt mutatják, hogy az Ω_1 négyzeten az Oseen-egyenlet esetén is a konvergencia harmad- illetve másodrendű.

A 19., 20. és 21. ábrán néhány további feladat megoldása látható, ahol a pontos megoldás nem ismert, de a végeselem-módszerrel numerikusan közelíthető. A Stokes-feladatnál szereplő ábrákkal ellentétben most az $\mathbf{f}$ jobb oldal helyett az utolsó grafikonon a $\mathbf{w}$ vektormezőt ábrázoltuk. Érdemes összevetni ezeket az ábrákat a 9., 10. és 11. ábrákkal, különösen az sebességmezőt szemléltető áramvonalakkal, ahol közvetlenül megfigyelhető a $\mathbf{w}$ vektormező forgató ill. eltoló hatása.

A 22., 23. és 24. ábrán megfigyelhető egy $v = 1, 0.1, 0.01$ viszkozitási paraméterrel és $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ vektormezővel ellátott Oseen-egyenletre alkalmazott CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus konvergenciája. A 4.13. állítás és a 4.11. megjegyzés szerint azt várjuk, hogy ilyenkor v -től függetlenül a GCR-Uzawa-algoritmus konvergál gyorsabban. Ezt rendre megfigyelhetjük mindegyik grafikonon. Látszik továbbá az is, hogy a v csökkentése nem befolyásolja számottevően a grafikonok alakját és a két görbe egymáshoz képesti viszonyát, azonban kisebb v esetén az iterációs lépések száma mindhárom tartomány esetén növekszik. Ábránként a három tartomány grafikonjait összevetve megállapítható, hogy a Stokes-feladathoz hasonlóan itt is egy nagyobb γ inf-sup-konstanshoz kisebb iterációszámok mérhetők.

A 25., 26. és 27. ábrán ugyanazt a feladatot oldjuk meg $v = 1, 0.1, 0.01$ viszkozitási paraméterrel, csak az Uzawa-algoritmus helyett a (6) nagy egyenletrendszerre alkalmazott prekondicionált CGN- és GCR-módszer konvergenciája látható. Megfigyelhető, hogy az Uzawa-típusú algoritmusokkal ellentétben ezeknél a v paraméter értéke nagy hatással van arra, hogy a két módszer közül melyik konvergál gyorsabban. A $v = 1$ esetben ugyanazokat a grafikonokat látjuk, mint a Stokes-feladatnál a 14. ábrán, mivel $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ esetén a MINRES- és a GCR-módszer konvergenciája megegyezik. Ebben az esetben tehát a GCR-módszer konvergál gyorsabban. A $v = 0.1$ ill. $v = 0.01$ esetben viszont a CGN-módszer konvergál gyorsabban, sőt a grafikonokon az is látszik, hogy a v csökkentésével egyre nagyobb előnyre tesz szert a CGN-módszer. Ábránként a három tartomány grafikonjait összevetve megállapítható, hogy itt is nagyobb γ inf-sup-konstans esetén kisebb iterációszámok mérhetők.

4.24. Példa. Tekintsük az $\Omega_1 = [-1, 1]^2$ négyzeten a 3.14. példában megadott $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és p függvényt:

$$u_1(x, y) := (x^2 - 1)^2(y^2 - 1)y; \quad u_2(x, y) := -(x^2 - 1)(y^2 - 1)^2x; \quad p(x, y) := \frac{x^3}{3}.$$

Emellett legyen $v := 1$ és $\mathbf{w}(x, y) := (e^x \sin(y), e^x \cos(y))$, ami egyrészt folytonosan differenciálható, másrészt pedig $\operatorname{div} \mathbf{w} = \partial_x(e^x \sin(y)) + \partial_y(e^x \cos(y)) = e^x \sin(y) - e^x \sin(y) = 0$.

Számoljuk ki az u_1, u_2, p függvények parciális deriváltjait!

$$\begin{aligned} \partial_x u_1(x, y) &= 4(x^2 - 1)(y^2 - 1)xy; & \partial_x u_2(x, y) &= -(3x^2 - 1)(y^2 - 1)^2; \\ \partial_y u_1(x, y) &= (x^2 - 1)^2(3y^2 - 1); & \partial_y u_2(x, y) &= -4(x^2 - 1)(y^2 - 1)xy; \\ \partial_x^2 u_1(x, y) &= 4(3x^2 - 1)(y^2 - 1)y; & \partial_x^2 u_2(x, y) &= -6x(y^2 - 1)^2; \\ \partial_y^2 u_1(x, y) &= 6y(x^2 - 1)^2; & \partial_y^2 u_2(x, y) &= -4(x^2 - 1)(3y^2 - 1)x; \\ \partial_x p(x, y) &= x^2; & \partial_y p(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

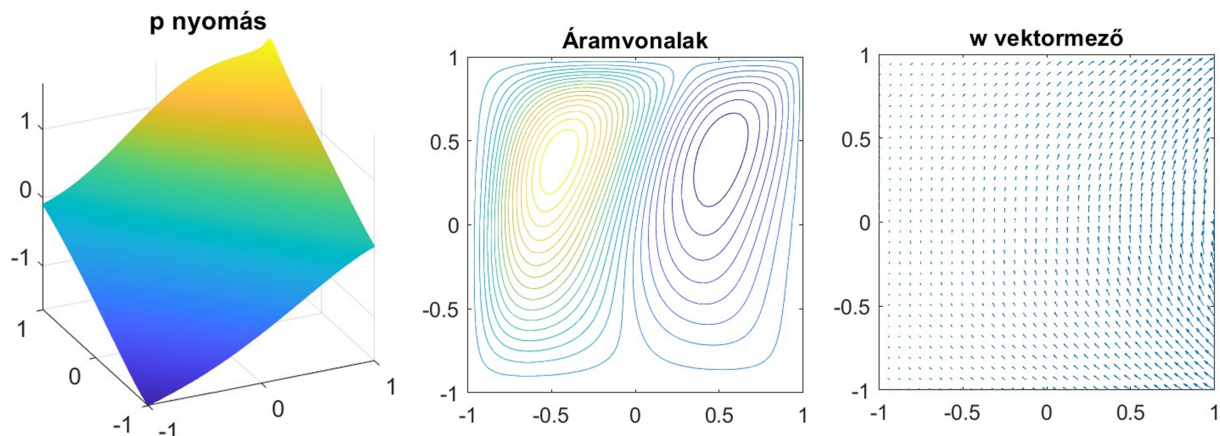
A jobb oldalon szereplő $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ függvény most az alábbi alakban írható fel:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &:= -\Delta u_1(x, y) + \mathbf{w} \cdot \nabla u_1(x, y) + \partial_x p(x, y) \\ &= -\partial_x^2 u_1(x, y) - \partial_y^2 u_1(x, y) + w_1(x, y)\partial_x u_1(x, y) + w_2(x, y)\partial_y u_1(x, y) + \partial_x p(x, y) \\ &= -4(3x^2 - 1)(y^2 - 1)y - 6y(x^2 - 1)^2 + e^x \sin(y)4(x^2 - 1)(y^2 - 1)xy + \\ &\quad + e^x \cos(y)(x^2 - 1)^2(3y^2 - 1) + x^2; \\ f_2(x, y) &:= -\Delta u_2(x, y) + \mathbf{w} \cdot \nabla u_2(x, y) + \partial_y p(x, y) \\ &= -\partial_x^2 u_2(x, y) - \partial_y^2 u_2(x, y) + w_1(x, y)\partial_x u_2(x, y) + w_2(x, y)\partial_y u_2(x, y) + \partial_y p(x, y) \\ &= 6x(y^2 - 1)^2 + 4(x^2 - 1)(3y^2 - 1)x - e^x \sin(y)(3x^2 - 1)(y^2 - 1)^2 - \\ &\quad - e^x \cos(y)4(x^2 - 1)(y^2 - 1)xy + 0. \end{aligned}$$

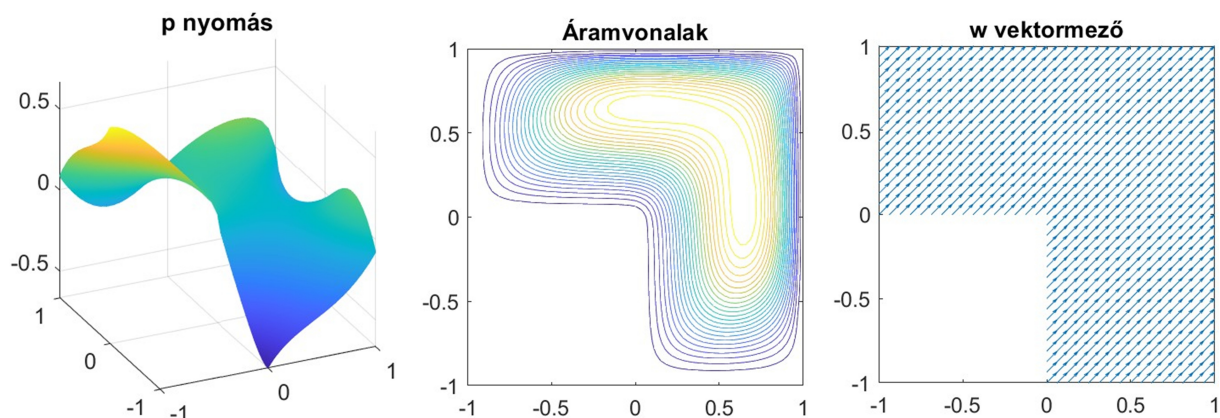
A numerikus megoldás ábrái nagyon hasonlóak a 6. ábrához az $\mathbf{f}$ jobb oldal kivételével, ezért ezt itt nem ábrázoltam külön. Az 5. és a 2. táblázat adatai is nagyon hasonlóak, ezért a vége-selem-módszer konvergenciájáról ugyanaz mondható el, mint a Stokes-feladat esetében.

n	0	1	2	3	4	5	6
$\ \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^*\ _{H_0^1}$	0.0714	0.0116	0.00167	2.26e-04	2.94e-05	3.74e-06	4.73e-07
$\mathbf{u}^h$ rendje		2.62	2.80	2.89	2.94	2.97	2.99
$\ p^h - p^*\ _{L^2}$	0.100	0.0151	0.00312	7.56e-04	1.88e-04	4.70e-05	1.17e-05
p^h rendje		2.73	2.27	2.047	2.0066	2.0010	2.00017

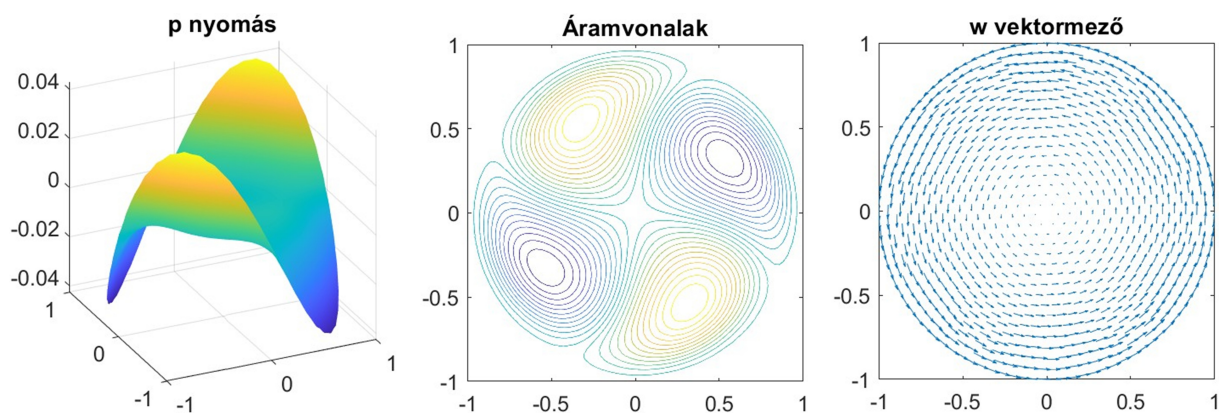
5. táblázat. A numerikus és a pontos megoldás rácspontokon vett különbségének a normája és a konvergencia rendje különböző n paraméterekre a 4.24. példában.



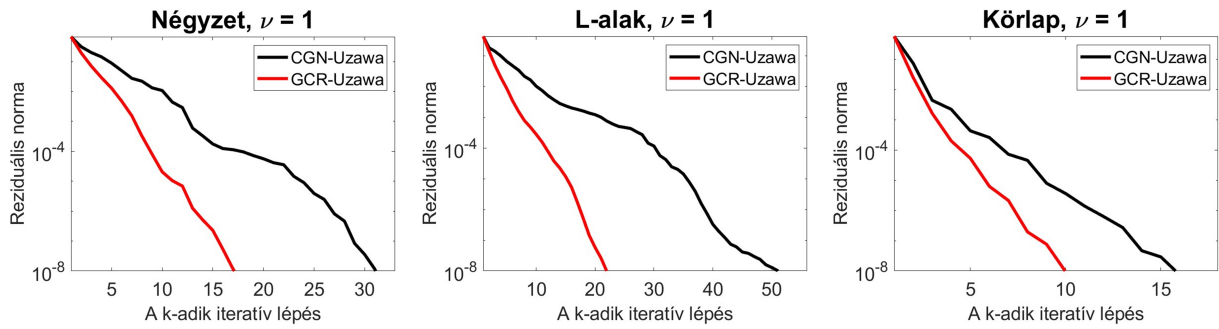
19. ábra. Az Oseen-egyenlet numerikus megoldása $n = 3$ paraméter mellett négyzeten az $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvényvel, $\nu = 1$ viszkozitással és $\mathbf{w}(x, y) = 50(e^x \sin(y), e^x \cos(y))$ vektormezővel.



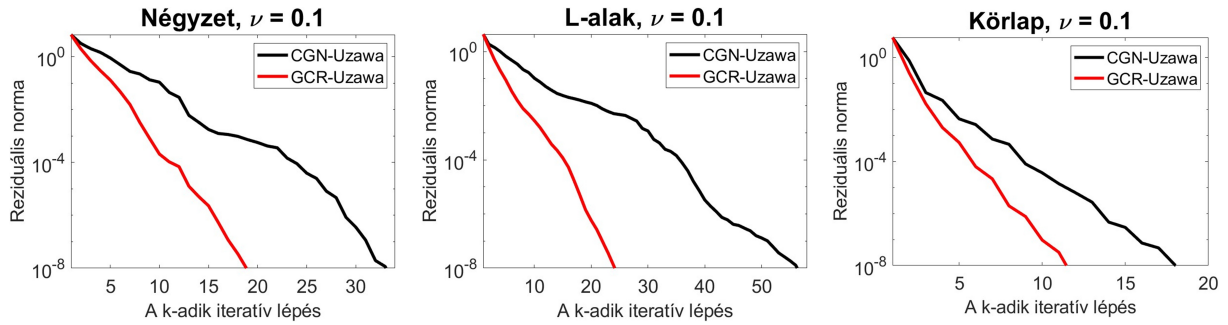
20. ábra. Az Oseen-egyenlet numerikus megoldása $n = 3$ paraméter mellett L-alakú tartományon az $\mathbf{f}(x, y) = (-y, x)$ függvényvel, $\nu = 1$ viszkozitással és $\mathbf{w}(x, y) = (50, 50)$ vektormezővel.



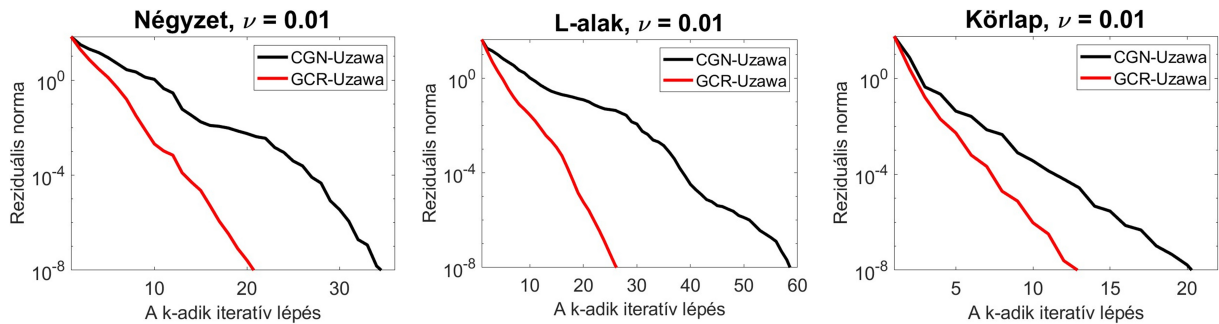
21. ábra. Az Oseen-egyenlet numerikus megoldása $n = 3$ paraméter mellett körlapon az $\mathbf{f}(x, y) = ((1 - \cos(x)) \sin(y), (1 - \cos(y)) \sin(x))$ függvényvel, $\nu = 1$ viszkozitással és $\mathbf{w}(x, y) = 50(-y, x)$ vektormezővel.



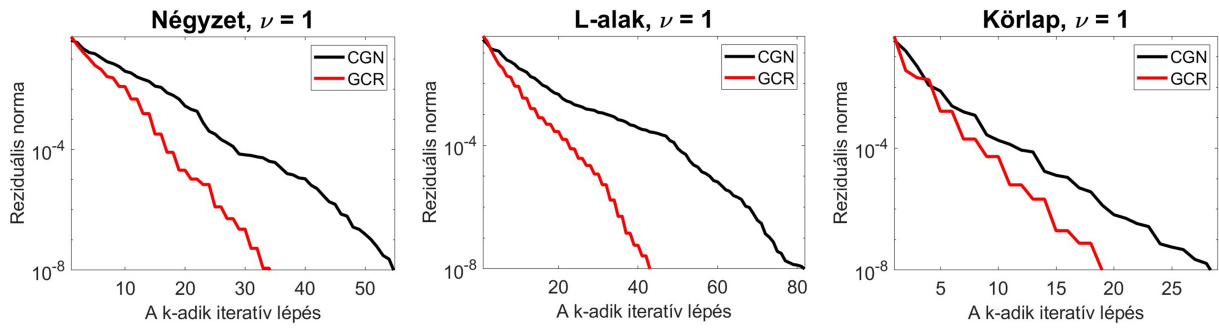
22. ábra. Az Oseen-egyenletre alkalmazott CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus konvergenciájának összehasonlítása $n = 3$ paraméterrel, $\mathbf{f}(x,y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnel, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ vektormezővel és $\nu = 1$ viszkozitással mindhárom tartomány esetén.



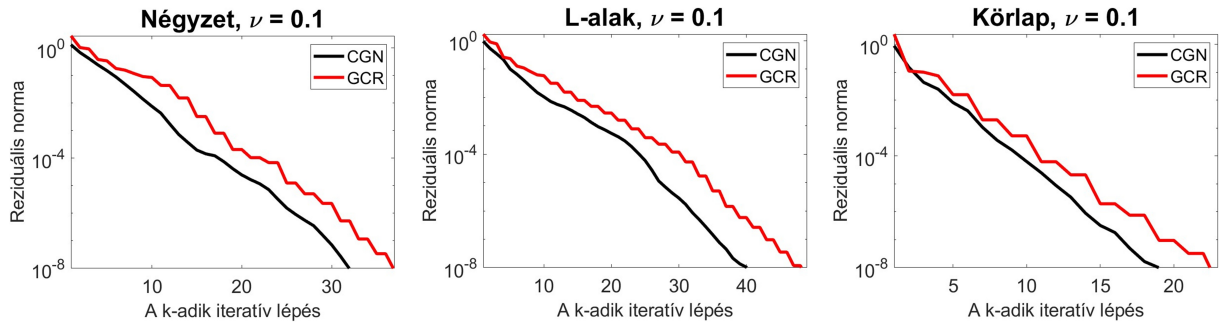
23. ábra. Az Oseen-egyenletre alkalmazott CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus konvergenciájának összehasonlítása $n = 3$ paraméterrel, $\mathbf{f}(x,y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnel, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ vektormezővel és $\nu = 0.1$ viszkozitással mindhárom tartomány esetén.



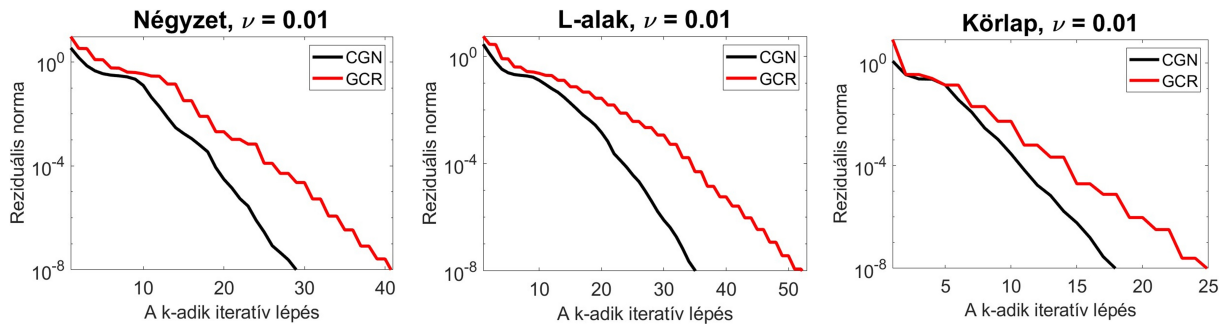
24. ábra. Az Oseen-egyenletre alkalmazott CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus konvergenciájának összehasonlítása $n = 3$ paraméterrel, $\mathbf{f}(x,y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnel, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ vektormezővel és $\nu = 0.01$ viszkozitással mindhárom tartomány esetén.



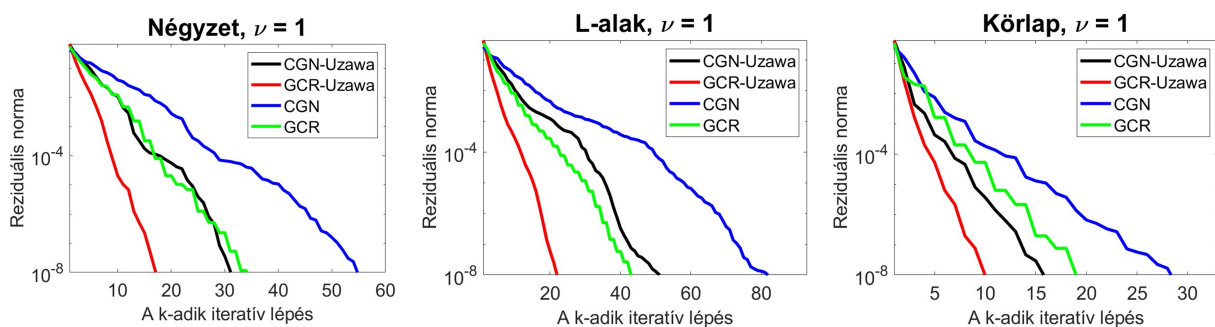
25. ábra. A nagy egyenletrendszerre alkalmazott prekondicionált CGN- és GCR-algoritmus konvergenciájának összehasonlítása $n = 3$ paraméterrel, $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnel, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ vektormezővel és $\nu = 1$ viszkozitással mindhárom tartomány esetén.



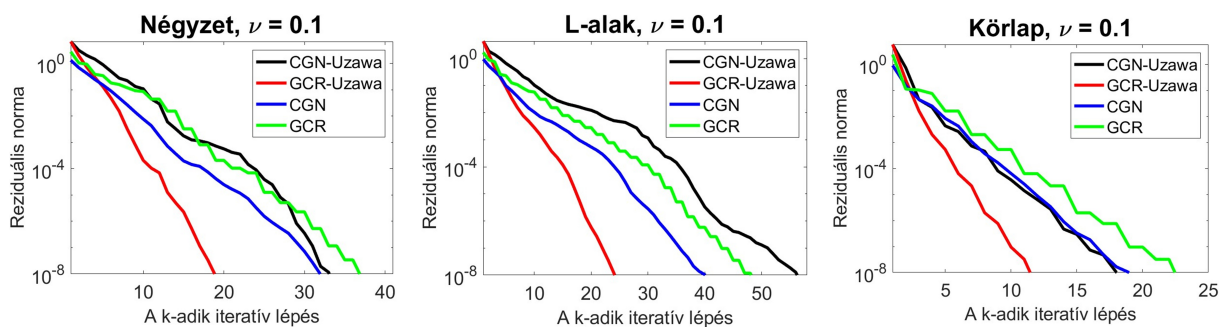
26. ábra. A nagy egyenletrendszerre alkalmazott prekondicionált CGN- és GCR-algoritmus konvergenciájának összehasonlítása $n = 3$ paraméterrel, $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnel, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ vektormezővel és $\nu = 0.1$ viszkozitással mindhárom tartomány esetén.



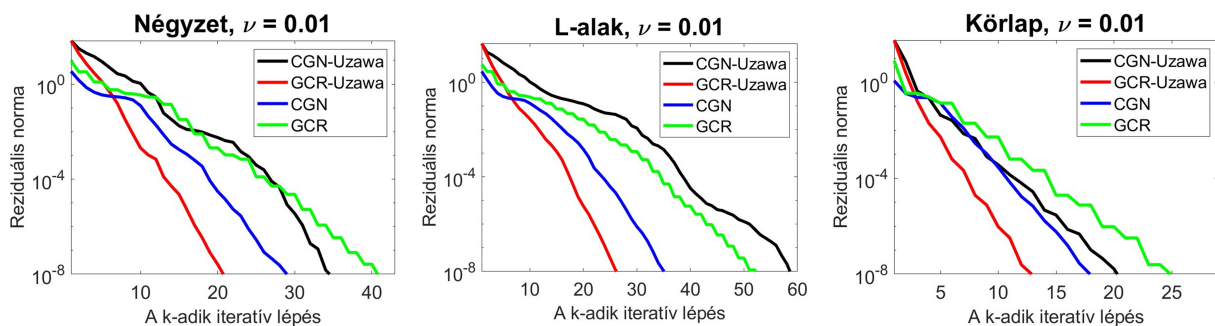
27. ábra. A nagy egyenletrendszerre alkalmazott prekondicionált CGN- és GCR-algoritmus konvergenciájának összehasonlítása $n = 3$ paraméterrel, $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnel, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ vektormezővel és $\nu = 0.01$ viszkozitással mindhárom tartomány esetén.



28. ábra. A 22. és 25. ábra grafikonjainak egyesítése, mely tartományonként szemlélteti a CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus ill. a prekondicionált CGN- és GCR-módszer konvergenciáját, amikor az Oseen-egyenlet paramétere $\nu = 1$ és $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.



29. ábra. A 23. és 26. ábra grafikonjainak egyesítése, mely tartományonként szemlélteti a CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus ill. a prekondicionált CGN- és GCR-módszer konvergenciáját, amikor az Oseen-egyenlet paramétere $\nu = 0.1$ és $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.



30. ábra. A 24. és 27. ábra grafikonjainak egyesítése, mely tartományonként szemlélteti a CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus ill. a prekondicionált CGN- és GCR-módszer konvergenciáját, amikor az Oseen-egyenlet paramétere $\nu = 0.01$ és $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

A nagy rendszer megoldásánál a $\nu = 1$ esetet a Stokes-feladatnál részletesen tárgyaltuk a 3.3. fejezetben. Amennyiben $\nu > 1$, a becslések gyorsan közelítenek a 4.18. következményben vizsgált $\nu \rightarrow \infty$ aszimptotikus esethez, ahol szintén a $\nu = 1$ esethez hasonló konvergenciát várunk, és a numerikus tesztek során is ezt tapasztaltuk.

A 4.21. és 4.22. állításban megmutattuk, hogy elegendően kicsi ν paraméter esetén a módszerek lineáris becslését alapul véve várhatóan a CGN-módszer konvergál gyorsabban. A numerikus tesztek ezzel összhangban vannak, hiszen a $\nu = 0.1$ esetben a 26. ábrán és a $\nu = 0.01$ esetben a 27. ábrán pontosan ez figyelhető meg mindhárom tartomány esetén: már az első iteratív lépéstől kezdve a prekondicionált CGN-módszer által előállított reziduális hibavektorok normája kisebb a prekondicionált GCR-módszer futása során tapasztalt normákhoz képest, és a $\nu = 0.01$ esetben ez a különbség egészen számottevő.

A 28., 29. és 30. ábrán láthatóak tartományonként egyesítve a korábban bemutatott grafikonok, melyek együttesen szemléltetik a CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus ill. a prekondicionált CGN- és GCR-módszer konvergenciáját. Megállapítható, hogy a vizsgált tartományokon és ν paraméterek mellett minden esetben a GCR-Uzawa-algoritmus konvergál a leggyorsabban. A többi algoritmus sorrendjének felállításához azonban figyelembe kell venni a tartomány alakját és a ν értékét egyaránt. Ennek áttekintését a 6., 7. és 8. táblázat adatai szolgáltatják, ahol ν értéke szerinti bontásban látható a módszerek sorrendje az egyes tartományokon. Megfigyelhető, hogy a GCR-Uzawa-algoritmus egyértelmű fölénye mellett $\nu = 1$ esetén a CGN-módszer konvergenciája a leglassabb, viszont a $\nu = 0.01$ esetben már annyit javul a konvergenciája, hogy a második helyre kerül. A többi esetben a sorrend tartományonként nagy változatosságot mutat, főleg a CGN-Uzawa- és a GCR-módszer között.

	1.	2.	3.	4.
Négyzet	GCR-Uzawa	CGN-Uzawa	GCR	CGN
L-alak	GCR-Uzawa	GCR	CGN-Uzawa	CGN
Körlap	GCR-Uzawa	CGN-Uzawa	GCR	CGN

6. táblázat. A négy iteratív módszer hatékonyságának sorrendje tartományonként a $\nu = 1$ és $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ esetben a 28. ábra grafikonjai alapján.

	1.	2.	3.	4.
Négyzet	GCR-Uzawa	CGN	CGN-Uzawa	GCR
L-alak	GCR-Uzawa	CGN	GCR	CGN-Uzawa
Körlap	GCR-Uzawa	CGN-Uzawa	CGN	GCR

7. táblázat. A négy iteratív módszer hatékonyságának sorrendje tartományonként a $\nu = 0.1$ és $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ esetben a 29. ábra grafikonjai alapján.

	1.	2.	3.	4.
Négyzet	GCR-Uzawa	CGN	CGN-Uzawa	GCR
L-alak	GCR-Uzawa	CGN	GCR	CGN-Uzawa
Körlap	GCR-Uzawa	CGN	CGN-Uzawa	GCR

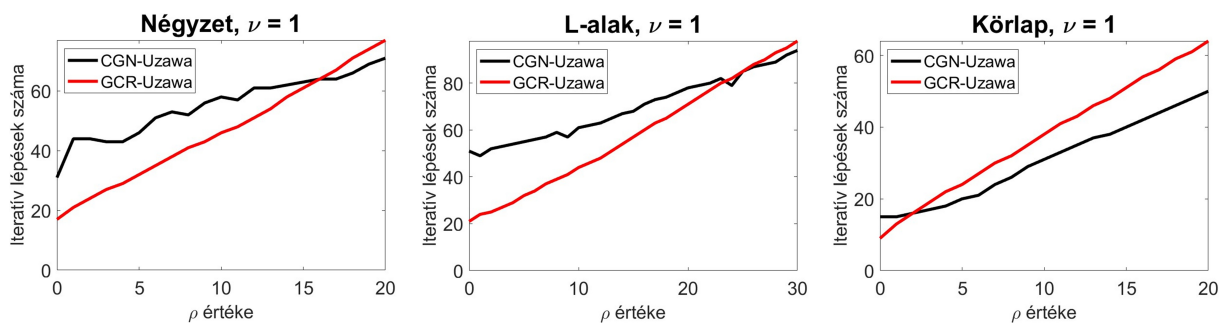
8. táblázat. A négy iteratív módszer hatékonyságának sorrendje tartományonként a $\nu = 0.01$ és $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ esetben a 30. ábra grafikonjai alapján.

A 31. és 32. ábra grafikonjain tartományonként az látható, hogy a $\mathbf{w} = (\rho, 0)$ vektormező esetén ($\rho \in \mathbb{N}$) hogyan változik az iteratív lépések száma $\text{TOL} = 10^{-8}$ toleranciaszinttel a $\nu = 1$ és $\nu = 0.1$ értékekre a CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus esetén, ha a ρ értékét 0-ról elkezdjük növelni. A grafikonok legelején a $\rho = 0$ esetben $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, tehát a 22. és 23. ábrán látható konvergenciát tapasztaljuk itt is, és ennek megfelelően a grafikonok elején biztosan a GCR-Uzawa-algoritmus konvergál gyorsabban. Ezután a fekete és a piros görbék metszik egymást, és a metszéspont után a CGN-Uzawa-algoritmus konvergál gyorsabban. A $\nu = 0.1$ esetben jól látható, hogy a CGN-Uzawa-algoritmus dominanciája csak egy szakaszon érvényes, és elegendően nagy ρ esetén a két görbe ismét metszi egymást, és utána megint a GCR-Uzawa-algoritmus konvergál gyorsabban. Ugyanezt a jelenséget figyeltük meg a [4] TDK-dolgozatban is, ahol hasonló keretek között a prekondicionált CGN- és GCR-módszer konvergenciáját vizsgáltuk konvekció-diffúziós egyenletek esetén.

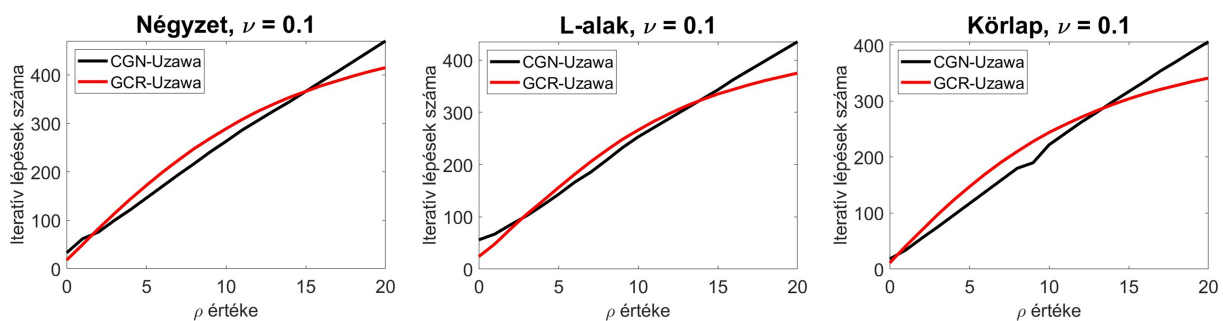
A 33. ábra grafikonjain tartományonként ugyanez az összehasonlítás látható a prekondicionált CGN- és GCR-módszer esetén. A grafikonok elején a $\rho = 0$ esetben itt is a 25. ábrán látható konvergencia jelenik meg. Mivel itt jelentősen megnőtt az iteratív lépések száma, ezért csak a $\nu = 1$ eset grafikonjait sikerült elkészíteni, mert már $\nu = 0.1$ viszkozitásnál is nehezen konvergáltak az algoritmusok, és akár az 1000 iteratív lépést is meghaladták egyes esetekben. Ezeken a grafikonokon szintén az Uzawa-típusú algoritmusoknál leírtak figyelhetőek meg: először a prekondicionált GCR-módszer konvergál gyorsabban, majd a CGN-módszer átveszi a vezetést, és elegendően nagy ρ esetén feltételezhetően ezeknél is lenne egy második metszéspont, ami után ismét a GCR-módszer konvergálna gyorsabban. Kisebb ν esetén a 26. és 27. ábrák szerint a $\rho = 0$ esetben rögtön a CGN-módszer konvergál gyorsabban, tehát az első szakasz kimarad, és feltehetően ott is megfigyelhető lenne egy későbbi metszéspont, amitől kezdve a GCR-módszer konvergálna gyorsabban.

A 31. és 33. ábrát összehasonlítva a $\nu = 1$ esetben megállapítható, hogy a vizsgált Oseen-egyenletre a $\mathbf{w} = (\rho, 0)$ vektormező esetén a nem szimmetrikus esetben nem érdemes a nagy egyenletrendszer (legalábbis a vizsgált prekondicionáló mátrixszal) megoldani, mert már $\rho = 20$ esetén is 200-nál nagyobb iterációs számokat tapasztalunk, ami ρ növelésével egyre inkább növekszik. Helyette a CGN-Uzawa- vagy a GCR-Uzawa-algoritmust érdemes használni: a kettő közül azt, amelyik ρ függvényében gyorsabban konvergál. A korábbi megállapítások szerint tehát a görbék két metszéspontja közti ρ értékek esetén a CGN-Uzawa-algoritmust, ezen szakaszon kívül pedig a GCR-Uzawa-algoritmust javasolt használni az Oseen-egyenlet megoldására.

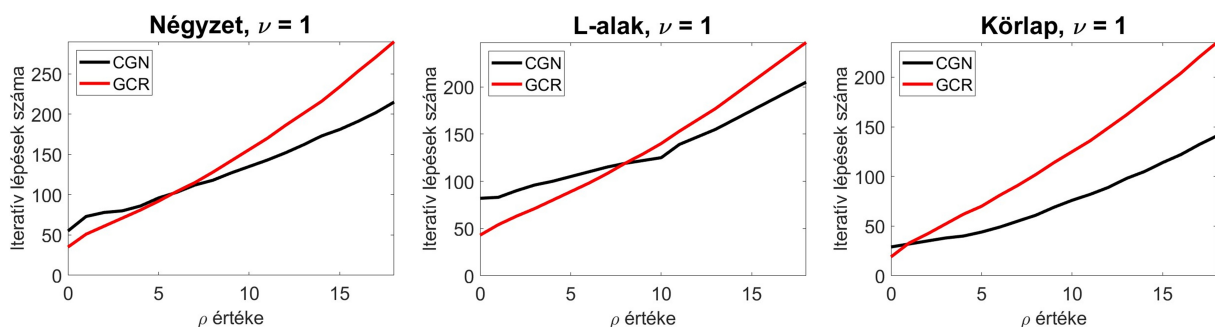
A 34., 35. és 36. ábrán látható a négy módszer konvergenciája a $\mathbf{w} = (1, 0)$ vektormezőre $\nu = 1, 0.1, 0.01$ viszkozitással. Megfigyelhető, hogy $\nu = 0.01$ esetén a CGN-módszer teljesít a legjobban mindhárom tartományon, és a GCR-módszer jelentősen lemarad a többihez képest.



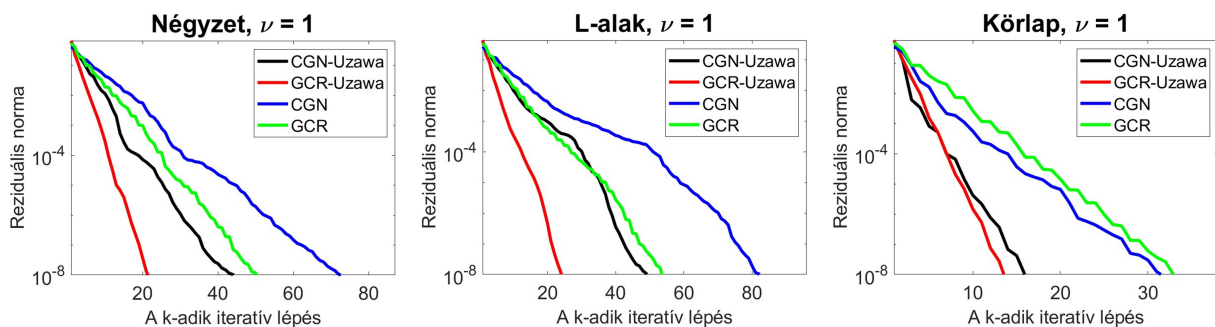
31. ábra. Az Oseen-egyenletre alkalmazott CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus által megtett iteratív lépések száma $TOL = 10^{-8}$ toleranciával, $n = 3$ paraméterrel, $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnyel, $\mathbf{w} = (\rho, 0)$ vektormezővel és $\nu = 1$ viszkozitással mindhárom tartomány esetén.



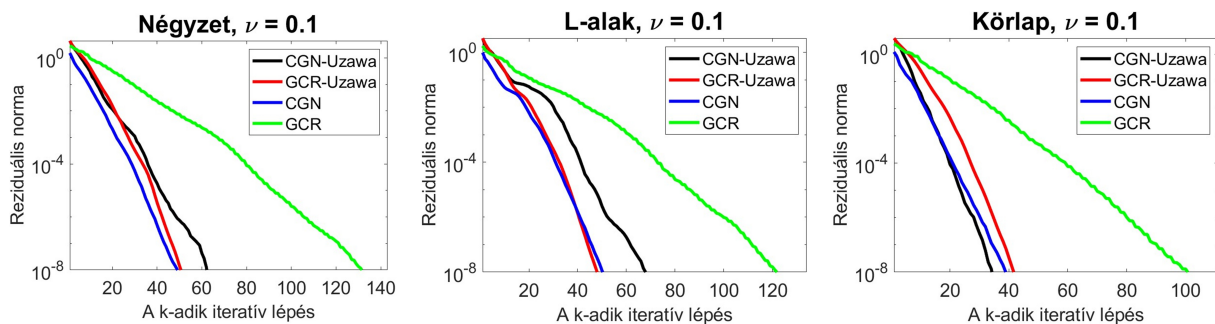
32. ábra. Az Oseen-egyenletre alkalmazott CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus által megtett iteratív lépések száma $TOL = 10^{-8}$ toleranciával, $n = 3$ paraméterrel, $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnyel, $\mathbf{w} = (\rho, 0)$ vektormezővel és $\nu = 0.1$ viszkozitással mindhárom tartomány esetén.



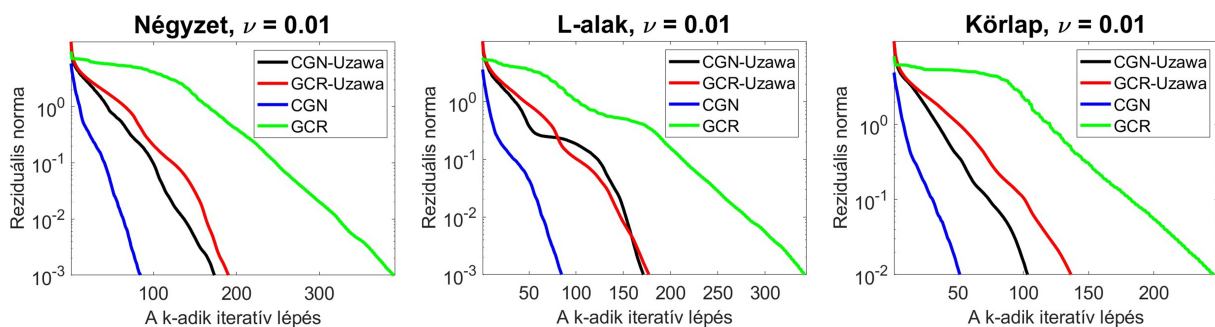
33. ábra. A nagy egyenletrendszerre alkalmazott prekondicionált CGN- és GCR-algoritmus által megtett iteratív lépések száma $TOL = 10^{-8}$ toleranciával, $n = 3$ paraméterrel, $\mathbf{f}(x, y) = (\cos(x), \cos(x))$ függvénnyel, $\mathbf{w} = (\rho, 0)$ vektormezővel és $\nu = 1$ viszkozitással mindhárom tartomány esetén.



34. ábra. A négy iteratív módszer egyesített grafikonjai, mely tartományonként szemlélteti a CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus ill. a prekondicionált CGN- és GCR-módszer konvergenciáját, amikor az Oseen-egyenlet paraméterei $\mathbf{f}(x,y) = (\cos(x), \cos(x))$, $\mathbf{w} = (1,0)$, $\nu = 1$, $n = 3$ és $\text{TOL} = 10^{-8}$.



35. ábra. A négy iteratív módszer egyesített grafikonjai, mely tartományonként szemlélteti a CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus ill. a prekondicionált CGN- és GCR-módszer konvergenciáját, amikor az Oseen-egyenlet paraméterei $\mathbf{f}(x,y) = (\cos(x), \cos(x))$, $\mathbf{w} = (1,0)$, $\nu = 0.1$, $n = 3$ és $\text{TOL} = 10^{-8}$.



36. ábra. A négy iteratív módszer egyesített grafikonjai, mely tartományonként szemlélteti a CGN- és GCR-Uzawa-algoritmus ill. a prekondicionált CGN- és GCR-módszer konvergenciáját, amikor az Oseen-egyenlet paraméterei $\mathbf{f}(x,y) = (\cos(x), \cos(x))$, $\mathbf{w} = (1,0)$, $\nu = 0.01$, $n = 3$ és $\text{TOL} = 10^{-3}$ ill. 10^{-2} .

Hivatkozások

- [1] KARÁTSÓN, J.; HORVÁTH, R.: *Numerical Methods for Elliptic Partial Differential Equations*. URL: <https://kajkaat.web.elte.hu/pdnmell-ang-2024.pdf>
- [2] ELMAN, H. C.; SILVESTER, D. J.; WATHEN, A. J.: *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: With Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 2014.
- [3] SAAD, Y.: *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, Philadelphia, 2003.
- [4] LADOS, B. I.: *Comparison of iterative methods for discretized nonsymmetric elliptic problems*. TDK dolgozat, ELTE, 2024.
- [5] LAI, Y. L.; LIN, W. W.; PIERCE, D.: *Conjugate gradient and minimal residual methods for solving symmetric indefinite systems*. Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 84, Issue 2, p. 243-256, 1997.
- [6] AXELSSON, O.; KARÁTSÓN, J.: *Krylov improvements of the Uzawa method for Stokes type operator matrices*. Numer. Math. 148, p. 611–631, 2021.
- [7] SÜLI, E.: *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations*. University of Oxford, 2025.
URL: <https://people.maths.ox.ac.uk/suli/fem.pdf>
- [8] STOYAN, G.: *Towards discrete velte decompositions and narrow bounds for inf-sup constants*. Computers & Mathematics with Applications, Volume 38, Issues 7–8, p. 243-261, 1999.
- [9] CHEN, L.: *iFEM: an integrated finite element methods package in MATLAB*. Technical Report, University of California at Irvine, 2009.
URL: <https://lyc102.github.io/ifem/>
- [10] THE MATHWORKS, INC.: *MATLAB R2024b Update 3*. Natick, Massachusetts, 2024.
URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/>

Nyilatkozat

Alulírott **Lados Bálint István** nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során MI alapú eszközöket **nem alkalmaztam**.

Budapest, 2025. június 1.

A handwritten signature in blue ink that reads "Lados Bálint". The script is cursive and fluid.

Lados Bálint István