Mese egy régi feladatról

Laczkovich Miklós

1. A feladat

A matematikus és matematika-tanári szakok analízis gyakorlatain emberemlékezet óta feladjuk a következő feladatot.

Legyen $x_1 = 1$ *és* $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Van-e olyan* n*, amelyre* $x_n > 100$*?*

A feladatot – amelyet (F)-fel fogunk jelölni – többféleképpen is megoldhatjuk.

1. Megoldás. Nyilvánvaló, hogy az (x_n) sorozat pozitív tagokból áll és szigorúan monoton növő. Ha $x_n \le 100$ teljesülne minden n-re, akkor (x_n) felülről korlátos lenne. Mivel monoton növő, így konvergens volna. Ha azonban $x_n \to a$, akkor nyilván $a > 0$, továbbá $x_{n+1} = x_n + (1/x_n) \to a + (1/a)$ alapján $a = a + (1/a)$ teljesülne, ami lehetetlen. Így kell, hogy legyen olyan n, amelyre $x_n > 100$.

2. Megoldás. A feladat megoldásához nincs szükség a konvergencia fogalmára. Ugyanis tegyük fel, hogy $x_n \le 100$ minden n-re. Ekkor $x_{n+1} = x_n + (1/x_n) \ge x_n + 1/100$ minden n-re, amiből nyilvánvaló, hogy $x_n > n/100$ minden n-re. Ezt $n = 10000$-re alkalmazva azt kapjuk, hogy $x_{10000} > 100$, ami ellentmondás. Így kell, hogy legyen olyan n, amelyre $x_n > 100$.

Jegyezzük meg, hogy *az előző megoldásból nem következik, hogy* $x_{10000} > 100$. Ezt ugyanis egy indirekt feltevésből vezettük le, amely feltevésről kiderült, hogy hamis. Mindazonáltal az okoskodás kis módosításával könnyen beláthatjuk, hogy $x_{10000} > 100$ tényleg igaz.

3. Megoldás. Tegyük fel, hogy $x_{10000} \le 100$. Mivel a sorozat monoton növő, ezért $x_n \le 100$ minden $n \le 10000$-re. Így $x_{n+1} = x_n + (1/x_n) \ge x_n + 1/100$ minden $n \le 10000$-re, amiből nyilvánvaló, hogy $x_n > n/100$ minden $n \le 10000$-re. Ezt $n = 10000$-re alkalmazva azt kapjuk, hogy $x_{10000} > 100$, ami ellentmondás. Mivel az $x_{10000} \leq 100$ feltevés ellentmondásra vezetett, ezért szükségképpen $x_{10000} > 100$.

Az előző megoldás több kérdést felvet. Először is, nem lehetne-e az $x_{10000} > 100$ egyenlőtlenséget direkt módon belátni? Továbbá: tudunk-e 10000-nél lényegesen kisebb indexet találni, amelyre $x_n > 100$? Mindkét kérdést megválaszoljuk, mégpedig igenlően. Először is belátjuk, hogy

$$x_n > \sqrt{2n} \quad \textit{minden} \quad n \geq 3\textit{-ra.}$$

Legyen $y_n = x_n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Az $x_{n+1} = x_n + (1/x_n)$ összefüggést négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$y_{n+1} = \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 = x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2 = y_n + \frac{1}{y_n} + 2 > y_n + 2.$$

Mivel $y_1 = 1$ és $y_2 = 4$, ezért ebből következik, hogy $y_n > 2n$ minden $n \geq 3$-ra, azaz $x_n > \sqrt{2n}$ minden $n \geq 3$-ra. Így $x_{5000} > \sqrt{10000} = 100$.

A $\sqrt{2n}$ alsó becslés meglepően pontos. Belátjuk, hogy

$$x_n = \sqrt{2n} + h_n, \quad \textit{ahol} \quad h_n \to 0.$$

Valóban, az $y_{k+1} = y_k + (1/y_k) + 2$ egyenlőségeket $k = 1, \ldots, n-1$-re összeadva azt kapjuk, hogy

$$y_n = 1 + 2(n-1) + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \ldots + \frac{1}{y_{n-1}}. \tag{1}$$

Mármost $y_n \geq n$ minden n-re, hiszen $y_1 = 1$ és $y_n \geq 2n$ minden $n \geq 2$-re. Így (1)-ből következik, hogy

$$y_n < 2n + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Ebből

$$h_n = x_n - \sqrt{2n} = \frac{x_n^2 - 2n}{x_n + \sqrt{2n}} < \frac{y_n - 2n}{\sqrt{n}} < \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Így a $h_n \to 0$ állítás bizonyításához elég annyit belátni, hogy

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{3}$$

Ezt többféleképpen is beláthatjuk. Először is ismeretes, hogy $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} < 1 + \log n$ minden n-re, ahol $\log n$ a természetes alapú logaritmust jelöli. Azt is tudjuk, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra $n^{-\varepsilon} \cdot \log n \to 0$ ha $n \to \infty$, amiből (3) azonnal következik.

De a (3) állítást közvetlenül is beláthatjuk. Legyen $S = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, $S_1 = 1 + \ldots + \frac{1}{[n^{1/3}]}$, $S_2 = \frac{1}{[n^{1/3}]+1} + \ldots + \frac{1}{[n^{2/3}]}$ és $S_3 = \frac{1}{[n^{2/3}]+1} + \ldots + \frac{1}{n}$. Az S_1, S_2, S_3 összegek mindegyikét felülről becsüljük a legnagyobb tag és a tagok számának szorzatával. Azt kapjuk, hogy

$$S_1 \le [n^{1/3}] \le n^{1/3}, \qquad S_2 \le [n^{2/3}]/([n^{1/3}] + 1) \le n^{2/3}/n^{1/3} = n^{1/3}$$

és $S_2 \le n/([n^{2/3}] + 1) \le n/n^{2/3} = n^{1/3}$. Így $S = S_1 + S_2 + S_3 \le 3 \cdot n^{1/3}$, amiből (3) nyilvánvaló.

Ezzel beláttuk, hogy $x_n - \sqrt{2n} \to 0$. Ebből sejthető, hogy az a legkisebb n index, amelyre $x_n > 100$ nem lehet sokkal kisebb 5000-nél. Ez valóban így van: meg lehet mutatni, hogy $x_{4998} < 100 < x_{4999}$.

2. Egy variáns

Sok-sok évvel ezelőtt az (F) feladat szerepelt egy évfolyam-zárthelyiben, amelyet én felügyeltem. A zárthelyik beadásakor az egyik hallgatónő (akinek a nevére sajnos nem emlékszem) azzal a kérdéssel fordult hozzám, hogy igaz-e a feladat állítása, ha az $x_{n+1} = x_n + (1/x_n)$ rekurzió helyett az $x_{n+1} = x_n - (1/x_n)$ rekurziót tekintjük. Nem – válaszoltam –, hiszen ekkor $x_2 = 0$, és a sorozat nem folytatható. Persze – mondta az ifjú hölgy –, de mi van, ha a sorozatot 2-vel kezdjük? Erre már nem tudtam kapásból válaszolni, és megígértem, hogy másnapra meggondolom a dolgot.

Ennek már több, mint 25 éve, de a választ azóta sem tudom. Sőt, megkockáztatom, hogy a választ senki sem tudja. A probléma az, hogy a

$$z_1 = 2, \qquad z_{n+1} = z_n - \frac{1}{z_n} \;\; (n = 1, 2, \ldots)$$

rekurzióval definiált sorozat tagjai között végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív van (ezt könnyű belátni), és a sorozat viselkedésére vonatkozó olyan jellegű áttekintés, mint amilyet az (x_n) sorozat esetében láttunk reménytelennek tűnik. Megpróbálhatjuk komputer segítségével eldönteni, hogy van-e a (z_n) sorozatnak 100-nál nagyobb tagja, akkor azonban a következő nehézségekkel szembesülünk. Ha a sorozat tagjait közelítőleg számítjuk ki, akkor a reciprokok kiszámítása során a hibák olyan gyorsan nőnek, hogy néhány lépés után a kapott sorozatnak már semmi köze nem lesz az eredeti (z_n) sorozathoz. Ha pedig a sorozat tagjait pontosan akarjuk kiszámítani, akkor azokat egész számok hányadosaiként kell kezelnünk. Azonban ezek az egész számok olyan gyorsan nőnek, hogy néhány lépés után a kapott számokat a komputer már nem is tudja tárolni. Nem világos, hogy ezeket a problémákat meg lehet-e kerülni egy komputert segítségül hívó megoldásban.

Az elmúlt több, mint 25 évben sok kollégámnak említettem a kérdést, de amennyire tudom Jan Mařik (1920–1994) volt az egyetlen, aki komolyan foglalkozott vele. Mivel az eredeti kérdés reménytelennek tűnt, ezért mind a ketten azt vizsgáltuk, hogy mit mondhatunk a $z_{n+1} = z_n - (1/z_n)$ rekurzót kielégítő sorozatról, ha egy tetszőleges $z_1 = a$ valós számból indítjuk.

Meg lehet mutatani, hogy ha a sorozat nem fut be a nullába (amely csak megszámlálhatóan sok $z_1 = a$ értékre következik be), akkor a sorozatnak mindig végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja lesz. Jelölje $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ a sorozat azonos előjelű blokkjainak elemszámát. Ekkor tehát a sorozat p_1 pozitív taggal kezdődik, melyeket q_1 negatív tag követ, melyek után p_2 pozitív tag következik stb. Bizonyítható, hogy

(i) *a $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ sorozat egyértelműen meghatározza a $z_1 = a$ számot,*

(ii) *a $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ sorozat akkor és csak akkor periodikus, ha a (z_n) sorozat periodikus, és*

(iii) *a $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ sorozat akkor és csak akkor korlátos, ha a (z_n) sorozat korlátos.*

(Az (i) állítást illetően lásd az [4] feladatot.)

Mit mondhatunk a (z_n) sorozat viselkedéséről, ha azt egy *találomra választott* értékkel kezdjük? Meglepő módon ezt a kérdést kielégítően meg tudjuk válaszolni. A kérdés története valójában a XIX. században kezdődött.

George Boole 1857-ben bebizonyította, hogy „tetszőleges” $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre fennáll az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - (1/x))\,dx \tag{4}$$

azonosság [3]. Ez egyike azoknak az állításoknak, amelyeket könnyű belátni; a bámulatos csak az, hogy hogyan lehetett őket felfedezni.

Vázoljuk (4) bizonyítását abban az esetben, amikor f Riemann-integrálható egy $[a, b]$ intervallumban és nulla azon kívül. Minden ilyen függvény egyenletesen közelíthető olyan függvényekkel, amelyek szakaszonként konstansok $[a, b]$-n. Ezért (4)-et elég ilyen függvényekre bizonyítani. Mármost minden szakaszonként konstans függvény előáll véges sok χ_I alakú függvény lineáris kombinációjaként, ahol I intervallum és χ_I az I intervallum karakterisztikus függvénye. Ezért (4)-et elég a χ_I alakú függvényekre bizonyítani. Ha viszont I egy intervallum és $f = \chi_I$, akkor (4) bal oldalának értéke I hossza, míg (4) jobb oldalának értéke egyenlő a $\chi_I(x - (1/x))$ függvény integráljával.

Jelöljük az $x - (1/x)$ függvényt $\phi(x)$-szel. Ekkor a $\chi_I(x - (1/x)) = \chi_I \circ \phi$ függvény megegyezik a $\phi^{-1}(I)$ halmaz karakterisztikus függvényével. Ennek integrálja nem más mint a $\phi^{-1}(I)$ halmaz mértéke. Tehát (4) bizonyításához azt kell ellenőriznünk, hogy

$$\textit{bármely } I \textit{ intervallumra } \lambda(\phi^{-1}(I)) = \lambda(I), \tag{5}$$

ahol $\lambda(H)$ jelöli a H halmaz mértékét. Az (5) állítás könnyen igazolható. Ha felrajzoljuk a ϕ függvény grafikonját, akkor azonnal látjuk, hogy bármely I intervallumra a $\phi^{-1}(I)$ halmaz két intervallum egyesítése. Ezen intervallumok végpontjait két másodfokú egyenlet megoldásával kaphatjuk meg, és a számolás azt is kiadja, hogy a két intervallum hosszának összege éppen I hosszával egyenlő. Ezzel Boole tételét beláttuk.

Az (5) állítást ma úgy fogalmazzuk, hogy *a ϕ leképezés mértéktartó a számegyenesen.*

Jelöljük az f leképezés n-edik iteráltját f^n-nel. Ekkor a $z_1 = a$ kezdeti értékből induló és a $z_{n+1} = z_n - (1/z_n)$ rekurzót kielégítő sorozatra $z_n = \phi^n(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

A leképezések iteráltjainak vizsgálata az ergodelmélet feladata. Az ergodelmélet eredményeiből következik például, hogy *ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ leképezés* *ergodikus, akkor egy Lebesgue szerint nullmértékű halmaztól eltekintve minden $a \in \mathbb{R}$-re az $f^n(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ számok halmaza mindenütt sűrű a számegyenesen.* (Lásd pl. az [1] monográfiát. Egy f mértéktartó leképezést akkor nevezünk ergodikusnak, ha valahányszor egy mérhető H halmazt f önmagába képez, akkor H vagy a komplementere nullmértékű.)

Az a kérdés, hogy a Boole-féle ϕ leképezés ergodikus-e meglepően nehéznek bizonyult, és csak 1973-ban bizonyította be Adler és Weiss, hogy a válasz igenlő [2]. (Később erre a tényre számos egyszerűbb bizonyítás született.) A fenti általános tétel szerint ebből következik, hogy

egy Lebesgue szerint nullmértékű halmaztól eltekintve minden $a \in \mathbb{R}$-re teljesül, hogy a $z_1 = a$ kezdeti értékből induló és a $z_{n+1} = z_n - (1/z_n)$ rekurzót kielégítő sorozat mindenütt sűrű a számegyenesen.

Láthatjuk tehát, hogy egy „találomra választott" kezdeti értékből induló sorozat vislkedését le tudjuk írni, míg egyes konkrét (pl. $z_1 = 2$) értékekből induló sorozatról még azt sem tudjuk eldönteni, hogy van-e 100-nál nagyobb eleme. Ez a jelenség analóg a számok tizedestört-előállításának problémájával. Borel egy klasszikus tétele szerint *egy Lebesgue szerint nullmértékű halmaztól eltekintve minden $a \in \mathbb{R}$-re teljesül, hogy a tizedestört-előállításban mind a tíz jegy szerepel, méghozzá azonos* $(1/10)$ *gyakorisággal.* Ha azonban azt kérdezzük, hogy egy adott szám tizedestört-előállításában szerepel-e mind a tíz jegy végtelen sokszor, akkor ennek eldöntése gyakran reménytelenül nehéz. Így például senki sem tudja, hogy $\sqrt{2}$ tizedestört-előállításában van-e végtelen sok 0 jegy. A kérdés, hogy a $z_1 = 2$ értékből induló és a $z_{n+1} = z_n - (1/z_n)$ rekurzót kielégítő sorozat korlátos-e valószínűleg legalább ilyen nehéz.

Hivatkozások

[1] J. Aaronson: *An Introduction to Infinite Ergodic Theory.* A.M.S., 1997.

[2] R. L. Adler and B. Weiss, The ergodic infinite measure preserving transformation of Boole, *Israel J. Math.* **16** (1973), 263-–278.

[3] G. Boole, On the comparison of transcendents with certain applications to the theory of definite integrals, *Philos. Trans. Royal Soc. London* **147** Part III (1857), 745–803.

[4] *Matematikai Lapok* **33** (1982–1986), no. 4, Feladatrovat, 234. feladat. A feladat megoldása: *Matematikai Lapok* 1992/3-4, 39–41. oldalak.