Síkbarajzolható gráfok, rúdszerkezetek, transzformátorok

Recski András

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Triangle
n = 3
Square
n = 4
Pentagon
n = 5
Hexagon
n = 6
Heptagon
n = 7
Octagon
n = 8
Decagon
n = 10
Circle
n -----▶ infinity

A végtelen sokféle szabályos sokszög közül csak hárommal lehet a síkot „parkettázni” vagy „csempézni”.

http://www.software3d.com/Stella.php

Paolo Uccello
(1397-1475)

Mozaikpadló
(1425 körül),
Szent Márk-
székesegyház,
Velence

M. C. Escher
(1898-1972)

Zwaartekracht
(1952)

M. C. Escher
(1898-1972)

Zwaartekracht (1952)

Luca Pacioli

De Divina Proportione

1509

Mióta ismerjük a dualitás elvét?

I.e. 500 körül – szabályos poliéderek

17. szd. – analítikus geometria

19. szd. eleje – konvex poliéderek

19. szd. közepe – gráfok színezése

19. szd. vége – rúdszerkezetek, villamos hálózatok, Boole-algebrák

20. szd. eleje – 2-izomorfia, matroidok

20. szd. közepe – lineáris programozás

Mióta ismerjük a dualitás elvét?

Mióta ismerjük a dualitás elvét?

I.e. 500 körül – szabályos poliéderek

http://www.software3d.com/Stella.php

A szokásos bizonyításban

Mióta ismerjük a dualitás elvét?

I.e. 500 körül – szabályos poliéderek

17. szd. – analítikus geometria

R. Descartes, 1596-1650

LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication, oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Comme le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Mikor merőleges két egyenes?

Mióta ismerjük a dualitás elvét?

I.e. 500 körül – szabályos poliéderek

17. szd. – analítikus geometria

19. szd. eleje – konvex poliéderek

S. A. J. Lhuilier, 1750-1840

ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

LHUILIER
GERGONNE

Géométrie. Mémoire sur la polyédrométrie; contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 3 (1812-1813), p. 169-189.
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1812-1813__3__169_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1812-1813, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

» qu'au point de vue particulier sous lequel on a envisagé le sujet » dont on s'occupe. »

On voit, par cet exposé, que le mémoire de M. Lhuilier renferme deux parties bien distinctes. Dans la première, l'auteur se propose de démontrer le théorème d'Euler, d'une manière qui lui est propre. Son but, dans la seconde, est d'indiquer les diverses sortes d'exceptions auxquelles ce théorème est sujet. Je suivrai la même division dans l'analise de ce mémoire.

1. La première proposition que M. Lhuilier établit, et qui est presque évidente d'elle-même, est que, *dans toute pyramide, le nombre des faces, plus le nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arêtes.* On voit en effet que, si l'on désigne respectivement par F, S, A ces trois nombres, et qu'on représente par m le nombre des côtés du polygone base de la pyramide, on aura

$$F=m+1 \quad , \quad S=m+1 \quad , \quad A=2m \; ;$$

d'où

$$F+S=2m+2=A+2.$$

2. M. Lhuilier établit ensuite cet autre théorème : *Si deux polyèdres sont tels que, dans chacun, le nombre des faces, plus le nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arêtes; et si, en même temps, ces deux polyèdres ont une face égale par laquelle ils puissent être appliqués l'un à l'autre; dans le polyèdre résultant de leur réunion, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpassera aussi de deux unités le nombre des arêtes.*

Pour prouver cette proposition, M. Lhuilier considère que si n désigne le nombre des côtés des faces des deux polyèdres que l'on fait coïncider; que de plus p, p' et P désignent tant les deux corps que le corps formé de leur assemblage; que les nombres de faces d'angles solides et d'arêtes soient f, s, a, pour p, qu'ils soient f', s', a', pour p', et qu'ils soient enfin F, S, A, pour P, on devra avoir

Mióta ismerjük a dualitás elvét?

I.e. 500 körül – szabályos poliéderek

17. szd. – analítikus geometria

19. szd. eleje – konvex poliéderek

19. szd. közepe – gráfok színezése

Heawood példája arra, hogy Kempe bizonyítása hibás volt (1890)

ISSN 0002-9920

Notices

of the American Mathematical Society

February 2004 Volume 51, Number 2

Geometrization of 3-Manifolds via the Ricci Flow
page 184

RIMS, an Institute for Japan and the World
page 194

Los Angeles Meeting
page 290

Lawrenceville Meeting
page 292

Houston Meeting
page 295

Heawood's demonstration of Kempe's error (see page 207)

Robin Wilson,

Four Colors Suffice: How the Map Problem was Solved, Princeton University Press, 2002

(Notices of the AMS, February 2004)

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés

A gráf lapja – a duálisban pontnak felel meg.

Az él – a duálisban is élnek felel meg.

A kör – a duálisban vágásnak felel meg.

A feszítő fa – a duálisban egy feszítő fa komplementerének felel meg.

Mióta ismerjük a dualitás elvét?

I.e. 500 körül – szabályos poliéderek

17. szd. – analítikus geometria

19. szd. eleje – konvex poliéderek

19. szd. közepe – gráfok színezése

19. szd. vége – rúdszerkezetek, villamos hálózatok, Boole-algebrák

Luigi Cremona (1830 – 1903)

(a) Concurrent coplanar forces

(b) Polygon of force vectors

Space Diagram

Free Body Diagram

Force Polygon

Gustav Kirchhoff, 1824-1887

Mióta ismerjük a dualitás elvét?

I.e. 500 körül – szabályos poliéderek

17. szd. – analítikus geometria

19. szd. eleje – konvex poliéderek

19. szd. közepe – gráfok színezése

19. szd. vége – rúdszerkezetek, villamos hálózatok, Boole-algebrák

20. szd. eleje – 2-izomorfia, matroidok

20. szd. közepe – lineáris programozás

Fig. 1

Fig. 2

A 2 kivezetésű alkatrészeket (például az ellenállásokat, a feszültségforrásokat) egy gráf éleivel modellezzük.

Fig. 1

Fig. 2

A 2 kivezetésű alkatrészeket (például az ellenállásokat, a feszültségforrásokat) egy gráf éleivel modellezzük, a feszültségeik és áramaik közti kapcsolatokat a gráf köreivel, ill. vágásaival írjuk le.

Fig. 1

Fig. 2

$$i_3 = (R_4 u_1 + R_2 u_5) / (R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_3 R_4)$$

Kirchhoff, 1824-1887

A hálózat gráfjának a körei mentén a feszültségek (előjeles) összege zérus.

A hálózat gráfjának a vágásai mentén az áramerősségek (előjeles) összege zérus.

Kirchhoff, 1847

Kirchhoff, 1824-1887

A hálózat gráfjának a körei mentén a feszültségek (előjeles) összege zérus.

A hálózat gráfjának vágásai mentén az áramerősségek (előjeles) összege zérus.

A villamos hálózatok dualitási elve

A *G* gráf helyett vegyük a *G** duális gráfot

A feszültségforrások helyett vegyünk áramforrásokat és megfordítva

Az ellenállások helyett vegyük a ‘reciprok’ ellenállásokat

A kapacitások helyett vegyünk induktivitásokat és megfordítva

Így egy *N* hálózat helyett egy duális *N** hálózatot kapunk

*N** akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha *N* egyértelműen megoldható.

Ha *N* és *N** tartalmaznak kondenzátorokat és/vagy tekercseket, akkor a két hálózat szabadsági fokainak a száma megegyezik.

A villamos hálózatok dualitási elve

A *G* gráf helyett vegyük a *G** duális gráfot

A feszültségforrások helyett vegyünk áramforrásokat és megfordítva

Az ellenállások helyett vegyük a ‘reciprok’ ellenállásokat

A kapacitások helyett vegyünk induktivitásokat és megfordítva

A villamos hálózatok dualitási elve

A *G* gráf helyett vegyük a *G** duális gráfot

A feszültségforrások helyett vegyünk áramforrásokat és megfordítva

Az ellenállások helyett vegyük a ‘reciprok’ ellenállásokat

A kapacitások helyett vegyünk induktivitásokat és megfordítva

Minden *u* betű helyett vegyünk *i* betűt az egyenletekben és megfordítva

Mi a síkbarajzolható *irányított* gráf duálisa?

Mi a síkbarajzolható *irányított* gráf duálisa?

Síkbarajzolható *G* gráf	*G** duális gráf
Feszültségforrás	Áramforrás
Áramforrás	Feszültségforrás
Ellenállás	‘Reciprok’ ellenállás
Tekercs	Kondenzátor
Kondenzátor	Tekercs

A klasszikus eredmény általánosítása

Kirchhoff idejében csak 2-lábú alkatrészek voltak.

Ha egy hálózat feszültség- és áramforrások, és ellenállások mellett ***komplexebb alkatrészeket is tartalmaz (pl. ideális transzformátorokat, girátorokat, műveleti erősítőket),*** akkor mi mondható?

Síkbarajzolható *G* gráf	*G** duális gráf
Feszültségforrás	Áramforrás
Áramforrás	Feszültségforrás
Ellenállás	‘Reciprok’ ellenállás
Tekercs	Kondenzátor
Kondenzátor	Tekercs
Lineáris sokkapu	?

Lineáris *n*-kapu

$$A \cdot u + B \cdot i = 0$$

ahol

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T, \; i = (i_1, i_2, \ldots, i_n)^T$$

és

$(A \mid B)$ egy $n \times 2n$ méretű, n rangú mátrix

vagyis n darab független egyenlet kapcsolja össze a $2n$ darab ismeretlent

1. példa – Ideális transzformátorok

$$u_2 = k \cdot u_1, \quad i_1 = -k \cdot i_2$$

1. példa – Ideális transzformátorok

$$u_2 = k \cdot u_1, \quad i_1 = -k \cdot i_2$$

$$\begin{matrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{matrix}$$

Egy mátrix duálisa

$(E \mid A)$ altér

$(-A^T \mid E)$ az altér ortogonális komplementere

R. Descartes, 1596-1650

Egy mátrix duálisa

$$(E \mid A)$$

$$(-A^T \mid E)$$

Vagyis ha az első mátrix kXn –es és a sorai függetlenek, akkor az n-dimenziós térnek egy k-dimenziós alterét határozzák meg;

a második mátrix (n-k)Xn –es és a sorai az első altér ***ortogonális komplementerét*** *határozzák meg.*

Egy mátrix(-szal reprezentált matroid) duálisa

$$(E \mid A)$$

$$(-A^T \mid E)$$

Vagyis ha az első mátrix kXn –es és a sorai függetlenek, akkor az n-dimenziós térnek egy k-dimenziós alterét határozzák meg;

a második mátrix (n-k)Xn –es és a sorai az első altér ***ortogonális komplementerét*** *határozzák meg.*

1. példa – Ideális transzformátorok

$$u_2 = k \cdot u_1, \quad i_1 = -k \cdot i_2$$

$$\begin{matrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{matrix}$$

1. példa – Ideális transzformátorok

$$u_2 = k \cdot u_1, \quad i_1 = -k \cdot i_2$$

$$\begin{array}{cccc} k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ \hline 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -1 \end{array}$$

1. példa – Ideális transzformátorok

$$u_2 = k \cdot u_1, \quad i_1 = -k \cdot i_2$$

$$\begin{matrix} k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -1 \end{matrix}$$

$$u_1 = -k \cdot u_2, \quad i_2 = k \cdot i_1$$

1. példa – Ideális transzformátorok

$$u_2 = k \cdot u_1, \quad i_1 = -k \cdot i_2$$

$$u_1 = -k \cdot u_2, \quad i_2 = k \cdot i_1$$

1. példa – Ideális transzformátorok

$$u_2 = k \cdot u_1, \quad i_1 = -k \cdot i_2$$

$$u_1 = -k \cdot u_2, \quad i_2 = k \cdot i_1$$

Síkbarajzolható *G* gráf	*G** duális gráf
Feszültségforrás	Áramforrás
Áramforrás	Feszültségforrás
Ellenállás	‘Reciprok’ ellenállás
Tekercs	Kondenzátor
Kondenzátor	Tekercs
Lineáris sokkapu	?

Síkbarajzolható *G* gráf	*G** duális gráf
Feszültségforrás	Áramforrás
Áramforrás	Feszültségforrás
Ellenállás	‘Reciprok’ ellenállás
Tekercs	Kondenzátor
Kondenzátor	Tekercs
Lineáris sokkapu	Cseréljük fel *u* és *i* szerepét, vagy képezzük a matroidelméleti duálist?

Síkbarajzolható *G* gráf	*G** duális gráf
Feszültségforrás	Áramforrás
Áramforrás	Feszültségforrás
Ellenállás	‘Reciprok’ ellenállás
Tekercs	Kondenzátor
Kondenzátor	Tekercs
Lineáris sokkapu	?

Masao Iri – R., 1980.

A kétféle eljárásnak (*u* és *i* felcserélése vagy matroidelméleti duális képzése) ugyanaz a hatása?

Masao Iri – R., 1980.

A kétféle eljárásnak (*u* és *i* felcserélése vagy matroidelméleti duális képzése) ugyanaz a hatása reciprok alkatrészek esetén, de általában nem.

Reciprok *n*-kapuk

Az

$$Au+Bi=0 \qquad (*)$$

egyenletrendszerrel megadott *n*-kapu teljesíti a reciprocitási feltételt, ha

$$u_1^T i_2 = u_2^T i_1$$

teljesül bármely két olyan (u_1, i_1) és (u_2, i_2) vektorra, mely kielégíti a (*) egyenletet

2. példa – Feszültségvezérelt feszültségforrás (VCVS)

$$u_2 = k \cdot u_1, \quad i_1 = 0$$

u és *i* felcserélése	duális matroid képzése
$i_2 = k \cdot i_1, \quad u_1 = 0$	$u_1 = -k \cdot u_2, \quad i_2 = 0$
CCCS	VCVS

Masao Iri – R., 1980.

A kétféle eljárásnak (*u* és *i* felcserélése vagy matroidelméleti duális képzése) ugyanaz a hatása reciprok alkatrészek esetén, de általában nem.

Tehát a villamosságtanban kétféle áram-feszültség szimmetria létezik.

n-kapukat és (áram- és/vagy feszültségforrásokat össze-kapcsolva kapunk egy áramkört — vagy

n-kapukat összekapcsolva kapunk (egyetlen nagy) *N*-kaput.

n-kapukat és (áram- és/vagy feszültségforrásokat össze-kapcsolva kapunk egy áramkört — vagy

n-kapukat összekapcsolva kapunk (egyetlen nagy) *N*-kaput.

„terminal solvability”

Az előzőkhöz hasonlóan itt is kétféle áram-feszültség szimmetria található.

Köszönöm a figyelmet

recski@cs.bme.hu