Kezdődhet-e egy kettőhatvány 2016-tal? Érdekességek az első számjegyek kapcsán

Besenyei Ádám
badam@cs.elte.hu

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Matematikai Intézet
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

ELTE Matematikatanár-klub
2016. 02. 17.

Ismerkedés a 2 hatványaival

A 2 első néhány hatványa (a 10-es számrendszerben): 2^{10a+b}.

Észreveszünk-e bármi szabályosságot vagy szabálytalanságot?

$b \backslash a$	0	1	2	3	4
0	1	1024	1048576	1073741824	1099511627776
1	2	2048	2097152	2147483648	2199023255552
2	4	4096	4194304	4294967296	4398046511104
3	8	8192	8388608	8589934592	8796093022208
4	16	16384	16777216	17179869184	17592186044416
5	32	32768	33554432	34359738368	35184372088832
6	64	65536	67108864	68719476736	70368744177664
7	128	131072	134217728	137438953472	140737488355328
8	256	262144	268435456	274877906944	281474976710656
9	512	524288	536870912	549755813888	562949953421312

Ismerkedés a 2 hatványaival

Észrevétel.

- Van-e 9-es számjeggyel kezdődő kettőhatvány? („Gelfand kérdése”)

Ismerkedés a 2 hatványaival

Észrevétel.

- Van-e 9-es számjeggyel kezdődő kettőhatvány? („Gelfand kérdése”)
- Válasz: nem voltunk elég kitartóak, mert $2^{53} = 9007199254740992$. Sőt, $2^{63}, 2^{73}, 2^{83}, 2^{93}$ mind 9-essel kezdődik, de 2^{103} nem (miért?).

Ismerkedés a 2 hatványaival

Észrevétel.

- Van-e 9-es számjeggyel kezdődő kettőhatvány? („Gelfand kérdése”)
- Válasz: nem voltunk elég kitartóak, mert $2^{53} = 9007199254740992$. Sőt, $2^{63}, 2^{73}, 2^{83}, 2^{93}$ mind 9-essel kezdődik, de 2^{103} nem (miért?).
- Nehezítsünk: kezdődhet-e egy kettőhatvány 2016-tal?

Ismerkedés a 2 hatványaival

Észrevétel.

- Van-e 9-es számjeggyel kezdődő kettőhatvány? („Gelfand kérdése”)
- Válasz: nem voltunk elég kitartóak, mert $2^{53} = 9007199254740992$. Sőt, $2^{63}, 2^{73}, 2^{83}, 2^{93}$ mind 9-essel kezdődik, de 2^{103} nem (miért?).
- Nehezítsünk: kezdődhet-e egy kettőhatvány 2016-tal?

Egy másik megfigyelés: 2^n első számjegyeinek gyakorisága (%).

2^n első számjegye	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1 \leq n \leq 50$	30	20	10	10	10	8	2	10	0
$1 \leq n \leq 100$	30	17	13	10	7	7	6	5	5
$1 \leq n \leq 500$	30	17,6	12,6	9,8	7,8	6,8	5,6	5,2	4,6

Ismerkedés a 2 hatványaival

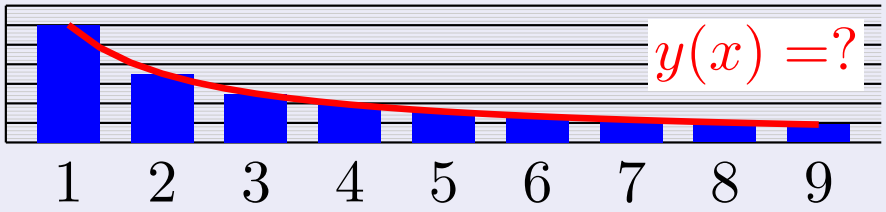
Észrevétel.

- Van-e 9-es számjeggyel kezdődő kettőhatvány? („Gelfand kérdése”)
- Válasz: nem voltunk elég kitartóak, mert $2^{53} = 9007199254740992$. Sőt, $2^{63}, 2^{73}, 2^{83}, 2^{93}$ mind 9-essel kezdődik, de 2^{103} nem (miért?).
- Nehezítsünk: kezdődhet-e egy kettőhatvány 2016-tal?

Egy másik megfigyelés: 2^n első számjegyeinek gyakorisága (%).

2^n első számjegye	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1 \leq n \leq 50$	30	20	10	10	10	8	2	10	0
$1 \leq n \leq 100$	30	17	13	10	7	7	6	5	5
$1 \leq n \leq 500$	30	17,6	12,6	9,8	7,8	6,8	5,6	5,2	4,6

- Különböző a gyakoriság?
- Mi történik, ha $n \to \infty$?



Egy látszólag nem ideillő kérdés

Az USA államainak népessége (2010. április 1., US Census Bureau).

A két táblázat közül melyikben szerepelnek a valódi adatok?

37253956	5988927	2700551
25145561	5773552	2059179
19378102	5686986	1852994
18801310	5303925	1826341
12830632	5029196	1567582
12702379	4779736	1360301
11536504	4625364	1328361
9883640	4533372	1316470
9687653	4339367	1052567
9535483	3831074	989415
8791894	3751351	897934
8001024	3574097	814180
6724540	3046355	710231
6547629	2967297	672591
6483802	2915918	625741
6392017	2853118	601723
6346105	2763885	563626

53253956	5988927	2700551
43145561	5773552	2576443
34368523	5686986	2252994
23801310	5303925	1726341
12884063	5029196	1567582
9770237	4779736	1360301
9653650	4625364	1328361
9583640	4533372	981647
9387653	4339367	965256
8835483	4131074	849415
8791894	3751351	837934
8001024	3574097	814180
7724540	3346355	770231
7547629	3267297	752591
6483802	3115918	725741
6392017	2853118	611723
6346105	2763885	603626

Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Első lépések.

Mit jelent az, hogy 2^n első négy számjegye 2016?

$$2^n = 2016\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{k \text{ darab számjegy}}$$

$$\Updownarrow$$

$$2016 \cdot 10^k \leq 2^n < 2017 \cdot 10^k$$

$$\Updownarrow$$

$$k + \underbrace{\log_{10} 2016}_{\approx 3{,}304490} \leq n \log_{10} 2 < k + \underbrace{\log_{10} 2017}_{\approx 3{,}304705}$$

$$\Updownarrow \text{ ha } n \text{ elég nagy}$$

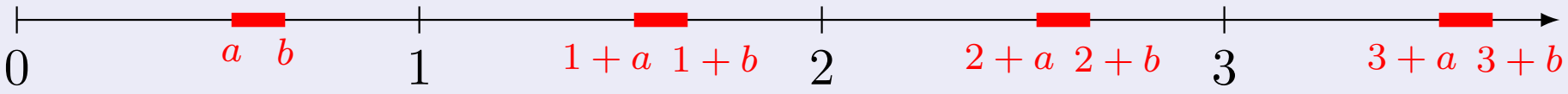
$$\{n \log_{10} 2\} \in \big[\{\log_{10} 2016\}, \{\log_{10} 2017\}\big) \approx [0{,}304490, 0{,}304705)$$

Jelölés: $\{x\}$ az x törtrésze, $[x]$ az egészrésze (utóbbi: C. F. Gauss, 1808).

Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Törtrészek a számegyenesen.

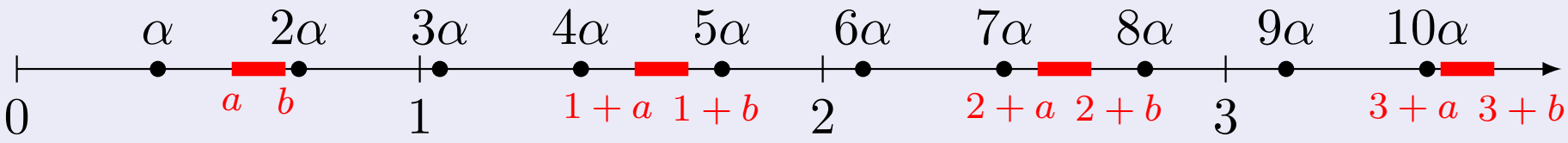
- Hol vannak azok az $x \geq 0$ számok, amelyekre $0 \leq a < \{x\} < b \leq 1$?



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Törtrészek a számegyenesen.

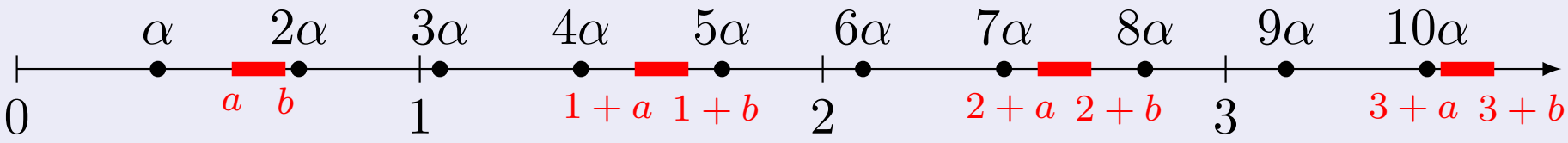
- Hol vannak azok az $x \geq 0$ számok, amelyekre $0 \leq a < \{x\} < b \leq 1$?
- Hol találhatók $\alpha = \log_{10} 2 \approx 0{,}301$ pozitív egész számú többszörösei?



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Törtrészek a számegyenesen.

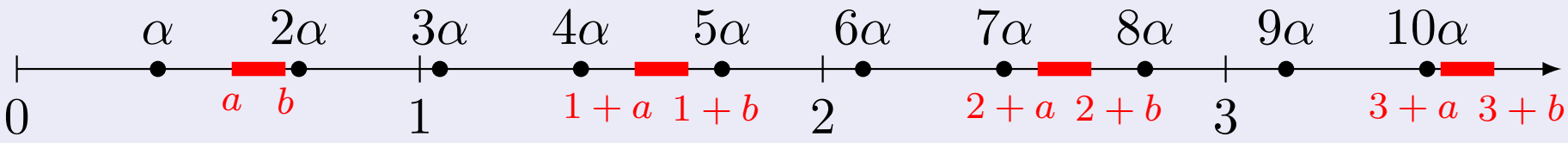
- Hol vannak azok az $x \geq 0$ számok, amelyekre $0 \leq a < \{x\} < b \leq 1$?
- Hol találhatók $\alpha = \log_{10} 2 \approx 0{,}301$ pozitív egész számú többszörösei?
- Van-e olyan n, hogy $n\alpha$ valamelyik piros intervallumba esik?



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Törtrészek a számegyenesen.

- Hol vannak azok az $x \geq 0$ számok, amelyekre $0 \leq a < \{x\} < b \leq 1$?
- Hol találhatók $\alpha = \log_{10} 2 \approx 0{,}301$ pozitív egész számú többszörösei?
- Van-e olyan n, hogy $n\alpha$ valamelyik piros intervallumba esik?



Észrevétel.

Az egészrészek nem lényegesek, elég mindent a $[0, 1)$-en tekinteni.

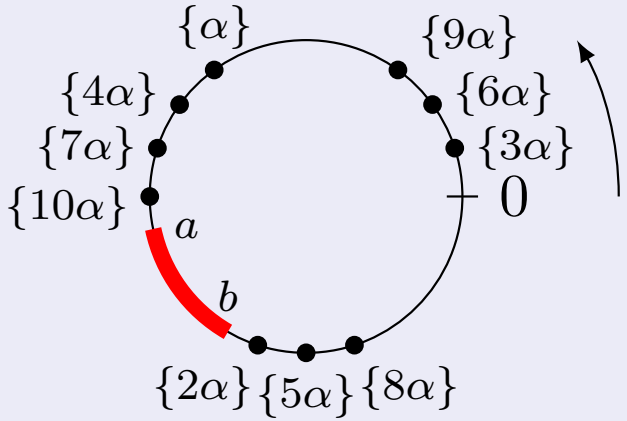
$$\Downarrow$$

„Tekerjük fel" a félegyenest az egység kerületű körre (pozitív körüljárással)!
(Másképp: „toljuk rá" a $[k, k+1)$ intervallumokat a $[0, 1)$-re.)

Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Törtrészek az egység kerületű körvonalon.

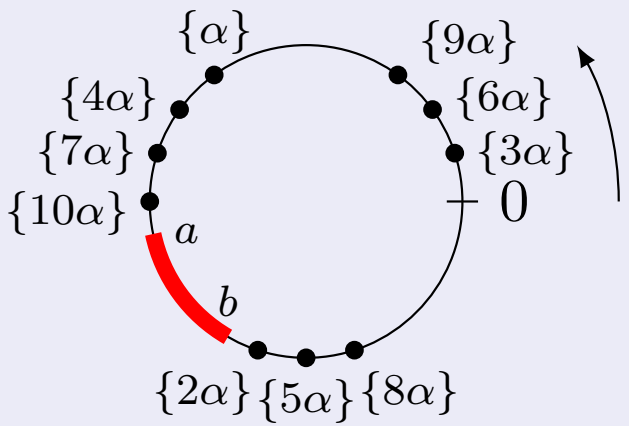
Az iménti ábra „a körvonalra feltekerve”: $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Törtrészek az egység kerületű körvonalon.

Az iménti ábra „a körvonalra feltekerve”: $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$



Hasznos észrevétel.

A számegyenesen $(n+k)\alpha = n\alpha + [k\alpha] + \{k\alpha\}$, így (a „feltekerés” miatt)

$\{n\alpha\} \longrightarrow \{(n+k)\alpha\}$ *átmenet a körvonalon*

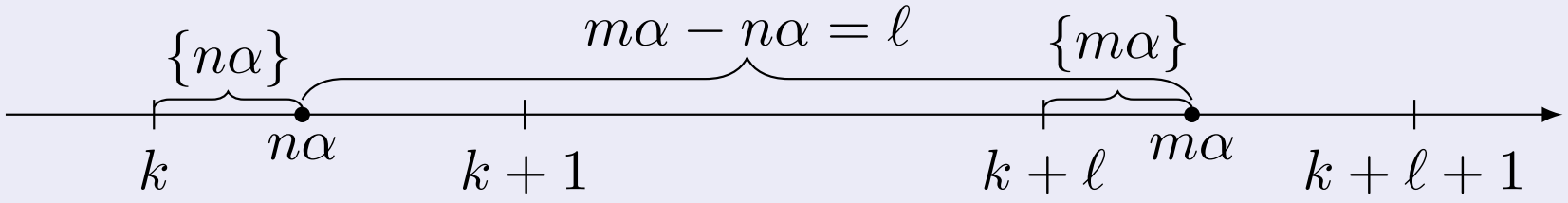
$= \{k\alpha\}$ *hosszú ívvel pozitív irányba forgás* (+ *körbefordulások*).

(Vigyázat: a számegyenesen általában $\{(n+k)\alpha\} \neq \{n\alpha\} + \{k\alpha\}$.)

Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Hány különböző pontot határoz meg $(\{n\alpha\})$ a körvonalon?

- Ha valamilyen $n \neq m$ esetén $\{n\alpha\} = \{m\alpha\}$, akkor $n\alpha$ és $m\alpha$ a számegyenesen egész távolságra vannak, így $m\alpha - n\alpha = \ell$, tehát $\alpha = \ell/(m-n)$, vagyis α racionális.
  $\Longrightarrow$ Ekkor $(\{n\alpha\})$ periodikus, véges sok pont adódik a körvonalon.

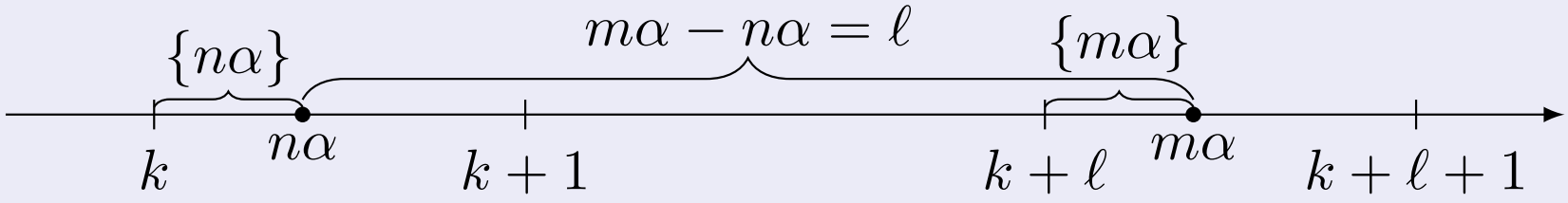


- Fordítva, $\alpha = p/q$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ esetén $\{(n+q)\alpha\} = \{n\alpha + p\} = \{n\alpha\}$, tehát $(\{n\alpha\})$ pontosan akkor periodikus, ha α racionális.

Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Hány különböző pontot határoz meg $(\{n\alpha\})$ a körvonalon?

- Ha valamilyen $n \neq m$ esetén $\{n\alpha\} = \{m\alpha\}$, akkor $n\alpha$ és $m\alpha$ a számegyenesen egész távolságra vannak, így $m\alpha - n\alpha = \ell$, tehát $\alpha = \ell/(m-n)$, vagyis α racionális.
  $\Longrightarrow$ Ekkor $(\{n\alpha\})$ periodikus, véges sok pont adódik a körvonalon.



- Fordítva, $\alpha = p/q$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ esetén $\{(n+q)\alpha\} = \{n\alpha + p\} = \{n\alpha\}$, tehát $(\{n\alpha\})$ pontosan akkor periodikus, ha α racionális.
- Most $\alpha = \log_{10} 2$ irracionális, ugyanis ellenkező esetben

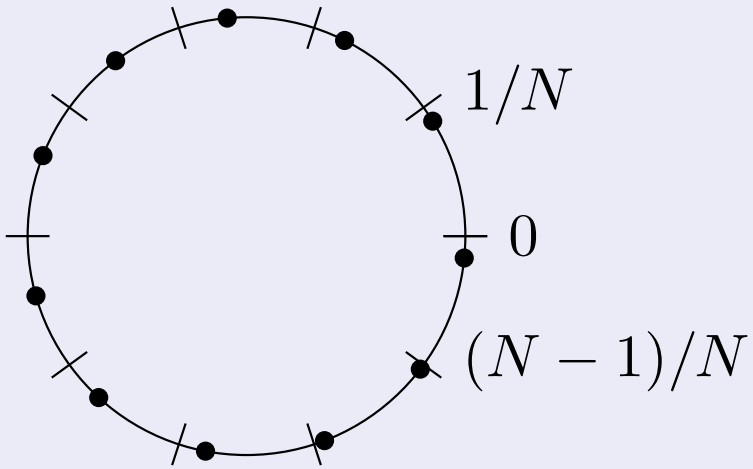
$$\log_{10} 2 = \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{Z}^+) \qquad \Longrightarrow \qquad 2^q = 10^p,$$

ami lehetetlen, hiszen a jobb oldal osztható 5-tel, de a bal nem.

Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Milyen közel lehetnek egymáshoz $(\{n\alpha\})$ értékei a körvonalon?

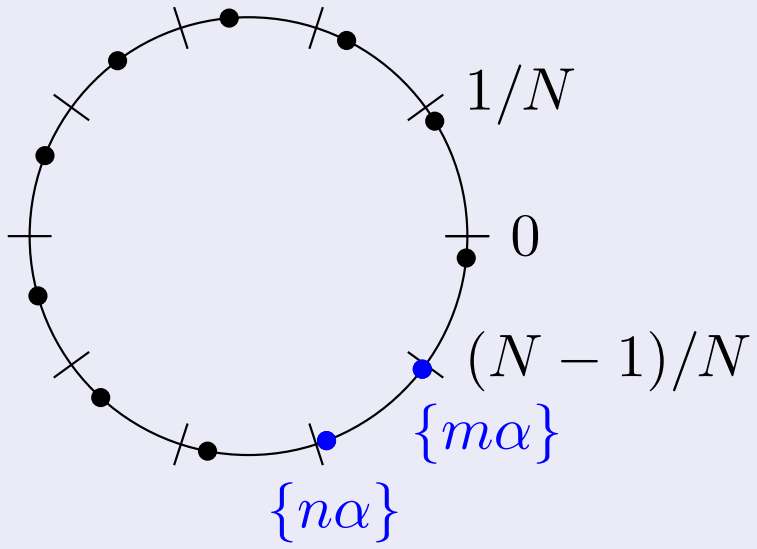
- Osszuk fel a körvonalat N darab $1/N$ hosszú (zárt-nyílt) körvonalra és tekintsük az $\{\alpha\}, \ldots, \{(N+1)\alpha\}$ páronként különböző számokat.



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Milyen közel lehetnek egymáshoz $(\{n\alpha\})$ értékei a körvonalon?

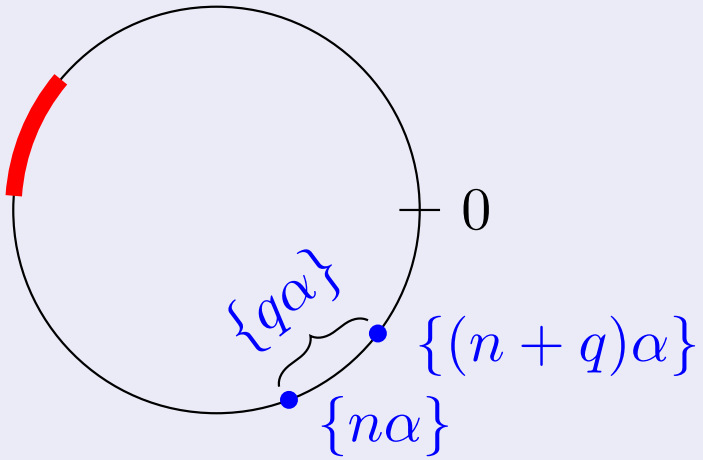
- Osszuk fel a körvonalat N darab $1/N$ hosszú (zárt-nyílt) körvonalra és tekintsük az $\{\alpha\}, \ldots, \{(N+1)\alpha\}$ páronként különböző számokat.
- A skatulyaelv (Lejeune Dirichlet: „Schubfachprinzip", 1834?) miatt van kettő, amelyek ugyanazon körívre esnek.



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

A babérok learatása.

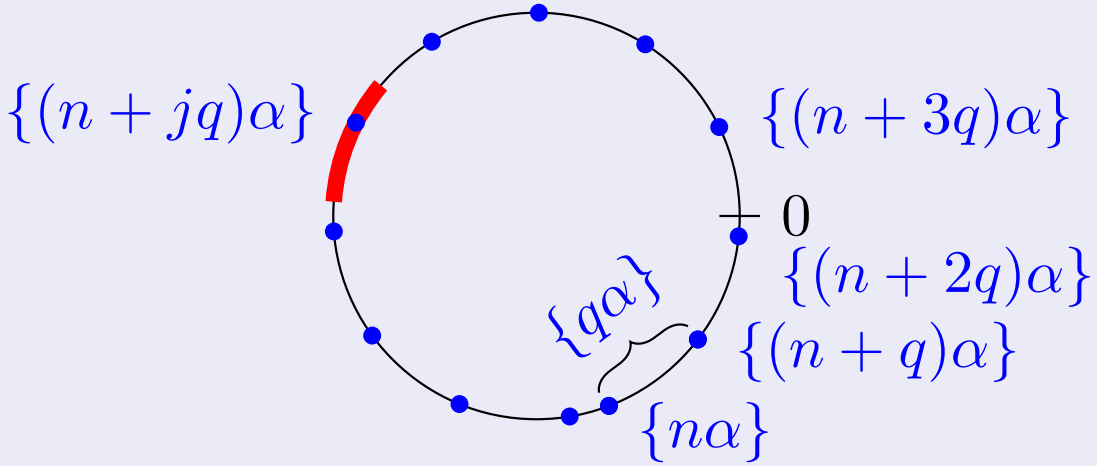
- Adott N esetén létezik $n < m = n + q \leq N + 1$ (tehát $1 \leq q \leq N$), hogy $|\{n\alpha\} - \{(n+q)\alpha\}| < 1/N$.



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

A babérok learatása.

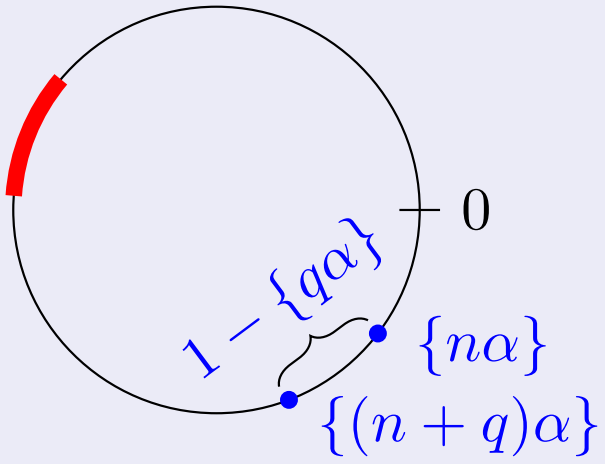
- Adott N esetén létezik $n < m = n + q \leq N + 1$ (tehát $1 \leq q \leq N$), hogy $|\{n\alpha\} - \{(n+q)\alpha\}| < 1/N$.
- Ha $\{n\alpha\} < \{(n+q)\alpha\}$, akkor a „hasznos észrevétel" alapján az $\{n\alpha\}, \{(n+q)\alpha\}, \{(n+2q)\alpha\}, \ldots$ pontok a körvonalon $\{q\alpha\} = \{(n+q)\alpha\} - \{n\alpha\} < 1/N$ hosszú íveket határoznak meg.
  $\Longrightarrow$ bármely legfeljebb $1/N$ hosszú ívbe esik valamely $\{(n+jq)\alpha\}$.



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

A babérok learatása.

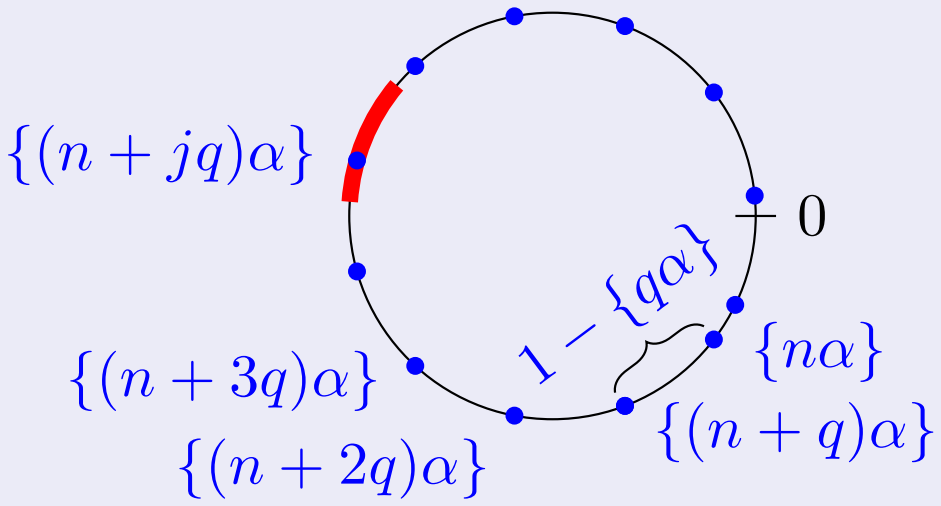
- Adott N esetén létezik $n < m = n + q \leq N + 1$ (tehát $1 \leq q \leq N$), hogy $|\{n\alpha\} - \{(n+q)\alpha\}| < 1/N$.



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

A babérok learatása.

- Adott N esetén létezik $n < m = n + q \leq N + 1$ (tehát $1 \leq q \leq N$), hogy $|\{n\alpha\} - \{(n+q)\alpha\}| < 1/N$.
- Ha $\{n\alpha\} < \{(n+q)\alpha\}$, akkor az $\{n\alpha\}, \{(n+q)\alpha\}, \{(n+2q)\alpha\}, \ldots$ pontok a körvonalon $1 - \{q\alpha\} = \{(n+q)\alpha\} - \{n\alpha\} < 1/N$ hosszú íveket határoznak meg negatív körüljárás szerint.
  $\Longrightarrow$ bármely legfeljebb $1/N$ hosszú ívbe esik valamely $\{(n+jq)\alpha\}$.



Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Tétel (törtrészek sűrű elhelyezkedése).

Legyen α irracionális szám. Ekkor – és csakis ekkor – a $[0,1]$ intervallum bármely nemüres nyílt részintervallumába esik az $(\{n\alpha\})$ sorozatnak tagja (szükségképpen végtelen sok). Azt mondjuk, hogy a sorozat mindenütt sűrű a $[0,1]$ intervallumban (Georg Cantor: „überall-dicht", 1879).

Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Tétel (törtrészek sűrű elhelyezkedése).

Legyen α irracionális szám. Ekkor – és csakis ekkor – a $[0,1]$ intervallum bármely nemüres nyílt részintervallumába esik az $(\{n\alpha\})$ sorozatnak tagja (szükségképpen végtelen sok). Azt mondjuk, hogy a sorozat mindenütt sűrű a $[0,1]$ intervallumban (Georg Cantor: „überall-dicht", 1879).

Következmény.

Végtelen sok olyan kettőhatvány van, amely 2016-tal kezdődik (a tízes számrendszerben). Sőt, tetszőleges véges számjegysorozat állhat bármely $r > 1$ alapú hatvány elején, ha $\log_{10} r$ irracionális.

Állhat-e egy kettőhatvány elején 2016?

Tétel (törtrészek sűrű elhelyezkedése).

Legyen α irracionális szám. Ekkor – és csakis ekkor – a $[0,1]$ intervallum bármely nemüres nyílt részintervallumába esik az $(\{n\alpha\})$ sorozatnak tagja (szükségképpen végtelen sok). Azt mondjuk, hogy a sorozat mindenütt sűrű a $[0,1]$ intervallumban (Georg Cantor: „überall-dicht", 1879).

Következmény.

Végtelen sok olyan kettőhatvány van, amely 2016-tal kezdődik (a tízes számrendszerben). Sőt, tetszőleges véges számjegysorozat állhat bármely $r > 1$ alapú hatvány elején, ha $\log_{10} r$ irracionális.

Megjegyzés.

A 10 hatványainak első számjegyei 10-es számrendszerben: $1, 1, 1, \ldots$.
A 2 hatványainak első jegyei 4-es számrendszerben: $1, 2, 1, 2, 1, \ldots$.

Egy hasznos „melléktermék”.

Tétel (Lejeune Dirichlet, 1842: „régóta ismert”).

Tetszőleges α irracionális és N természetes szám esetén van olyan p/q racionális szám, hogy $1 \leq q \leq N$ és $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq}$. Következésképpen végtelen sok olyan p/q racionális szám van, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.
(Ez a diofantikus approximációelmélet egy alapvető eredménye.)

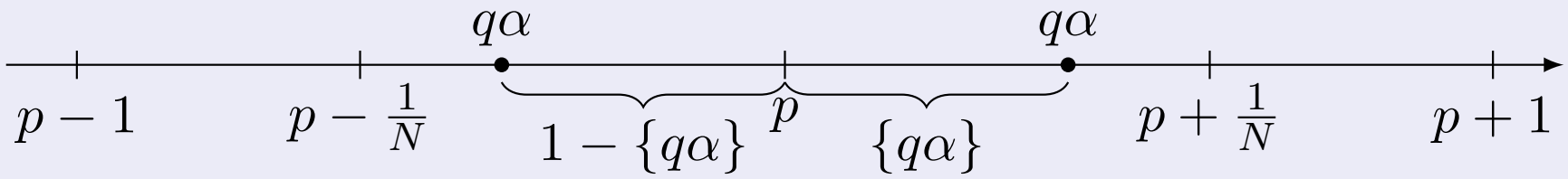
Egy hasznos „melléktermék”.

Tétel (Lejeune Dirichlet, 1842: „régóta ismert”).

Tetszőleges α irracionális és N természetes szám esetén van olyan p/q racionális szám, hogy $1 \le q \le N$ és $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq}$. Következésképpen végtelen sok olyan p/q racionális szám van, amelyre $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.
(Ez a diofantikus approximációelmélet egy alapvető eredménye.)

Bizonyítás.

A babérok aratása közben kijött: létezik $1 \le q \le N$, hogy $\{q\alpha\} < 1/N$ vagy $1 - \{q\alpha\} < 1/N$. Ekkor van olyan p egész, amelyre $|q\alpha - p| < 1/N$.



Ezután legyen p_2/q_2, amelyre $\left|\alpha - \frac{p_2}{q_2}\right| < \frac{1}{N_2 q_2} \le \frac{1}{N_2} < \left|\alpha - \frac{p_2}{q_2}\right|$ stb.

Melyik a legkisebb 2016-tal kezdődő kettőhatvány?

$$2^{7286} =$$

```
  2 016 268 697 502 943 256 963 126 672 242 228 687 206 514 438 527 634 688 119 217 580
977 467 233 935 804 009 606 841 419 827 084 398 150 447 282 551 458 507 188 012 382 198
022 150 988 342 387 574 765 696 737 698 404 206 124 803 822 247 502 003 836 033 050 489
259 182 598 583 998 412 491 437 146 451 479 771 926 121 154 533 964 358 895 615 768 742
010 934 252 460 806 809 370 341 823 021 276 476 691 533 832 339 672 992 438 017 167 847
440 311 642 671 161 608 815 532 037 451 822 294 179 524 049 754 795 645 930 593 282 522
943 726 513 278 736 770 687 871 580 574 712 395 511 714 163 354 318 909 306 173 745 845
133 041 894 024 873 728 217 096 461 539 932 163 038 872 812 306 964 862 132 269 745 191
272 226 058 563 267 902 765 615 216 973 525 755 044 311 106 877 877 622 220 114 015 204
196 587 211 429 005 073 289 022 388 853 624 446 549 452 013 894 679 856 230 135 741 834
878 587 011 967 972 035 269 616 872 320 760 678 461 805 919 730 970 265 163 282 051 502
012 804 040 150 028 642 726 624 381 238 092 387 593 443 363 301 466 040 758 389 617 607
405 476 543 692 646 543 687 687 824 333 487 743 571 693 643 642 789 109 553 342 494 685
075 367 133 228 760 522 039 945 920 697 848 729 509 621 408 021 039 876 141 261 725 789
478 380 536 966 720 567 031 146 510 079 198 039 675 872 705 920 680 370 420 197 654 701
893 170 127 761 796 844 870 263 666 209 039 724 155 600 709 702 032 879 686 438 889 983
451 732 579 292 904 397 223 315 006 973 806 184 241 659 249 447 184 513 828 390 296 098
238 965 837 936 033 142 782 028 015 847 132 254 446 937 906 795 515 537 101 654 277 221
453 403 015 542 437 216 128 339 956 794 655 298 008 835 913 434 393 472 815 493 862 827
663 463 540 527 582 551 706 172 583 891 080 720 587 106 554 884 138 616 880 506 271 007
667 001 993 806 848 949 447 058 321 059 884 138 394 205 562 528 251 573 326 216 627 817
371 050 394 707 162 924 770 210 306 697 200 266 814 084 559 369 712 509 098 894 430 595
470 421 633 340 277 955 750 030 879 719 081 919 588 948 467 631 943 192 954 702 710 216
736 614 651 546 629 771 866 320 389 758 348 148 222 239 387 212 410 597 425 690 564 256
097 173 560 373 211 124 134 159 330 483 381 382 669 960 522 507 568 018 931 160 062 590
703 416 806 768 245 290 969 330 083 113 730 628 998 015 520 027 134 433 248 735 689 583
372 277 424 197 149 088 669 833 780 032 362 375 562 681 367 671 960 106 413 929 192 021
547 468 763 253 106 993 337 609 996 242 343 871 388 546 645 736 501 391 714 201 225 270
275 781 219 850 242 260 438 509 852 130 819 576 158 150 122 018 303 180 984 044 738 792
836 118 965 469 828 009 674 458 261 985 994 723 159 109 700 453 708 107 593 147 105 846
790 609 332 063 442 158 125 003 180 804 573 480 908 367 455 560 476 703 739 314 258 335
489 387 243 545 921 532 087 686 072 969 823 896 454 684 324 087 221 906 223 273 822 853
228 138 949 787 530 353 232 757 454 866 440 770 565 397 900 443 602 095 413 509 182 535
516 751 789 517 963 264
```

(Köszönet Száz Dénesnek a számításért.)

Mekkora a 2016-tal kezdődő kettőhatványok aránya?

A kettőhatványok milyen arányban kezdődnek 2016-tal?

- Adott N („nagy") szám esetén a $2, 2^2, \ldots, 2^N$ hatványok közül mekkora a 2016-tal kezdődők aránya, vagyis

$$\frac{|\{1 \leq n \leq N : 2^n \text{ első négy jegye } 2016\}|}{N} \approx ?$$

(Itt $|H|$ a H véges halmaz elemszámát jelöli.)

Mekkora a 2016-tal kezdődő kettőhatványok aránya?

A kettőhatványok milyen arányban kezdődnek 2016-tal?

- Adott N („nagy") szám esetén a $2, 2^2, \ldots, 2^N$ hatványok közül mekkora a 2016-tal kezdődők aránya, vagyis
$$\frac{|\{1 \leq n \leq N : 2^n \text{ első négy jegye } 2016\}|}{N} \approx ?$$
(Itt $|H|$ a H véges halmaz elemszámát jelöli.)
- Átfogalmazás a törtrészekre:
$$\frac{|\{1 \leq n \leq N : \{\log_{10} 2016\} \leq \{n \log_{10} 2\} < \{\log_{10} 2017\}\}|}{N} \approx ?$$

Mekkora a 2016-tal kezdődő kettőhatványok aránya?

A kettőhatványok milyen arányban kezdődnek 2016-tal?

- Adott N („nagy") szám esetén a $2, 2^2, \ldots, 2^N$ hatványok közül mekkora a 2016-tal kezdődők aránya, vagyis
$$\frac{|\{1 \leq n \leq N : 2^n \text{ első négy jegye } 2016\}|}{N} \approx ?$$
(Itt $|H|$ a H véges halmaz elemszámát jelöli.)
- Átfogalmazás a törtrészekre:
$$\frac{|\{1 \leq n \leq N : \{\log_{10} 2016\} \leq \{n \log_{10} 2\} < \{\log_{10} 2017\}\}|}{N} \approx ?$$
- Általában adott α irracionális szám esetén az $(\{n\alpha\})$ sorozat tagjainak hányad része esik egy $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba (vagy a körvonal egy adott ívére)?

Mekkora a 2016-tal kezdődő kettőhatványok aránya?

A kettőhatványok milyen arányban kezdődnek 2016-tal?

- Adott N („nagy") szám esetén a $2, 2^2, \ldots, 2^N$ hatványok közül mekkora a 2016-tal kezdődők aránya, vagyis
$$\frac{|\{1 \leq n \leq N : 2^n \text{ első négy jegye } 2016\}|}{N} \approx ?$$
(Itt $|H|$ a H véges halmaz elemszámát jelöli.)
- Átfogalmazás a törtrészekre:
$$\frac{|\{1 \leq n \leq N : \{\log_{10} 2016\} \leq \{n \log_{10} 2\} < \{\log_{10} 2017\}\}|}{N} \approx ?$$
- Általában adott α irracionális szám esetén az $(\{n\alpha\})$ sorozat tagjainak hányad része esik egy $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba (vagy a körvonal egy adott ívére)?
- Lenyűgöző válasz: amekkora az intervallum hossza (másképpen fogalmazva: időátlag $=$ térátlag).

Mekkora a 2016-tal kezdődő kettőhatványok aránya?

Tétel (törtrészek egyenletes eloszlása).

Ha α irracionális szám, akkor bármely $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba az $(\{n\alpha\})$ sorozat tagjainak $(b - a)$-ad része esik, pontosabban

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : a \le \{n\alpha\} \le b\}|}{N} = b - a.$$

Azt mondjuk, hogy az $(n\alpha)$ sorozat modulo 1 egyenletes eloszlású.

Mekkora a 2016-tal kezdődő kettőhatványok aránya?

Tétel (törtrészek egyenletes eloszlása).

Ha α irracionális szám, akkor bármely $[a,b] \subset [0,1]$ intervallumba az $(\{n\alpha\})$ sorozat tagjainak $(b-a)$-ad része esik, pontosabban

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \le n \le N : a \le \{n\alpha\} \le b\}|}{N} = b - a.$$

Azt mondjuk, hogy az $(n\alpha)$ sorozat modulo 1 egyenletes eloszlású.

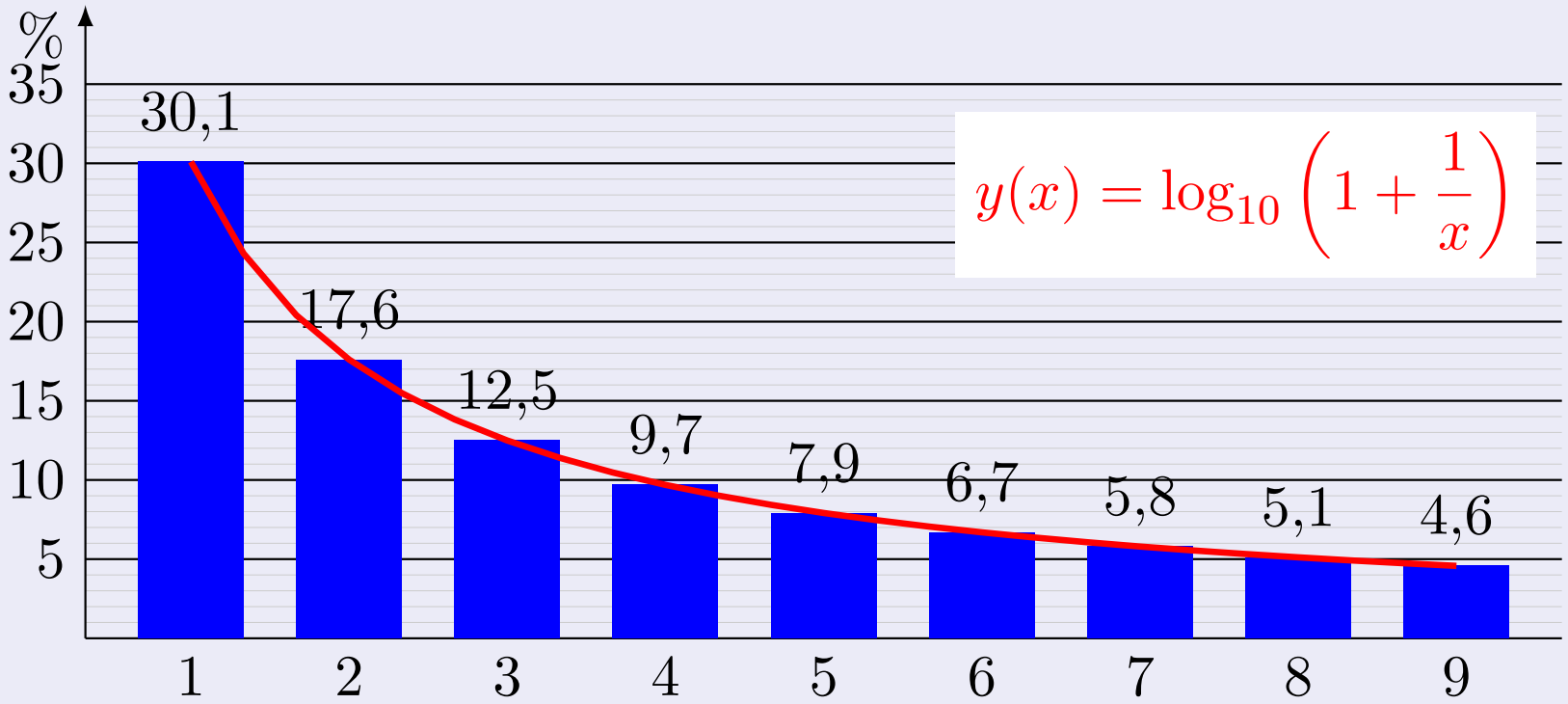
Következmény.

A 2016-tal kezdődők kettőhatványok aránya $\log_{10} \frac{2017}{2016} \approx 0{,}0000215$.
A d számjeggyel kezdődő kettőhatványok aránya $\log_{10} \frac{d+1}{d}$, így a kettőhatványok (sőt r^n, ahol $\log_{10} r \notin \mathbb{Q}$) első számjegyeinek eloszlása:

r^n első számjegye	1	2	3	4	5	6	7	8	9
gyakoriság (%)	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6

Mekkora az adott jeggyel kezdődő kettőhatványok aránya?

A kettőhatványok első számjegyeinek eloszlása.



2^n első számjegye	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1 \leq n \leq 50$	30	20	10	10	10	8	2	10	0
$1 \leq n \leq 100$	30	17	13	10	7	7	6	5	5
$1 \leq n \leq 500$	30	17,6	12,6	9,8	7,8	6,8	5,6	5,2	4,6

Mekkora az adott jeggyel kezdődő kettőhatványok aránya?

Az 1-gyel kezdődő kettőhatványok aránya elemi okoskodással.

- Minden k-ra van k-jegyű kettőhatvány, különben valamilyen ℓ-re $2^\ell < 10^{k-1}$ és $2^{\ell+1} \geq 10^k$, de ekkor $2 = 2^{\ell+1}/2^\ell > 10$ lenne.

Mekkora az adott jeggyel kezdődő kettőhatványok aránya?

Az 1-gyel kezdődő kettőhatványok aránya elemi okoskodással.

- Minden k-ra van k-jegyű kettőhatvány, különben valamilyen ℓ-re $2^\ell < 10^{k-1}$ és $2^{\ell+1} \geq 10^k$, de ekkor $2 = 2^{\ell+1}/2^\ell > 10$ lenne.
- A k-jegyű kettőhatványok között csakis a legkisebb kezdődik 1-gyel:
  - ha a legkisebb nem 1-gyel kezdődne, akkor $2^\ell \geq 2 \cdot 10^{k-1}$, de ekkor $2^{\ell-1} \geq 10^{k-1}$, azaz $2^{\ell-1}$ egy kisebb k-jegyű kettőhatvány;
  - ha lenne két különböző, akkor $10^{k-1} \leq 2^\ell, 2^{\ell+1} < 2 \cdot 10^{k-1}$, és így $2 = 2^{\ell+1}/2^\ell < 2$ lenne.

Mekkora az adott jeggyel kezdődő kettőhatványok aránya?

Az 1-gyel kezdődő kettőhatványok aránya elemi okoskodással.

- Minden k-ra van k-jegyű kettőhatvány, különben valamilyen ℓ-re $2^\ell < 10^{k-1}$ és $2^{\ell+1} \geq 10^k$, de ekkor $2 = 2^{\ell+1}/2^\ell > 10$ lenne.
- A k-jegyű kettőhatványok között csakis a legkisebb kezdődik 1-gyel:
  - ha a legkisebb nem 1-gyel kezdődne, akkor $2^\ell \geq 2 \cdot 10^{k-1}$, de ekkor $2^{\ell-1} \geq 10^{k-1}$, azaz $2^{\ell-1}$ egy kisebb k-jegyű kettőhatvány;
  - ha lenne két különböző, akkor $10^{k-1} \leq 2^\ell, 2^{\ell+1} < 2 \cdot 10^{k-1}$, és így $2 = 2^{\ell+1}/2^\ell < 2$ lenne.

$\Longrightarrow$ Az 1-gyel kezdődő kettőhatványok száma 2^N-ig ugyanannyi, mint 2^N számjegyeinek száma, vagyis $\left[\log_{10} 2^N\right] + 1$.

Mekkora az adott jeggyel kezdődő kettőhatványok aránya?

Az 1-gyel kezdődő kettőhatványok aránya elemi okoskodással.

- Minden k-ra van k-jegyű kettőhatvány, különben valamilyen ℓ-re $2^\ell < 10^{k-1}$ és $2^{\ell+1} \geq 10^k$, de ekkor $2 = 2^{\ell+1}/2^\ell > 10$ lenne.
- A k-jegyű kettőhatványok között csakis a legkisebb kezdődik 1-gyel:
  - ha a legkisebb nem 1-gyel kezdődne, akkor $2^\ell \geq 2 \cdot 10^{k-1}$, de ekkor $2^{\ell-1} \geq 10^{k-1}$, azaz $2^{\ell-1}$ egy kisebb k-jegyű kettőhatvány;
  - ha lenne két különböző, akkor $10^{k-1} \leq 2^\ell, 2^{\ell+1} < 2 \cdot 10^{k-1}$, és így $2 = 2^{\ell+1}/2^\ell < 2$ lenne.

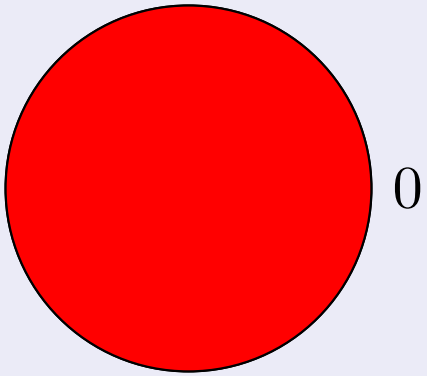
$\Longrightarrow$ Az 1-gyel kezdődő kettőhatványok száma 2^N-ig ugyanannyi, mint 2^N számjegyeinek száma, vagyis $\left[\log_{10} 2^N\right] + 1$.

$$\Longrightarrow \log_{10} 2 \leq \frac{|\{1 \leq n \leq N : 2^n \text{ első jegye } 1\}|}{N} \leq \log_{10} 2 + \frac{1}{N}.$$

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

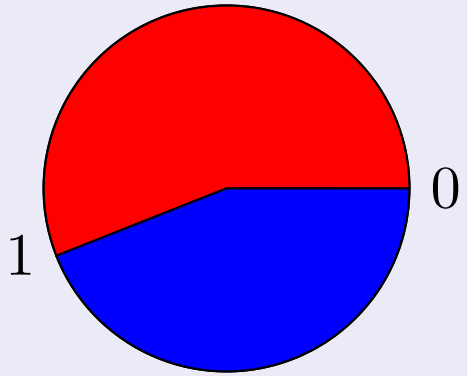


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

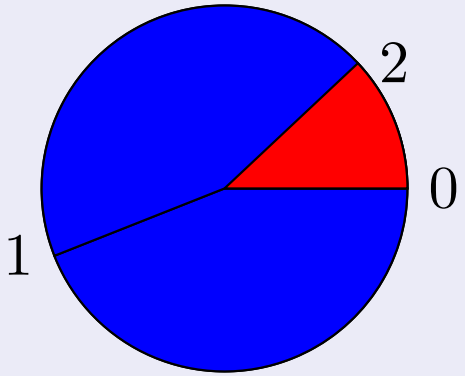


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

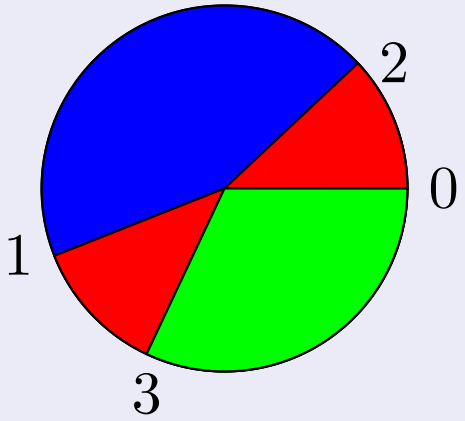


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

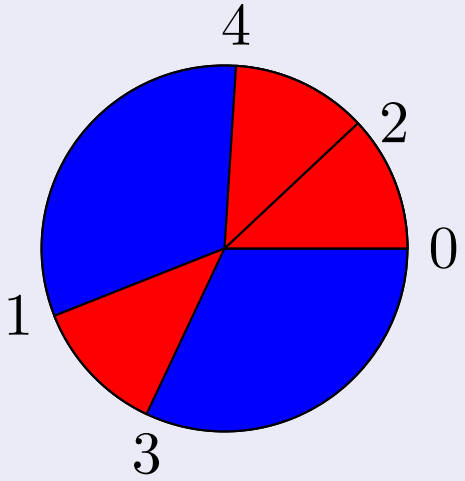


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

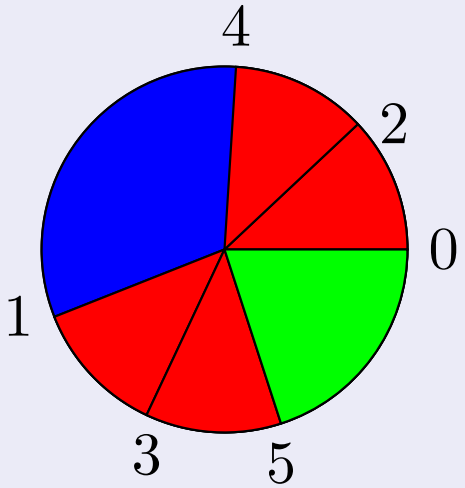


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

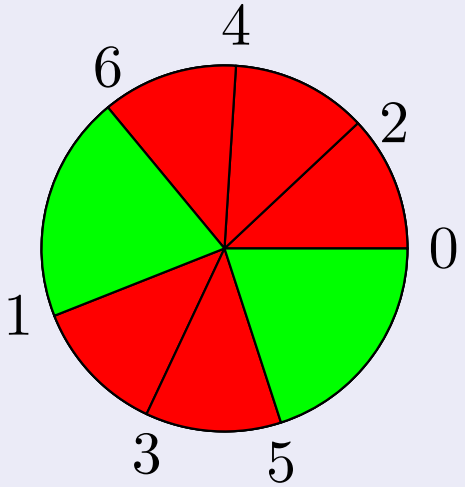


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

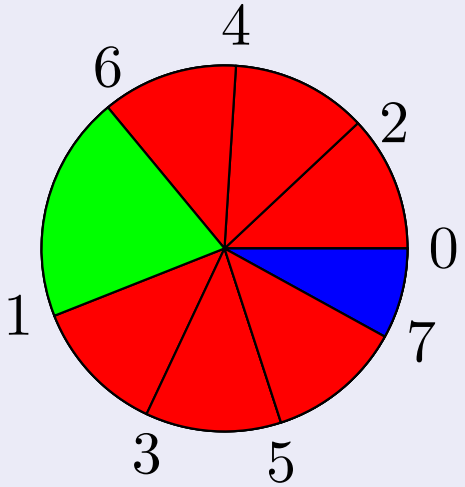


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

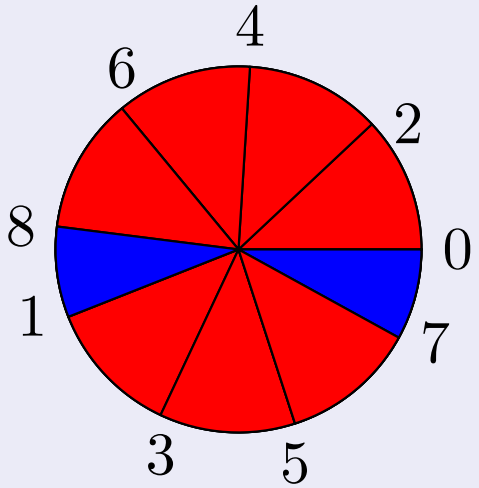


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

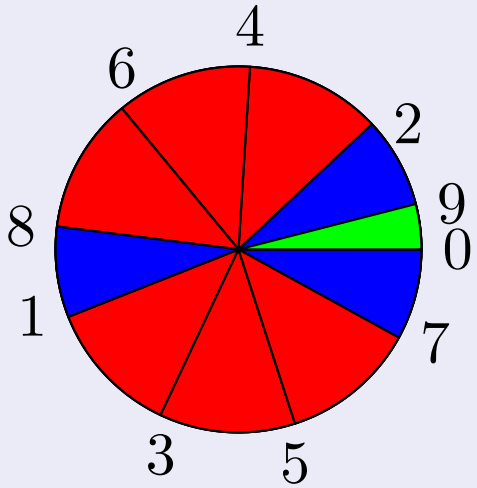


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

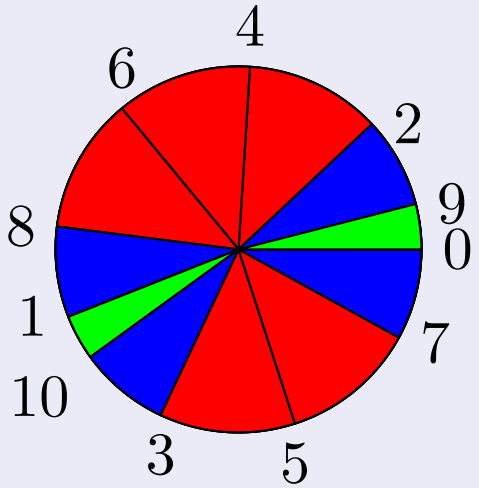


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

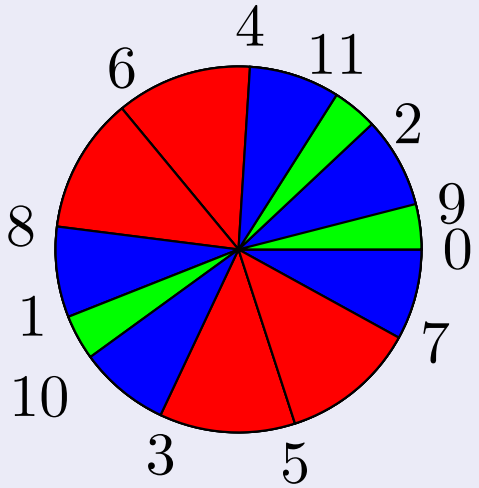


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

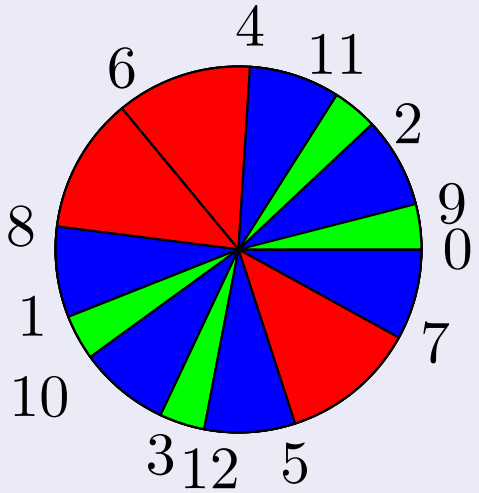


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

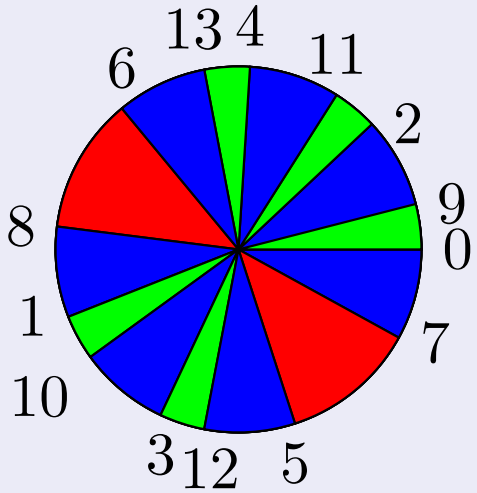


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

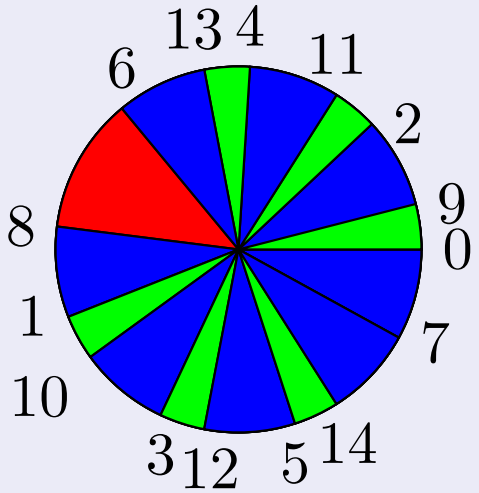


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

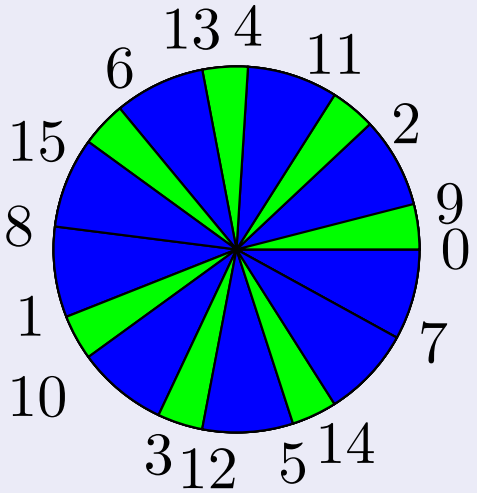


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

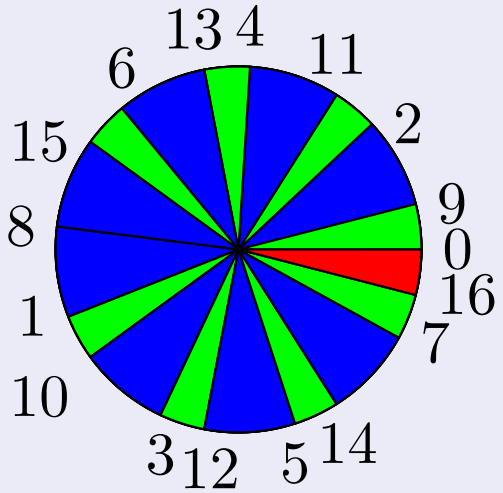


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.

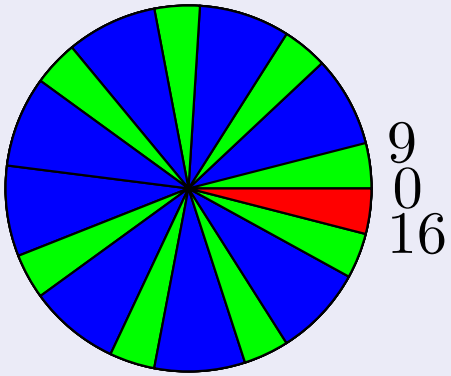


(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.)

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

Tétel (három távolság tétele).

Ha $\alpha \notin \mathbb{Q}$, akkor minden N-re az $\{n\alpha\}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ pontok által a körvonalon adódó ívek között legfeljebb háromféle ívhosszúság fordul elő.



(Hugo Steinhaus sejtése. Bizonyítások: Erdős Pál, Hajós György, Szüsz Péter, Surányi János, T. Sós Vera, Stanisław Świerczkowski, 1956–58.) Sőt, T. Sós Vera bámulatos eredménye szerint az $1, 2 \ldots, N$ számoknak a körvonalon kapott permutációja egyértelműen meghatározható csupán a 0 két szomszédjának sorszámából (α és az ábra ismerete nélkül)!

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

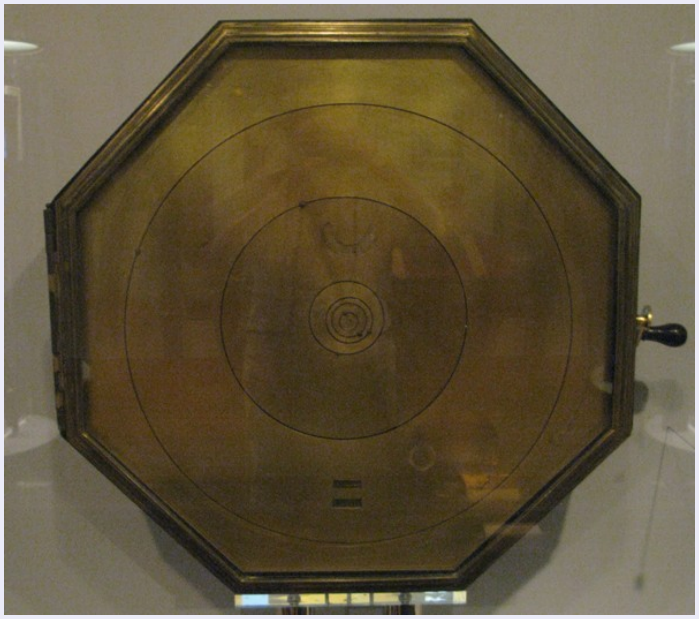
További érdekességek az $(\{n\alpha\})$ sorozat kapcsán.

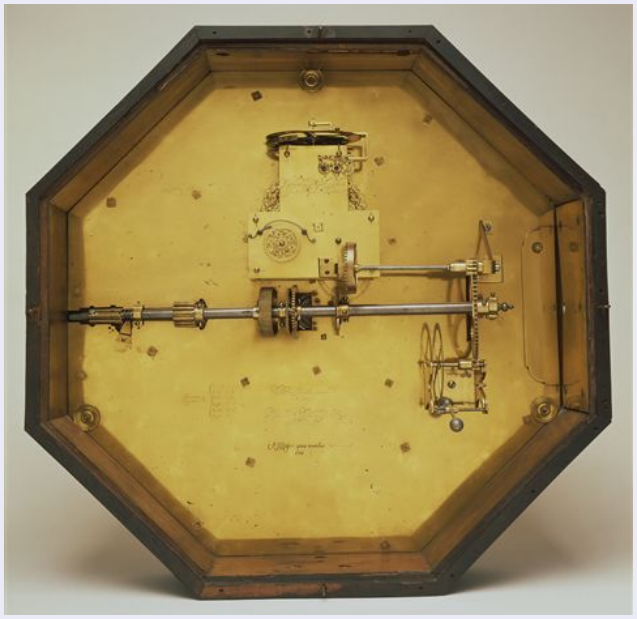
- Motiváció: Christiaan Huygens fogaskerék planetáriuma (1682), égi mechanika, bolygók egymásra való hatásai, perturbációszámítás.
- Sűrűségi tétel: Nicole Oresme (1360 körül), két pont egyenletes körmozgása egy körvonal mentén irracionális arányú sebességekkel $\Longrightarrow$ bármely íven lesz találkozási pont (érdemes meggondolni).
- Egyenletes eloszlási tétel: Piers Bohl, Wacław Sierpiński, Hermann Weyl, 1909–11. (Elemi bizonyítás: finomítsuk a korábbiakat!)
- Sűrű sorozatok: $(\{\sqrt{n}\})$, $(\{\log n\})$, $(\{\sin n\})$ mindenütt sűrűek a $[0,1]$-en, de csak $(\{\sqrt{n}\})$ egyenletes eloszlású (érdemes meggondolni).
- Egyenletes eloszlású sorozatok: $(\{n^n\alpha\})$, ha α irracionális (H. Weyl 1916), $(\{p_n\alpha\})$, ahol p_n az n-edik prím (I. M. Vinogradov 1948).
- Skatulyaelv: Jean Leurechon (1622), „Biztosan van két ember, akinek ugyanannyi hajszála vagy pénzérméje van.”

Érdekességek a törtrészek eloszlásáról

A diofantikus approximáció egy alkalmazása.

Huygens planetáriuma (készítette: Johannes van Ceulen órásmester, 1682)





$$\frac{\text{Föld évi elfordulása}}{\text{Szaturnusz évi elfordulása}} = \frac{77708431}{2640858} \approx \frac{206}{7} \text{ (hiba: } 0{,}00312\text{)}$$

$\Longrightarrow$ Szaturnusz fogaskereke 206 fogú, amely a főtengelyhez egy 7 fogú keréken keresztül kapcsolódik.

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

Az USA államainak népessége (2010. április 1., US Census Bureau).

Melyik táblázatban szerepelnek a valódi adatok?

37253956	5988927	2700551
25145561	5773552	2059179
19378102	5686986	1852994
18801310	5303925	1826341
12830632	5029196	1567582
12702379	4779736	1360301
11536504	4625364	1328361
9883640	4533372	1316470
9687653	4339367	1052567
9535483	3831074	989415
8791894	3751351	897934
8001024	3574097	814180
6724540	3046355	710231
6547629	2967297	672591
6483802	2915918	625741
6392017	2853118	601723
6346105	2763885	563626

53253956	5988927	2700551
43145561	5773552	2576443
34368523	5686986	2252994
23801310	5303925	1726341
12884063	5029196	1567582
9770237	4779736	1360301
9653650	4625364	1328361
9583640	4533372	981647
9387653	4339367	965256
8835483	4131074	849415
8791894	3751351	837934
8001024	3574097	814180
7724540	3346355	770231
7547629	3267297	752591
6483802	3115918	725741
6392017	2853118	611723
6346105	2763885	603626

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

Az USA államainak népessége (2010. április 1., US Census Bureau).

Melyik táblázatban szerepelnek a valódi adatok?

37253956	5988927	2700551
25145561	5773552	2059179
19378102	5686986	1852994
18801310	5303925	1826341
12830632	5029196	1567582
12702379	4779736	1360301
11536504	4625364	1328361
9883640	4533372	1316470
9687653	4339367	1052567
9535483	3831074	989415
8791894	3751351	897934
8001024	3574097	814180
6724540	3046355	710231
6547629	2967297	672591
6483802	2915918	625741
6392017	2853118	601723
6346105	2763885	563626

53253956	5988927	2700551
43145561	5773552	2576443
34368523	5686986	2252994
23801310	5303925	1726341
12884063	5029196	1567582
9770237	4779736	1360301
9653650	4625364	1328361
9583640	4533372	981647
9387653	4339367	965256
8835483	4131074	849415
8791894	3751351	837934
8001024	3574097	814180
7724540	3346355	770231
7547629	3267297	752591
6483802	3115918	725741
6392017	2853118	611723
6346105	2763885	603626

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

Az USA államainak népessége (2010. április 1., US Census Bureau).

Melyik táblázatban szerepelnek a valódi adatok?

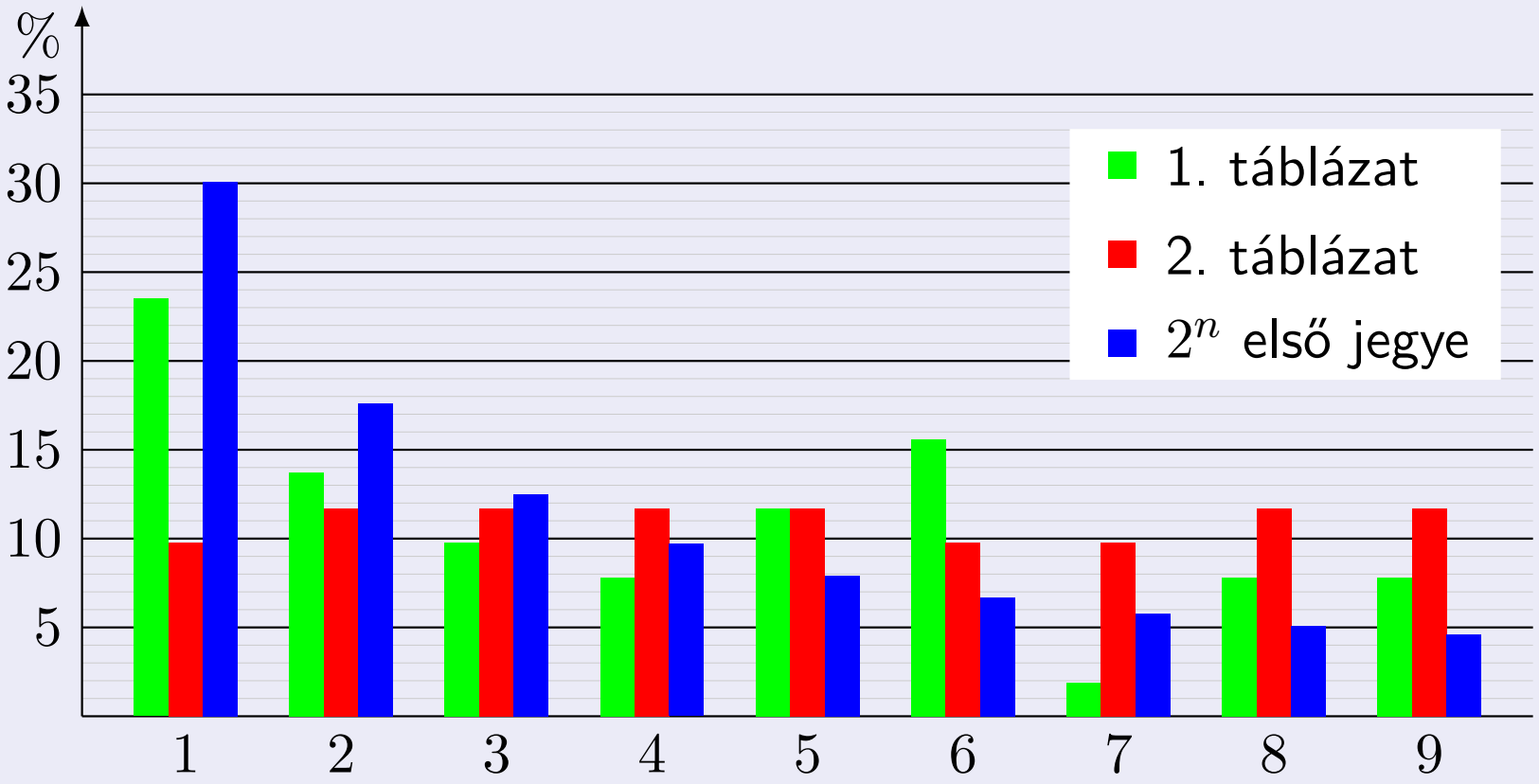
$\Longrightarrow$ Ötlet: vizsgáljuk meg az első számjegyek eloszlását!

első számjegy	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. táblázat (db)	12	7	5	4	6	8	1	4	4
2. táblázat (db)	5	6	6	6	6	5	5	6	6
1. táblázat (%)	23,5	13,7	9,8	7,8	11,7	15,6	1,9	7,8	7,8
2. táblázat (%)	9,8	11,7	11,7	11,7	11,7	9,8	9,8	11,7	11,7
2^n (%)	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

Az USA államainak népessége (2010. április 1., US Census Bureau).

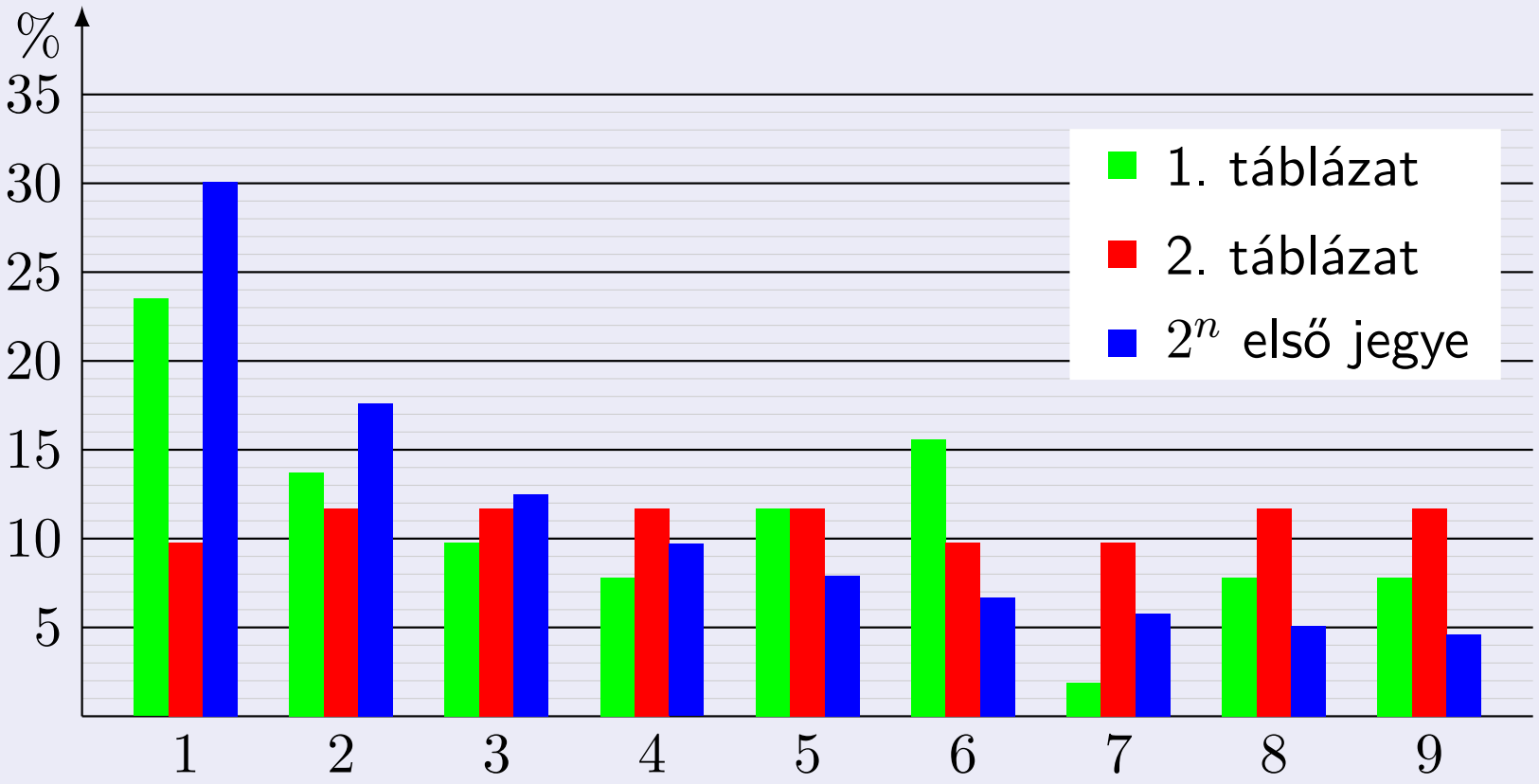
Az első számjegyek eloszlása a két táblázatban.



Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

Az USA államainak népessége (2010. április 1., US Census Bureau).

Az első számjegyek eloszlása a két táblázatban.



$\Longrightarrow$ sejtés (helyes): az 1. táblázat tartalmaz valódi adatokat.

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

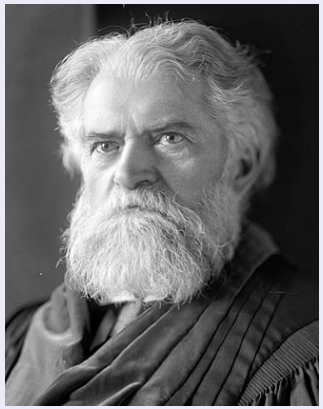
Exponenciális növekedés (mértani sorozat).

- A természetben gyakoriak az exponenciális jellegű folyamatok:
  - népességnövekedés $\sim c \cdot r^n$ (Malthus törvénye, 1798),
  - Fibonacci-sorozat $\sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, ahol $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ az aranymetszés száma.
- Simon Newcomb (csillagász), 1881: logaritmustáblák első oldalai piszkosabbak a többinél.
- Frank Benford (mérnök, GE), 1938, The Law of Anomalous Numbers: számos adathalmaz első számjegyei követik ugyanazt az eloszlást, a *Természet* úgy számol, hogy $e^0, e^1, e^2, \ldots$.
- Alkalmazás: könyvelési és adócsalások felderítése (Mark Nigrini), lebegőpontos számok (Donald Knuth).
- Valószínűségi magyarázat: véletlen eloszlásokból véletlenszerűen választva Benford-eloszlást kapunk (Theodore Hill).

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

Newcomb táblázata 1881-ből.

Dig.	First Digit.	Second Digit.
0	. . .	0.1197
1	0.3010	0.1139
2	0.1761	0.1088
3	0.1249	$0.\dot{1}043$
4	0.0969	0.1003
5	0.0792	0.0967
6	0.0669	0.0934
7	0.0580	0.0904
8	0.0512	0.0876
9	0.0458	0.0850



Simon Newcomb
(1835–1909)

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

Benford táblázata 1938-ból.

TABLE I

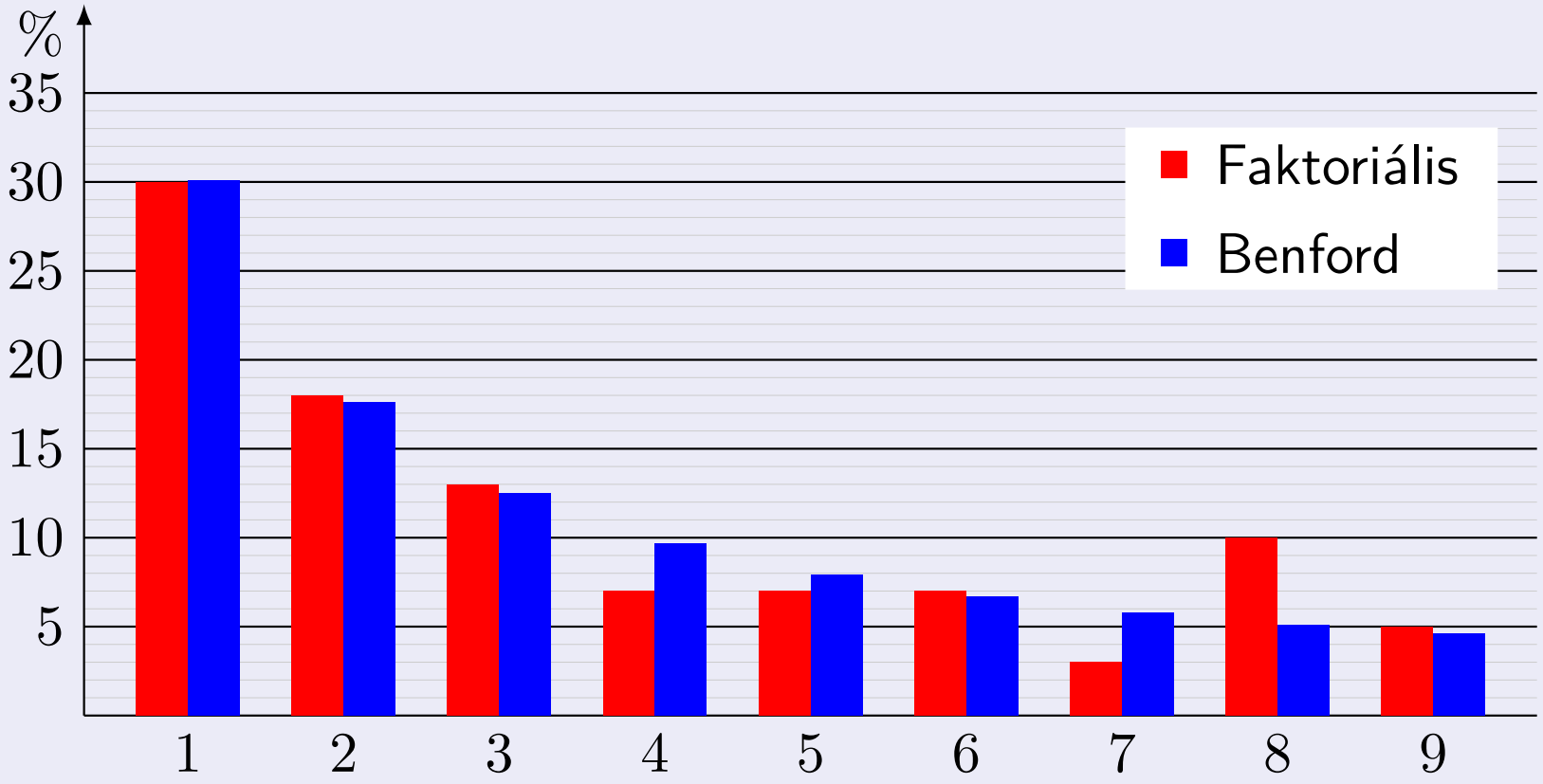
PERCENTAGE OF TIMES THE NATURAL NUMBERS 1 TO 9 ARE USED AS FIRST DIGITS IN NUMBERS, AS DETERMINED BY 20,229 OBSERVATIONS

Group	Title	First Digit									Count
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	Rivers, Area	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
B	Population	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
C	Constants	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
D	Newspapers	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
E	Spec. Heat	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
F	Pressure	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
G	H.P. Lost	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
H	Mol. Wgt.	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800
I	Drainage	27.1	23.9	13.8	12.6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
J	Atomic Wgt.	47.2	18.7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
K	$n^{-1}, \sqrt{n}, \cdots$	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
L	Design	26.8	14.8	14.3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
M	*Digest*	33.4	18.5	12.4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
N	Cost Data	32.4	18.8	10.1	10.1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
O	X-Ray Volts	27.9	17.5	14.4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
P	Am. League	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Q	Black Body	31.0	17.3	14.1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165
R	Addresses	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
S	$n^1, n^2 \cdots n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
T	Death Rate	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
Average		30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
Probable Error		±0.8	±0.4	±0.4	±0.3	±0.2	±0.2	±0.2	±0.2	±0.3	—

Frank Benford
(1883–1948)

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

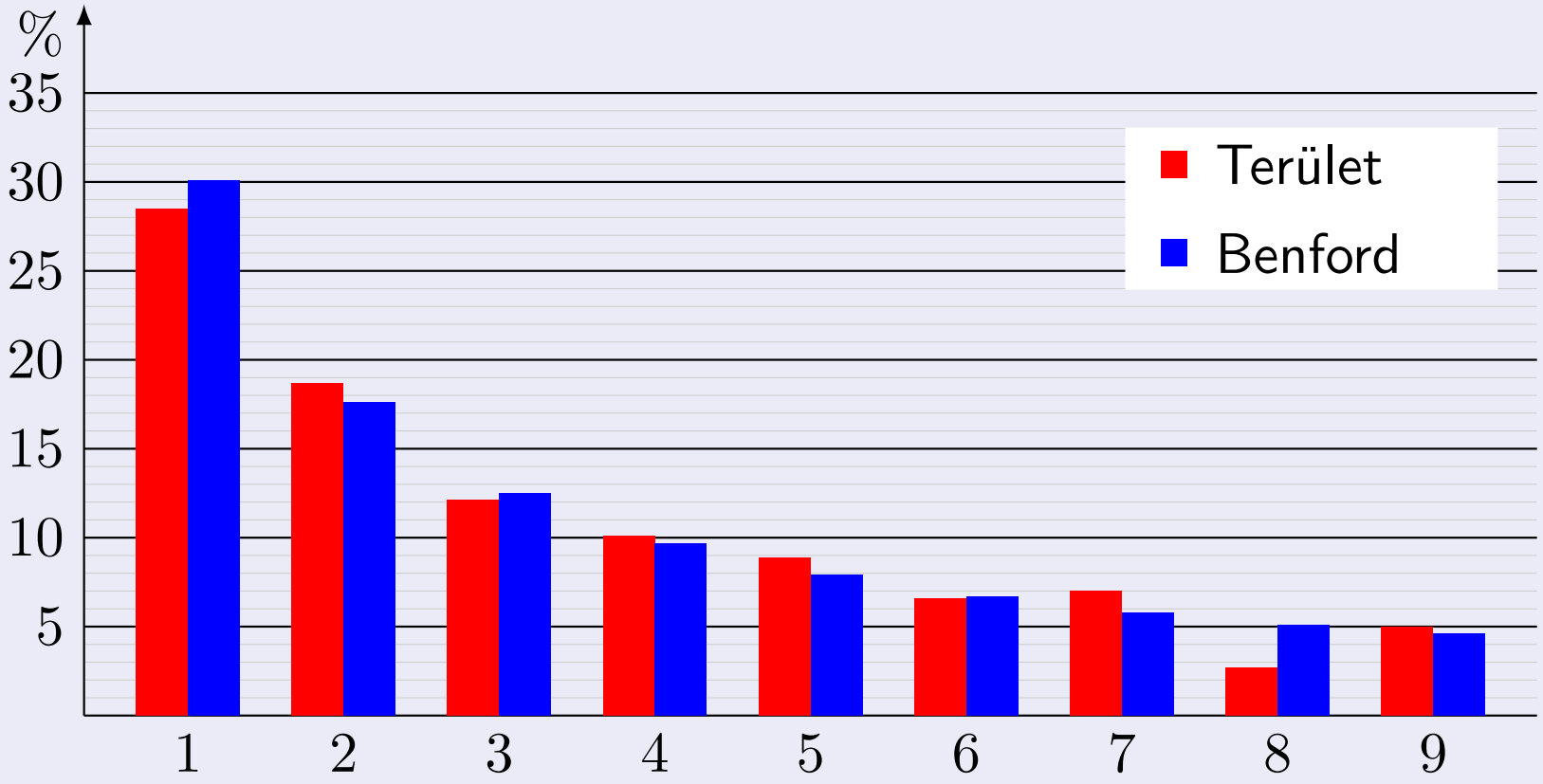
Benford-törvény az $n!$ értékeire ($n \leq 100$).



Nem exponenciális, hanem $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ (de Moivre–Stirling-formula).

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

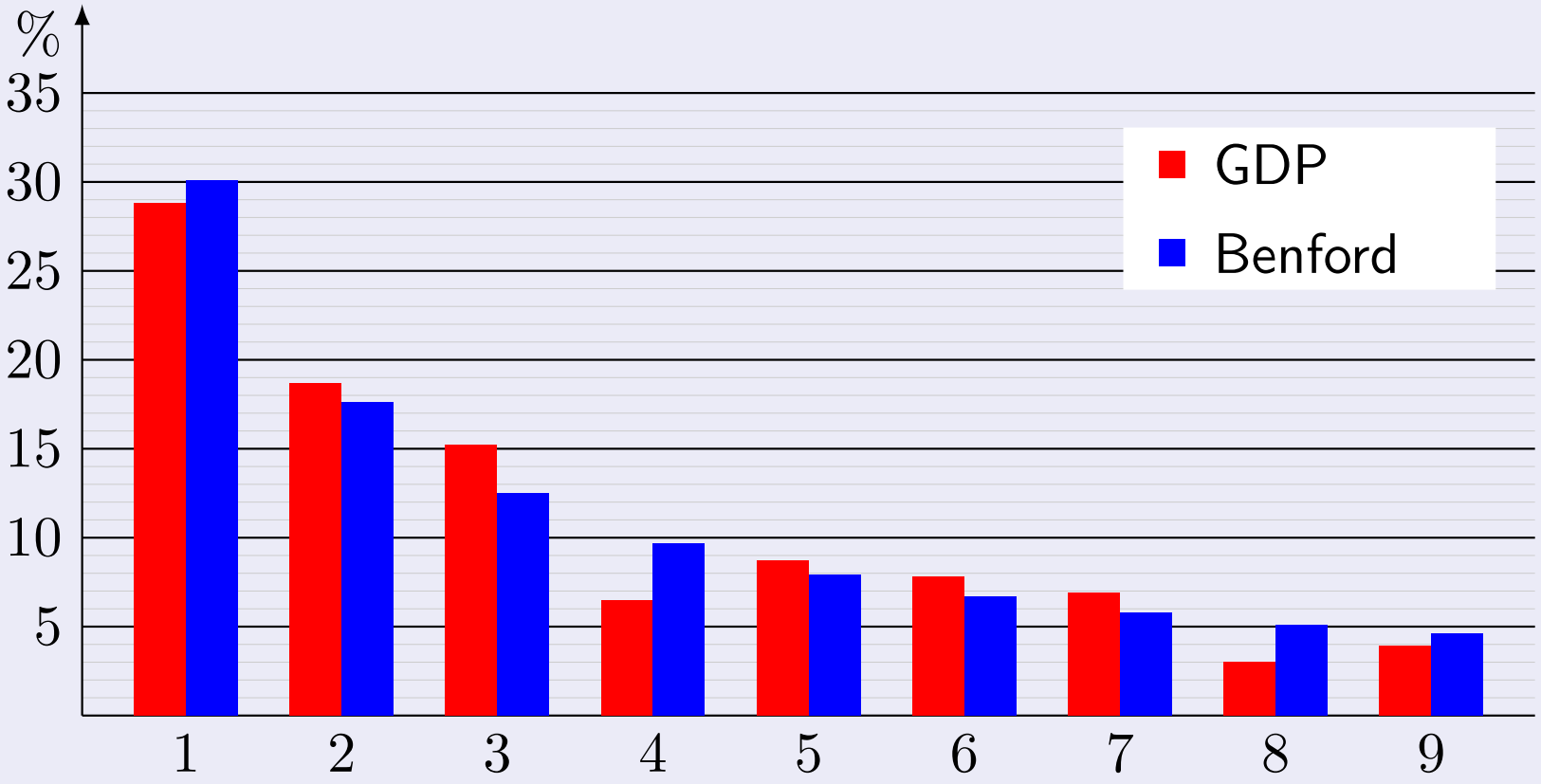
Benford-törvény a Föld országainak területeire (km^2).



Exponenciális növekedési modell? (Adatok: CIA World Factbook, 2014.)

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

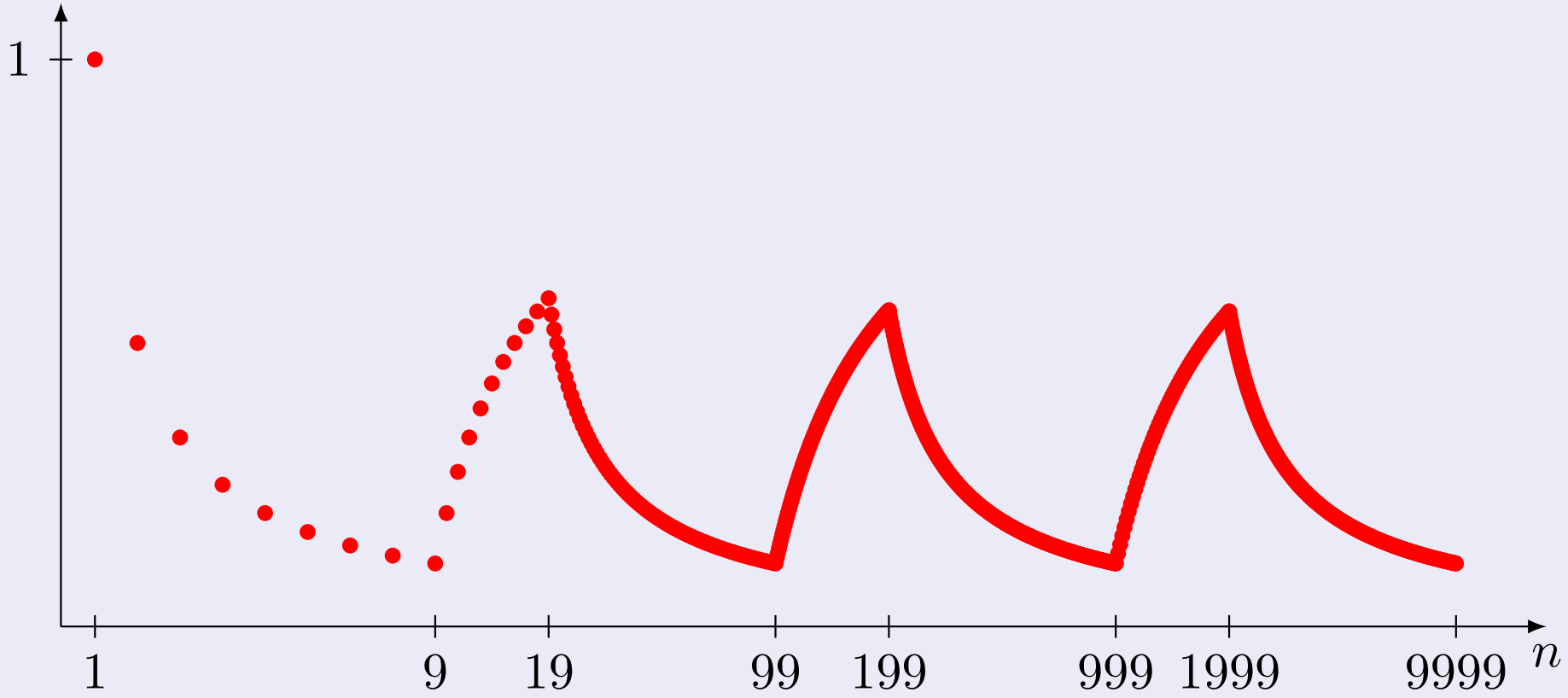
Benford-törvény a Föld országainak GDP értékeire ($).



Bárki készíthet hasonló diagramokat, ez szórakoztató módja a különböző adatokban rejlő rend és rendezetlenség felderítésének.

Érdekességek az első számjegyek eloszlásáról

Vigyázat: az 1-essel kezdődő természetes számok aránya n-ig.



Hol találhatók a lokális maximumok/minimumok és mennyi az értékük?
(Hogyan értelmeznénk a függvény „átlagos értékét” és mennyi lenne?)

Gondolkodnivaló

KöMaL F. 2581. jelű feladat (1987. január).

Ismeretes, hogy a 2 természetes kitevőjű hatványainak utolsó jegye periodikusan ismétlődik. Igaz-e ugyanez az első jegyre?

KöMaL B. 3557. jelű feladat (2002. május).

Kezdődhet-e egy köbszám a tízes számrendszerben 2002 darab egyessel?

Keményebb dió.

A négyzetszámok, köbszámok stb. első számjegyei vajon követik-e a Benford-törvényt?

(Vigyázat: Vlagyimir Arnold, Közönséges differenciálegyenletek című könyvének magyar fordításában hibás válasz szerepel.)

Utolsó kérdés, de ez már egy másik előadás témája lehetne...

Mi a helyzet a kettőhatványok utolsó k darab számjegyeivel?

Olvasni- és néznivalók

- Freud Róbert – Gyarmati Edit, *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- A. M. Jaglom – I. M. Jaglom, *Nem elemi feladatok elemi tárgyalásban*, Typotex, Budapest, 2015.
- Laczkovich Miklós, *Sejtés és bizonyítás*, Typotex, Budapest, 2010.
- Székely J. Gábor, *Paradoxonok a véletlen matematikájában*, Typotex, Budapest, 2010. (korábbi kiadás: Typotex, 2004. Műszaki Könyvkiadó, 1982.)
- Warren Weaver, *Szerencse kisasszony (A valószínűség elmélete)*, Kairosz, Budapest, 1997. (korábbi kiadás: Gondolat, 1979.)
- T. Sós Vera, *Rend, rendezetlenség és ami a kettő között van*, KöMaL Ankét, 2010. november 6., `https://www.youtube.com/watch?v=c39uLbMGNEo`
- James Tanton, *Benford's law*, `http://www.jamestanton.com/?p=734`
- Benford Online Bibliography, `http://www.benfordonline.net`
- Three-Distance Theorem, Wolfram Demonstrations Project, `http://demonstrations.wolfram.com/ThreeDistanceTheorem`

Köszönöm a figyelmet!