NÉGY FELADAT — NÉGY SZELLEMES MEGOLDÁS

1. Feladat. *A hét törpe és hét Hófehérke egy asztal körül ülnek. Szende előtt 14 csoki van. A csokikat egymásnak adhatják úgy, hogy ha valaki előtt legalább kettő van, akkor kettőt átadhat a szomszédjainak (vagy mindkettőt ugyanannak, vagy mindkettőnek egyet-egyet). El tudják-e érni, hogy mindenki előtt egy csoki legyen?*

Megoldás. A feladat szempontjából mindegy, hogy a törpék és a Hófehérkék milyen sorrendben ülnek az asztal körül, de a megoldást könnyebb elmondani, ha úgy képzeljük, hogy felváltva ülnek: mindegyik törpe mindkét oldalán egy-egy Hófehérke. Megmutatjuk, hogy a kívánt csokielosztást nem lehet elérni a szabályok betartásával.

Kövessük nyomon, hogy a Hófehérkék előtt összesen hány csoki van. Kezdetben egy sincs. Amikor csokiátadás történik, akkor

- ha egy törpe ad át két csokit, akkor a Hófehérkéknél lévő csokimennyiség 2-vel nő (bármerre adja is a törpe a csokikat);
- ha pedig egy Hófehérke ad át két csokit, akkor a Hófehérkéknél lévő csokimennyiség 2-vel csökken.

Tehát akárhány csokiátadás történik is, a Hófehérkéknél mindig páros számú csoki lesz öszesen (mert eredetileg 0 volt, ami páros, és minden lépésben 2-vel változik).

Azonban a kívánt állapotban, amikor mindenki előtt egy csoki van, a Hófehérkék összesen 7 csokit birtokolnak, hiszen heten vannak. Ezért ez az állapot soha nem jöhet létre. □

2. Feladat. *Végtelen sok kövünk van, a k-adik kő szélessége $1/k$ méter. Ezeket sorban, szorosan egymás mellé állíthatjuk. Az így épített fal lehet-e több kilométer hosszú?*

Megoldás. Igen, akármilyen hosszú falat tudunk építeni. Csoportosítsuk a köveket a következőképpen.

- Az első kő szélessége egy méter, a másodiké fél méter.
- A harmadik és negyedik kő szélessége $1/3 + 1/4 > 1/2$ méter.
- Az ötödiktől nyolcadikig számozott kövek szélessége is nagyobb, mint fél méter. Valóban, az
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$
összeget csökkentjük, ha mindegyik nevezőt növeljük 8-ra. Mivel 4 tag van, ez összesen $4/8 = 1/2$.
- A kilencediktől a tizenhatodikig számozott kövek együttes szélessége is legalább fél méter. Valóban, ebben az összegben 8 tag van, és mindegyik tag legalább $1/16$ méter, ami összesen $8/16 = 1/2$.

Ezt az eljárást akármeddig folytathatjuk. A 2^n+1-ediktől 2^{n+1}-ig számozott kövek együttes szélessége ugyanilyen gondolatmenet alapján mindig legalább $2^n/2^{n+1}$, azaz fél méter lesz. Ezért legalább fél méterrel akárhányszor megnövelhetjük a fal hosszát, és így bármilyen előre megadott hosszúságot túlléphetünk. $\square$

Érdekességként megemlítjük, hogy ha a k-adik kő szélessége csak $1/k^2$ méter (vagyis a kövek rendre $1, 1/4, 1/9, \dots$ méter szélesek), akkor már nem tudunk akármilyen hosszú falat építeni. Ha az összes, végtelen sok követ egymás mellé állítjuk, akkor a fal hossza $\pi^2/6$ méter lesz (a fal egyenes, nincs körről szó, igen meglepő, hogy az eredményben a π szám szerepel). Ez egy nehéz tétel, de azt középiskolásoknak is könnyű megmutatni, hogy a kövek együttes szélessége 2 méternél kevesebb. Próbálja meg ezt belátni az Olvasó!

3. Feladat. *Bejárható-e a sakktábla fele, azaz 4×8 mező egy huszárral úgy, hogy minden mezőt egyszer érintsünk, és a séta végén visszajussunk a kiindulópontba?*

Megoldás. Nem járható be. Tegyük fel ugyanis, hogy a huszár azt állítja, hogy sikerült ilyen sétát találnia. Megmutatjuk, hogy valamelyik lépésnél biztosan hibázott.

A sakktábla a szokásos módon sötét és világos mezőkre osztható. Tudjuk, hogy a huszár sötét mezőről csak világos mezőre, világos mezőről csak sötét mezőre tud ugrani. A huszár fenti sétáját kezdjük a jobb alsó sarokban, amely világos színű (bárhol kezdhetjük, hiszen körbejárt). Ekkor az első lépés után a huszár sötét mezőn áll, a második után világoson, és így tovább. Vagyis páros számú lépés után világos, páratlan számú lépés után sötét mezőn áll.

A kulcsötlet a következő. Színezzük ki a sakktábla két szélső, 1×8-as sorát pirosra, a két középső 1×8-as sorát kékre. Ha a huszár piros mezőn, vagyis a tábla valamelyik szélén áll, akkor biztosan középső, azaz kék mezőre fog lépni. Elvileg tudna kékről kékre is lépni, de megmutatjuk, hogy a fenti körséta során ez egyszer sem történhetett meg. Valóban, a huszár minden mezőről pontosan egyszer ugrott el. Ez 32 ugrás. Ebből 16-szor piros mezőről ugrott, és ezért kékre érkezett. Így a másik 16 ugrásakor (amikor kék mezőről ugrott el), piros mezőre kellett érkeznie, hiszen mind a 16 piros mezőre ráugrott valamikor.

Mivel a huszár a jobb alsó sarokból indult el, ami piros, ez azt jelenti, hogy páros számú lépés megtétele után mindig piros mezőn tartózkodik, páratlan számú lépés után pedig kéken. De korábban láttuk, hogy páros számú lépés után mindig világos mezőn van, páratlan számú lépés után sötéten. Mivel mindenhová eljutott, ezért a világos mezők mind pirosak kell, hogy legyenek, a sötétek pedig mind kékek. Ez már nyilvánvalóan lehetetlen, hiszen a tábla piros szélein $4-4$ sötét mező is van. Tehát a keresett séta nem létezik.

Ez a bizonyítás Pósa Lajos magyar matematikustól származik, és ugyanígy elmondható mindegyik $4\times n$-es sakktábla esetén is (ahol n pozitív egész szám). $\square$

4. Feladat. *A síkon van véges számú pont úgy, hogy bármely kettőt kötjük is össze, az így behúzott egyenes a pontjaink közül még egy harmadikat is tartalmaz. Mutassuk meg, hogy a pontok mind egy egyenesen vannak.*

A feladatban szereplő kérdést mint megoldatlan problémát vetette fel James Joseph Sylvester angol matematikus 1893-ban. A tételt Gallai Tibor magyar matematikus bizonyította be 1943-ban.

Megoldás. Húzzuk be az összes olyan egyenest, amely átmegy a pontjaink közül legalább kettőn. Mivel véges számú adott pont van, véges számú egyenest húztunk be. Tekintsük az összes megadott pont távolságát az összes így behúzott egyenestől. Ez még mindig véges sok szám. Ha mindegyik nulla, az azt jelenti, hogy bármelyik egyenest is vesszük, az az összes pontunkat tartalmazza, és ebben az esetben az állítás igaz.

Megmutatjuk, hogy más eset nem lehetséges. Tegyük fel ugyanis, hogy a fenti távolságok között van pozitív. Válasszuk ki e pozitív számok legkisebbikét, legyen ez d, ami az egyik adott P pont és az egyik behúzott e egyenes távolsága. A P-ből az e-re bocsátott merőleges talppontja legyen T, ekkor tehát d a PT szakasz hossza.

Az e egyenesen a feladat feltétele szerint legalább három van az adott pontok közül. Ezek közül legalább kettő ugyanarra a T által meghatározott félegyenesre esik. Legyenek ezek A és B úgy, hogy B van közelebb T-hez. Meg fogjuk mutatni, hogy a B pont és az AP egyenes távolsága kisebb, mint d. Az így kapott ellentmondás bizonyítja majd az állítást.

Az APT derékszögű háromszögben húzzuk meg azt az AP átfogóval párhuzamos egyenest, amely B-n áthalad. Ez a másik befogót a D pontban metszi. Ekkor B és D ugyanolyan messze vannak az AP egyenestől, és ez a távolság kisebb, mint a DP szakasz hossza, hiszen DP nem merőleges AP-re. Ugyanakkor $DP \leq TP = d$. □