

Valószínűség-számítási paradoxonok

Matematikai Intézet Nyílt nap, 2016. december 2.

Zempléni András

ELTE TTK Matematikai Intézet
Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék

Érdemes-e pénzt párna alatt tartani?

- Pénzünket olyan részvénybe fektetjük, amelynek értéke egy év alatt 50%-os eséllyel 1,9-szeresére nő és ugyanolyan eséllyel a felére csökken.
- Várható éves hozam:
 $0,5 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot (-0,5) = 0,2 = 20\%$
- Az évek során pénzünk várható értéke végtelenhez tart.



Érdemes-e pénzt párna alatt tartani? (folytatás)

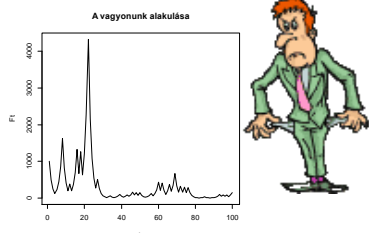
$$S_n = X_1 \cdot X_2 \dots X_n = e^{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)} = \left(e^{\frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n}} \right)^n$$

$$\frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n} \rightarrow -2,6\%$$

Tehát

$$S_n \rightarrow 0$$

Egy példa-futás:



1000 szimuláció eredménye

- Kiinduló tőke: 1000 Ft

- | Min. | 1. Kv. | Medián | Átlag | 3. Kv. | Max. |
|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|
| 0.000e+00 | 1.000e+00 | 4.000e+01 | 2.84e+07 | 8.44e+03 | 2.015e+10 |
- Az esetek több, mint 66%-ában kevesebb lesz a pénzünk 1000 Ft-nál

A pénz fele párna alatt

$$S_n = X_1 \cdot X_2 \dots X_n = e^{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)} = \left(e^{\frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n}} \right)^n$$

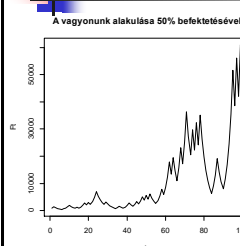
- Az átlagos éves hozam 10%

$$\frac{\ln(X_1) + \dots + \ln(X_n)}{n} \rightarrow 4,2\%$$

- Tehát $S_n \rightarrow \infty$



Eredmények



- 1000 szimuláció alapján:

Min.	1.kvartilis	Medián
0	6327	45720
Átlag	3.kvartilis	Max.
4692000	638700	$4,66 \cdot 10^8$

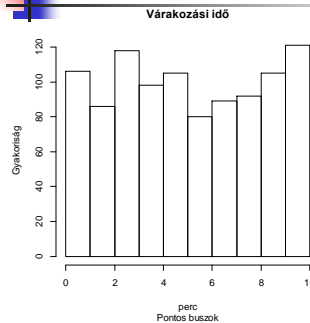
Matematikai feladat az optimális részarány megtalálása

Buszparadoxon

- Az autóbuszok átlagosan 10 perccel követik egymást. Egy buszmegállóba odamenve várhatóan hány percet kell várnunk a buszra?
- 5 percet, 10 percet, végtelen sokat?

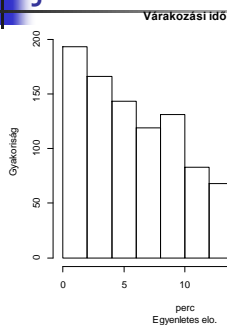


Pontosan 10 perccel jönnek a buszok



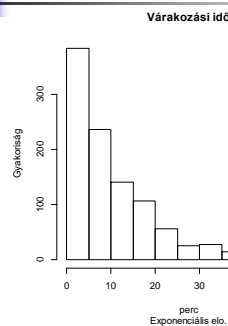
- 1000 szimuláció alapján az átlagos várakozási idő 5 perc

Átlagosan 10 perccel jönnek a buszok



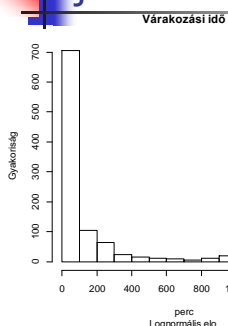
- A követési időköz egyenletes eloszlású a [0;20] perc intervallumon:
- 1000 szimuláció alapján az átlagos várakozási idő 6,7 perc

Átlagosan 10 perccel jönnek a buszok



- A követési időköz exponenciális eloszlású 10 perc várható értékkel:
- 1000 szimuláció alapján az átlagos várakozási idő 10 perc

Átlagosan 10 perccel jönnek a buszok



- Ha a követési idő lognormális, 10 perc várható értékkel, a szimulált átlagos várakozási idő 145 perc
- De akár végtelen is lehet!
- Általános képlet:

$$m = \frac{1}{2} d \left(1 + \frac{s}{d^2} \right)$$
- Itt m az átlagos várakozási időnk, d az átlagos követési időköz, s pedig a követési időköz variációja

A szimuláció eszköze

- R programcsomag
- Nyílt forráskódú
- Szabadon letölthető
- cran.r-project.org
- Magyar nyelven is hozzáférhető sok segédanyag
- A szimulációnál használt program: <http://zemleni.elte.hu/nyiltnap.txt>