

Segédanyag a szakterületi záróvizsga tételeihez

Matematikatanári szak – középiskolai tanári szakirány

Fontos információk. A szakterületi záróvizsga alapját a hivatalos tételsor képezi. Az tartalmazza az összes tétel esetében azokat a címszavakat, amelyeket a vizsgázónak a feleletében a saját felépítése szerint ki kell fejtenie. Az alábbi tematika segítséget kíván nyújtani a hallgatóknak abban, hogy a hivatalos tételsorban szereplő címszavak kapcsán milyen fogalmakra és tételekre lehet kitérni. A vizsga során a bizottság elsősorban arról szeretne meggyőződni, hogy a vizsgázó valóban megértette-e az általa kifejtett fogalmak tartalmát, és tudja-e egyszerű példákon alkalmazni a kimondott tételeket, összefüggéseket. A bizottságnak nem szándéka a részletes tematika ismeretanyagát számonkérni, a vizsgázó által esetleg nem érintett témákra csak akkor kérdez rá, ha az a hivatalos tételsorban szerepel. Röviden: **A vizsga teljesítéséhez nem kell mindent tudni az alábbi tematikából.**

1. Kombinatorika és diszkrét valószínűségszámítás. Kombinatorikai alapfeladatok és megoldásaik. Binomiális együtthatók és azonosságai. Skatulyaelv és alkalmazásai kombinatorikai és geometriai feladatokban. Azonosságok algebrai és kombinatorikai bizonyítása. Kitalálós játékok, Barkochba. Szita-formula. Állandó együtthatós lineáris rekurziók és megoldásuk. Catalan-számok. Generátorfüggvények. Permutációk, orbit, stabilizátor, Burnside-lemma. Kombinatorikus valószínűségi mező. Szerencsejátékok: kockadobás, érmedobás, lottó. Névjegy probléma. Visszatevéses és visszatevés nélküli mintavételezés, a binomiális és a hipergeometriai eloszlás. Poisson eloszlás.

2. Számfogalom. Az egész számok számelmélete: oszthatóság, számelmélet alaptétele. Hányadostest konstrukciója, racionális számok, műveletek értelmezése. Valós számok konstruktív és axiomatikus megalapozása. Test- és rendezési axiómák, arkhimédészi és Cantor-axióma. Véges és végtelen tizedes törtek. Korlátos halmazok, maximum, minimum, alsó és felső határ. Valós számok hatványozása: egész, racionális, valós kitevő. Algebrai és transzcendens számok, ezek számossága. Az algebrai számok teste. Komplex számok: a számfogalom lezárása, algebrai zárttság. A műveletek geometriai értelmezése. Egységgyökök, rend, primitív egységgyökök. Megszámlálható halmazok, kontinuum számosság. Cantor tétele a hatványhalmaz számosságáról.

3. Számelmélet. Oszthatóság gyűrűben, irreducibilis elem, prímelem. Euklideszi, főideál- és alaptételes gyűrűk. Példák: a számelmélet alaptétele egész számokra, polinomokra testek és az egész számok gyűrűje fölött, Gauss-egészek. Körosztási polinomok. Számelméleti függvények. Kongruenciák az egész számok között. Elem rendje csoportban, ciklikus csoport, részcsoporthoz, mellékosztály, Lagrange-tétel, kapcsolat az Euler-Fermat-tétellel. Wilson-tétel, polinom gyökeinek száma a p elemű test fölött. Primitív gyök, a p elemű test additív és multiplikatív csoportja, diszkrét logaritmus. Diofantikus egyenletek, nevezetes számelméleti problémák és tételek (Dirichlet, Csebisev, Goldbach, stb.). Gauss-egészek alkalmazásai.

4. Vektorok és mátrixok. Vektortér fogalma. Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, bázis, dimenzió. Vektorok koordinátái. Térbeli szabad vektorok, skaláris szorzat, vektoriális szorzat, vegyes szorzat. Műveletek mátrixokkal. Mátrix rangjának értelmezése. Négyzetes mátrix determinánsa, tulajdonságok, kiszámolási módszerek. Determináns geometriai jelentése. Mátrix inverze. Ortogonális mátrix. Síkbeli transzformációk leírása mátrixegyenletekkel. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának eldöntése a kibővített mátrix alapján. Gauss-elimináció. Cramer-szabály. A lineáris leképezésnek egy bázispárra vonatkozó mátrixa. Lineáris transzformációk. Sajátérték, sajátvektor, karakterisztikus polinom, minimálpolinom, diagonalizálhatóság. Véges vektorterek, kombinatorikus alkalmazások.

5. Polinomok és alkalmazásaik. Kommutatív gyűrű feletti polinomgyűrű. Gyöktényezőik kiemelése egyszerre, gyökök száma és nullosztómentesség. A gyökök és együtthatók közötti összefüggések. Maradékos osztás, test feletti polinomok számelmélete, irreducibilis polinomok különböző véges és végtelen testek, illetve az egész számok fölött, az algebra alaptétele. Másod-, harmadfokú polinomok, gyökképlet létezése. Interpoláció, Vandermonde-determináns. Algebrai szám és lineáris transzformáció minimálpolinomja, lineáris rekurzió és lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja. Egyszerű testbővítés szerkezete, szorzástétel, algebrai szám foka. Testek konstrukciója faktorgyűrűként. Az euklideszi szerkesztés lépései. A szerkesztési feladat fogalma. A síkbeli koordinátarendszer szerepe, annak felvétele. A szerkesztés alakzataihoz (pontok, egyenesek, körök) rendelt koordináta-adatok. A kiindulási test. A szerkesztési lépések kapcsolata a testbővítésekkel. Nevezetes nem megoldható szerkesztési feladatok.

6. Szintetikus geometria. A háromszög nevezetes vonalai és pontjai, Euler-egyenes, Feuerbach-kör. Speciális négyszögek és jellemzőik. Konvex ponthalmazok, konvex burok. A konvex poliéder értelmezése, Euler tétele. Szabályos konvex poliéderek. A terület és a térfogat geometriai értelmezése. Konvex síkidom kerülete, konvex test

felszíne. Az ellipszis, a hiperbola és a parabola fogalma. A forgáskúp síkmetszeteinek jellemzése. Az euklideszi szerkesztés lépései. Szerkesztési feladat fogalma. Aranymetszés, a szabályos tízszög szerkeszthetősége. Az axiomatikus módszer a geometriában. A párhuzamossági axióma függetlenségének kérdésköre, Bolyai János szerepe. A hiperbolikus geometria Cayley–Klein-féle modellje, a kettősviszonyon alapuló távolságfüggvény. Tengelyes tükrözések a modellben. A hiperbolikus síkgeometria Poincaré-féle körmodellje.

7. Analitikus geometria. A szabad vektorok mint irányított szakaszok osztályai. Az összeadás és a számmal való szorzás értelmezése, ezek tulajdonságai. Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, ortonormált bázis. A sík és a tér koordinátázása. A szinusz- és koszinuszfüggvény geometriai értelmezése a valós számok halmazán, az addíciós képletek. A skaláris szorzat geometriai fogalma, a szorzat kifejezése a vektorok koordinátaival. A vektoriális szorzat fogalma, a szorzat koordinátáinak kiszámítása. A kifejtési tétel. Három vektor vegyes szorzata és annak geometriai jelentése, a felcserelési tétel. Nevezetes alakzatok (egyenes, kör, kúpszeletek, sík, gömb) egyenletei. Az euklideszi sík másodrendű görbéinek osztályozása. A projektív sík koordinátázása. Másodrendű görbék a projektív síkon, Pascal tétele. A gömbháromszögekre vonatkozó szinusz- és koszinusztételek.

8. Geometriai transzformációk, szimmetriák. Irányítástartó és irányításváltó egybevágóságok síkban és térben. Két tengelyes tükrözés szorzata. A párhuzamos szelők és szelőszakaszok tétele, kapcsolat a centrális hasonlóságokkal. A síkbeli forgatva nyújtás és tükrözve nyújtás. Két háromszög egybevágóságának és hasonlóságának feltételei. Ponthármas osztóviszonya. A síkbeli affinitások meghatározása ponthármasokkal. Tengelyes affinitások. Síkbeli transzformációk leírása mátrixegyenletekkel. Az euklideszi sík kibővítése ideális pontokkal. Pontnégyes és sugárnégyes kettősviszonya, Papposz tétele. Kollineációk a projektív síkon, a projektív geometria alaptétele. A síkbeli kollineációk meghatározása pontnégyesekkel. Egyenesek és körök, illetve síkok és gömbök inverzióval nyert képei. Az inverzió szögtartása. Csoport fogalma. Csoportelem rendje. Részcsoportok. A diédercsoportok mint szabályos sokszögek szimmetriacsoportjai.

9. Sorozatok és függvények határértéke, folytonosság. Számsorozatok határértéke. Konvergens és divergens sorozatok. Végtelenhez tartó sorozatok. Határérték és műveletek, egyenlőtlenségek. Nevezetes határértékek. Monoton sorozatok. A Bolzano-Weierstass-tétel és a Cauchy-kritérium. Végtelen sorok. Konvergencia és abszolút konvergencia. Konvergenciakritériumok (összehasonlító, gyök-, hányados-, Leibniz-kritérium). Valós függvények globális tulajdonságai, monotonitás, konvexitás. Függvények folytonossága és határértéke. Átviteli elvek. Folytonosság, határérték és műveletek, egyenlőtlenségek. Korlátos zárt intervallumban folytonos függvények. Néhány fontos függvényosztály (polinomfüggvények, racionális törtfüggvények, exponenciális függvények, hatványfüggvények, logaritmusfüggvények, trigonometrikus függvények és ezek inverzei). Konvergens pontsorozatok az n -dimenziós euklideszi térben. Többváltozós függvények folytonossága és határértéke. Korlátos zárt halmazon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai.

10. Differenciálszámítás. A differenciálhányados fogalma. Érintő. Kapcsolat a folytonossággal. Differenciálási szabályok és az elemi függvények deriváltjai. Magasabb rendű differenciálhányadosok. A lokális tulajdonságok és a derivált kapcsolata. Közéértéktételek. A differenciálható függvények vizsgálata, monotonitás, konvexitás. Szélsőérték-feladatok megoldása. A L'Hospital-szabály. Taylor-polinomok, Taylor-formula. Taylor-sorok, konkrét függvények előállításuk Taylor-sorok összegeként. Kétváltozós függvények grafikonja, szintvonalai. Parciális deriváltak. Totális derivált és kapcsolata a parciális deriváltakkal, folytonossággal. A differenciálhatóság egy elégséges feltétele. A grafikon érintősíkjá. Gradiens. Iránymenti deriváltak. Kétszer differenciálható függvények, Young tétele, első és második differenciál. Szélsőérték-feladatokkal kapcsolatos szükséges, illetve elégséges feltételek.

11. Integrálszámítás. A primitív függvény fogalma. Primitívfüggvény-keresési módszerek (parciális integrálás, helyettesítéses integrálás), racionális törtfüggvények primitív függvényeinek keresése. A Riemann-integrál fogalma. Az integrálhatóság feltételei. Az integrál elemi tulajdonságai. A Newton–Leibniz-formula. A Jordan-féle terület és a térfogat fogalma. Mérhető halmazok, nullmértékű halmazok. A többváltozós integrálszámítás elemei. n -dimenziós téglák, téglán értelmezett korlátos függvény integrálhatósága, az egyváltozós integrálszámítás tételeinek általánosítása. A többszörös integrál kiszámítása, lebontási tétel. Integrálás normáltartományon. Az integrálszámítás alkalmazásai: terület- és térfogatszámítás.

12. Valószínűségyszámítás. Kolmogorov-féle valószínűségi mező, axiómák. Feltételes valószínűség. Valószínűségi változók, nevezetes eloszlások (binomiális, hipergeometriai, geometriai, Poisson, exponenciális, normális). Eloszlás- és sűrűségfüggvény. Várható érték és szórás, tulajdonságaik. Függetlenség. A nagy számok törvénye és a centrális

határeloszlás tétel. Minta, alapstatisztikák (átlag, medián, tapasztalati szórás). Becslések: maximum likelihood és momentum módszer. A hipotézisvizsgálat alapjai: a normális eloszlás paramétereire vonatkozó próbák, illeszkedésvizsgálat, függetlenségvizsgálat, homogenitásvizsgálat. Diszkrét idejű Markov-láncok: átmenetvalószínűségek, irreducibilitás, periódus, visszatérőség, stacionárius eloszlás. A Poisson-folyamat.

13. Matematikai alkalmazások 1. (A vizsgázónak a három altémakör közül kettőt kell választania.)

a) Irányítatlan és irányított gráfok fogalma. Hurokél, többszörös él, egyszerű gráfok. Pontok fokszáma. Séták, vonalak, utak, körök és kapcsolatuk. Fák, összefüggőség, komponensek. A szélességi bejárás és alkalmazásai. Euler-vonalak, Hamilton-körök és Hamilton-utak, szükséges feltételek és elégséges feltételek létezésükre. Síkgráfok, Euler-formula és geometriai következményei (poliéderek lapjai, élei és csúcsai). Kuratowski tétele.

b) Szimmetrikus bolyongás, tükrözési elv, szavazási lemma, arkusz-színusz törvények. Tönkremenési feladat szimmetrikus és nem szimmetrikus esetben. Bolyongás gráfokon. Elágazó folyamat, a kihalás valószínűsége. Diszkrét idejű Markov-láncok: átmenetvalószínűségek, irreducibilitás, periódus, visszatérőség, stacionárius eloszlás. A Poisson-folyamat. Sorbanállási modellek, a sor hossza stacionárius esetben.

c) Paraméterezett görbék. Ívhossz. A görbület értelmezése és kiszámítása. A térbeli görbe kísérő Frenet-bázisa. Síkgörbe előjeles görbülete. A síma felület paraméterezése. A felületet leíró vektorfüggvény parciális deriváltjainak geometriai jelentése. Érintősíkok. Első alapmennyiségek. Felszín.

14. Matematikai alkalmazások 2. (A vizsgázónak a három altémakör közül kettőt kell választania.)

a) Páros gráfok és párosítások, König-Hall tétel és változatai. Gráfszínezések, kromatikus szám: kapcsolat a maximális fokszámmal és a legnagyobb teljes részgráf méretével. Síkgráfok színezése. Ramsey- és Turán-tétel.

b) A sebesség és gyorsulás mint derivált. Közönséges differenciálegyenlet és kezdetiérték-feladat. Szétválasztható változójú egyenletek, elsőrendű lineáris egyenletek, másodrendű homogén lineáris egyenletek. Alkalmazások (pl. radioaktív bomlás, rezgőmozgás).

c) Kvadratikus maradékok, Legendre-szimbólum, kvadratikus reciprocitás. A prímfelbontás algoritmikus nehézsége. Az RSA titkosírás alapjai, számítógépes alkalmazások.