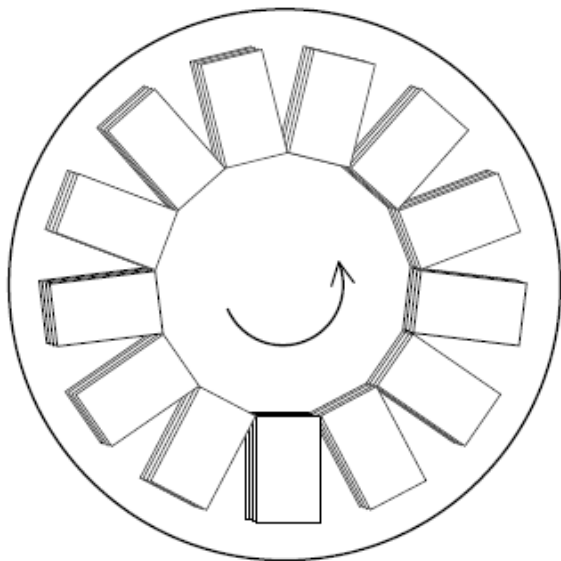


Egy kártyatrükk és a geometriája

Csajbók Bence

MTA-ELTE Geometriai és Algebrai Kombinatorika Kutatócsoport

Budapest, Szeptember 27, 2019



Mi kell, hogy működjön a trükk?

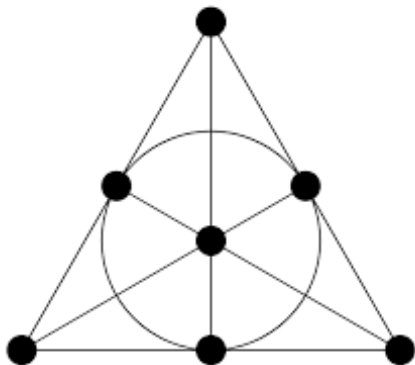
- ❶ Bármely 2 kupacban kell, hogy legyen pontosan 1 érték mely mindkettőben szerepel. Ebből:
 - minden kupacban minden érték pontosan 1-szer szerepelhet
 - ha egy értékpár szerepel egy kupacban, akkor nem szerepelhet másik kupacban
 - összesen tehát $13 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2}$ különböző olyan értékpár van, mely tagjai ugyanabban a kupacban szerepelnek
- ❷ $13 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2}$ ami pont az értékpárok száma, tehát minden értékpárhoz létezik pontosan egy olyan kupac melyben mindkét érték szerepel.

Nevezzük a 13 kupac mindegyikét pontnak.

Ezeknek kiválasztjuk 13 db 4-elemű részhalmazát amiket egyenesnek fogunk nevezni:

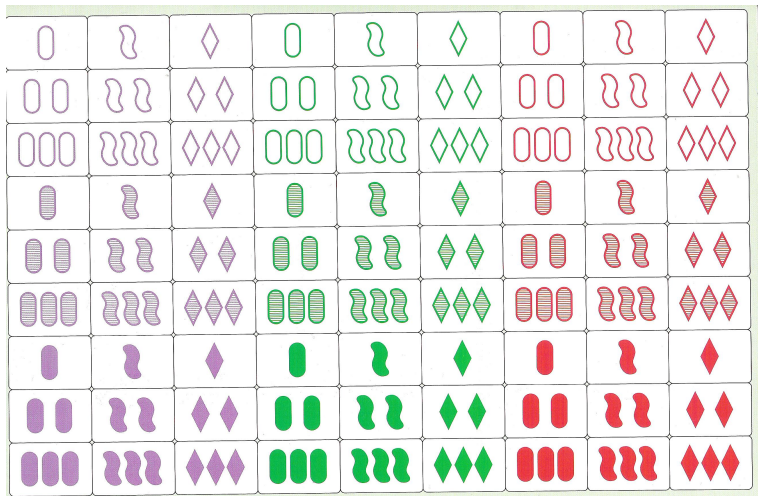
- az a 4 kupac, melyben szerepel 2-es,
 - az a 4 kupac, melyben szerepel 3-as,
 - ...
 - az a 4 kupac, melyben szerepel király,
 - az a 4 kupac, melyben szerepel ász.
- 1 Ekkor bármely két ponthoz (kupachoz) létezik pontosan egy egyenes (érték) mely tartalmazza ezt a két kupacot (mely mindkét kupacban megtalálható) és
 - 2 bármely két egyenesnek (értékhez) pontosan egy közös pontja van (van pontosan egy kupac amiben szerepelnek).

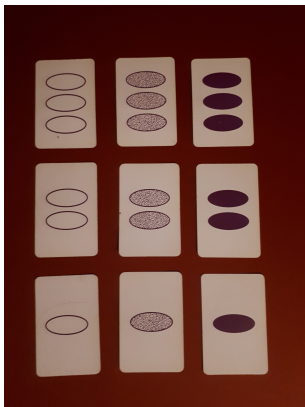
Egy 7 ponttal és 7 egyenessel rendelkező struktúra ami teljesíti az előbbi két feltételt:



Hogyan találunk 13 ponttal és 13 egyenessel rendelkező példát?

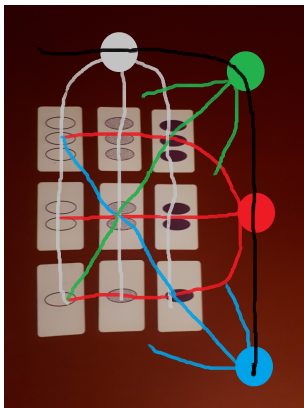
SET



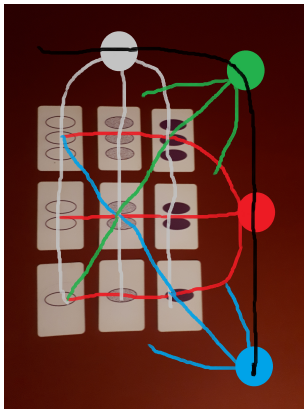


Ezt a 9 kártyát nevezzük pontnak, a bennük található SET-eket pedig egyeneseknek $\Rightarrow$ 12 db egyenes lesz és teljesül, hogy:

- 1 bármely két ponton át pontosan egy egyenes megy és
- 2 bármely P ponthoz és rajta át nem haladó e egyeneshez létezik pontosan egy f egyenes mely áthalad a P -n és nem metszi az e -t.

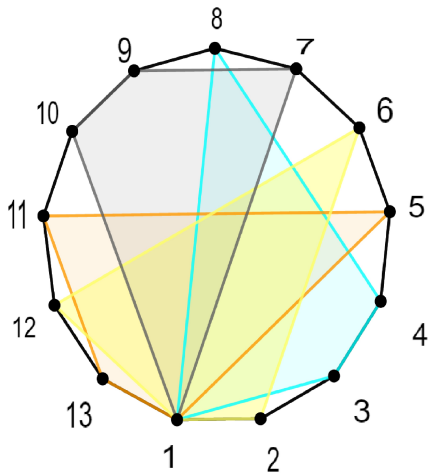
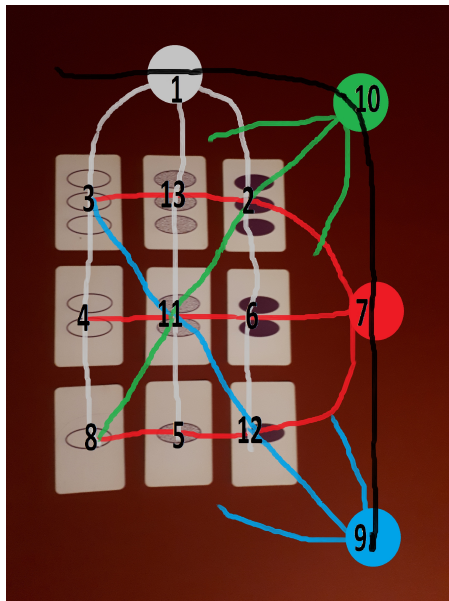


A 9 pontot 4-féleképpen bonthatjuk fel 3 db párhuzamos (vagyis egymást nem metsző) egyenes uniójára. Minden ilyen felbontáshoz vegyünk hozzá egy új "végtelen távoli" pontot, mely a felbontáshoz tartozó egyeneseken van. A végtelen távoli pontokhoz pedig egy "végtelen távoli" egyenest melyre ezek a pontok esnek.



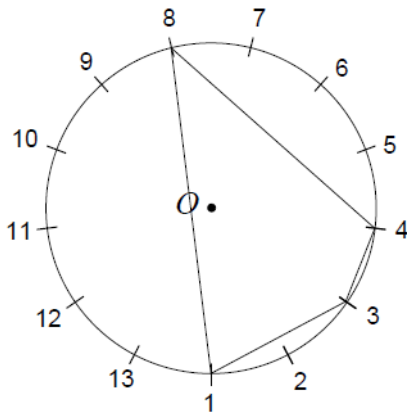
Így 13 pontunk és 13 egyenesünk lesz, melyekre teljesül, hogy:

- ❶ bármely két ponthoz pontosan egy egyenes van mely mindkettőt tartalmazza,
- ❷ bármely két egyenes pontosan egy pontban metszi egymást.



Egy szabályos 13-szög két csúcsának a **távolságán** azt a legkisebb k nemnegatív egészt értjük melyre létezik olyan $k \cdot \frac{360}{13}$ fokok a sokszög középpontja körüli forgatás mely az egyik csúcsot a másikba viszi.

Egy szabályos 13-szög egy rész 4-szögét **teljesen szabálytalannak** nevezzük, ha a csúcsai között fellépő távolságok mind különbözőek.



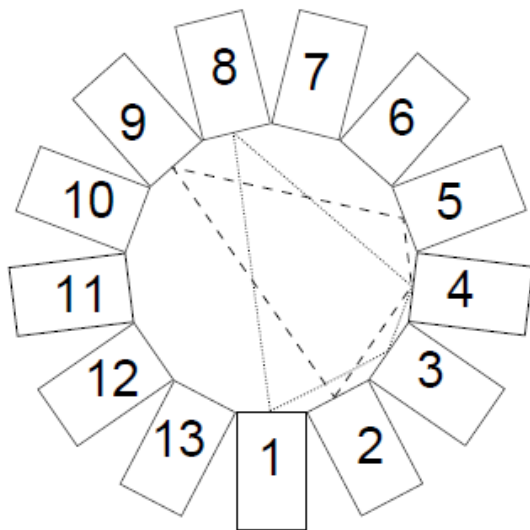
$\mathcal{S}$ szabályos 13-szög csúcsai mint pontok és benne egy $\mathcal{R}$ teljesen szabálytalan 4-szög 13 db elforgatottja mint egyenesek teljesítik, hogy:

1. Bármely két pontot pontosan egy egyenes tartalmaz:

Vegyünk $\mathcal{S}$ két csúcsát. Legyen ezek távolsága k . Mivel az $\mathcal{S}$ csúcsai közt összesen 6 távolság lép fel, ami épp az $\mathcal{R}$ csúcsai közt fellépő távolságok száma, ezért $\mathcal{R}$ csúcsai közt pontosan egyszer lép fel a k távolság és így $\mathcal{R}$ -nek lesz pontosan egy elforgatottja mely tartalmazza a két kiválasztott csúcsot.

2. Bármely két egyenes pontosan egy pontban metszi egymást:

Vegyünk $\mathcal{R}$ két elforgatottját, mondjuk $\mathcal{R}_m$ -et a $+k \cdot 360^\circ/13$ fokos forgatás vigye $\mathcal{R}_l$ -be, ahol $k \in \{1, \dots, 6\}$. Ekkor egy P pont pontosan akkor van mindkét elforgatotton, ha $\mathcal{R}_m$ -nek van olyan Q csúcsa melyre a QOP irányított szög $+k \cdot 360^\circ/13$ nagyságú. Ilyen P, Q pár pontosan egy van $\mathcal{S}$ -ben, tehát a $\mathcal{R}_m$ -nek és $\mathcal{R}_l$ -nek pontosan egy közös csúcsa van.



7	8	9	10	J	D	K	A	2	3	4	5	6
J	D	K	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	K	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J
A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	D	K

Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok



KöMaL

1% 1% 1% 1% 1%

MATFUND Alapítvány

18157444-2-43



Száz éve született
Turán Pál

Egy kártyatrükk és ami mögötte van

Emelt szintű érettségi feladatsor
megoldása

Képek az Eyjafjallajökull vulkánról

A Bolyai János Matematikai Társulat és
az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata



2010/5

60. évfolyam

2010. május