

# A BSc-képzés szakdolgozati témái

## Geometriai Tanszék

2019/2020

### 1. téma: Szabadon választható téma

**Témavezető:** A tanszék bármelyik oktatója.

**Rövid leírás:** Ha egy hallgató tetszőleges geometriai téma iránt érdeklődik, akkor témavezetőnek választhatja azt a szakembert, aki ehhez ért, és ebben segítséget tud neki nyújtani.

**Ajánlott irodalom:**

a hallgató és a témavezető megállapodása alapján.

**Szakirány:** bármely szakos hallgató

### 2. téma: Görbék és felületek geometriai vizsgálata a Mathematica programmal

**Témavezető:** Csikós Balázs

**Rövid leírás:** A Mathematica program egy szimbolikus számítások elvégzésére alkalmas program, mely kiváló grafikus lehetőségekkel is rendelkezik, és a pontosan nem kiszámítható feladatokra jó numerikus közelítést tud adni. Használatával a görbék és felületek analitikus vizsgálatakor a hangsúly a fázisító számítások elvégzéséről áttevődik a különféle fogalmak és konstrukciók geometriai tartalmának és viselkedésének megértésére, az eredmények elemzésére.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*.

**Szakirány:** bármely szakos hallgató

### 3. téma: Geometriai szélsőérték-feladatok

**Témavezető:** Csikós Balázs

**Rövid leírás:** A geometriában gyakran találkozunk optimalizációs feladatokkal. Ezek közt nagyon sok már megoldott klasszikus probléma van (izoperimetrikus, izodiametrális egyenlőtlenségek, stb.), és vannak régóta megválaszolatlan kérdések is. Ugyanakkor felvethetők új problémák is, melyeket eddig keveset vizsgáltak.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] D. O. Skljarszkij, N. N. Csencov, I. M. Jaglom: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből. II. rész, 2. kötet. Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték-feladatok*

[\*] D. S. Mitrović, J. E. Pečarič, A. M. Fink: *Recent Advances in Geometric Inequalities* (Mathematics and its Applications), Kluwer Academic Publishers.

**Szakirány:** bármely szakos hallgató

#### 4. téma: Geometriai fejtörőkhöz kapcsolódó matematikai problémák

**Témavezető:** Csikós Balázs

**Rövid leírás:** A szakdolgozó feladata egy geometriai játékhoz vagy fejtörőhöz kapcsolódó matematikai problémák összegyűjtése, megoldása. Például: Hányféleképpen lehet összerakni egy darabjaira szedett Rubik-kockát? Hány összerakásból tekerhető ki a gyári elrendezés? Hányféleképpen lehet egy Rubik kocka kis négyzeteit kiszínezni  $k$  színnel, ha két színezést nem különböztünk meg, ha egymásba tekerhetők? Mi a helyzet a Rubik-kocka variánsaival?... Avagy: Egy dobókockát görgetünk a síkon úgy, hogy minden lépésben az egyik élén átgördítjük. Milyen helyzetekbe juttathatjuk így el a dobókockát? Hány görgetés kell minimálisan egy adott helyzetbe eljuttatáshoz? Vizsgáljuk meg ugyanezeket a kérdéseket egy számozott lapú tetraéderre, oktaéderre, ikozaéderre.

**Ajánlott irodalom:**

[https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik%27s\\_Cube](https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik%27s_Cube)

**Szakirány:** bármely szakos hallgató

#### 5. téma: Geometriai egyenlőtlenségek a síkon és a gömbfelületen

**Témavezető:** Kertész Gábor

**Rövid leírás:** A feladat néhány egyszerűen megfogalmazható, de nem feltétlen könnyen bizonyítható egyenlőtlenség, mint a háromszöglemez pontjának csúcsoktól és oldalegyenesektől mért távolságai közti Erdős–Mordell egyenlőtlenség körbejárása. Lehetőség van még egyszerű, de a Hajós-könyvön túlmutató gömbi egyenlőtlenségek vizsgálatára is. Hogyan változik a csuklókkal összekötött rudakból álló négyszög területe a síkon és a gömbfelületen? Analitikus és más bizonyítások.

**Ajánlott irodalom:**[\*] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*[\*] Sklarszkij, Scsencov, Jaglom: *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből.***Szakirány:** elemző**6. téma: Tengelyes tükrözések az euklideszi és a gömbi geometriában****Témavezető:** Kertész Gábor

**Rövid leírás:** Ismert, hogy a tengelyes tükrözések generálják a sík és a gömbfelület egybevágósági csoportját, de ún. tükrözésgeometriai eszközökkel sajátosan kezelhetők a sugársorok és a ciklusok (itt kör és egyenes) is. Segítségükkel bebizonyítjuk azt is, az adott oldalhosszúságú sokszögek halmazában, ha az nem üres és gömbön a terület kisebb, mint  $\pi$ , egybevágóság erejéig pontosan egy körbe írható van.

**Ajánlott irodalom:**[\*] Hajós György: *Bevezetés a geometriába.***Szakirány:** elemző**7. téma: A momentumgörbe véges terekben****Témavezető:** Kiss György

**Rövid leírás:** A  $q$  elemű véges test fölötti  $n$ -dimenziós projektív térben momentumgörbének nevezzük a

$$\{(1 : t : t^2 : \dots : t^n) : t \in \text{GF}(q)\} \cup \{(0 : 0 : \dots : 0 : 1)\}$$

ponthalmazt. A görbének érdekes geometriai tulajdonságai miatt sok kódelméleti és kriptográfiai alkalmazása van. Ezek közül néhány kiválasztott bemutatása és példák konstruálása a leendő szakdolgozó feladata.

**Ajánlott irodalom:**[\*] Hirschfeld, J. W. P. and Thas, J. A., *General Galois Geometries*, Clarendon Press, Oxford, 1991.[\*] Kiss Gy. és Szőnyi T.: *Véges geometriák*, Polygon Kiadó, Szeged, 2001.**Szakirány:** (alkalmazott) matematikus**8. téma: Vektorazonosságok és alkalmazásaik****Témavezető:** Lakos Gyula

**Rövid leírás:** Nevezetes és kevésbé nevezetes vektorazonosságok vizsgálata. Vektorazonosságok alkalmazása elemi vagy projektív geometriában.

**Ajánlott irodalom:**[\*] Hajós György: *Bevezetés a geometriába.*

[\*] Reiman István: *A geometria és határterületei*.

**Szakirány:** tanári.

### 9. téma: Körök analitikus geometriája

**Témavezető:** Lakos Gyula

**Rövid leírás:** Körgeometriai tételek analitikus megközelítésben. Szükséges alapismeretek: A lineáris algebra magabiztos használata.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] Hajós György: Bevezetés a geometriába.

[\*] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*, 6. fejezet.

**Szakirány:** elemző

### 10. téma: Lineáris algebra indefinit vektortereken

**Témavezető:** Lakos Gyula

**Rövid leírás:** Indefinit bilineáris formákkal kapcsolatos témakörök (pl. klasszifikációs eredmények) feldolgozása a szakirodalom alapján. Szükséges alapismeretek: A lineáris algebra megbízható ismerete.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] Gohberg, Lancaster, Rodman: *Indefinite Linear Algebra and Applications*.

**Szakirány:** matematikus

### 11. téma: Geometriai módszerek a végtelen csoportok elméletében

**Témavezető:** Moussong Gábor

**Rövid leírás:** A csoportelmélet legtöbb eszköze csak a véges csoportok esetében működik hatékonyan. A végtelen csoportok megértéséhez különféle geometriai és topológiai módszerek állnak rendelkezésünkre: izometrikus csoporthatások, a Cayley-gráf geometriája és aszimptotikus viselkedése, görbületi feltételek.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] M. Kapovich: *Lectures on Geometric Group Theory*

[\*] M. Bridson, A. Haefliger: *Metric Spaces of Non-positive Curvature*.

**Szakirány:** matematikus.

### 12. téma: Coxeter-csoportok

**Témavezető:** Moussong Gábor

**Rövid leírás:** A diszkrét transzformációcsoportok között a tükrözésekkel generált csoportokat, illetve ezek absztrakt megfelelőit, a Coxeter-csoportokat ismerjük a legalaposabban. A szakdolgozat felderítheti a geometria és az algebra között ebben a témában különösen szépen megmutatkozó összjátékot.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] M. W. Davis: *The geometry and topology of Coxeter groups*

[\*] H. Hiller: *The geometry of Coxeter groups*.

**Szakirány:** matematikus.

### 13. téma: Hiperbolikus geometria

**Témavezető:** Moussong Gábor

**Rövid leírás:** A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria bőségesen kínál felderítésre váró érdekes témákat úgy a modern, magasabb dimenziós vonatkozások területén (pl. transzformációcsoportok, térformák leírása), mint a klasszikus síkgeometriai kérdésekben (pl. a területszámítás elemi tárgyalása, háromszögek geometriája, trigonometria, szerkesztések).

**Ajánlott irodalom:**

[\*] E. B. Vinberg: *Geometry II*. (Springer EMS Vol. 29.)

[\*] Szász P.: *Bevezetés a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriába*

[\*] Reiman I.: *A geometria és határterületei*.

**Szakirány:** matematikus.

### 14. téma: Gömbi geometria.

**Témavezető:** Moussong Gábor

**Rövid leírás:** A nem-euklideszi geometriák közül a legszemléletesebb és legismertebb a gömbi geometria. Kísérletezni lehet bármilyen ismert síkgeometriai témakör átültetésével a gömbi geometriába (pl. háromszögek geometriája, szerkesztések, kúpszeletek, izoperimetrikus problémakör).

**Ajánlott irodalom:**

[\*] Csikós B.: *Gömbi geometria*

[\*] Moussong G.: *Izoperimetrikus egyenlőtlenségek és gömbi geometria*.

**Szakirány:** elemző

### 15. téma: Poliéderek, mozaikok

**Témavezető:** Moussong Gábor

**Rövid leírás:** A jól ismert szabályos poliédereken kívül jó néhány érdekes poliédertípus vár feltérképezésre és osztályozásra: félig szabályos, uniform, csillag-, Johnson-, Catalan-, stb. poliéderek. Rokon téma a mozaikok világa: a periodikus mozaikok osztályozása, nevezetes nem-periodikus mozaikok.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] D. Wells: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*.

**Szakirány:** elemző

### 16. téma: Érdekes síkgörbék

**Témavezető:** Moussong Gábor

**Rövid leírás:** A geometria hosszú története során változatos céllal és igen nagy számban vizsgáltak különféle síkbeli görbéket. Ezek összegyűjtése, rejtett összefüggéseik feltárása lehet a szakdolgozat témája.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] Reiman I.: *A geometria és határterületei*

[\*] Pelikán J.: *Klasszikus algebrai görbék*

[\*] D. Wells: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry.*

**Szakirány:** elemző

## 17. téma: Kombinatorikus geometriai problémák

**Témavezető:** Naszódi Márton

**Rövid leírás:** Különböző elemi módszereken alapuló síkgeometriai eredményeket lehet bemutatni, illetve nyitott kérdéseket vizsgálni. Néhány példa: Erdős–Szekeres-tételkör, azaz konvex  $n$ -szög létezése megfelelően nagy ponthalmazban, gráf síkbarajzolásában az élek metszeteinek száma, körlapok családjában páronként diszjunkt elemkből álló részcsalád keresése.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] J. Matoušek: *Lectures on Discrete Geometry*

[\*] Pach J.: *Combinatorial Geometry*

**Szakirány:** matematikus, alkalmazott matematikus.

## 18. téma: Normált terek geometriája

**Témavezető:** Naszódi Márton

**Rövid leírás:** Az euklideszi távolságot a síkon (általánosabban  $\mathbf{R}^n$ -ben) kicserélhetjük más távolságfüggvényekre, amelyek az euklideszitől különböző érdekes geometriákhoz vezetnek. Lehet például vizsgálni, hogy az euklideszi síkbeli trigonometria hogyan vihető át normált síkba, mi a merőlegesség fogalma, mik az állandó szélességű halmazok, stb.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] A. C. Thompson: *Minkowski Geometry*

**Szakirány:** matematikus, alkalmazott matematikus.

## 19. téma: Csomóelmélet, régi és új invariánsok

**Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** A csomóelmélet a háromdimenziós térbeli zárt hurkok elmélete, érdekes találkozása a topológiának, kombinatorikának és a csoportelméletnek. A régi invariánsok is (fundamentális csoport, Alexander polinom, fedőterek

szerkezete) már nagyon érdekes képet adnak, az újabbak (Jones vagy HOM-FLY polinomok) már egészen misztikusak.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] csomóelméleti könyvek, cikkek.

**Szakirány:** mindegyik

**20. téma: 3 dimenziós sokaságok**

**Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** A modern topológia alappilléreinek számít a kisdimenziós terek elmélete, de ugyanakkor még nagyon szemléletesek. Ez a dimenzió már érdekes kihívás, még látni lehet a teret, de már érdekesebb módszerek kellenek a szerkesztésekhez, osztályozásokhoz (kombinatorika, csoportok). A bevezető példák: lencseterek, Seifert sokaságok, gráf 3 sokaságok. Kiindulási pont lehet differenciál topológia vagy akár algebrai geometria (szingularitás elmélet) fele.

**Ajánlott irodalom:**

**Szakirány:** mindegyik

**21. téma: A fundamentális csoport**

**Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** A topologikus terek megértésében és osztályozásában egyik legfontosabb invariáns a fundamentális csoport. Nagyon sok geometriai jelenséget ez a csoport vezérel (miben különbözik az úszógumi a Klein üvegtől vagy a focilabda a projektív síktól). Kapocs a véges és kombinatorikus geometria, csoportelmélet, gráfelmélet, reprezentációelmélet között.

**Ajánlott irodalom:**

**Szakirány:** mindegyik

**22. téma: Algebrai görbék**

**Témavezető:** Némethi András

**Rövid leírás:** A (komplex) affin vagy projektív tér görbéit egy polinom zérushelyeként definiáljuk. A polinom algebrai merevsége és a görbe alakja között érdekes összefüggések vannak, összekötve az algebrát a topológiával. Ez az algebrai geometria születési helye, elementárisan megfogalmazható százéves nyílt kérdésekkel.

**Ajánlott irodalom:**

**Szakirány:** mindegyik

**23. téma: Egybevágóságok**

**Témavezető:** Szeghy Dávid

**Rövid leírás:** Az egybevágóságok euklideszi osztályozásának mintájára a gömbi és a hiperbolikus geometria egybevágóságait tekintjük át.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*

[\*] M. Berger: *Geometry*

[\*] E. B. Vinberg: *Geometry II.* (Springer EMS Vol. 29.)

**Szakirány:** bármely szakos

#### 24. téma: Affin transzformációk

**Témavezető:** Szeghy Dávid

**Rövid leírás:** Az affinitások áttekintése és felhasználása sík- és térgeometriai kérdésekben.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] H. S. M. Coxeter: *A geometriák alapjai*

[\*] M. Berger: *Geometry.*

**Szakirány:** elemző

#### 25. téma: Állandó görbületű zárt felületek

**Témavezető:** Szeghy Dávid

**Rövid leírás:** Áttekintjük a zárt felületek topológiai osztályozását és felderítjük, melyiken milyen állandó görbületű geometria létezik.

**Ajánlott irodalom:**

[\*] E. B. Vinberg: *Geometry II.* (Springer EMS Vol. 29.)

**Szakirány:** bármely szakos

#### 26. téma: Trigonometriai tételek a Cayley-Klein-modellben

**Témavezető:** Verhóczki László

**Rövid leírás:** A hiperbolikus geometria legismertebb és leggyakrabban alkalmazott modellje a Cayley-Klein-féle gömbmodell. A szakdolgozó feladata a hiperbolikus trigonometria alapvető tételeinek a Cayley-Klein-modellben történő tárgyalása.

**Ajánlott irodalom:**

Reiman István: *A geometria és határterületei.***Szakirány:** mindegyik

#### 27. téma: Geometriai vetítések analitikus leírása

**Témavezető:** Verhóczki László



**Rövid leírás:** A számítógépes grafikában a térbeli alakzatok parallel vagy centrális vetületeinek előállításakor különféle geometriai transzformációkat alkalmaznak. A cél ezen transzformációk részletes leírása és néhány ábrázoló geometriai eredmény analitikus igazolása.

**Ajánlott irodalom:**

Szirmay-Kalos László: *Számítógépes grafika.*

Foley, van Dam, Feiner and Hughes: *Computer graphics, principles and practice*, **Szakirány:** alkalmazott matematikus

**28. téma: Másodrendű felületek és felületsorok a projektív térben**

**Témavezető:** Verhóczki László

**Rövid leírás:** A projektív tér koordinátázása, a pontok és síkok homogén koordinátái. Koordináta alapalakzatok, koordináta-transzformációk a projektív térben. A másodrendű felületek projektív osztályozása a kanonikus egyenletek alapján. Pólus-polársík kapcsolat egy másodrendű felületre vonatkozóan. Az érintősík, mint polársík. A másodrendű felület kanonikus egyenletének meghatározása az autopolar négyszög felhasználásával. Másodrendű felületsorok. A másodrendű felületsor alapgörbéje, a széteső áthatás tétele.

**Ajánlott irodalom:**

Kárteszi Ferenc: *Ábrázoló geometria.*

Horvay Katalin-Reiman István: *Projektív geometria*. **Szakirány:** mindegyik