1. Végtelen gumiszalagok - 7.osztály

1. Végtelen gumiszalagok - 7.osztály
2. A négyszögletű kerek erdőben - 7.osztály
3. Egy kemény dió - Számelméleti függvények - 11-12.osztály
4. Farey-törtek és a Stern-Brocot fa - 7-10.osztály
5. Az euklideszi algoritmus és a lánctörtek - 8-9.osztály
6. A Calkin-Wilf fa - 11-12.osztály

Az első feladat - 7.osztály

Egy rugalmas, a végtelenségig nyújtható szalag végeire felírtunk két számot; balról jobbra a-t, és b-t. Ez a szalag alapállapota (vagy 1. állapota).
A szalag következő állapotát úgy kapjuk, hogy a szalagot megnyújtjuk, és a korábbi számok meghagyása mellett a szalagon lévő bármely két szomszédos szám közé odaírjuk az összegüket.

Az első feladat - 7.osztály

Egy rugalmas, a végtelenségig nyújtható szalag végeire felírtunk két számot; balról jobbra a-t, és b-t. Ez a szalag alapállapota (vagy 1. állapota).
A szalag következő állapotát úgy kapjuk, hogy a szalagot megnyújtjuk, és a korábbi számok meghagyása mellett a szalagon lévő bármely két szomszédos szám közé odaírjuk az összegüket.

$$\boxed{2 \quad 6}$$

Az első feladat - 7.osztály

Egy rugalmas, a végtelenségig nyújtható szalag végeire felírtunk két számot; balról jobbra a-t, és b-t. Ez a szalag alapállapota (vagy 1. állapota).
A szalag következő állapotát úgy kapjuk, hogy a szalagot megnyújtjuk, és a korábbi számok meghagyása mellett a szalagon lévő bármely két szomszédos szám közé odaírjuk az összegüket.

$$\boxed{2 \quad 6}$$

$$\boxed{2 \quad 8 \quad 6}$$

$$\boxed{2 \quad 10 \quad 8 \quad 14 \quad 6}$$

$$\boxed{2 \; 12 \; 10 \; 18 \; 8 \; 22 \; 14 \; 20 \; 6}$$

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

0	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

0		1
0	1	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

0				1
0		1		1
0	1	1	2	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

0								1
0				1				1
0		1		1		2		1
0	1	1	2	1	3	2	3	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

0																1
0								1								1
0				1				1				2				1
0		1		1		2		1		3		2		3		1
0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

0		1		1		2		1		3		2		3		1
0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

0	1	1	2	1	3	2	3	1

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

"Önhasonlóság" +

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

0		1		1		2		1		3		2		3		1
0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

"Önhasonlóság" + Jobb oldalon "bejön" $(n-1) \Rightarrow$

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

0	1	1	2	1	3	2	3	1

$$0\ 1\ 1\ 2\ 1\ 3\ 2\ 3\ 1\ 4\ 3\ 5\ 2\ 5\ 3\ 4\ 1$$

"Önhasonlóság" + Jobb oldalon "bejön" $(n-1) \Rightarrow$

Bármely pozitív egész $\boxed{\text{tetszőlegesen sokszor}}$ rajta van a szalagon.

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a=0; b=1}$, illetve $\boxed{a=1; b=1}$?

1	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

1		1
1	2	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

1				1
1		2		1
1	3	2	3	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

1								1
1				2				1
1		3		2		3		1
1	4	3	5	2	5	3	4	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

1																1
1								2								1
1				3				2				3				1
1		4		3		5		2		5		3		4		1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a=0; b=1}$, illetve $\boxed{a=1; b=1}$?

$$\boxed{1\ 5\ 4\ 7\ 3\ 8\ 5\ 7\ 2\ 7\ 5\ 8\ 3\ 7\ 4\ 5\ 1}$$

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

$$\boxed{1\ 5\ 4\ 7\ 3\ 8\ 5\ 7\ 2\ 7\ 5\ 8\ 3\ 7\ 4\ 5\ 1}$$

Szimmetria + Jobb oldalon "bejön" $n \Rightarrow$

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

$$\boxed{1\ 5\ 4\ 7\ 3\ 8\ 5\ 7\ 2\ 7\ 5\ 8\ 3\ 7\ 4\ 5\ 1}$$

Szimmetria + Jobb oldalon "bejön" $n \Rightarrow$
Bármely $2 < n$ pozitív egész számból legalább kettő darab.

Az első feladat - 7.osztály

Feladat

1) Hány darab 3-as/7-es/(*) 2019-es lesz legfeljebb egy ilyen szalagon ha a szalag alapállapotában: $\boxed{a = 0; b = 1}$, illetve $\boxed{a = 1; b = 1}$?

$$\boxed{1\ 5\ 4\ 7\ 3\ 8\ 5\ 7\ 2\ 7\ 5\ 8\ 3\ 7\ 4\ 5\ 1}$$

Szimmetria + Jobb oldalon "bejön" $n \Rightarrow$
Bármely $2 < n$ pozitív egész számból legalább kettő darab.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
n darabszáma	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	$\cdots$

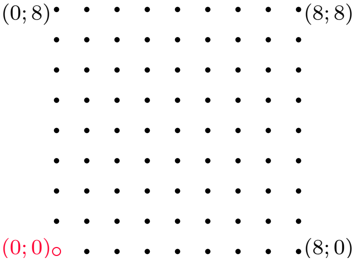
2019 darabszáma ???

Mit jelenthetnek a gumiszalagok?

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

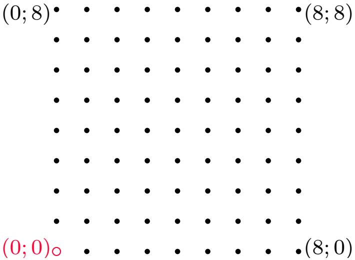
0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1

1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1



0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1

1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1



Mikkamakka a Négyszögletű Kerekerdő egyik sarkában áll (az ábrán a $(0;0)$-val jelölt pontban). A szálerdőben összesen 80 darab fa van; 1-1 minden olyan rácspontban, melynek mindkét koordinátája 0 és 8 közé eső nemnegatív egész. Mikkamakka kezdetben észak felé (a $(0;8)$-cal jelölt fa irányába) néz, majd lassan elfordul kelet felé (a $(8;0)$-val jelölt fa irányába).

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Feladat

2*a*) Összesen hány fát számolhat meg eközben Mikkamakka?

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Feladat

2*a*) Összesen hány fát számolhat meg eközben Mikkamakka?

2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Feladat

2*a*) Összesen hány fát számolhat meg eközben Mikkamakka?

2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

2*c*) Jelöljük a $(0;0)$ pontot O-val; míg a látott fákat (a megpillantásuk sorrendjében) $P_1; P_2; ...; P_n$-nel. Mekkora az $OP_1P_2P_3P_4...P_{n-1}P_n$ sokszög területe? Mit tapasztalsz ha megrajzolod a sokszöget?

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Feladat

2*a*) Összesen hány fát számolhat meg eközben Mikkamakka?
2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.
2*c*) Jelöljük a $(0;0)$ pontot O-val; míg a látott fákat (a megpillantásuk sorrendjében) $P_1; P_2; \ldots; P_n$-nel. Mekkora az $OP_1P_2P_3P_4\ldots P_{n-1}P_n$ sokszög területe? Mit tapasztalsz ha megrajzolod a sokszöget?
2*a**) Ha 8×8-as négyzet helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látja Mikkamakka?
(*A fákat és Mikkamakkát is tekintsük pontszerűeknek.*)

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

2*a*) Összesen hány fát számol meg Mikkamakka?

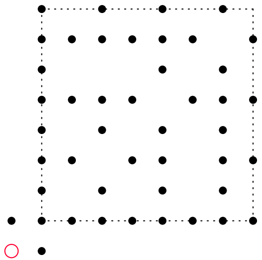
Mo1.:

0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1

1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1

2*a*) Összesen hány fát számol meg Mikkamakka?

Mo1.: A megjelölt fákat látjuk. Az $(1;1),(1;8),(8;8),(8;1)$ négyzetben:

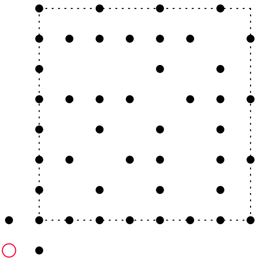


0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1

1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1

2*a*) Összesen hány fát számol meg Mikkamakka?

Mo1.: A megjelölt fákat látjuk. Az $(1;1),(1;8),(8;8),(8;1)$ négyzetben:
Soronként: $8\cdot\frac{1}{1}+8\cdot\frac{1}{2}+\left\lceil 8\cdot\frac{2}{3}\right\rceil+8\cdot\frac{2}{4}+\left\lceil 8\cdot\frac{4}{5}\right\rceil+\left\lceil 8\cdot\frac{2}{6}\right\rceil+\left\lceil 8\cdot\frac{6}{7}\right\rceil+8\cdot\frac{4}{8}=$
$=8+4+6+4+7+3+7+4=43$ fa van $\Rightarrow$ $\boxed{45}$ fát látunk.

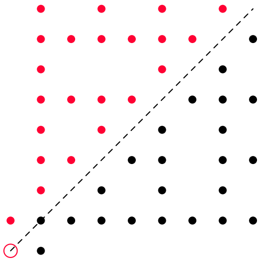


0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1

1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1

2*a*) Összesen hány fát számol meg Mikkamakka?

Mo2.: A megjelölt fákat látjuk.



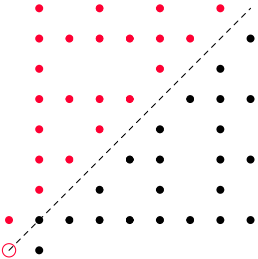
0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1

1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1

2*a*) Összesen hány fát számol meg Mikkamakka?

Mo2.: A megjelölt fákat látjuk. A főátló felett számolva soronként:

sor	1	2	3	4	5	6	7	8
fa db.száma	1	1	2	2	4	2	6	4



0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1

1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1

2a) Összesen hány fát számol meg Mikkamakka?

Mo2.: A megjelölt fákat látjuk. A főátló felett számolva soronként:

sor	1	2	3	4	5	6	7	8
fa db.száma	1	1	2	2	4	2	6	4

Válasz: $2 \cdot (1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 2 + 6 + 4) + 1 = 2 \cdot 22 + 1 = \boxed{45}$ fát számol meg Mikkamakka.

0 1 1 2 1 3 2 3 1 4 3 5 2 5 3 4 1

1 5 4 7 3 8 5 7 2 7 5 8 3 7 4 5 1

Az iménti táblázat...

sor	1	2	3	4	5	6	7	8
fa db.száma	1	1	2	2	4	2	6	4

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Az iménti táblázat...

sor	1	2	3	4	5	6	7	8
fa db.száma	1	1	2	2	4	2	6	4

...ugyanaz, mint a korábbi.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$
n darabszáma	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	$\cdots$

$\Rightarrow$ A szalagon koordináták vannak???

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

Mo.: A szalagon pontok $(x; y)$ koordinátái vannak???

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

Mo.: A szalagon pontok $(x; y)$ koordinátái vannak???
"Nyújtsuk tovább" addig, amíg az utolsó 8-as meg nem jelenik az alsón.

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

Mo.: A szalagon pontok $(x; y)$ koordinátái vannak???
"Nyújtsuk tovább" addig, amíg az utolsó 8-as meg nem jelenik az alsón.
Dobjuk el a nem kellő pontokat $(y > 8)$. Kapjuk:

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

Mo.: A szalagon pontok $(x; y)$ koordinátái vannak???
"Nyújtsuk tovább" addig, amíg az utolsó 8-as meg nem jelenik az alsón.
Dobjuk el a nem kellő pontokat $(y > 8)$. Kapjuk:
$(0; 1), (1; 8), (1; 7), (1; 6), (1; 5), (1; 4), (2; 7), (1; 3), (3; 8), (2; 5), ..., (7; 8), (1; 1)$

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

Mo.: A szalagon pontok $(x; y)$ koordinátái vannak???
"Nyújtsuk tovább" addig, amíg az utolsó 8-as meg nem jelenik az alsón.
Dobjuk el a nem kellő pontokat $(y > 8)$. Kapjuk:
$(0;1),(1;8),(1;7),(1;6),(1;5),(1;4),(2;7),(1;3),(3;8),(2;5),...,(7;8),(1;1)$
Ez épp a főátló fölötti pontok helyes sorrendje
(a többi pont "ugyanígy" megy fordított sorrendben. $(8;7),...,(1;0)$)
A sorrend: meredekségek sorrendje $\Rightarrow$ a szalagon meredekségek, azaz

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

Mo.: A szalagon pontok $(x; y)$ koordinátái vannak???
"Nyújtsuk tovább" addig, amíg az utolsó 8-as meg nem jelenik az alsón.
Dobjuk el a nem kellő pontokat $(y > 8)$. Kapjuk:
$(0; 1), (1; 8), (1; 7), (1; 6), (1; 5), (1; 4), (2; 7), (1; 3), (3; 8), (2; 5), ..., (7; 8), (1; 1)$
Ez épp a főátló fölötti pontok helyes sorrendje
(a többi pont "ugyanígy" megy fordított sorrendben. $(8; 7), ..., (1; 0)$)
A sorrend: meredekségek sorrendje $\Rightarrow$ a szalagon meredekségek, azaz **törtek vannak**

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

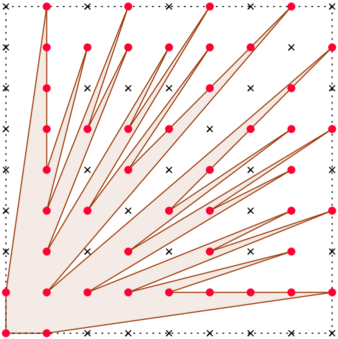
2*b*) Írjuk fel a megszámolt fák koordinátáit abban a sorrendben, amilyen sorrendben Mikkamakka megszámolja őket.

Mo.: A szalagon pontok $(x;y)$ koordinátái vannak???
"Nyújtsuk tovább" addig, amíg az utolsó 8-as meg nem jelenik az alsón.
Dobjuk el a nem kellő pontokat $(y>8)$. Kapjuk:
$(0;1),(1;8),(1;7),(1;6),(1;5),(1;4),(2;7),(1;3),(3;8),(2;5),...,(7;8),(1;1)$
Ez épp a főátló fölötti pontok helyes sorrendje
(a többi pont "ugyanígy" megy fordított sorrendben. $(8;7),...,(1;0)$)
A sorrend: meredekségek sorrendje $\Rightarrow$ a szalagon meredekségek, azaz **törtek vannak növekvő sorrendben.**

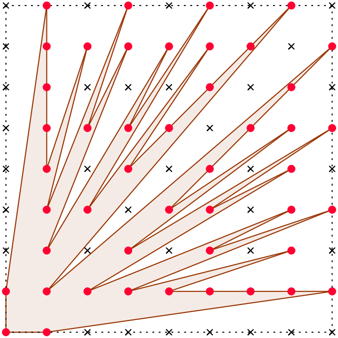
0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

2*c*) Jelöljük a $(0;0)$ pontot O-val; míg a látott fákat (a megpillantásuk sorrendjében) $P_1; P_2; \dots; P_n$-nel. Mekkora az $OP_1P_2P_3P_4\dots P_{n-1}P_n$ sokszög területe? Mit tapasztalsz ha megrajzolod a sokszöget?

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

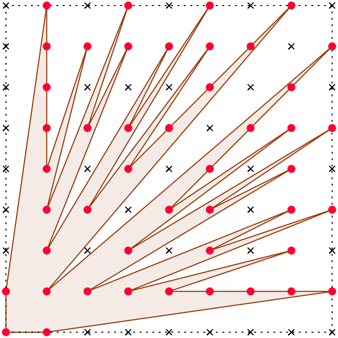


0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1



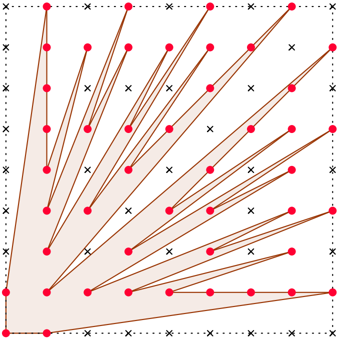
Mo.: Az ábra "csillagszerű". Az origóból induló átlókkal triangulálható. $\Rightarrow$

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1



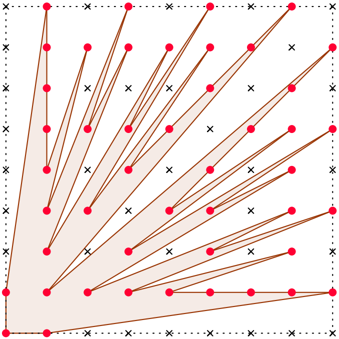
Mo.: Az ábra "csillagszerű". Az origóból induló átlókkal triangulálható. $\Rightarrow$ Az $OP_1P_2; \ldots; OP_kP_{k+1}; \ldots; OP_{n-1}P_n$ háromszögek üres rácsháromszögek.

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1



Mo.: Az ábra "csillagszerű". Az origóból induló átlókkal triangulálható. $\Rightarrow$
Az $OP_1P_2; ...; OP_kP_{k+1}; ...; OP_{n-1}P_n$ háromszögek üres rácsháromszögek.
A terület: $\boxed{22}$

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$



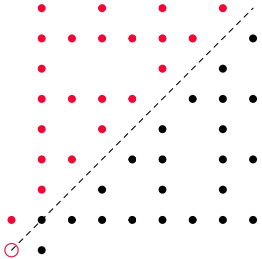
Mo.: Az ábra "csillagszerű". Az origóból induló átlókkal triangulálható. $\Rightarrow$
Az $OP_1P_2; \ldots; OP_kP_{k+1}; \ldots; OP_{n-1}P_n$ háromszögek üres rácsháromszögek.
A terület: $\boxed{22} = \frac{46-2}{2} = 0,3438 \cdot 64$

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

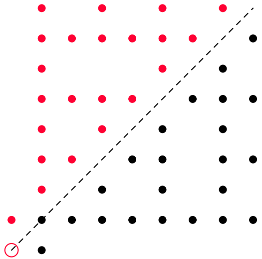
2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?



Mo1.:

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

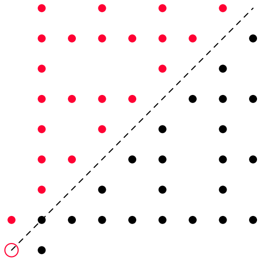
2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?



Mo1.: Jelölje $\varphi(n)$ az $1; 2; \ldots; n$ számok között az n-nel relatív prímek számát!

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?

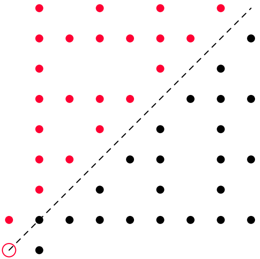


Mo1.: Jelölje $\varphi(n)$ az $1; 2; \ldots; n$ számok között az n-nel relatív prímek számát!

sor	1	2	3	4	$\cdots$	n
fa db.szám	$1 = \varphi(1)$	$1 = \varphi(2)$	$2 = \varphi(3)$	$2 = \varphi(4)$	$\cdots$	$\varphi(n)$

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

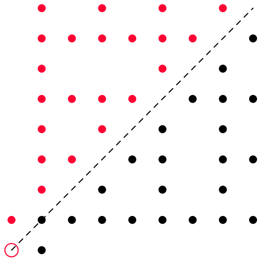
2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?



Összesen $1 + 2 \cdot (\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)) = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} \varphi(i)$ fát látunk.

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?

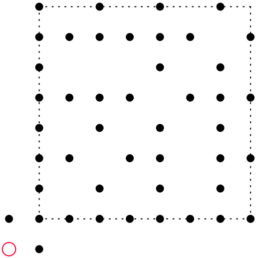


Összesen $1 + 2 \cdot (\varphi(1) + \varphi(2) + ... + \varphi(n)) = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} \varphi(i)$ fát látunk.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + 2\sum_{i=1}^{n} \varphi(i)}{(n+1)^2} = ?$$

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

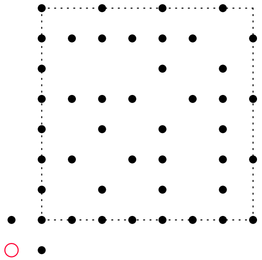
2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?



Mo2.: A fák darabszáma "körülbelül"

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?



Mo2.: A fák darabszáma "körülbelül"

$$2 + n \cdot \frac{\varphi(1)}{1} + n \cdot \frac{\varphi(2)}{2} + n \cdot \frac{\varphi(3)}{3} + \ldots + n \cdot \frac{\varphi(n)}{n} = 2 + n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(i)}{i}$$

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?

Mo.: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)}{(n+1)^2} \approx \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(i)}{i}}{(n+1)^2} = ???$

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?

Mo.: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2\sum_{i=1}^{n}\varphi(i)}{(n+1)^2} \approx \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(i)}{i}}{(n+1)^2} = ???$

(Lásd: a hosszabb diasorozaton)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi(i)}{i}}{(n+1)^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \boxed{\frac{6}{\pi^2}}$$

Azaz körülbelül a fák $60,8\%$-t látjuk. $+$

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?

Mo.: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 2\sum_{i=1}^{n} \varphi(i)}{(n+1)^2} \approx \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2 + n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(i)}{i}}{(n+1)^2} = ???$

(Lásd: a hosszabb diasorozaton)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(i)}{i}}{(n+1)^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \boxed{\frac{6}{\pi^2}}$$

Azaz körülbelül a fák $60,8\%$-t látjuk. + (Pick-tételével!)

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2*) Ha 8×8 helyett $n \times n$-es négyzet alakú az erdő (és n nagy), akkor a fák hanyadrészét látjuk?

Mo.: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 2\sum_{i=1}^{n} \varphi(i)}{(n+1)^2} \approx \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2 + n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(i)}{i}}{(n+1)^2} = ???$

(Lásd: a hosszabb diasorozaton)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(i)}{i}}{(n+1)^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \boxed{\frac{6}{\pi^2}}$$

Azaz körülbelül a fák $60,8\%$-t látjuk. + (Pick-tételével!)
A megfelelő csillagsokszög területe az erdő területének körülbelül

$$\boxed{\frac{3}{\pi^2} \approx 0,304 - \text{ed része.}}$$

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2**) Ha nem négyzet alakú az erdő, akkor a fák hanyadrészét látjuk?

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2^{**}) Ha nem négyzet alakú az erdő, akkor a fák hanyadrészét látjuk?
2^{***}) Ha nem az origóban van a nézőpontunk, akkor a fák hanyadrészét látjuk? (Az erdő továbbra is "nagy".)

Mo. 2^{**})

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2**) Ha nem négyzet alakú az erdő, akkor a fák hanyadrészét látjuk?
2***) Ha nem az origóban van a nézőpontunk, akkor a fák hanyadrészét látjuk? (Az erdő továbbra is "nagy".)

Mo. 2**) Ha az erdő "két dimenziós" (nem fraktálszerű), akkor a válasz egyszerű, és meglepő.
Mo. 2***)

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2**) Ha nem négyzet alakú az erdő, akkor a fák hanyadrészét látjuk?
2***) Ha nem az origóban van a nézőpontunk, akkor a fák hanyadrészét látjuk? (Az erdő továbbra is "nagy".)

Mo. 2**) Ha az erdő "két dimenziós" (nem fraktálszerű), akkor a válasz egyszerű, és meglepő.
Mo. 2***) Az attól függ, hogy a nézőpontba mutató helyvektornak milyen a meredeksége.

Számelméleti függvények: az Euler-féle $\varphi(n)$

2**) Ha nem négyzet alakú az erdő, akkor a fák hanyadrészét látjuk?
2***) Ha nem az origóban van a nézőpontunk, akkor a fák hanyadrészét látjuk? (Az erdő továbbra is "nagy".)

Mo. 2**) Ha az erdő "két dimenziós" (nem fraktálszerű), akkor a válasz egyszerű, és meglepő.
Mo. 2***) Az attól függ, hogy a nézőpontba mutató helyvektornak milyen a meredeksége.

Pl. Ha $O = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{\text{látott fák}}{\text{összes fa}} \to \frac{8}{\pi^2} \approx 0,8106$

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

Az $\{F_n\}$ **Farey-sorozat** elemei azok a halmazok, amelyek az összes

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

Az $\{F_n\}$ **Farey-sorozat** elemei azok a halmazok, amelyek az összes

- 0 és 1 közötti

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

Az $\{F_n\}$ **Farey-sorozat** elemei azok a halmazok, amelyek az összes

- 0 és 1 közötti
- legfeljebb n nevezőjű

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

Az $\{F_n\}$ **Farey-sorozat** elemei azok a halmazok, amelyek az összes

- 0 és 1 közötti
- legfeljebb n nevezőjű
- egyszerűsíthetelen törtet

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

Az $\{F_n\}$ **Farey-sorozat** elemei azok a halmazok, amelyek az összes

- 0 és 1 közötti
- legfeljebb n nevezőjű
- egyszerűsíthetelen törtet
- növekvő sorrendben tartalmazzák.

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Az $\{F_n\}$ **Farey-sorozat** elemei azok a halmazok, amelyek az összes

- 0 és 1 közötti
- legfeljebb n nevezőjű
- egyszerűsíthetelen törtet
- növekvő sorrendben tartalmazzák.

$F_1 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{1}\right\}$; $F_2 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1}\right\}$;

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

Az $\{F_n\}$ **Farey-sorozat** elemei azok a halmazok, amelyek az összes

- 0 és 1 közötti
- legfeljebb n nevezőjű
- egyszerűsíthetelen törtet
- növekvő sorrendben tartalmazzák.

$F_1 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{1}\right\}$; $F_2 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1}\right\}$; $F_5 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1}\right\}$

Az F_n halmaz elemeit n-dik, vagy n-edrendű Farey-törteknek hívjuk.

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

Feladat

3*a*) Hány új elem van F_n-ben F_{n-1}-hoz képest?

3*b*) Vizsgáljuk meg F_5-ben a szomszédos Farey-törtek különbségeit! Mit tapasztalunk?

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

Feladat

3*a*) Hány új elem van F_n-ben F_{n-1}-hoz képest?

3*b*) Vizsgáljuk meg F_5-ben a szomszédos Farey-törtek különbségeit! Mit tapasztalunk?

Mo.: 3*a*) $|F_n| - |F_{n-1}| = \varphi(n)$

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Feladat

3a) Hány új elem van F_n-ben F_{n-1}-hoz képest?

3b) Vizsgáljuk meg F_5-ben a szomszédos Farey-törtek különbségeit! Mit tapasztalunk?

Mo.: 3a) $|F_n| - |F_{n-1}| = \varphi(n)$
Mo.: 3b) $\frac{1}{5} - \frac{0}{1} = \frac{1}{1{\cdot}5}; \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5{\cdot}4}; \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4{\cdot}3}; \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3{\cdot}4}; \ldots; \frac{1}{1} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5{\cdot}1}$
Általában, ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ szomszédos Farey-törtek:

0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1

Feladat

3a) Hány új elem van F_n-ben F_{n-1}-hoz képest?

3b) Vizsgáljuk meg F_5-ben a szomszédos Farey-törtek különbségeit! Mit tapasztalunk?

Mo.: 3a) $|F_n| - |F_{n-1}| = \varphi(n)$

Mo.: 3b) $\frac{1}{5} - \frac{0}{1} = \frac{1}{1 \cdot 5}; \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \cdot 4}; \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \cdot 3}; \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 4}; \ldots; \frac{1}{1} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5 \cdot 1}$

Általában, ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ szomszédos Farey-törtek:

$$\boxed{\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}}$$

Mi köze a szalagoknak a Farey-törtekhez???

A mediáns

Feladat

4) Adjunk meg minél gyorsabban olyan törtet, amely $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ közé esik, ha az $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ törtek:

a) $\frac{5}{7}; \frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{18}; \frac{3}{11}$ c) $\frac{4}{7}; \frac{5}{9}$ d) $\frac{8}{13}; \frac{13}{21}$

A mediáns

Feladat

4) Adjunk meg minél gyorsabban olyan törtet, amely $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ közé esik, ha az $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ törtek:

a) $\frac{5}{7}; \frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{18}; \frac{3}{11}$ c) $\frac{4}{7}; \frac{5}{9}$ d) $\frac{8}{13}; \frac{13}{21}$

Adjuk meg a törtet úgy, hogy a nevezője a lehető legkisebb legyen!

A mediáns

Feladat

4) Adjunk meg minél gyorsabban olyan törtet, amely $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ közé esik, ha az $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ törtek:

a) $\frac{5}{7}; \frac{3}{4}$ *b*) $\frac{5}{18}; \frac{3}{11}$ *c*) $\frac{4}{7}; \frac{5}{9}$ *d*) $\frac{8}{13}; \frac{13}{21}$

Adjuk meg a törtet úgy, hogy a nevezője a lehető legkisebb legyen!

Mo.: 4)A köztes (optimális) törtek:

a) $\frac{8}{11}$; *b*) $\frac{8}{29}$; *c*) $\frac{9}{16}$; *d*) $\frac{21}{34}$ $\Rightarrow$

Az $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ számok esetén $\frac{a}{b}$, illetve $\frac{c}{d}$ törtek **mediánsa** (jele $\oplus$)

A mediáns

Feladat

4) Adjunk meg minél gyorsabban olyan törtet, amely $\frac{a}{b}$ és $\frac{c}{d}$ közé esik, ha az $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ törtek:

a) $\frac{5}{7}; \frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{18}; \frac{3}{11}$ c) $\frac{4}{7}; \frac{5}{9}$ d) $\frac{8}{13}; \frac{13}{21}$

Adjuk meg a törtet úgy, hogy a nevezője a lehető legkisebb legyen!

Mo.: 4)A köztes (optimális) törtek:

a) $\frac{8}{11}$; b) $\frac{8}{29}$; c) $\frac{9}{16}$; d) $\frac{21}{34}$ $\Rightarrow$

Az $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ számok esetén $\frac{a}{b}$, illetve $\frac{c}{d}$ törtek **mediánsa** (jele $\oplus$)

$$\boxed{\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}}$$

A mediáns tulajdonságai

- Ha $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \Rightarrow$

A mediáns tulajdonságai

- Ha $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

A mediáns tulajdonságai

- Ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$
- Ha $bc - ad = 1 \Rightarrow$

A mediáns tulajdonságai

- Ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$
- Ha $bc - ad = 1 \Rightarrow b(a+c) - a(b+d) = 1$ és $c(b+d) - d(a+c) = 1$

Következmények: a mediáns tulajdonságai $+$

A mediáns tulajdonságai

- Ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$
- Ha $bc - ad = 1 \Rightarrow b(a+c) - a(b+d) = 1$ és $c(b+d) - d(a+c) = 1$

Következmények: a mediáns tulajdonságai + végtelen leszállás $\Rightarrow$
a két korábbi szalag (együtt)

A mediáns tulajdonságai

- Ha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$
- Ha $bc - ad = 1 \Rightarrow b(a+c) - a(b+d) = 1$ és $c(b+d) - d(a+c) = 1$

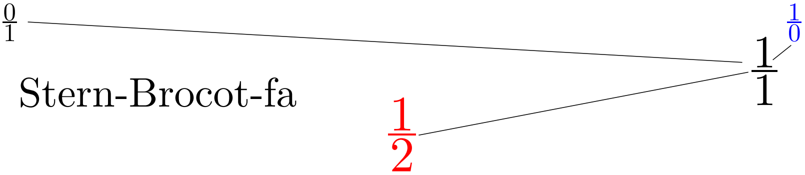
Következmények: a mediáns tulajdonságai + végtelen leszállás $\Rightarrow$
a két korábbi szalag (együtt)
pontosan a 0 és 1 közötti összes egyszerűsíthetetlen törtet tartalmazza.

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

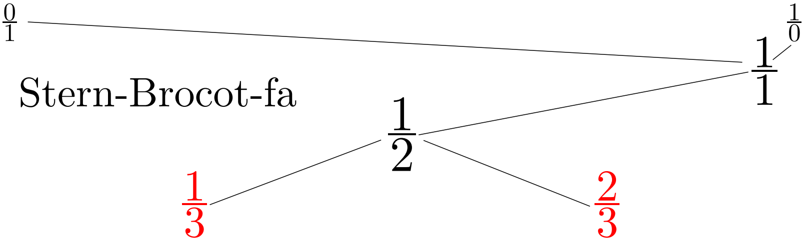
Stern-Brocot-fa

$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$

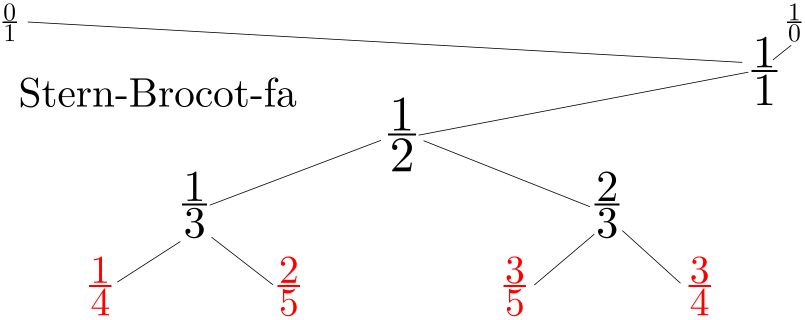
Stern-Brocot-fa



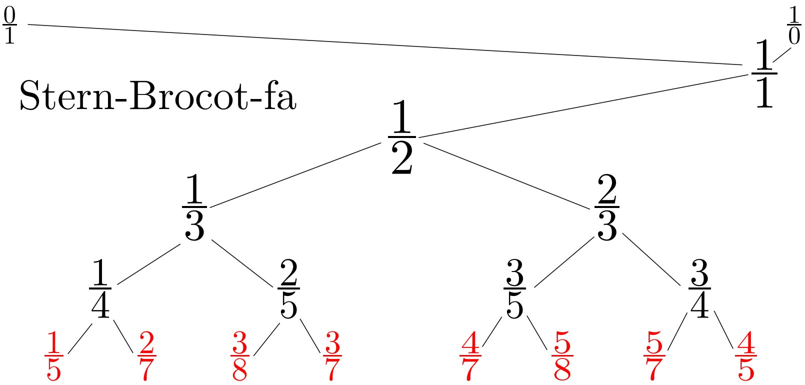
$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$



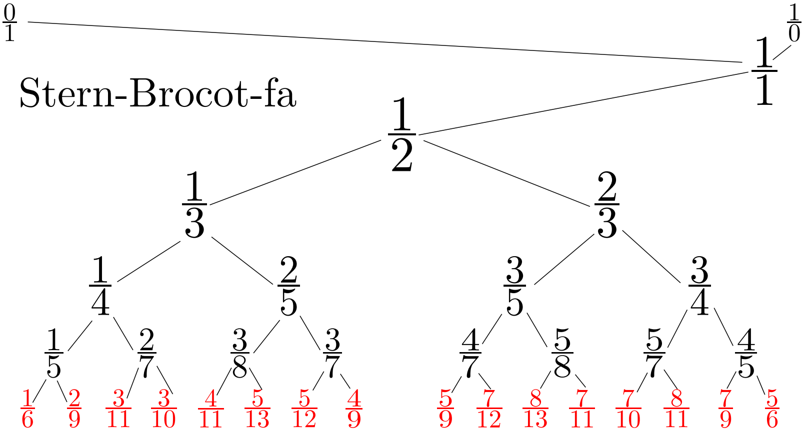
$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$



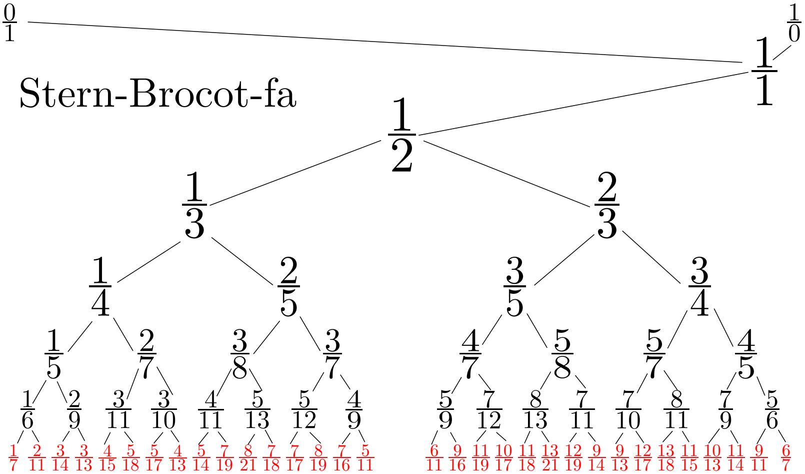
$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$



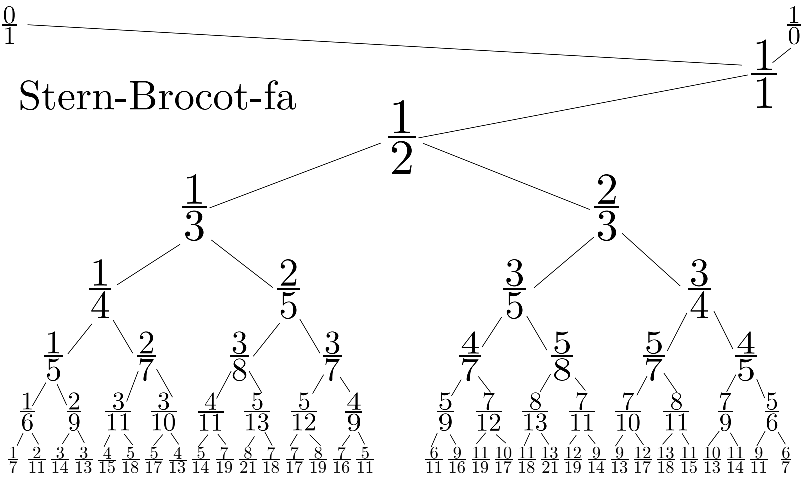
$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$



$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$



$$\frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$$



Négyzetekre bontott téglalapok

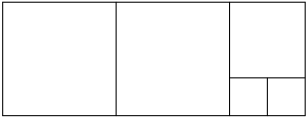
Feladat

5*a*,*b*) Két téglalapot az ábrákon látható módon négyzetekre osztottunk.
Valamennyi négyzet oldalhossza egész szám.
Mekkorák az eredeti téglalapok oldalhosszai, ha azok a lehető legkisebbek.

Négyzetekre bontott téglalapok

Feladat

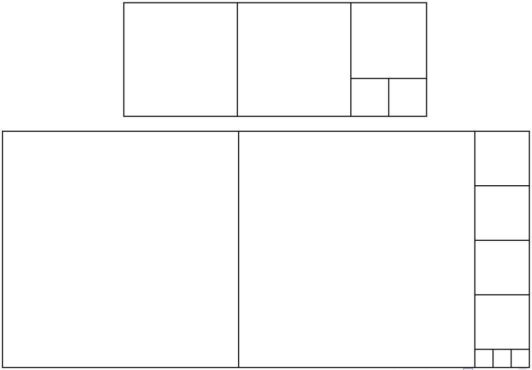
5*a*,*b*) Két téglalapot az ábrákon látható módon négyzetekre osztottunk. Valamennyi négyzet oldalhossza egész szám.
Mekkorák az eredeti téglalapok oldalhosszai, ha azok a lehető legkisebbek.



Négyzetekre bontott téglalapok

Feladat

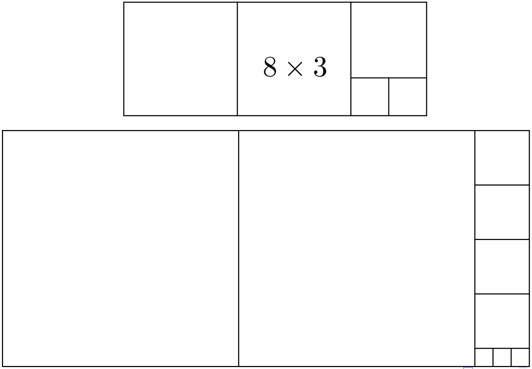
5a,b) Két téglalapot az ábrákon látható módon négyzetekre osztottunk.
Valamennyi négyzet oldalhossza egész szám.
Mekkorák az eredeti téglalapok oldalhosszai, ha azok a lehető legkisebbek.



Négyzetekre bontott téglalapok

Feladat

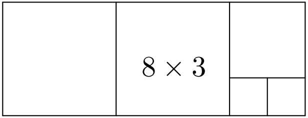
5a,b) Két téglalapot az ábrákon látható módon négyzetekre osztottunk. Valamennyi négyzet oldalhossza egész szám.
Mekkorák az eredeti téglalapok oldalhosszai, ha azok a lehető legkisebbek.

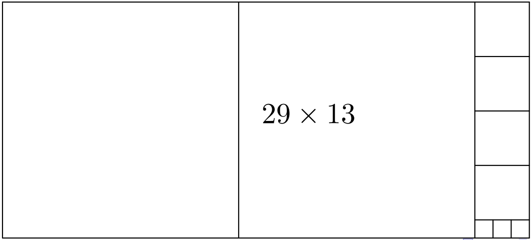


Négyzetekre bontott téglalapok

Feladat

5*a,b*) Két téglalapot az ábrákon látható módon négyzetekre osztottunk.
Valamennyi négyzet oldalhossza egész szám.
Mekkorák az eredeti téglalapok oldalhosszai, ha azok a lehető legkisebbek.





(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok

Feladat

5*c*) Egy 358×97-es méretű téglalapot a fenti (**euklideszi**) módon négyzetekre osztunk.
(*Mindig a még le nem fedett legbaloldalabbi; és az ilyenek közül a legfelső "részét" fedjük le a lehető legnagyobb olyan négyzettel, amelynek oldalai párhuzamosak az eredeti téglalapéval.*)
Hány darab illetve hányféle négyzetet kapunk a felosztás során?

(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok

Feladat

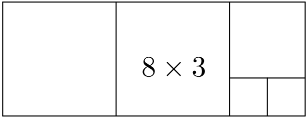
5c) Egy 358×97-es méretű téglalapot a fenti (**euklideszi**) módon négyzetekre osztunk.
(*Mindig a még le nem fedett legbaloldalabbi; és az ilyenek közül a legfelső "részét" fedjük le a lehető legnagyobb olyan négyzettel, amelynek oldalai párhuzamosak az eredeti téglalapéval.*)
Hány darab illetve hányféle négyzetet kapunk a felosztás során?

A 358×97-es méret túl nagy $\Rightarrow$ Később visszatérünk rá.

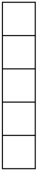
(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok

Feladat

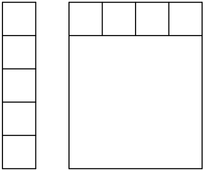
5*d*) Az első ábrán 5 kisebb négyzet látható. Mekkora téglalap esetén lesz a megrajzolt ábrán szintén 5 kisebb négyzetet? Hány megoldás van?



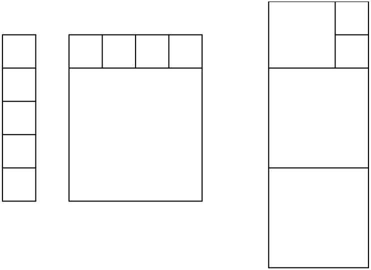
(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok



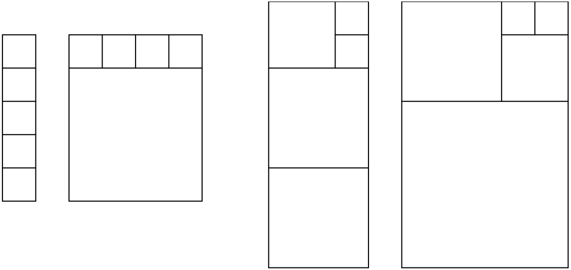
(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok



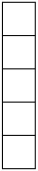
(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok

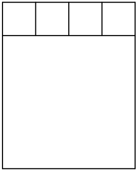


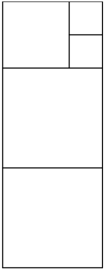
(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok

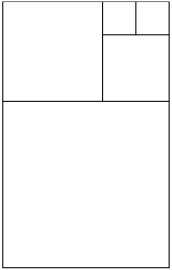


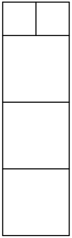
(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok



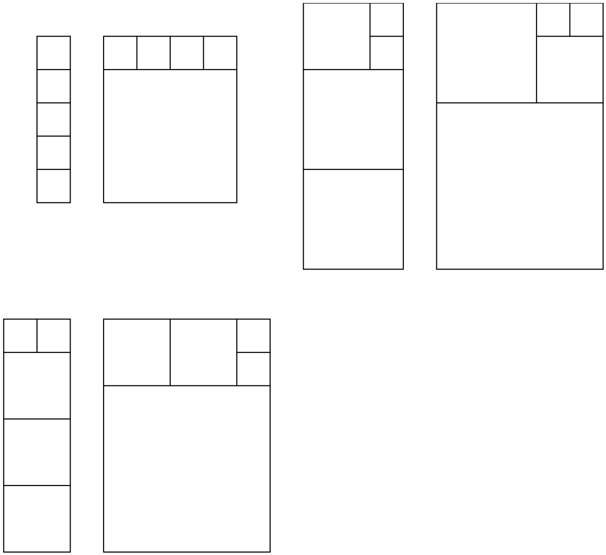




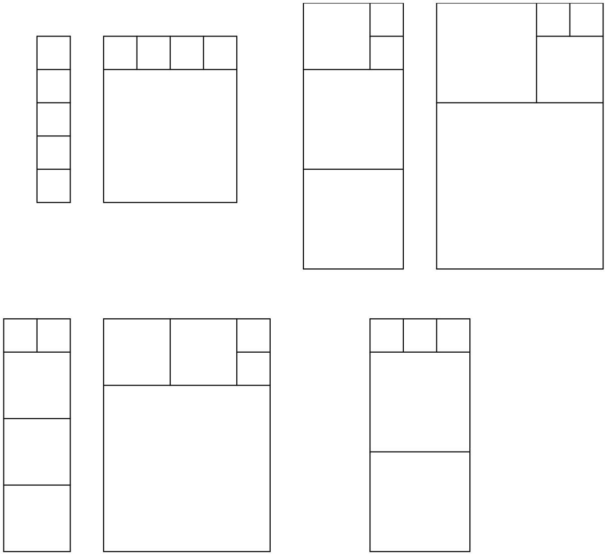




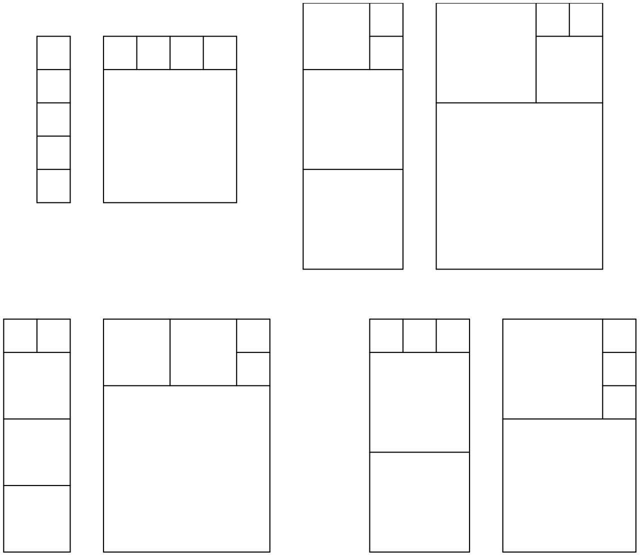
(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok



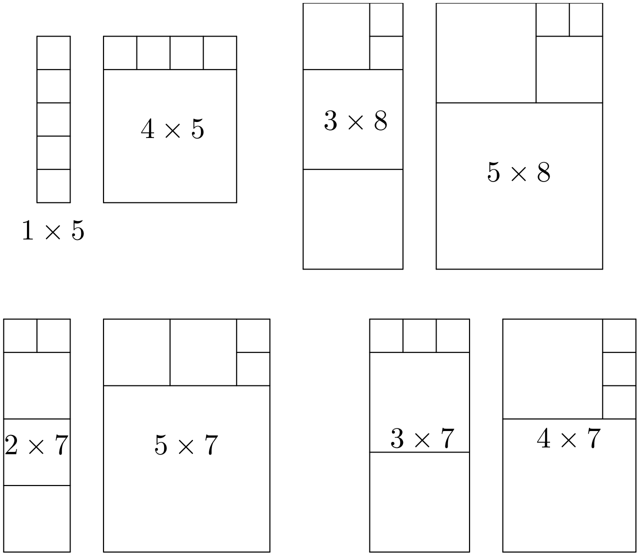
(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok



(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok



(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok



(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok

A megoldások

$(1 \times 5); (2 \times 7); (3 \times 8); (3 \times 7); (4 \times 7); (5 \times 8); (5 \times 7); (4 \times 5)$

A megoldások száma: 8 (n darab kisebb négyzet esetén

(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok

A megoldások
$(1 \times 5); (2 \times 7); (3 \times 8); (3 \times 7); (4 \times 7); (5 \times 8); (5 \times 7); (4 \times 5)$
A megoldások száma: 8 (n darab kisebb négyzet esetén 2^{n-2})

(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok

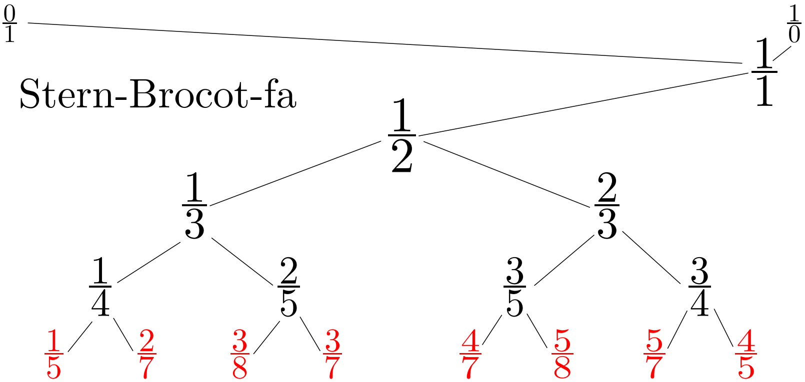
A megoldások
$(1 \times 5); (2 \times 7); (3 \times 8); (3 \times 7); (4 \times 7); (5 \times 8); (5 \times 7); (4 \times 5)$
A megoldások száma: 8 (n darab kisebb négyzet esetén 2^{n-2})

A megoldások "megtalálhatóak"...

(Euklideszi) Négyzetekre bontott téglalapok

A megoldások
$(1 \times 5); (2 \times 7); (3 \times 8); (3 \times 7); (4 \times 7); (5 \times 8); (5 \times 7); (4 \times 5)$
A megoldások száma: 8 (n darab kisebb négyzet esetén 2^{n-2})

A megoldások "megtalálhatóak"...



Lánctörtek és az euklideszi-algoritmus

Feladat

6*a*,*b*) Add meg a $2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}$ emeletes tört közönséges alakját!

Lánctörtek és az euklideszi-algoritmus

Feladat

6*a*,*b*) Add meg a $2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}$ emeletes tört közönséges alakját!
Add meg 29 és 13 legnagyobb közös osztóját **euklideszi-algoritmussal!**

Mo. ***a)***:

Lánctörtek és az euklideszi-algoritmus

Feladat

6*a*,*b*) Add meg a $2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}$ emeletes tört közönséges alakját!
Add meg 29 és 13 legnagyobb közös osztóját **euklideszi-algoritmussal!**

Mo. *a)*: $2+\dfrac{1}{4+\frac{1}{3}}=2+\dfrac{1}{\frac{13}{3}}=2+\dfrac{3}{13}=\dfrac{29}{13}$

Mo. *b)*:

Lánctörtek és az euklideszi-algoritmus

Feladat

6*a*,*b*) Add meg a $2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}$ emeletes tört közönséges alakját!
Add meg 29 és 13 legnagyobb közös osztóját **euklideszi-algoritmussal!**

Mo. ***a)***: $2+\dfrac{1}{4+\frac{1}{3}}=2+\dfrac{1}{\frac{13}{3}}=2+\dfrac{3}{13}=\dfrac{29}{13}$

Mo. ***b)***:

$$\begin{array}{ccccc} 29 & \div & 13 & = & 2 \\ 3 & & & & \end{array}$$

Lánctörtek és az euklideszi-algoritmus

Feladat

6*a*,*b*) Add meg a $2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}$ emeletes tört közönséges alakját!
Add meg 29 és 13 legnagyobb közös osztóját **euklideszi-algoritmussal!**

Mo. *a)*: $2+\dfrac{1}{4+\frac{1}{3}}=2+\dfrac{1}{\frac{13}{3}}=2+\dfrac{3}{13}=\dfrac{29}{13}$

Mo. *b)*:

$$\begin{array}{ccccc} 29 & \div & 13 & = & 2 \\ 3 & & \Downarrow & & \\ \hline 13 & \div & 3 & = & 4 \\ 1 & & & & \end{array}$$

Lánctörtek és az euklideszi-algoritmus

Feladat

6*a*,*b*) Add meg a $2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}$ emeletes tört közönséges alakját!
Add meg 29 és 13 legnagyobb közös osztóját **euklideszi-algoritmussal!**

Mo. *a)*: $2+\dfrac{1}{4+\frac{1}{3}}=2+\dfrac{1}{\frac{13}{3}}=2+\dfrac{3}{13}=\dfrac{29}{13}$

Mo. *b)*:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 29 & \div & 13 & = & 2 \\ 3 & & \Downarrow & & \\ \hline 13 & \div & 3 & = & 4 \\ 1 & & \Downarrow & & \\ \hline 3 & \div & 1 & = & 3 \\ 0 & & & & \end{array}\right. \Rightarrow$$

Lánctörtek és az euklideszi-algoritmus

Feladat

6*a*,*b*) Add meg a $2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}$ emeletes tört közönséges alakját!
Add meg 29 és 13 legnagyobb közös osztóját **euklideszi-algoritmussal!**

Mo. *a)*: $2+\dfrac{1}{4+\frac{1}{3}}=2+\dfrac{1}{\frac{13}{3}}=2+\dfrac{3}{13}=\dfrac{29}{13}$

Mo. *b)*:

$$\begin{array}{ccccc} 29 & \div & 13 & = & 2 \\ 3 & & \Downarrow & & \\ \hline 13 & \div & 3 & = & 4 \\ 1 & & \Downarrow & & \\ \hline 3 & \div & 1 & = & 3 \\ 0 & & & & \end{array} \Rightarrow \text{lnko}(29;13)=1$$

Lánctörtek és az euklideszi-algoritmus

Feladat

6*a*,*b*) Add meg a $2+\frac{1}{4+\frac{1}{3}}$ emeletes tört közönséges alakját!
Add meg 29 és 13 legnagyobb közös osztóját **euklideszi-algoritmussal!**

Mo. ***a)***: $2+\dfrac{1}{4+\frac{1}{3}}=2+\dfrac{1}{\frac{13}{3}}=2+\dfrac{3}{13}=\dfrac{29}{13}$

Mo. ***b)***:

$$\begin{array}{cccccc} 29 & \div & 13 & = & 2 \\ 3 & & \Downarrow & & \\ \hline 13 & \div & 3 & = & 4 \\ 1 & & \Downarrow & & \\ \hline 3 & \div & 1 & = & 3 \\ 0 & & & & \end{array} \Rightarrow \text{lnko}(29;13)=1$$

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa

Következmény: A $\dfrac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$ lánctört alakú tört

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa

Következmény: A $\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$ lánctört alakú tört

a Stern-Brocot fa $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$-edik szintjén van, és

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa

Következmény: A $\dfrac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$ lánctört alakú tört a Stern-Brocot fa $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$-edik szintjén van, és az $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n - 1$ számlálók megadják:

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa

Következmény: A $\dfrac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$ lánctört alakú tört

a Stern-Brocot fa $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$-edik szintjén van, és

az $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n - 1$ számlálók megadják:

az $\dfrac{1}{1}$ szögpontból induló $\dfrac{p}{q}$-ba vezető S-B fabeli alternáló út szakaszainak

hosszait.

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa

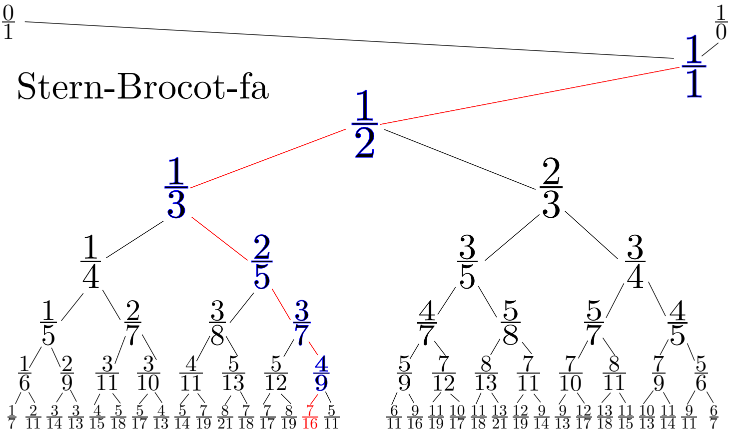
Következmény: A $\dfrac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$ lánctört alakú tört

a Stern-Brocot fa $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$-edik szintjén van, és

az $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n - 1$ számlálók megadják:

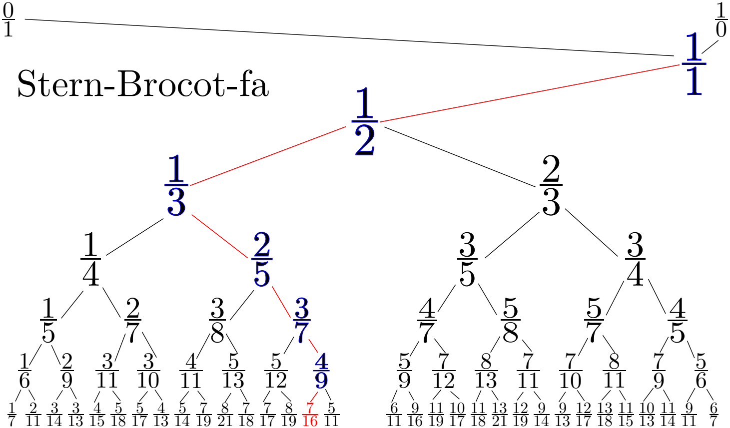
az $\dfrac{1}{1}$ szögpontból induló $\dfrac{p}{q}$-ba vezető S-B fabeli alternáló út szakaszainak hosszait. (*Ha* $a_1 > 0$, *akkor jobbra indulok* $\dfrac{1}{1}$*-ből, különben balra.*)

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa



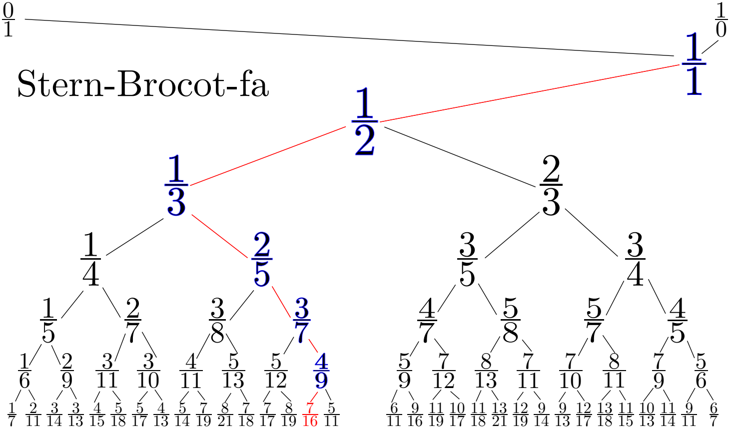
Pl.: $\dfrac{7}{16} =$

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa



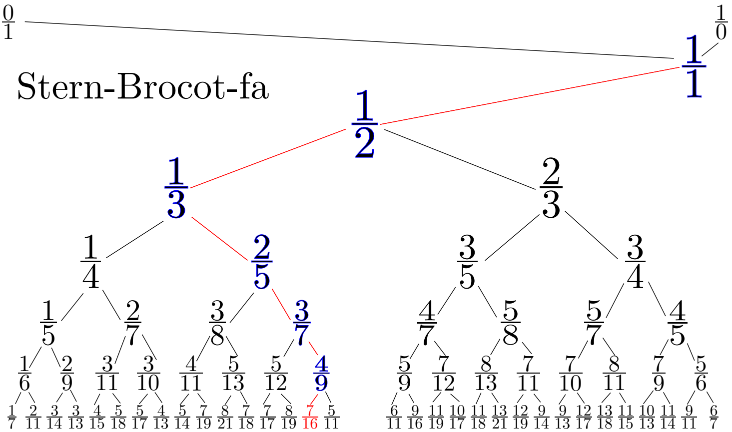
Pl.: $\frac{7}{16} = 0 + \frac{1}{\qquad}$

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa



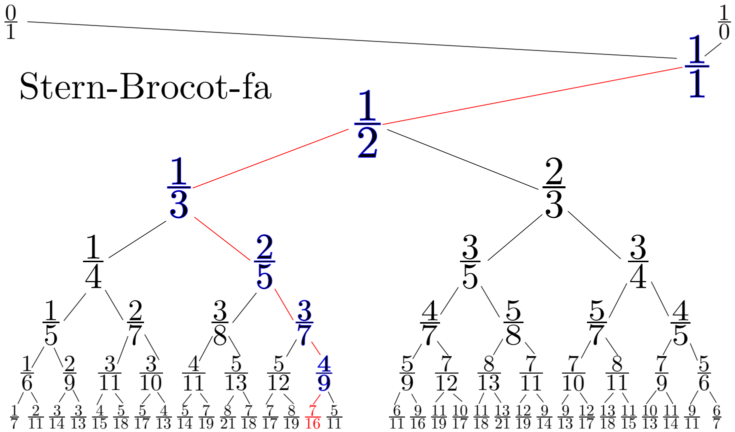
Pl.: $\dfrac{7}{16} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{}}$

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa



Pl.: $\dfrac{7}{16} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{}}}$

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa



Pl.: $\dfrac{7}{16} = 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3+\frac{1}{2}}}$

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa

Feladat

5*c*) Egy 358×97-es méretű téglalapot euklideszi módon négyzetekre osztunk. Hány darab illetve hányféle négyzetet kapunk a felosztás során?

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa

Feladat

5*c*) Egy 358×97-es méretű téglalapot euklideszi módon négyzetekre osztunk. Hány darab illetve hányféle négyzetet kapunk a felosztás során?

Mo.: $\frac{358}{97}$ lánctört alakja: (az euklideszi-algoritmus alapján):

$$\frac{358}{97} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Lánctörtek és a Stern-Brocot-fa

Feladat

5*c*) Egy 358×97-es méretű téglalapot euklideszi módon négyzetekre osztunk. Hány darab illetve hányféle négyzetet kapunk a felosztás során?

Mo.: $\dfrac{358}{97}$ lánctört alakja: (az euklideszi-algoritmus alapján):

$$\frac{358}{97} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Összesen $3 + 1 + 2 + 4 + 3 + 2 = \boxed{15}$ és hatféle négyzetet kapunk.

Hiperbináris partíciók

Feladat

Adott az $1; 2; 4; 8; ...; 2^k; ...$ súlyokból két teljes készlet és egy olyan kétkarú mérleg, amelynek egyik serpenyőjébe a súlyokat kell tennünk, míg a másikba a lemérendő tárgyat.

Hiperbináris partíciók

Feladat

Adott az $1; 2; 4; 8; ...; 2^k; ...$ súlyokból két teljes készlet és egy olyan kétkarú mérleg, amelynek egyik serpenyőjébe a súlyokat kell tennünk, míg a másikba a lemérendő tárgyat.

7*a*) Hányféleképpen lehet lemérni az m tömegű tárgyat?
(a_n-nel fogom jelölni)

7*b*) Hány olyan páros tömegű tárgy van, amelyet pontosan 100-féleképpen lehet lemérni?

(*Az azonos tömegű súlyokat tekintsük azonosnak. Az* $m = 5$ *esetén:* $(4 + 1; 2 + 2 + 1)$ *két lehetséges mérés van.*).

Hiperbináris partíciók

Feladat

$7b)$ Hány olyan páros tömegű tárgy van, amelyet pontosan 100-féleképpen lehet lemérni?

Hiperbináris partíciók

Feladat

7*b*) Hány olyan páros tömegű tárgy van, amelyet pontosan 100-féleképpen lehet lemérni?

Mo.: A válasz: $\varphi(100) = 40$.

Hiperbináris partíciók

Feladat

7*b*) Hány olyan páros tömegű tárgy van, amelyet pontosan 100-féleképpen lehet lemérni?

Mo.: A válasz: $\varphi(100) = 40$.
A páratlan tömegek között pedig végtelen sok olyan van, amit pontosan 100-féleképpen mérhetünk.
Hogy miért: majd később!

Hiperbináris partíciók

Feladat

7a) Hányféleképpen lehet lemérni az m tömegű tárgyat?

Hiperbináris partíciók

Feladat

7a) Hányféleképpen lehet lemérni az m tömegű tárgyat?

Mo.: $a_1 = 1; a_2 = 2(; a_0 = 1)$

Hiperbináris partíciók

Feladat

7*a*) Hányféleképpen lehet lemérni az m tömegű tárgyat?

Mo.: $a_1 = 1; a_2 = 2(; a_0 = 1)$

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = \\ \end{cases}$$

Hiperbináris partíciók

Feladat

7a) Hányféleképpen lehet lemérni az m tömegű tárgyat?

Mo.: $a_1 = 1; a_2 = 2(; a_0 = 1)$

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k} = \end{cases}$$

Hiperbináris partíciók

Feladat

7*a*) Hányféleképpen lehet lemérni az m tömegű tárgyat?

Mo.: $a_1 = 1; a_2 = 2(; a_0 = 1)$

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k} = a_k + a_{k-1} \end{cases}$$

Hiperbináris partíciók

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k} = a_k + a_{k-1} \end{cases}$$

Hiperbináris partíciók

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k} = a_k + a_{k-1} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Hiperbináris partíciók

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k} = a_k + a_{k-1} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Hiperbináris partíciók

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k} = a_k + a_{k-1} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Hiperbináris partíciók

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k} = a_k + a_{k-1} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Hiperbináris partíciók

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k} = a_k + a_{k-1} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Hiperbináris partíciók

$$a_m = \begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{2k+1} = a_k \\ a_{2k} = a_k + a_{k-1} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

$$\boxed{1 \quad 4 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \quad 1}$$

Stern kétatomos (diatomic) sorozata

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Írjuk a_n azon elemeit, melyekre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ egy-egy sorba

Stern kétatomos (diatomic) sorozata

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Írjuk a_n azon elemeit, melyekre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ egy-egy sorba

$$1$$

Stern kétatomos (diatomic) sorozata

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Írjuk a_n azon elemeit, melyekre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ egy-egy sorba

1

1 2

Stern kétatomos (diatomic) sorozata

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Írjuk a_n azon elemeit, melyekre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ egy-egy sorba

1			
1	2		
1	3	2	3

Stern kétatomos (diatomic) sorozata

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Írjuk a_n azon elemeit, melyekre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ egy-egy sorba

1							
1	2						
1	3	2	3				
1	4	3	5	2	5	3	4

Stern kétatomos (diatomic) sorozata

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Írjuk a_n azon elemeit, melyekre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ egy-egy sorba

1							
1	2						
1	3	2	3				
1	4	3	5	2	5	3	4
1	5	4	7	3	8	5	...

Stern kétatomos (diatomic) sorozata

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Írjuk a_n azon elemeit, melyekre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ egy-egy sorba

1							
1	2						
1	3	2	3				
1	4	3	5	2	5	3	4
1	5	4	7	3	8	5	...
1	6	5	9	4	11	7	...

Az i-dik oszlop

Stern kétatomos (diatomic) sorozata

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Írjuk a_n azon elemeit, melyekre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ egy-egy sorba

1							
1	2						
1	3	2	3				
1	4	3	5	2	5	3	4
1	5	4	7	3	8	5	...
1	6	5	9	4	11	7	...

Az i-dik oszlop számtani sorozat, a sorozat differenciája:

Stern kétatomos (diatomic) sorozata

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

Írjuk a_n azon elemeit, melyekre $2^k < n \leq 2^{k+1}$ egy-egy sorba

1							
1	2						
1	3	2	3				
1	4	3	5	2	5	3	4
1	5	4	7	3	8	5	...
1	6	5	9	4	11	7	...

Az i-dik oszlop számtani sorozat, a sorozat differenciája: a_{i-2} (ha $a_{-1} = 0$)

A Calkin-Wilf sorozat

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

A $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(n \geq 1)$ a Calkin-Wilf sorozat.

A Calkin-Wilf sorozat

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

A $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(n \geq 1)$ a Calkin-Wilf sorozat. (Első pár eleme:)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_n	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{1}$

A Calkin-Wilf sorozat

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

A $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(n \geq 1)$ a Calkin-Wilf sorozat. (Első pár eleme:)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_n	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{1}$

A Calkin-Wilf sorozat

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

A $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(n \geq 1)$ a Calkin-Wilf sorozat. (Első pár eleme:)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_n	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{1}$

A Calkin-Wilf sorozat

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

A $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(n \geq 1)$ a Calkin-Wilf sorozat. (Első pár eleme:)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_n	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{1}$

b_n azon elemei, melyekre $2^k \leq n < 2^{k+1}$ éppen

A Calkin-Wilf sorozat

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

A $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(n \geq 1)$ a Calkin-Wilf sorozat. (Első pár eleme:)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_n	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{1}$

b_n azon elemei, melyekre $2^k \leq n < 2^{k+1}$ éppen a (bővebb) Stern-Brocot fa $(k+1)$-dik szintjén lévő törtek (más sorrendben).

A Calkin-Wilf sorozat

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

A $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(n \geq 1)$ a Calkin-Wilf sorozat. (Első pár eleme:)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_n	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{1}$

b_n azon elemei, melyekre $2^k \leq n < 2^{k+1}$ éppen a (bővebb) Stern-Brocot fa $(k+1)$-dik szintjén lévő törtek (más sorrendben).

Ha $cw(x) = \dfrac{1}{[x] + 1 - \{x\}}$, akkor

A Calkin-Wilf sorozat

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	1

A $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(n \geq 1)$ a Calkin-Wilf sorozat. (Első pár eleme:)

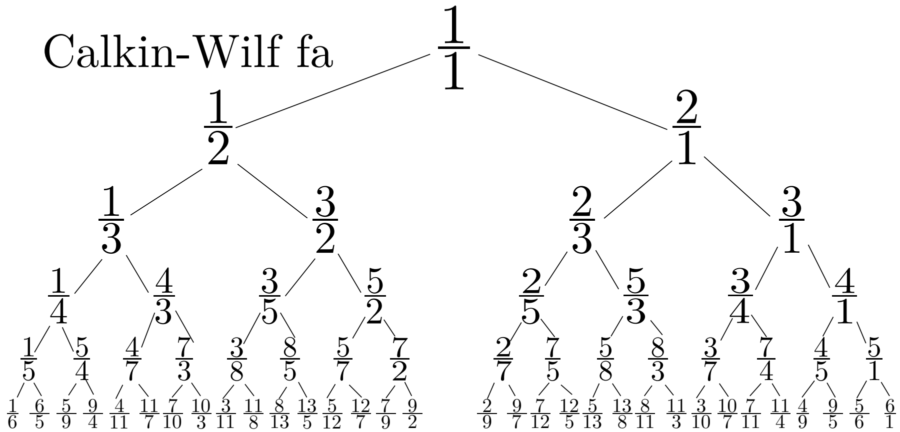
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_n	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{1}$

b_n azon elemei, melyekre $2^k \leq n < 2^{k+1}$ éppen a (bővebb) Stern-Brocot fa $(k+1)$-dik szintjén lévő törtek (más sorrendben).

Ha $cw(x) = \dfrac{1}{[x] + 1 - \{x\}}$, akkor

$$\boxed{b_n = \frac{1}{[b_{n-1}] + 1 - \{b_{n-1}\}} = cw(b_{n-1})}$$

A Calkin-Wilf fa



Hivatkozások

- Bruce Bates, Martin Bunder, Keith Tognetti: Linking the Calkin-Wilf and Stern-Brocot trees, Europen Journal of Combinatorics, 2010, 1637-1661
- Neil Calkin, Herbert Wilf: Recounting the rationals,The American Mathematical Monthly **[AMM]** 2000, 360–363.
- Holló-Szabó Ferenc: A Riemann függvényről, Középiskolai Matematikai Lapok **[KöMaL]**, 1999/január
- Donald E. Knuth, C. P. Rupert, Alex Smith, Richard Stong: Recounting the Rationals, Continued: **[AMM]** 2003 August
- Sam Northshield: Stern's diatomic sequence 0,1,1,2,1,3,2,3,1,4,..., **[AMM]**, 2010 August-September, 581–598
- Surányi János: Farey sorozatok és lánctörtek, **[KöMaL]**, 1965, 228-240. old.
- Niven-Zuckermann: Bevezetés a számelméletbe

- The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <http://oeis.org>