

Pillangók, százszorszépek és szerelem – avagy egy alkalmazott matematikus mindennapjai

Besenyei Ádám (badam@cs.elte.hu)

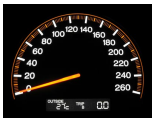
Csomós Petra (csomos@cs.elte.hu)

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Matematikai Intézet, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest



Nyílt nap
ELTE Matematikai Intézet
2020. 01. 17.

Miről lesz szó?



Mottó:

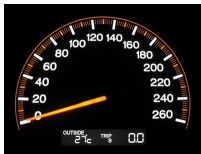
„A természet elmélyült tanulmányozása a matematikai felfedezések legtermékenyebb forrása.”



Joseph Fourier (1768–1830)

- a körülöttünk lévő világ tele van **időben változó folyamatokkal**: gépkocsi mozgása, időjárás változása, bankszámla egyenlegének vagy tőzsdeárfolyamok alakulása, erőmű villamosenergia-termelése, légszennyezés, járvány vagy rádióhullámok terjedése...
- a folyamatok leírása a **matematika** nyelvén történik (Galilei)
- cél: **modellek**, amelyek vizsgálata nem reménytelenül nehéz, de mondanak valamit a valóságról és segítenek a folyamat megértésében, előrejelzésében, szabályozásában
- eszköz: differenciálegyenletek, közelítő módszerek, számítógép
- kihívás, szórakozás, pénzkeresés

A változás üteme



Tanmese a sebességről (R. Feynman nyomán)

A kissé szórakozott autóvezetőt gyorsrajtán kapja a rendőr és megállítja.
A következő beszélgetés zajlik le közöttük:

- *Uram, Ön a megengedett 50 km/h helyett 90 km/h sebességgel haladt.*
- *Nem értem. Mit jelent az, hogy a sebességem 90 km/h?*
- *Azt, hogy Ön ezzel a sebességgel 1 óra alatt 90 km-t tesz meg.*
- *De uram, én csak 5 perce indultam el! Honnan tudja, hogy 1 óra alatt mennyit fogok menni?!*
- ...

(A történet szereplői kitalált személyek, bárminemű hasonlóságuk a valósággal pusztán a véletlen műve.)



A türelmes magyarázat

Mit jelent az, hogy a pillanatnyi sebesség 100 km/h ?

Ezzel a sebességgel a megtett út (= a távolság időbeli megváltozása):

- 1 óra alatt 90 km
- $1/2$ óra alatt 45 km
- $1/5$ óra alatt 18 km
- $0,000277$ óra (= 1 másodperc) alatt $0,000277 \cdot 90$ (= $0,025$) km
- $\vdots$
- Δt idő alatt $90\Delta t \text{ km}$, ahol Δt nagyon kicsi, a másodperc tört része!



A matematikai traffipax

Legyen $x(t)$ időben változó mennyiség: elmozdulás, hőmérséklet, pénz (\$)

A matematikai traffipax

Legyen $x(t)$ időben változó mennyiség: elmozdulás, hőmérséklet, pénz (\$)

- t időpontban $x(t)$ változási üteme $\approx$ matematikai traffipax (Δt kicsi):

$$x(t) \text{ változási üteme} \approx \frac{x(t) \text{ megváltozása}}{\text{eltelt idő}} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

(valójában határérték, de a gyakorlatban csak méréseink vannak)

A matematikai traffipax

Legyen $x(t)$ időben változó mennyiség: elmozdulás, hőmérséklet, pénz (\$)

- t időpontban $x(t)$ változási üteme $\approx$ matematikai traffipax (Δt kicsi):

$$x(t) \text{ változási üteme} \approx \frac{x(t) \text{ megváltozása}}{\text{eltelt idő}} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

(valójában határérték, de a gyakorlatban csak méréseink vannak)

- ahogy a hétköznapi életben: gyors/lassú változás

mennyiség kis idő alatt	változási ütem előjele és nagysága
nő/csökken (kevés/sok)	+/- (kicsi/nagy)
állandó	0

A matematikai traffipax

Legyen $x(t)$ időben változó mennyiség: elmozdulás, hőmérséklet, pénz (\$)

- t időpontban $x(t)$ változási üteme $\approx$ matematikai traffipax (Δt kicsi):

$$x(t) \text{ változási üteme} \approx \frac{x(t) \text{ megváltozása}}{\text{eltelt idő}} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

(valójában határérték, de a gyakorlatban csak méréseink vannak)

- ahogy a hétköznapi életben: gyors/lassú változás

menyiség kis idő alatt	változási ütem előjele és nagysága
nő/csökken (kevés/sok)	+/- (kicsi/nagy)
állandó	0

- elnevezés és jelölés: $x(t)$ változási üteme = $x(t)$ deriváltja = $x'(t)$

A matematikai traffipax

Legyen $x(t)$ időben változó mennyiség: elmozdulás, hőmérséklet, pénz (\$)

- t időpontban $x(t)$ változási üteme $\approx$ matematikai traffipax (Δt kicsi):

$$x(t) \text{ változási üteme} \approx \frac{x(t) \text{ megváltozása}}{\text{eltelt idő}} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

(valójában határérték, de a gyakorlatban csak méréseink vannak)

- ahogy a hétköznapi életben: gyors/lassú változás

mennyiség kis idő alatt	változási ütem előjele és nagysága
nő/csökken (kevés/sok)	+/- (kicsi/nagy)
állandó	0

- elnevezés és jelölés: $x(t)$ változási üteme = $x(t)$ deriváltja = $x'(t)$
- szemléletes példa: pénzünk változási üteme = $\pm 100\$/\text{óra}$ (Las Vegas)

Nyomozás



Sherlock Holmes és a Coolbody eset

Egy éjjel a híres színész, Archibald **Coolbody** feleségét holtan találják otthonában. Mellette a férj, kezében a gyilkos fegyver. A Differenciál Hatóság **felügyelője** már szinte le is zárná az ügyet, ám hajnali 1 órakor beviharzik **Sherlock Holmes** és az alábbi beszélgetés zajlik le közöttük.

Felügyelő: *Mr Holmes, önnek semmi dolga nincs már itt, az ügy teljesen egyértelmű. A férj kezében volt a fegyver, ő az elkövető.*

Holmes: *Csak ne olyan hevesen, felügyelő úr! Megmérte a halottkém a holttest hőmérsékletét?*

Felügyelő: *Természetesen. Pontban éjfélkor a test 33°C-os volt.*

Ekkor Holmes előkapta kabátjából a hőmérőjét és megvizsgálta a testet.

Holmes: *Hmm. Most 31°C-os; és látja, a szoba hőmérője 20°C-ot mutat. A halál fél 11 körül állt be, márpedig akkor Coolbody még Hamletet játszott a Queen's Theatre-ben, ahogy minden este. Nem ő az elkövető.*

Hogyan állapította meg Sherlock Holmes, hogy mikor hunyt el az áldozat?

Derivált a hűtőben

Megfigyelés (Newton, 1701, fémek lehűlése, hőmérsékleti skála):
a lehűlés üteme arányos a test és a közeg hőmérsékletének különbségével

Derivált a hűtőben

Megfigyelés (Newton, 1701, fémek lehűlése, hőmérsékleti skála):
a lehűlés üteme arányos a test és a közeg hőmérsékletének különbségével

Newton lehűlési törvénye matematikailag = differenciálegyenlet

$$(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})' = -\lambda(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})$$

Derivált a hűtőben

Megfigyelés (Newton, 1701, fémek lehűlése, hőmérsékleti skála):
a lehűlés üteme arányos a test és a közeg hőmérsékletének különbségével

Newton lehűlési törvénye matematikailag = differenciálegyenlet

$$(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})' = -\lambda(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})$$

$\Rightarrow T_{\text{test}} - T_{\text{közeg}}$ egyenlő időközök alatt ugyanannyi részére csökken

Derivált a hűtőben

Megfigyelés (Newton, 1701, fémek lehűlése, hőmérsékleti skála):
a lehűlés üteme arányos a test és a közeg hőmérsékletének különbségével

Newton lehűlési törvénye matematikailag = differenciálegyenlet

$$(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})' = -\lambda(T_{\text{test}}(t) - T_{\text{közeg}})$$

$\Rightarrow T_{\text{test}} - T_{\text{közeg}}$ egyenlő időközök alatt ugyanannyi részére csökken

Sherlock Holmes gondolatmenete:

- a hőmérséklet-különbség éjfélkor 13°C , hajnali 1 órakor pedig 11°C
- a különbség óránként $\frac{11}{13}$ -szeresére csökken (és vajon fél óra alatt?)
- a test 22:30 körül volt $36,5^{\circ}\text{C}$ -os



Szerelem



Mese Rózsikáról és az udvarlóirol

Deriv Állam királyának egyetlen lánya, **Rózsika** nagyon furá viselkedésű:

- minél inkább szereti valaki Rózsikát, ő annál kevésbé szereti az illetőt;
- minél kevésbé szereti valaki Rózsikát, ő annál inkább szereti az illetőt.

A király egy napon eldöntötte, hogy ideje férjhez adnia a lányát, azonban Rózsikának egyszerre több udvarlója is akadt (köztük egy testvérpár):

Normál Norman, aki teljesen szokványosan viselkedik;

Furi Feri, aki Rózsikához hasonlóan eléggé furá figura;

Kedély Kenéz, aki szokványos, de hangulatai kissé befolyásolják;

Kedély Kende, aki szokványos, de hangulatai erősen befolyásolják.

A király tanácsstalan volt, mi tévő legyen, ezért tüstént hívatta az udvari matematikust, **Deriv Álmot**, hogy segítsen a tökéletes férj kiválasztásában. Mit tanácsolhatott a királynak az udvari matematikus?

Melyik férjjelölthöz érdemes feleségül adnia egyetlen lányát?

Rózsika és a férjjelöltek

Legyen $R(t)$, $J(t)$ Rózsika és a Jelölt találkozását követő t időpillanatban az egymás iránti érzelmük mértéke:

- ha $R(t) > 0$, akkor a t időpontban Rózsika szereti a Jelöltet és minél nagyobb $R(t)$, annál inkább
- ha $R(t) < 0$, akkor Rózsika ellenszenvvel viszonyul a Jelölthöz
- hasonló a jelentése $J(t)$ -nek Rózsika felé

Rózsika és a férjjelöltek

Legyen $R(t)$, $J(t)$ Rózsika és a Jelölt találkozását követő t időpillanatban az egymás iránti érzelmük mértéke:

- ha $R(t) > 0$, akkor a t időpontban Rózsika szereti a Jelöltet és minél nagyobb $R(t)$, annál inkább
- ha $R(t) < 0$, akkor Rózsika ellenszenvvel viszonyul a Jelölthöz
- hasonló a jelentése $J(t)$ -nek Rózsika felé

Egyszerű szerelmi modell

Két differenciálegyenletből álló rendszer, ahol a , b , c és d paraméterek:

$$R'(t) = aR(t) + bJ(t)$$

$$J'(t) = cR(t) + dJ(t)$$

Rózsika és a férjjelöltek

Legyen $R(t)$, $J(t)$ Rózsika és a Jelölt találkozását követő t időpillanatban az egymás iránti érzelmük mértéke:

- ha $R(t) > 0$, akkor a t időpontban Rózsika szereti a Jelöltet és minél nagyobb $R(t)$, annál inkább
- ha $R(t) < 0$, akkor Rózsika ellenszenvvel viszonyul a Jelölthöz
- hasonló a jelentése $J(t)$ -nek Rózsika felé

Egyszerű szerelmi modell

Két differenciálegyenletből álló rendszer, ahol a , b , c és d paraméterek:

$$\begin{aligned}R'(t) &= aR(t) + bJ(t) \\ J'(t) &= cR(t) + dJ(t)\end{aligned}$$

Képletek helyett az $(R(t), J(t))$ görbék ábrázolása a síkon (= fáziskép).
(Programok: Maple, Matlab, Mathematica, Wolfram Alpha, Winplot...)

Egyszerű modell:

$$\begin{aligned}R'(t) &= -J(t) \\ J'(t) &= R(t)\end{aligned}$$



Egyszerű modell:

$$\begin{aligned}R'(t) &= -J(t) \\ J'(t) &= R(t)\end{aligned}$$

Fáziskép:



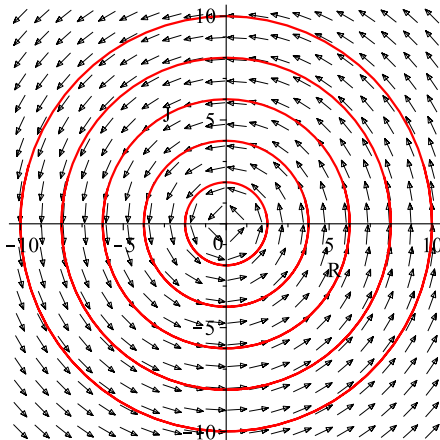
Centrum

Egyszerű modell:

$$\begin{aligned} R'(t) &= -J(t) \\ J'(t) &= R(t) \end{aligned}$$



Fáziskép:



Egyszerű modell:

$$R'(t) = -J(t)$$

$$J'(t) = -R(t)$$



Egyszerű modell:

$$\begin{aligned}R'(t) &= -J(t) \\ J'(t) &= -R(t)\end{aligned}$$

Fáziskép:



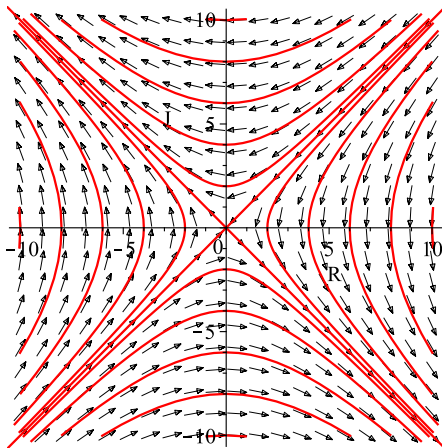
Nyereg

Egyszerű modell:

$$\begin{aligned} R'(t) &= -J(t) \\ J'(t) &= -R(t) \end{aligned}$$



Fáziskép:



Egyszerű modell:

$$\begin{aligned}R'(t) &= -J(t) \\ J'(t) &= R(t) + J(t)\end{aligned}$$



Egyszerű modell:

$$\begin{aligned}R'(t) &= -J(t) \\ J'(t) &= R(t) + J(t)\end{aligned}$$

Fáziskép:



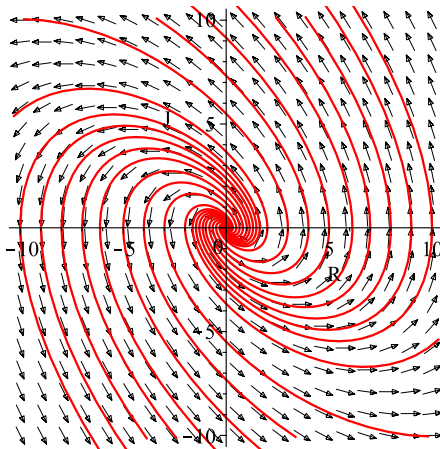
Fókusz

Egyszerű modell:

$$\begin{aligned}R'(t) &= -J(t) \\ J'(t) &= R(t) + J(t)\end{aligned}$$



Fáziskép:



Egyszerű modell:

$$R'(t) = -J(t)$$

$$J'(t) = R(t) + 2J(t)$$



Egyszerű modell:

$$R'(t) = -J(t)$$

$$J'(t) = R(t) + 2J(t)$$

Fáziskép:



Csomó

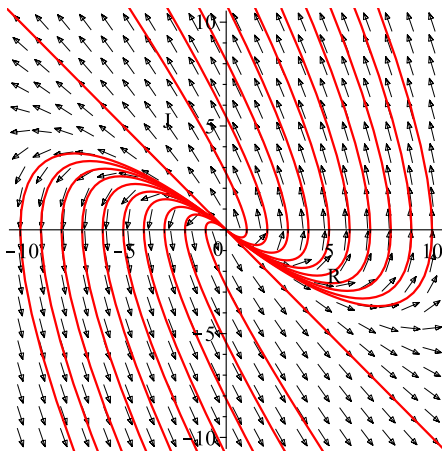
Egyszerű modell:

$$R'(t) = -J(t)$$

$$J'(t) = R(t) + 2J(t)$$

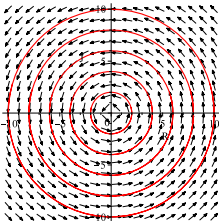


Fáziskép:

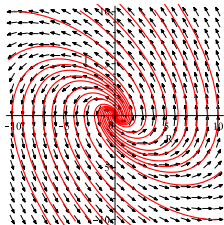
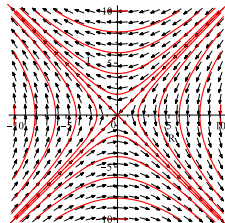


Kapcsolatok kavalkádja

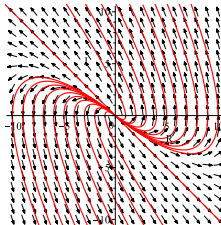
Normál Norman →



Furi Feri →



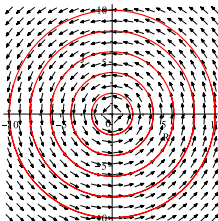
← Kedély Kenéz



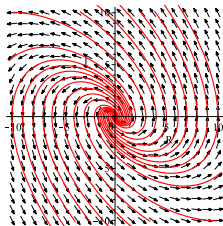
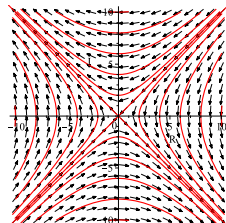
← Kedély Kende

Kapcsolatok kavalkádja

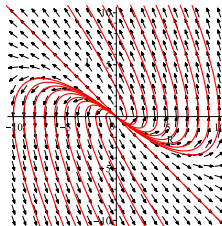
Normál Norman →



Furi Feri →



← Kedély Kenéz



← Kedély Kende

Deriv Álmos tanácsa:

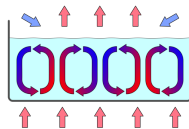
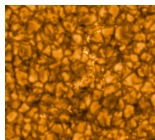
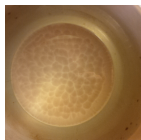
Rózsika, válaszd Normál Normant! (Az ellentétek vonzzák egymást?)

Pillangók



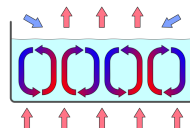
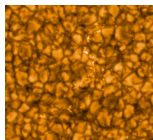
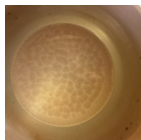
Derivált a kakaóban

Deriv Álmos reggeli kakaója főzése közben szép mintázatra figyelt fel az edényben. Ez valójában ugyanaz a jelenség, mint a Föld légkörében vagy a Nap felszínén végbemenő **fel- és leáramlás** (konvekció).



Derivált a kakaóban

Deriv Álmos reggeli kakaója főzése közben szép mintázatra figyelt fel az edényben. Ez valójában ugyanaz a jelenség, mint a Föld légkörében vagy a Nap felszínén végbemenő **fel- és leáramlás** (konvekció).



Lorenz-modell (Edward Lorenz, 1963)

$$x(t) = ?$$

$$y(t) = ?$$

$$z(t) = ?$$

$$x'(t) = a(y(t) - x(t))$$

$$y'(t) = x(t)(b - z(t)) - y(t)$$

$$z'(t) = x(t)y(t) - cz(t)$$

$$a = 10$$

$$b = 28$$

$$c = \frac{8}{3}$$

Érzékeny pillangók

Determinisztikus $\xrightarrow{?}$ előrejelezhető

Érzékeny pillangók

Determinisztikus $\xrightarrow{?}$ előrejelezhető

Érzékeny pillangók

Determinisztikus $\xrightarrow{?}$ előrejelezhető

Érzékenység a kezdeti feltételekre (kaotikus viselkedés. . .)

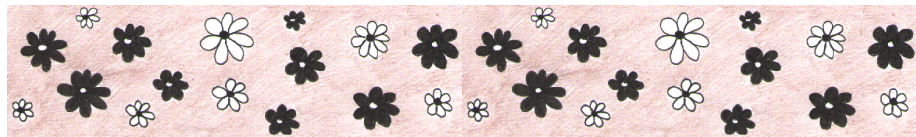
Százszorszépek



Százsorszápvlág

A **Gaia-elmélet** szerint a Föld összes élő és élettelen része szorosan összefüggő, **homeosztatikus** rendszert alkot, azaz **változó** külső és belső körülmények mellett is képes **fenntartani** létezésének feltételeit.
(James Lovelock és Lynn Margulis, 1973.)

Ennek illusztrálására: **Százsorszápvlág**, Daisyworld
(James Lovelock és Andrew Watson, 1983)



$A_1(t)$:  által **befedett terület** a t időpillanatban

$A_2(t)$:  által **befedett terület** a t időpillanatban

Fényben tündöklő százszorszépek

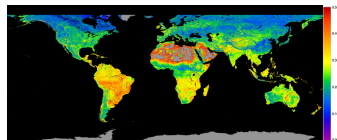
Sejtés: a százszorszépek **változó** napsugárzás esetén is beállítják a nekik kedvező **állandó** hőmérsékletet, hiszen

- több  hűt (a fény nagy részét **visszaveri**)
- több  melegít (a fény nagy részét **elnyeli**)



Fényvisszaverő-képesség (**albedo**) értéke például:

$\alpha_0 = 50\%$		talaj
$\alpha_1 = 75\%$		világos
$\alpha_2 = 25\%$		sötét



Százsorszépvilág (James Lovelock és Andrew Watson, 1983)

$$\begin{aligned} A_1'(t) &= \dots A_1(t) \dots \\ A_2'(t) &= \dots A_2(t) \dots \end{aligned}$$

kapcsolat:  +  +  = 1

Százsorszépvilág (James Lovelock és Andrew Watson, 1983)

$$A'_1(t) = \dots A_1(t) \dots$$

$$A'_2(t) = \dots A_2(t) \dots$$

kapcsolat:  +  +  = 1

Az egyenletek felírásához felhasználtuk még:

- a Nap fényessége egyenletesen **növekszik az időben**
- a százsorszépék 5–40°C között **élnek**
- a legjobban azonban a 22,5°C **optimális hőmérsékletet** szeretik

A Nap fényessége az idővel nő

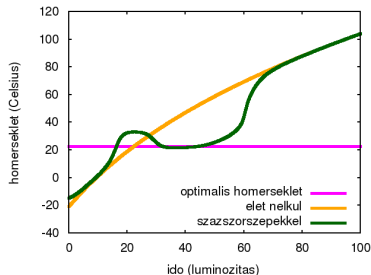
Az **élet** hatása a hőmérsékletre:

- élettelen Föld hőmérséklete
- hőmérséklet százszorosaival

A befedett felszínek aránya:

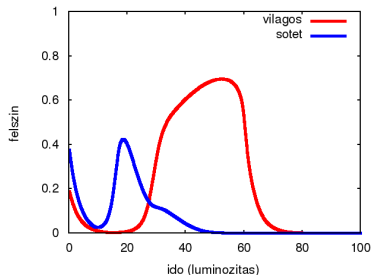
- világos 
- sötét 

A Nap fényessége az idővel nő



Az **élet** hatása a hőmérsékletre:

- optimális hőmérséklet
- élettelen Föld hőmérséklete
- hőmérséklet százszorszépekkel



A befedett felszínek aránya:

- világos 
- sötét 

Időjárás-előrejelzés



Meteorológiai változók

Közeleg Rózsika királynő és Normál Norman esküvője. A király ismét Deriv Álmoshoz fordul segítségért: vajon milyen lesz az időjárás aznap?

Az alábbi mennyiségeket szeretné előrejelezni:

T : hőmérséklet

p : nyomás

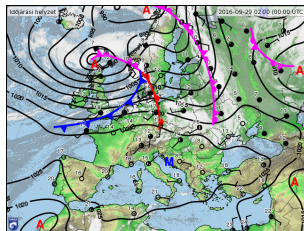
u : szélsébség az egyik irányban (előre)

v : szélsébség a másik irányban (jobbra)

w : szélsébség a harmadik irányban (fel)

ρ : sűrűség

q : relatív páratartalom



Mit tudunk a változások üteméről? **Vigyázat!**

Az ismeretlen függvények nemcsak az **időtől**, hanem a **helytől** is függenek.

Derivált az esőben

Egyszerű időjárás-előrejelző modell (Vilhelm Bjerknes, ~1900)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \varphi}{r} \right) v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \varphi}{r} \right) u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

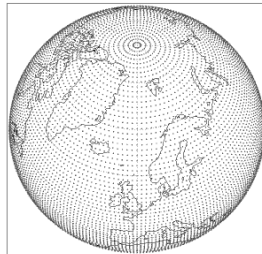
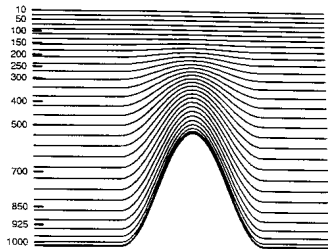
$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(qu)}{\partial x} + \frac{\partial(qv)}{\partial y} + \frac{\partial(qw)}{\partial z} = \text{források} - \text{nyelők}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} + (\gamma - 1) T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{Q}{c_p}$$

$$p = \rho R T$$

Számtalan sok számolás

Európai Középtávú Időjárás-előrejelző Központ (Reading, Anglia)



2 Cray XC40 cluster
40 szekrény számításokra
26 szekrény adattárolásra
(napi +130 terabyte) $\sim 10^{14}$
129960 processzor-mag

Kitekintés



További alkalmazások



**légszennyezés
terjedése**
vulkáni por,
radioaktív részecskék

szabályozási feladatok
landolás, rakéták,
pénzköltés és
megtakarítás



járványok terjedése
fertőzöttek, gyógyultak
és fertőzhetők száma,
hálózatokon is



**piaci és tőzsdei
folyamatok**
Black–Scholes-
egyenlet



hullámterjedés
Maxwell-egyenletek,
fényterjedés, zene,
mobiltelefon

**levegő vagy
folyadékok áramlása**
Navier–Stokes-
egyenletek



Olvasni- és hallgatnivalók



Besenyei Ádám, Csomós Petra: Pillangók, százsorszépek és szerelem – avagy egy alkalmazott matematikus mindennapjai, Kutatók éjszakája előadás, 2016. szeptember 30.

<http://abesenyei.web.elte.hu/publications/pillangok.pdf>



Besenyei Ádám: Sherlock Holmes, Rómeó és Júlia meg a gonosz manó – avagy mire jók a differenciálegyenletek?, ELTE Kárpát-medencei Nyári Egyetem előadás, 2014. július 11. <http://abesenyei.web.elte.hu/publications/sherlock.pdf>



Besenyei Ádám: A differenciálegyenletek csodálatos világa, Eötvös Collegium Természettudományos Tábor előadás, 2015. július 22.

<http://abesenyei.web.elte.hu/publications/csodalatos.pdf>



Besenyei Ádám: A differenciálegyenletek csodálatos világa, speciál előadás az ELTE-n tanárszakosok számára, a kurzus honlapja:

<http://abesenyei.web.elte.hu/mattanar/15o/diffegy15o/diffegy15o.php>



Simon Péter: A deriválás, Klubrádió interjú, 2016. augusztus 30.

www.klubradio.hu/klubmp3/archiv/20160830/klub20160830-095858.mp3
(az interjú a felvételen 6:35-től kezdődik)



Képek forrása: NASA, OMSZ, Eumetcal, ECMWF, wikipedia, Porsche

Kö/zönjük a φ gyelmet!



Besenyei Ádám – Csomós Petra:
A gyorshajtástól az időjárásig. Kalandok az alkalmazott matematikában
Természet Világa, 2017. augusztus

ELTE TTK Matematikai Intézet honlapja középiskolásoknak:
www.math.elte.hu/kozepiskolasoknak