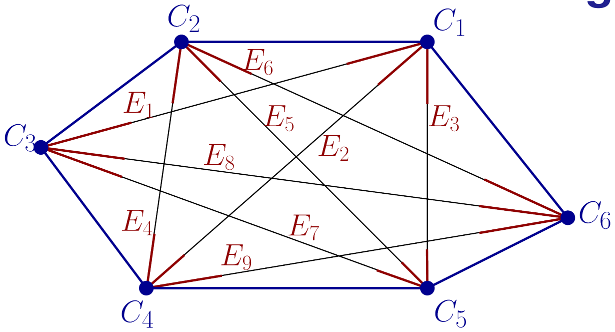
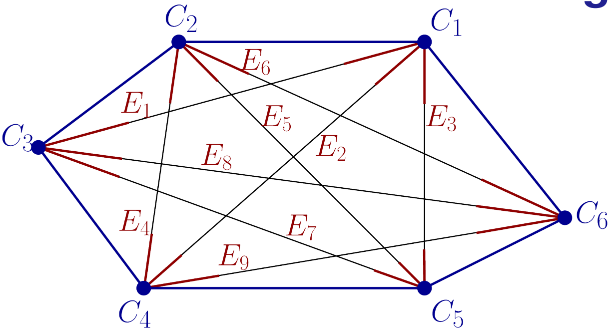
A kettős leszámlálás

Az átlók száma a konvex n-szögben

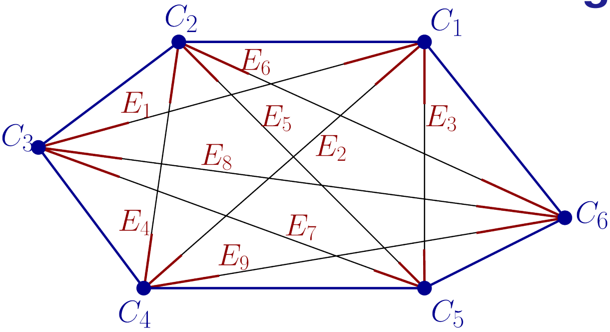


Az átlók száma a konvex n-szögben



	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
C_1	•	•	•						
C_2				•	•	•			
C_3	•						•	•	
C_4		•		•					•
C_5			•		•		•		
C_6						•		•	•

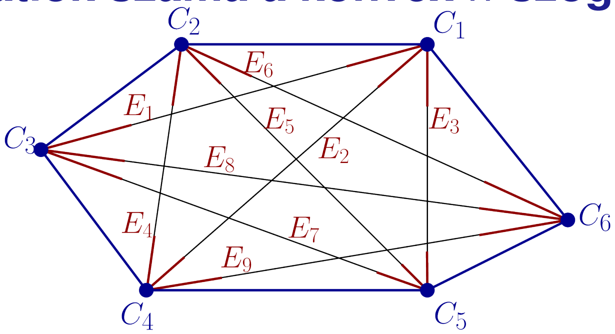
Az átlók száma a konvex *n*-szögben



	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
C_1	●	●	●						
C_2				●	●	●			
C_3	●						●	●	
C_4		●		●					●
C_5			●		●		●		
C_6						●		●	●

- Minden átlónak két „vége” van (minden oszlopban két pötty)

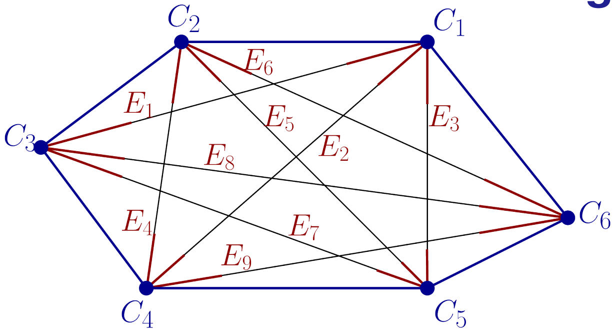
Az átlók száma a konvex n-szögben



	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
C_1	●	●	●						
C_2				●	●	●			
C_3	●						●	●	
C_4		●		●					●
C_5			●		●		●		
C_6						●		●	●

- Minden átlónak két „vége” van (minden oszlopban két pötty)
- Minden csúcsból $n - 3$ átló indul ki (minden sorban ($n - 3$ pötty)

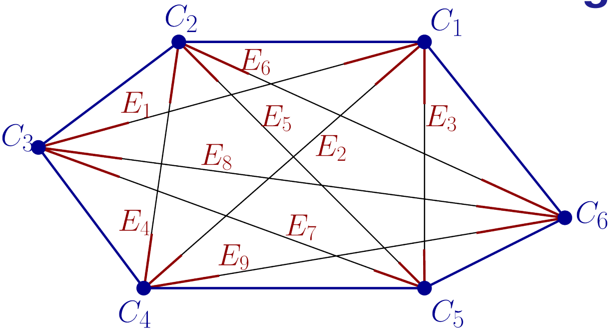
Az átlók száma a konvex n-szögben



	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
C_1	●	●	●						
C_2				●	●	●			
C_3	●						●	●	
C_4		●		●					●
C_5			●		●		●		
C_6						●		●	●

- Minden átlónak két „vége” van (minden oszlopban két pötty)
- Minden csúcsból $n-3$ átló indul ki (minden sorban ($n-3$ pötty)
- Az átlóknak összesen $n \cdot (n-3)$ vége van (összesen $n \cdot (n-3)$ pötty)

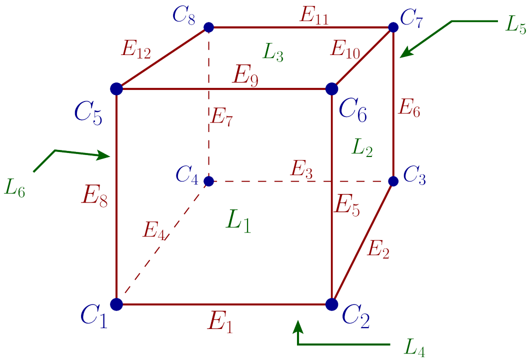
Az átlók száma a konvex n-szögben



	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9
C_1	•	•	•						
C_2				•	•	•			
C_3	•						•	•	
C_4		•		•					•
C_5			•		•		•		
C_6						•		•	•

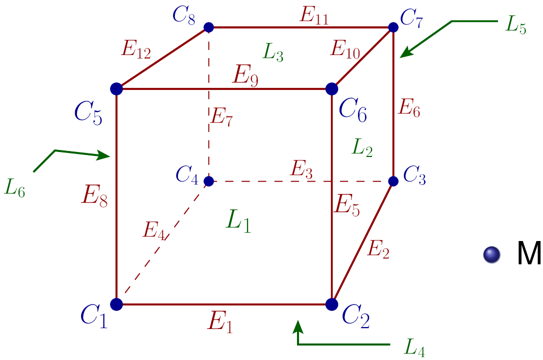
- Minden átlónak két „vége” van (minden oszlopban két pötty)
- Minden csúcsból $n-3$ átló indul ki (minden sorban ($n-3$ pötty)
- Az átlóknak összesen $n \cdot (n-3)$ vége van (összesen $n \cdot (n-3)$ pötty)
- Az átlók (oszlopok) száma $n \cdot (n-3)/2$.

A csúcsok és lapok száma a kockán



	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
L_1	●	●			●	●		
L_2		●	●			●	●	
L_3					●	●	●	●
L_4	●	●	●	●				
L_5			●	●			●	●
L_6	●			●	●			●

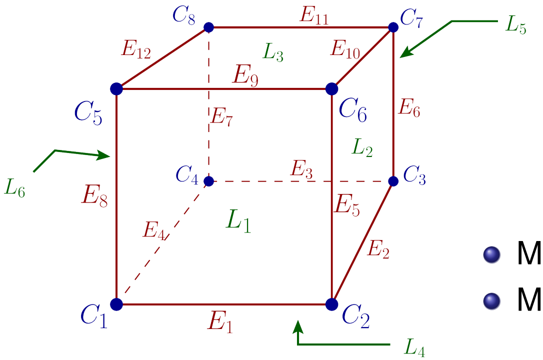
A csúcsok és lapok száma a kockán



	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
L_1	●	●			●	●		
L_2		●	●			●	●	
L_3					●	●	●	●
L_4	●	●	●	●				
L_5			●	●			●	●
L_6	●			●	●			●

- Minden lapnak 4 csúcsa van

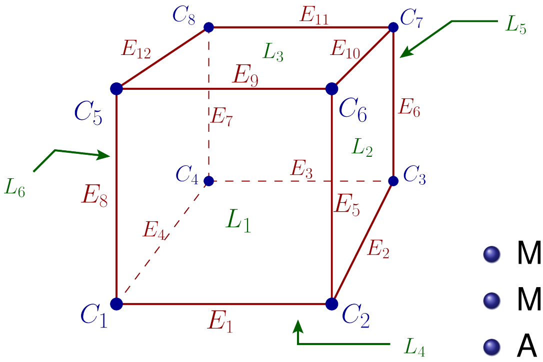
A csúcsok és lapok száma a kockán



	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
L_1	•	•			•	•		
L_2		•	•			•	•	
L_3					•	•	•	•
L_4	•	•	•	•				
L_5			•	•			•	•
L_6	•			•	•			•

- Minden lapnak 4 csúcsa van
- Minden csúcsnál három lap találkozik

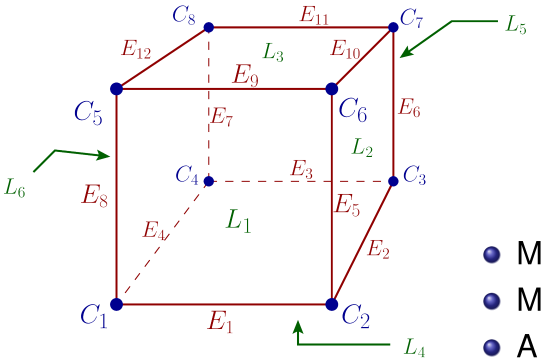
A csúcsok és lapok száma a kockán



	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
L_1	•	•			•	•		
L_2		•	•			•	•	
L_3					•	•	•	•
L_4	•	•	•	•				
L_5			•	•			•	•
L_6	•			•	•			•

- Minden lapnak 4 csúcsa van
- Minden csúcsnál három lap találkozik
- A lapoknak összesen $6 \cdot 4 = 24$ „sarka” van

A csúcsok és lapok száma a kockán



	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
L_1	●	●			●	●		
L_2		●	●			●	●	
L_3					●	●	●	●
L_4	●	●	●	●				
L_5			●	●			●	●
L_6	●			●	●			●

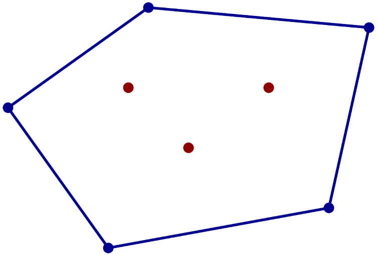
- Minden lapnak 4 csúcsa van
- Minden csúcsnál három lap találkozik
- A lapoknak összesen $6 \cdot 4 = 24$ „sarka” van
- A csúcsok száma $24/3 = 8$.

Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

Egy konvex n-szög belsejében kijelöltünk k pontot. A csúcsok és a belső pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre.
A csúcsokat és a belső pontokat egymást nem metsző szakaszokkal összekötve háromszögekre bontjuk a sokszöget. Mennyi lehet a háromszögek száma?

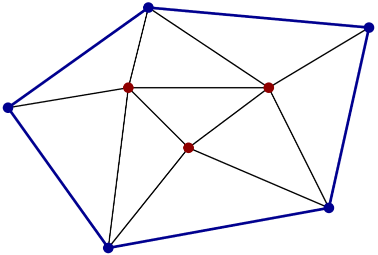
Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

Egy konvex n-szög belsejében kijelöltünk k pontot. A csúcsok és a belső pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre.
A csúcsokat és a belső pontokat egymást nem metsző szakaszokkal összekötve háromszögekre bontjuk a sokszöget. Mennyi lehet a háromszögek száma?



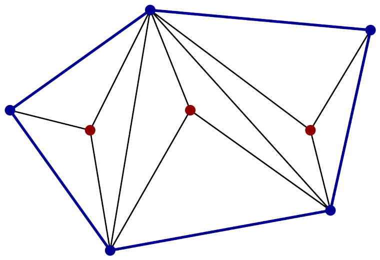
Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

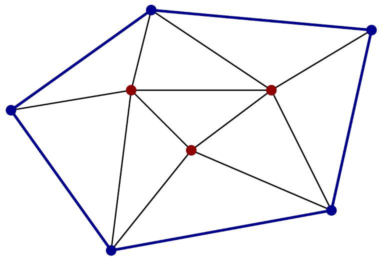
Egy konvex n-szög belsejében kijelöltünk k pontot. A csúcsok és a belső pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre.
A csúcsokat és a belső pontokat egymást nem metsző szakaszokkal összekötve háromszögekre bontjuk a sokszöget. Mennyi lehet a háromszögek száma?



Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

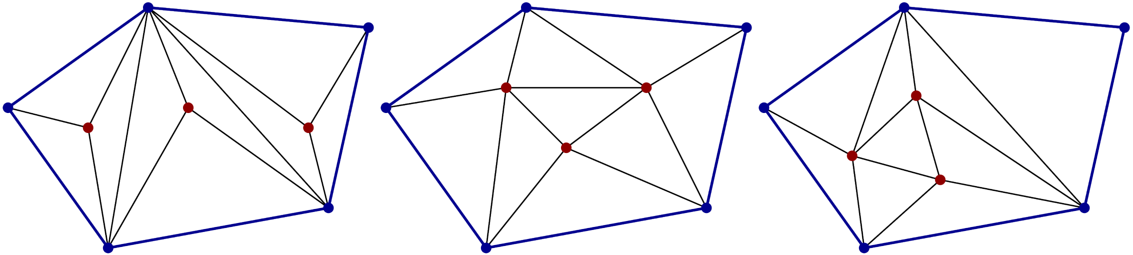
Egy konvex n-szög belsejében kijelöltünk k pontot. A csúcsok és a belső pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre.
A csúcsokat és a belső pontokat egymást nem metsző szakaszokkal összekötve háromszögekre bontjuk a sokszöget. Mennyi lehet a háromszögek száma?





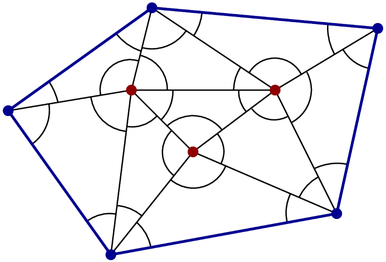
Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

Egy konvex n-szög belsejében kijelöltünk k pontot. A csúcsok és a belső pontok közül semelyik három nem esik egy egyenesre.
A csúcsokat és a belső pontokat egymást nem metsző szakaszokkal összekötve háromszögekre bontjuk a sokszöget. Mennyi lehet a háromszögek száma?



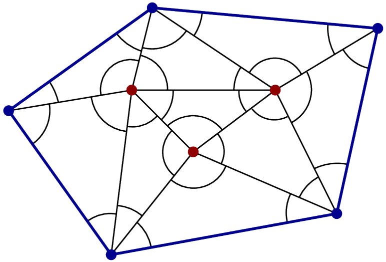
Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

Megoldás: kétféleképpen számoljuk össze a háromszögek összegeinek összegét.



Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

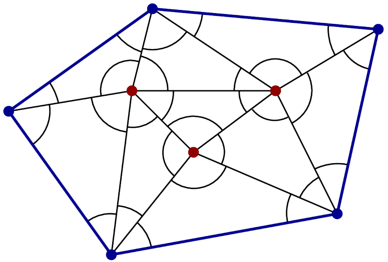
Megoldás: kétféleképpen számoljuk össze a háromszögek összegeinek összegét.



- Az n-szög szögeinek összege $(n-2) \cdot 180^\circ$.

Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

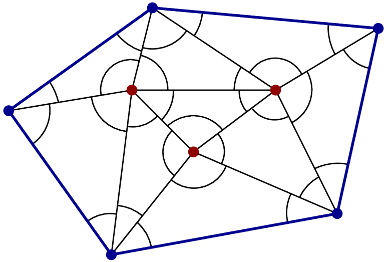
Megoldás: kétféleképpen számoljuk össze a háromszögek összegeinek összegét.



- Az n-szög szögeinek összege $(n-2)\cdot 180^\circ$.
- A belső pontok körül a szögek összege $k\cdot 360^\circ = 2k\cdot 180^\circ$.

Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

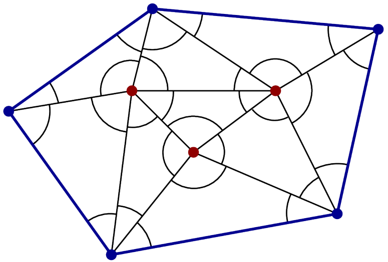
Megoldás: kétféleképpen számoljuk össze a háromszögek összegeinek összegét.



- Az n-szög szögeinek összege $(n-2) \cdot 180^\circ$.
- A belső pontok körül a szögek összege $k \cdot 360^\circ = 2k \cdot 180^\circ$.
- A szögek összege $(n-2+2k) \cdot 180^\circ$.

Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

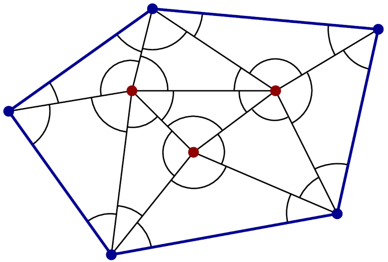
Megoldás: kétféleképpen számoljuk össze a háromszögek összegeinek összegét.



- Az n-szög szögeinek összege $(n-2) \cdot 180^\circ$.
- A belső pontok körül a szögek összege $k \cdot 360^\circ = 2k \cdot 180^\circ$.
- A szögek összege $(n-2+2k) \cdot 180^\circ$.
- Mindegyik háromszögben 180° a szögek összege.

Háromszögekre bontás adott belső pontokkal

Megoldás: kétféleképpen számoljuk össze a háromszögek összegeinek összegét.



- Az n-szög szögeinek összege $(n-2)\cdot 180^\circ$.
- A belső pontok körül a szögek összege $k\cdot 360^\circ = 2k\cdot 180^\circ$.
- A szögek összege $(n-2+2k)\cdot 180^\circ$.
- Mindegyik háromszögben 180° a szögek összege.
- A háromszögek száma mindig $n-2+2k$; nem függ attól, hogy milyen szakaszokkal bontottuk fel az n-szöget.

Az Euler-féle poliédertétel

Ha egy konvex poliédernek L lapja, E éle és C csúcsa van, akkor

$$L + C = E + 2.$$

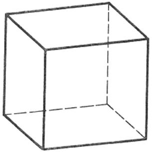
Az Euler-féle poliédertétel

Ha egy konvex poliédernek L lapja, E éle és C csúcsa van, akkor

$$L + C = E + 2.$$

Példák:

- Kocka: $L = 6$, $C = 8$, $E = 12$



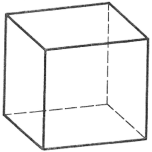
Az Euler-féle poliédertétel

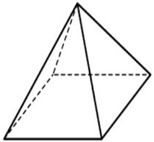
Ha egy konvex poliédernek L lapja, E éle és C csúcsa van, akkor

$$L + C = E + 2.$$

Példák:

- Kocka: $L = 6$, $C = 8$, $E = 12$
- Négyoldalú gúla: $L = 5$, $C = 5$, $E = 8$





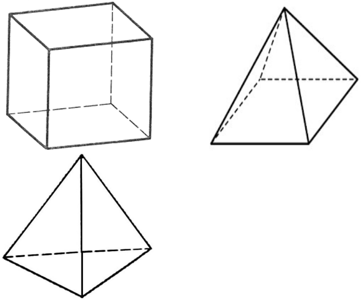
Az Euler-féle poliédertétel

Ha egy konvex poliédernek L lapja, E éle és C csúcsa van, akkor

$$L + C = E + 2.$$

Példák:

- Kocka: $L = 6$, $C = 8$, $E = 12$
- Négyoldalú gúla: $L = 5$, $C = 5$, $E = 8$
- Tetraéder: $L = 4$, $C = 4$, $E = 6$



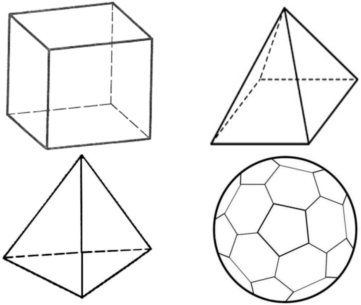
Az Euler-féle poliédertétel

Ha egy konvex poliédernek L lapja, E éle és C csúcsa van, akkor

$$L + C = E + 2.$$

Példák:

- Kocka: $L = 6$, $C = 8$, $E = 12$
- Négyoldalú gúla: $L = 5$, $C = 5$, $E = 8$
- Tetraéder: $L = 4$, $C = 4$, $E = 6$
- Focilabda: $L = 32$, $C = 60$, $E = 90$

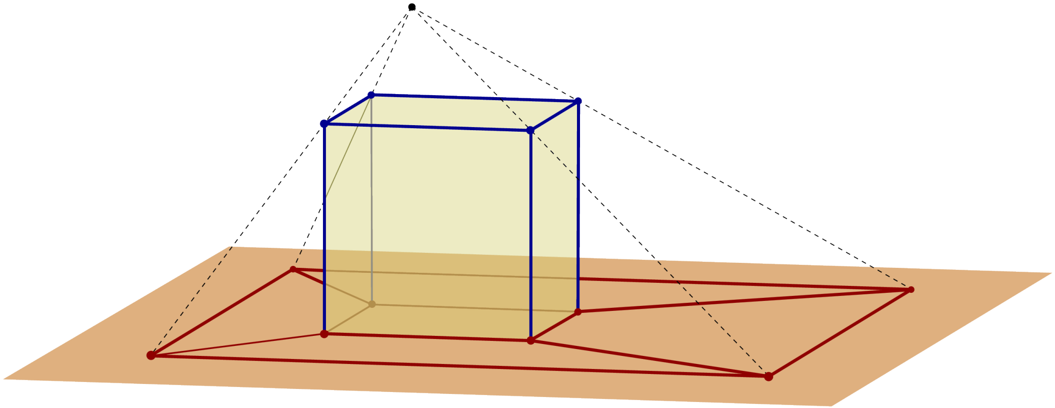


Az Euler-féle poliédertétel

A bizonyítás első lépése: síkba vetítés

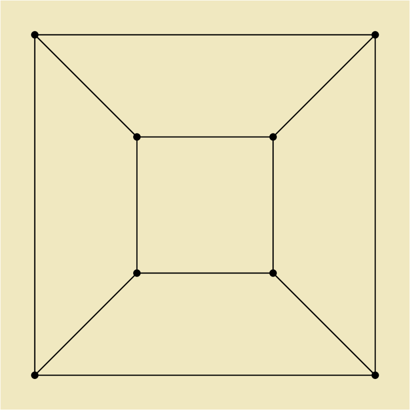
Az Euler-féle poliédertétel

A bizonyítás első lépése: síkba vetítés



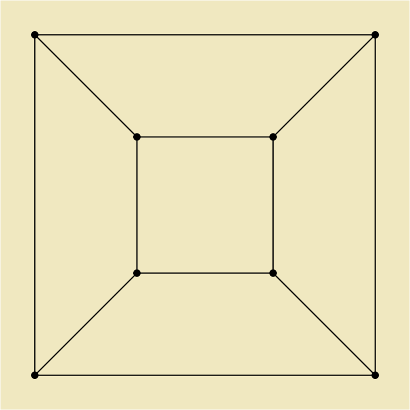
Az Euler-féle poliédertétel

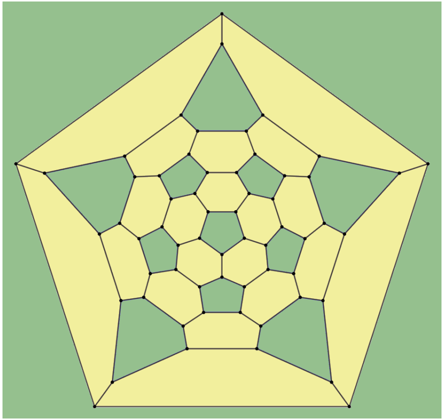
A bizonyítás első lépése: síkba vetítés



Az Euler-féle poliédertétel

A bizonyítás első lépése: síkba vetítés



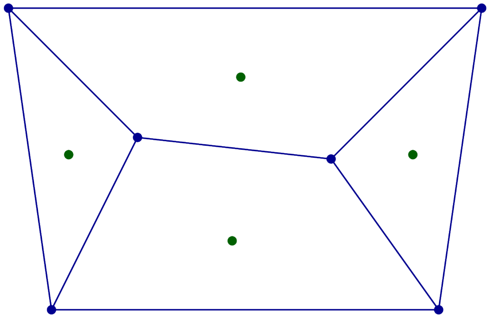


Az Euler-féle poliédertétel

Második lépés: Új csúcsok a lapok belsejében

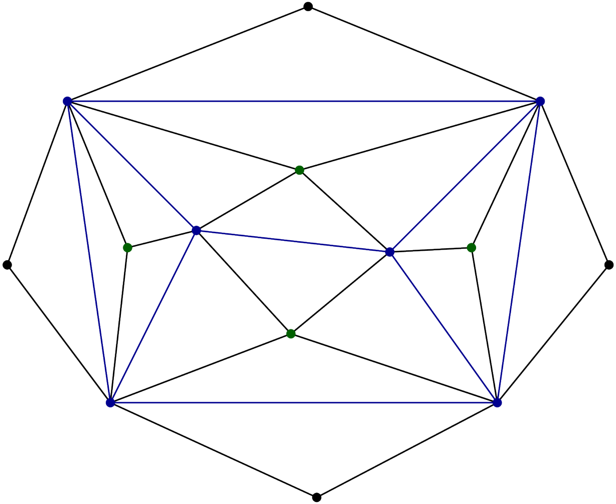
Az Euler-féle poliédertétel

Második lépés: Új csúcsok a lapok belsejében



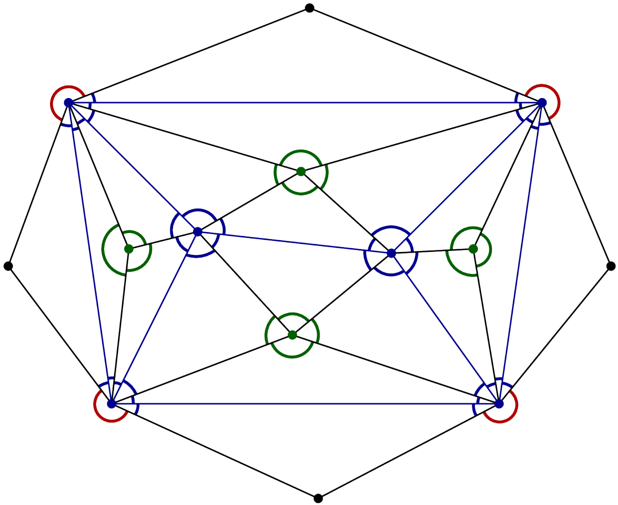
Az Euler-féle poliédertétel

Második lépés: Új csúcsok a lapok belsejében



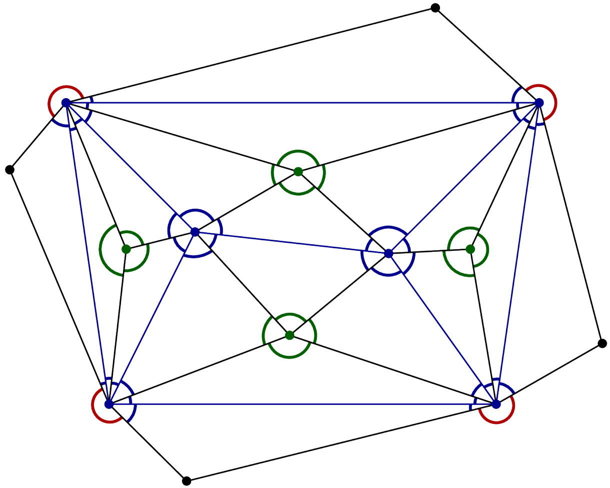
Az Euler-féle poliédertétel

Második lépés: Új csúcsok a lapok belsejében



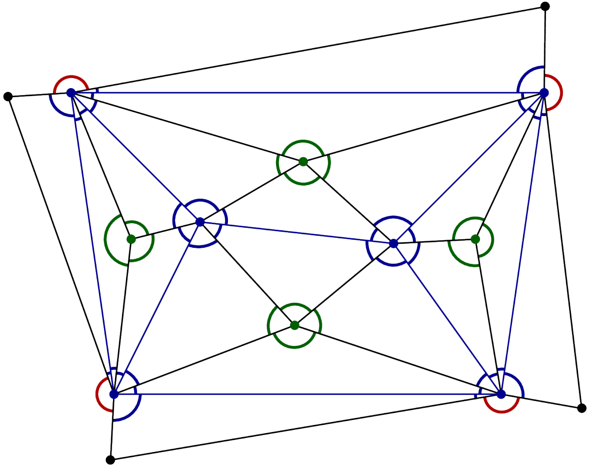
Az Euler-féle poliédertétel

Második lépés: Új csúcsok a lapok belsejében



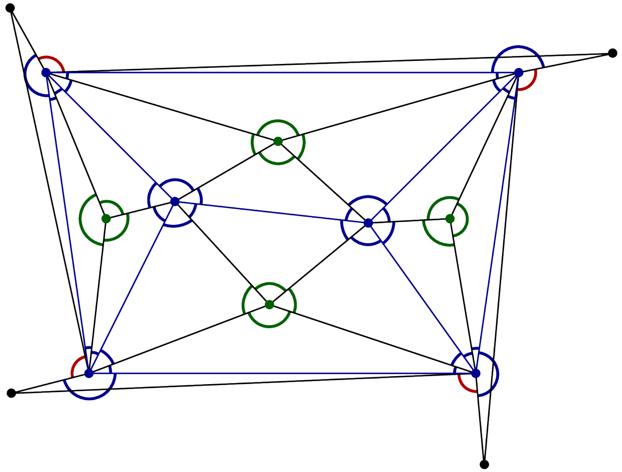
Az Euler-féle poliédertétel

Második lépés: Új csúcsok a lapok belsejében



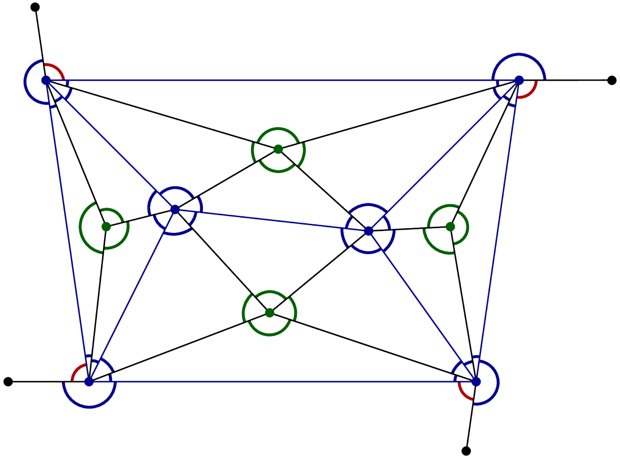
Az Euler-féle poliédertétel

Második lépés: Új csúcsok a lapok belsejében



Az Euler-féle poliédertétel

Második lépés: Új csúcsok a lapok belsejében

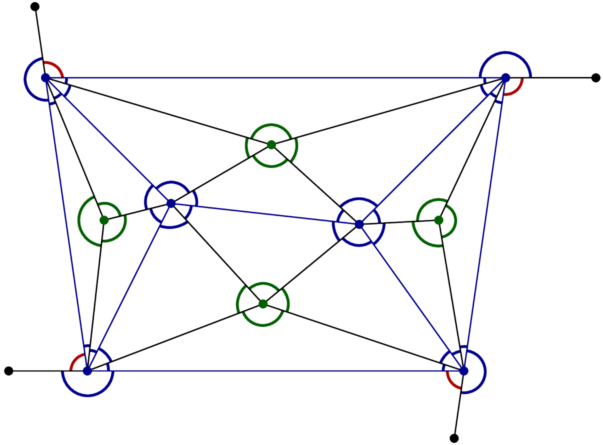


Az Euler-féle poliédertétel

Utolsó lépés: a szögek kettős összeszámolása

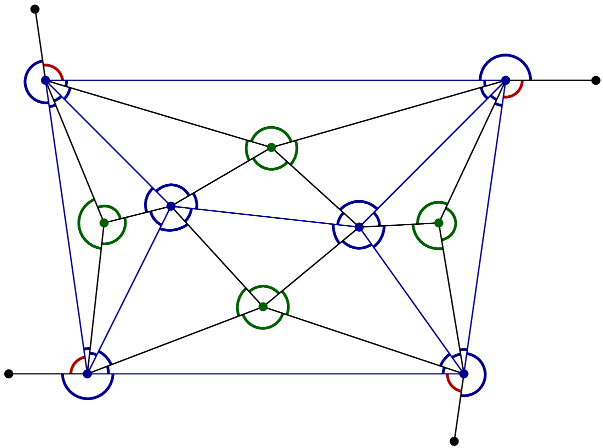
Az Euler-féle poliédertétel

Utolsó lépés: a szögek kettős összeszámolása



Az Euler-féle poliédertétel

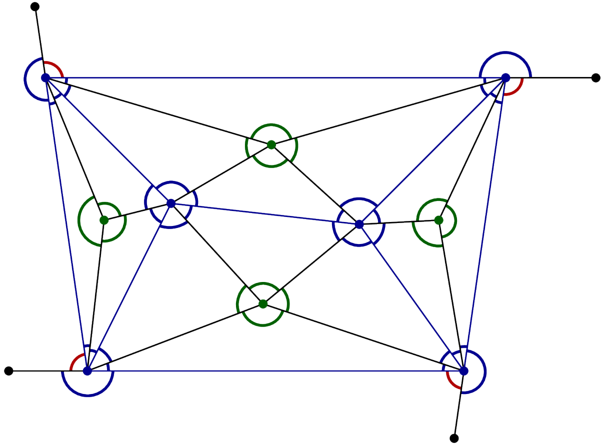
Utolsó lépés: a szögek kettős összeszámolása



- Kék és piros szögek: $C \cdot 360^\circ$

Az Euler-féle poliédertétel

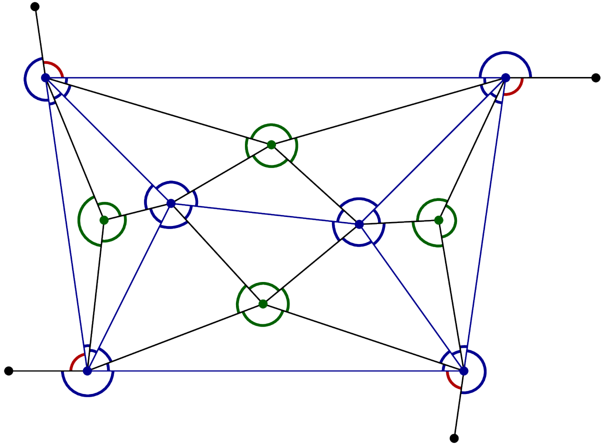
Utolsó lépés: a szögek kettős összeszámolása



- Kék és piros szögek: $C \cdot 360^\circ$
- Zöld szögek: $(L - 1) \cdot 360^\circ$

Az Euler-féle poliédertétel

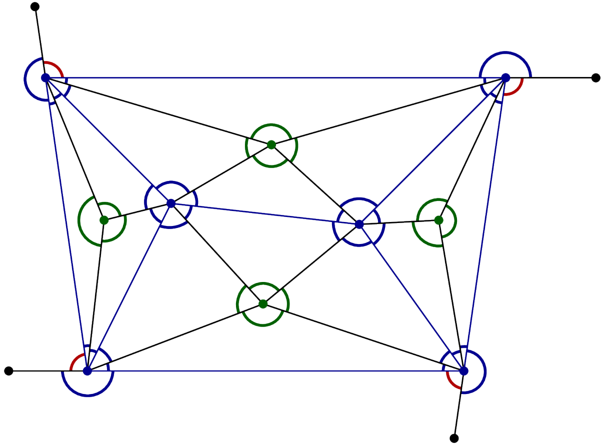
Utolsó lépés: a szögek kettős összeszámolása



- Kék és piros szögek: $C \cdot 360^\circ$
- Zöld szögek: $(L - 1) \cdot 360^\circ$
- Kék és zöld szögek: $E \cdot 360^\circ$

Az Euler-féle poliédertétel

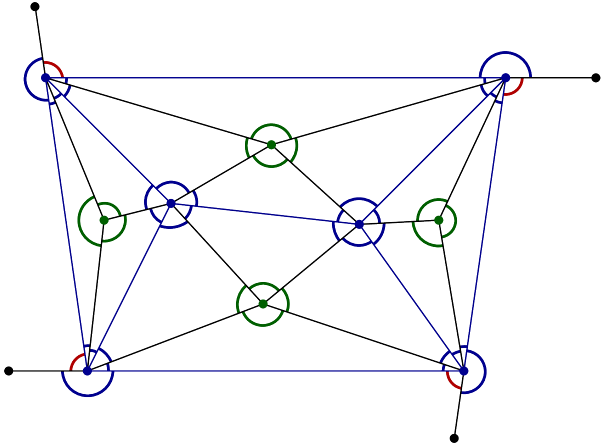
Utolsó lépés: a szögek kettős összeszámolása



- Kék és piros szögek: $C \cdot 360^\circ$
- Zöld szögek: $(L - 1) \cdot 360^\circ$
- Kék és zöld szögek: $E \cdot 360^\circ$
- Piros szögek összege 360°
  (A külső sokszög külső szögei)

Az Euler-féle poliédertétel

Utolsó lépés: a szögek kettős összeszámolása

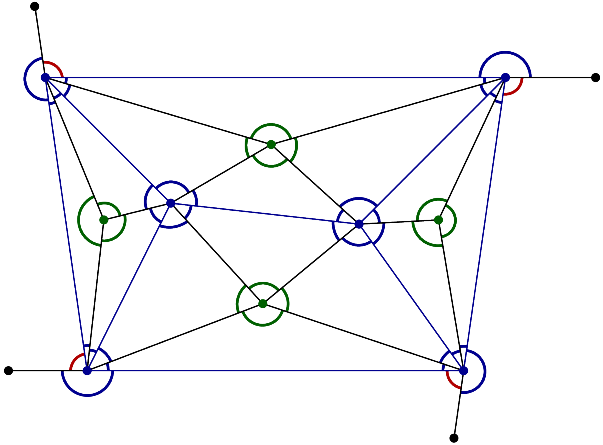


- Kék és piros szögek: $C \cdot 360^\circ$
- Zöld szögek: $(L-1) \cdot 360^\circ$
- Kék és zöld szögek: $E \cdot 360^\circ$
- Piros szögek összege 360°
  (A külső sokszög külső szögei)

$$C \cdot 360^\circ + (L-1) \cdot 360^\circ = E \cdot 360^\circ + 360^\circ$$

Az Euler-féle poliédertétel

Utolsó lépés: a szögek kettős összeszámolása



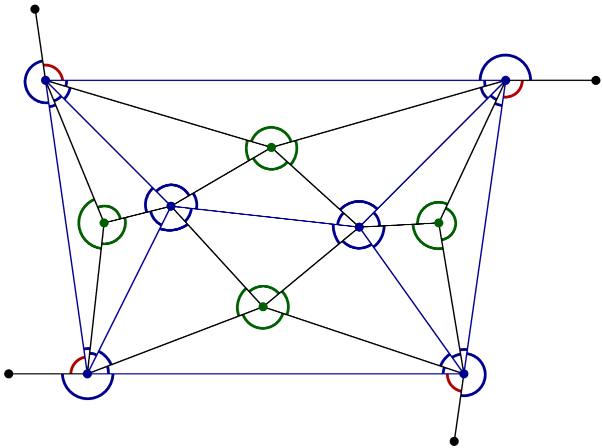
- Kék és piros szögek: $C \cdot 360^\circ$
- Zöld szögek: $(L - 1) \cdot 360^\circ$
- Kék és zöld szögek: $E \cdot 360^\circ$
- Piros szögek összege 360°
  (A külső sokszög külső szögei)

$$C \cdot 360^\circ + (L - 1) \cdot 360^\circ = E \cdot 360^\circ + 360^\circ$$

$$C + (L - 1) = E + 1$$

Az Euler-féle poliédertétel

Utolsó lépés: a szögek kettős összeszámolása



- Kék és piros szögek: $C \cdot 360^\circ$
- Zöld szögek: $(L-1) \cdot 360^\circ$
- Kék és zöld szögek: $E \cdot 360^\circ$
- Piros szögek összege 360°
  (A külső sokszög külső szögei)

$$C \cdot 360^\circ + (L-1) \cdot 360^\circ = E \cdot 360^\circ + 360^\circ$$

$$C + (L-1) = E + 1$$

$$\mathbf{C + L = E + 2}$$