

Matematika tanárok képzése
az Eötvös Loránd
Tudományegyetem
Természettudományi Karán



Tájékoztató a matematika tanárok képzéséről
az Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Természettudományi Karán



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

SZÉCHENYI 2020

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Érdekesnek találod a matematikát? Szívesen vagy emberek között? Szeretsz magyarázni, gyerekekkel foglalkozni? Akkor lehet, hogy a matematikatanári munka a nekedvaló, igazán érdekes és izgalmas lenne lenne számodra!

Ha most azt gondolod, hogy az esetleg túl nehéz neked, akkor megnyugtattunk, hogy az ELTE Természettudományi Karán például olyan képzés folyik, ami alkalmassá tud tenni erre a hivatásra. Bár jó, ha emelt szintű érettségit teszel matematikából, de ez nem feltétele annak hogy felvételt nyerjél erre a szakra.

A következő kis füzetben elmeséljük hogy hogyan épül fel ez a képzés, beleértve azt is, hogy milyen tantárgyakat lehet itt tanulni.

•

Ma Magyarországon az egyetemek kétszakos tanárokat képeznek. Ez azt jelenti, hogy a matematika mellé egy másik szakot is kell választanod, ami igen sokféle lehet. Második szaknak választhatsz egyebek mellett fizikát, biológiát vagy kémiát, de akár történelmet, angolt, németet vagy ének–zenét is.

A szakos tárgyak mellett pedagógiai és pszichológiai tantárgyak is vannak, ezeket a Pedagógiai és Pszichológiai Kar oktatói tanítják.

A matematika tanári képzés első három évében minden leendő matematika tanár ugyanazokat a tantárgyakat tanulja. A harmadik év végén a hallgató választhatnak, hogy általánosiskolai vagy középiskolai matematikatanár végzettséget kívánnak-e szerezni. Ez alapján kettéválík a képzés, más tárgyai lesznek az általános iskolai, és mások a középiskolai matematikatanári diplomát szerzőknek.

Az általános iskolai matematikatanári végzettséget összesen öt, a középiskolai matematikatanári végzettséget összesen hat év alatt lehet megszerezni. Az utolsó év mindkét esetben egy egyéves összefüggő egyéni iskolai gyakorlat. Ebben az évben az egyetemen már csak nagyon kevés órájuk van a diákoknak.

Az egyetemi órák „előadásokból”, „gyakorlatokból” és számítógépes gyakorlatokból állnak össze.

Az előadásokon a tanár az elméleti tananyagot mondja el, mutatja be.

A gyakorlatok kiscsoportos foglalkozások, tipikusan 15–20 fős csoportokkal. Ezeken a hallgatók az elméleti anyagot feladatokon keresztül dolgozzák fe, illetve konkrét helyzetekben alkalmazzák. Így jobban és mélyebben megértik azt, és közben a feladatmegoldó képességüket is fejlesztik. A diákok a feladatokon önállóan vagy kisebb csoportokba gondolkoznak, munkájukat a gyakorlatvezető tanár segíti.

Az előadó és a gyakorlatvezetők is tartanak úgynevezett konzultációkat. Ezek olyan – a tanórákon kívüli – alkalmak, amikor kötetlenül lehet tőlük kérdezni. Ezeken részt venni nem kötelező, de gyakran nagy segítséget jelenthet.

•

A továbbiakban részletesen ismertetjük, milyen tárgyak vannak a tanárszakon, ezek tematikáit is megmutatjuk.

A tematikákban szereplő sok új, ismeretlen fogalom, elnevezés ijesztő is lehet. :) De a tanítás során ezek az évek során fokozatosan kerülnek elő, és mindegyik úgy, hogy mire tananyag lesz, addigra már a szükséges előismeretek birtokába kerülnek a diákok. Így már sokkal kevésbé okoznak nehézségeket a hallgatóknak.

Az egyetemi oktatás féléves részekre tagolódik, tehát a tantárgyak – és velük együtt természetesen az órarend is – félévente változik. Így természetesen ez az ismertető is félévenként mutatja be az egyes tantárgyakat.

1. félév

A matematika tanári képzés az egyetem első félévében kezdődik, ekkor jobbra alapozó, egyszerűbb tárgyak vannak.

Bevezető analízis 1

Az analízis a matematika egyik ága, jobbra függvényekkel foglalkozik. Ez az első féléves tárgy a későbbi analízis tanulmányok megalapozására szolgál. Gondolkodási technikákkal, bizonyítási módszerekkel foglalkozik, de előkerülnek a függvények is, jelentős részben a középiskolás anyag felelevenítéseként, rendszerezéseként.

A félév tematikája

- logikai feladatok
- egyenlőtlenségek
- becslési technikák
- szöveges feladatok, bizonyítási módszerek
- függvények és ábrázolásuk, grafikonok.

Két feladat a félév anyagából:

1. Balkezes Bendegúz a bal kezével mindig igaz, a jobb kezével mindig hamis állításokat írt. Melyik kezével írta a következő állításokat?

- a) Minden 9-cel osztható négyzetszám osztható 3-mal.
- b) Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel és 4-gyel.
- c) Minden 8-cal osztható szám osztható 2-vel vagy 4-gyel.
- d) Minden 2-re végződő négyzetszám páratlan.
- e) A 0 páros szám.
- f) Van olyan piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked.
- g) Minden piros krokodil, amelyik éppen most ebben a teremben repked, 17-nél nagyobb prímszám.

h) A teremben hallgatók ülnek, az asztalon nyalókák vannak.

Ugyanazt jelenti-e a következő két mondat?

(a) Minden hallgatóhoz van olyan nyalóka, amelyiket szopogatott.

(b) Van olyan nyalóka, amelyiket minden hallgató szopogatott.

2. Ha hull a hó, akkor Micimackó fázik. Melyik mondat ennek a tagadása?

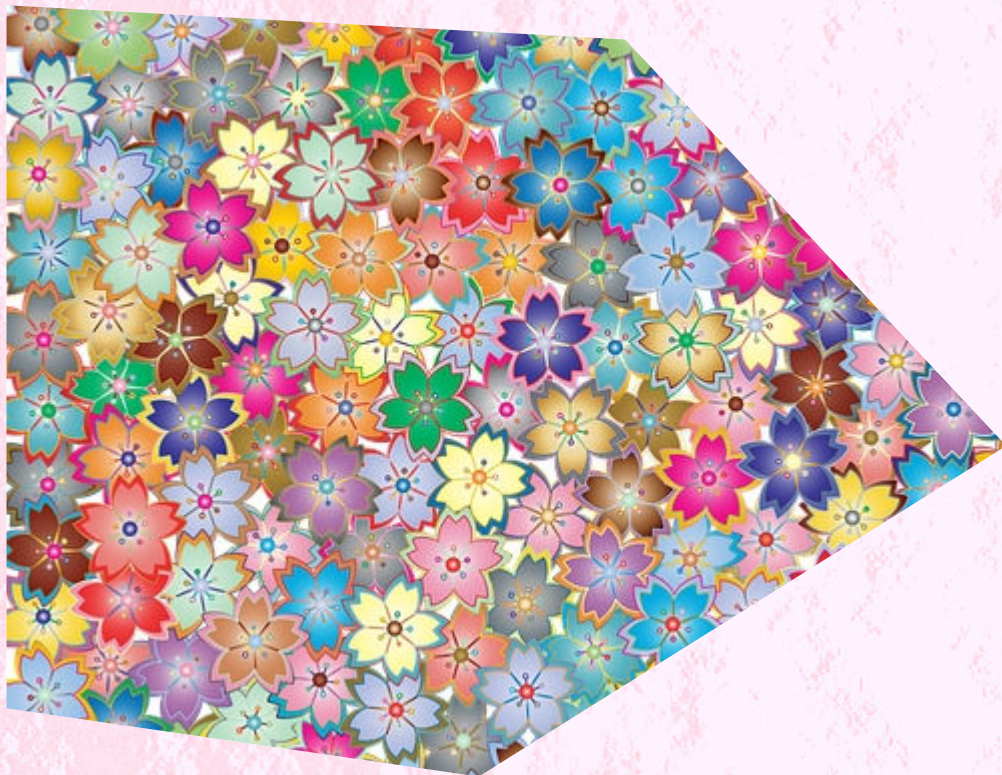
(a) Ha nem hull a hó, akkor Micimackó nem fázik.

(b) Ha Micimackó nem fázik, akkor nem hull a hó.

(c) Ha hull a hó, akkor Micimackó nem fázik.

(d) Ha nem hull a hó, akkor Micimackó fázik.

(e) Hull a hó, és Micimackó nem fázik.



Algebra és számelmélet 1

Az algebra is a matematika egyik ága. Beletartozik a különféle egyenletek megoldása, a matematikai műveletek tulajdonságainak és a különböző számhalmazoknak a vizsgálata is.

A számelméletet főleg az egész számok tulajdonságaival, oszthatósággal, és olyan egyenletek megoldásával foglalkozik, amikben csak egészek szerepelnek. Ide tartozik a prímszámokkal kapcsolatos vizsgálódások jelentős része is.

A félév tematikája:

- Egész számok oszthatósága, felbonthatatlan és prímszám, összetett szám, a páros számok számelmélete. Maradékosztás, euklideszi algoritmus, kítüntetett közös osztó és közös többszörös, prímek és felbonthatatlanok kapcsolata. A számelmélet alaptétele, kanonikus alak, ezek következményei.

- Kongruenciák, maradékosztályok, teljes és redukált maradékrendszerek. Számelméleti függvények: osztók száma és összege, Euler-függvény, ezek multiplikativitása, képleteik. Lineáris kongruenciák, lineáris kongruenciarendszerek, lineáris diofantikus egyenlet. oszthatósági szabályok (2, 4, 8, 5, 25, 3, 9, 11). Euler–Fermat-tétel, Wilson-tétel.

- Elemi algebrai azonosságok: két tag összegének (különbségének) négyzete, köbe. Az n -edik hatványok különbségének szorzattá alakítása, mértani sorozat. A racionális kitevőjű hatvány fogalma, a hatványozás azonosságai. Mersenne-prímek, Fermat-prímek, tökéletes számok. Végtelen sok $4k-1$ alakú prím létezése, Dirichlet tétele (bizonyítás nélkül). Hézagtétel. Pitagoraszai számhármak, Fermat problémakör. Rend, tulajdonságok, hatványrendje. Mersenne- és Fermat-számok osztói. Nevezetes számelméleti problémák.

- Oszlopvektorok, mátrixok, összeg, szorzat, transzponált, ezek tulajdonságai.

Két feladat az első félév anyagából:

1. Igazoljuk, hogy két szomszédos egész szorzata mindig osztható 2-vel, és hogy három szomszédos egész szorzata mindig osztható 6-tal!
2. A gonosz boszorkány fogott egy számot és kivonta belőle a számjegyeinek összegét. Az így kapott számmal ezt megismételte, majd újra és újra elvégezte ezt a műveletet. Egyszer valaki megkérdezte, hol tart, és azt mondta, hogy épp 2009-et kapott. Bizonyítsd be, hogy a boszorkány hazudik!



Véges matematika 1

A véges matematika olyan ága a matematikának, ahol sok kérdés arra vonatkozik, hogy hányféleképpen lehet bizonyos dolgokat kiválasztani, megalkotni a többiből. A középiskolában valószínűleg találkoztál már olyan kérdésekkel, hogy hány lottószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen öttalálatosod, vagy hogy hány zoknit kell kivenni a sötétben a dobozból, amiben csak fehér, fekete és kék zokni van, hogy legyen egy pár egyforma színű zoknid. Ilyen típusú kérdésekkel a véges matematika foglalkozik. De ugyanehhez a területhez tartozik a gráfok vizsgálata is.

A félév tematikája

- Leszámlálási alapfeladatok: permutációk, variációk, kombinációk ismétlés nélkül és ismétléssel. Alapötletek leszámplálási feladatok megoldására: egymás utáni döntések, „Dobjuk ki a rosszat” elv alkalmazásai. A többszöri megszámlálás korrekciója („tehén-szabály”). Logikai szitaformula és változatai, mint a „Dobjuk ki a rosszat” elv általánosítása. Rekurziós okoskodások, Fibonacci-számok, ezekre vezető kombinatorikai feladatok. A skatulyaelv és alkalmazásai kombinatorikai és geometriai feladatokban.

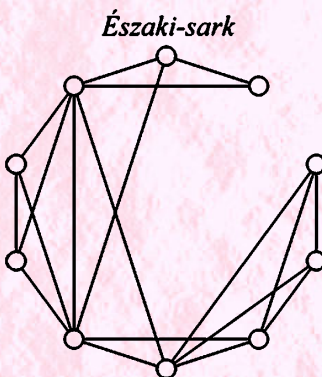
- Binomiális együtthatók, azonosságok binomiális együtthatókra. Kitalálós játékok: a Barkochba és változatai, hamis pénz kitalálása. Módszerek lehetetlenség igazolására: színezések, számozások.

- Gráfok fogalma, hurokél, többszörös él, egyszerű gráfok. Pontok fokszáma és élek száma közti összefüggés, és alkalmazásai. Egy speciális eset:páros gráfok, a fokszám-összefüggés páros gráfokra. Részgráfok, feszített részgráfok. Séták, vonalak, utak, körök és kapcsolatok. Összefüggő és nem összefüggő gráfok: komponensek (a „komponenstétel”). Fák és erdők, élszámuk meghatározása. A „königsbergi hidak problémája”: Euler-vonal, illetve körvonal létezésének szükséges és elégséges feltétele. Irányított gráfok, turnamentek. Az Euler-tétel megfelelője irányított gráfokra (biz. nélkül). Hamilton-körök és Hamilton-utak, szükséges feltétel létezésükre. Elégséges feltétel(ek) Hamilton-körök és Hamilton-utak létezésére (bizonyítás nélkül),

összefüggőségi és útkereső algoritmusok: részletesen csak a szélességi bejárás. Síkgráfok, Euler-formula (bizonyítás nélkül), Kuratowski tétele (bizonyítás nélkül). Síkgráfok élszáma. Gráfszínezések, kromatikus szám: kapcsolat a maximális fokszámmal és a legnagyobb teljes részgráf méretével. Síkgráfok színezése: a hatszintétel.

Két feladat a félév anyagából:

1. Az alább látható gráfban a csúcsok városok (illetve az Északi-sark), az élek pedig légfolyosók.



Igazoljuk, hogy a Mikulás az Északi-sarkról indulva nem tudja úgy kihordani az ajándékokat a városokba, hogy minden városban pontosan egyszer járjon, és munkája végeztével az utolsó városból közvetlenül hazarepüljön.

2. A Vidámparkban 12 barát ül fel a körhintára. Panni, Léna és Eszter mindenképp egymás mellé szeretnének kerülni, viszont Cili nem hajlandó Léna mellé ülni. Hányféleképpen ülhetnek fel?

Problémamegoldó gyakorlat

Ez a tárgy csak az első félévben van. Ennek keretében nagyon vegyes, de általában csak általános iskolai matematikai ismereteket használó feladatokat oldanak meg a hallgatók. Cél, hogy minél több olyan érdekes, szórakoztató feladat kerüljön terítékre, amiken keresztül a diákok matematikai gondolkodása fejlődik.

A félév tematikája:

- A tantárgy célja a hallgatók problémamegoldási képességének fejlesztése, feladatmegoldási rutin kialakítása, illetve növelése.
- A különböző megoldási módok, bizonyítási módszerek elemzése, gyakorlása, összehasonlítása.
- A tantárgy keretében a hallgatók olyan elemi feladatokkal ismerkednek meg, amelyek a magyar matematikai kultúra részét képezik, de szorosan véve nem tartoznak egy konkrét matematikai ághoz. (Érdekes matematikai feladatok, logikai feladatok, fejtörők, stb.).
- A tantárgyon belül hangsúlyt kapnak az alkalmazás-közel feladatok, illetve az olyan feladatok, melyek segítenek a különböző gondolkodási csapdákat felismerni és elkerülni.

Két feladat a félév anyagából:

1. Legfeljebb hány bástya, illetve királynő helyezhető el egy sakk-táblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?
2. Egy vándor betér egy fogadóba. Pénz nincs nála, de van egy 7 láncszemből álló (nyílt) aranylánca. 7 napig akar megszállni a fogadóban. A fogadóssal megegyeznek, hogy naponta 1 láncszemért lakhat a fogadóban. A vándor azonban kiköti, hogy előre nem fizet, a fogadós meg azt, hogy a vándornak minden nap rendeznie kell az aktuális számláját. Legkevesebb hány láncszemet kell elvágni a fogadós csípőfogójával, hogy a megállapodás szerint tudjon fizetni a vándor? (A láncszem elvágásával annak értéke természetesen nem csökken. Egy láncszemet akár több darabra is szabad vágni.)

2. félév

A matematika tanári képzés az egyetem első félévében kezdődik, ekkor jobbra alapozó, egyszerűbb tárgyak vannak. Az első év második félévében a tantárgyak nagy része folytatódik, de van, ami csak most kezdődik el.

Folytatódik például a Bevezető analízis.

Bevezető analízis 2

Folytatódik a bevezető analízis című tárgy. Ebben a félévben már több új ismeret is előkerül, ár sok minden ismerős lesz azoknak, akik emelt szinten érettségiztek matematikából. A félév anyaga nagyrészt a sorozatokkal kapcsolatos.

A félév tematikája:

- Valós számok tulajdonságai.
- Sorozatok határértéke, kapcsolat műveletekkel és rendezéssel.
- Monoton sorozatok,
- az e szám,
- részsorozatok,
- Bolzano–Weierstraß-tétel,
- Cauchy kritérium.
- Sorok konvergenciája, kritériumok.
- Nevezetes sorozatok és sorok.
- Valós kitevőjű hatványozás, logaritmus.

Két feladat a félév anyagából:

1. Mennyi a maximuma a $g(x)=x(1-x)^3$ függvénynek a $[0;1]$ intervallumon?

2. Lehet-e periodikus, lehet-e monoton, lehet-e páros az a függvény, amelyiknek az értelmezési tartománya

a) $(-3; 3)$

b) $[-3; 3]$

c) $(-4; 5)$

d) $(-\infty; \infty)$?



Az Algebra és számelmélet című tárgy is folytatódik.

Algebra és számelmélet 2

Folytatódik az Algebra és számelmélet című tárgy is. Ebben új számkörök kerülnek elő, például a komplex számok.

A félév során nagy hangsúly kerül a különféle egyenletek megoldhatóságára és megoldási módjaira. A középiskolai anyagban szereplőknél több, illetve magasabb kitevőkön szereplő ismeretleneket tartalmazó egyenleteket is sikerül megoldani, például harmad- és negyedfokú egyenleteket is..

A félév tematikája:

- Komplex számok: műveletek, nullosztómentesség, konjugált, abszolút érték, négyzetgyökvonás. Trigonometrikus alak, hatványozás és gyökvonás, egységgyökök, primitív egységgyökök. Alkalmazások geometriai feladatok megoldására. A komplex számok testet alkotnak. Példák testekre. Lineáris egyenletrendszer test fölött, Gauss-elimináció (gyakorlaton), mátrix inverzének kiszámítása.

- A test fölötti polinom fogalma. Egyenlőség, főegyüttható, normált polinom. Összeadás, nullapolinom, kivonás, szorzás. Nem nulla polinom foka, a fokszám változása a műveleteknél. Polinom gyöke, a Horner-elrendezés, a gyöktényező kiemelhetősége. A gyökök maximális száma, a polinomok azonossági tétele végtelen test fölött. Polinomfüggvény és polinom kapcsolata. Gyök multiplicitása, gyöktényező alak. Lagrange-interpoláció. Egész együtthatós polinom racionális gyökeinek meghatározása. A gyökök és együtthatók összefüggése. Többhatározatlanú polinomok, a szimmetrikus polinomok alaptétele (bizonyítás nélkül), hatványösszegek. A polinomiális tétel.

- A harmadfokú egyenlet, Cardano képlete, ebben a köbgyökvonás helyes elvégzése, Casus Irreducibilis. A negyedfokú egyenlet (csak vázlat). Speciális harmad- és negyedfokú egyenletek.

Abszolútértékes egyenletek. Gyökös egyenletek. Két és három ismeretlenes egyenletrendszerek. Racionális törtfüggvények, parciális törtekre bontás.

Két feladat a félév anyagából:

1. A gonosz boszorkány egy 77 ismeretlenes 79 egyenletből álló egészegyütthatós egyenletrendszerről azt mondta, hogy nincs racionális megoldása, de az $x_k = k$? 2 számok ($k = 1, 2, \dots, 77$) megoldást alkotnak. Bizonyítsd be, hogy a boszorkány hazudik!

2. Egészítsük ki az alábbi szöveget magánhangzókkal értelmes szöveggé, majd oldjuk meg az így kapott feladatot:

Lgynk gy hrmszg ldl z $x^3 - ax^2 + bx - c$ plnm gyk. Htrzz mg hrmszg krltt s trltt!



Új tantárgy a második félévben a geometria első félévé.

Bevezetés a geometriába

A geometria is olyan ága a matematikának, ami az általános- és középiskolai matekórákról már ismerős lehet. Ebben a félévben rendszeresen kerülnek elő a korábban már tanul anyagrészek, és új ismeretekkel is kiegészülnek. A félév anyaga az úgynevezett „klasszikus” geometria részét képezi pontokról, egyenesekről síkidomokról, testekről és szerkesztésekről lesz szó.

A félév tematikája:

- Tételek kölcsönös helyzete és párhuzamossága. Szög, töröttvonal, poligonális összefüggőség, sokszög. Egybevágósági transzformációk, egybevágó alakzatok. A szög mérése. Két tételek hajlásszöge és távolsága. A merőleges vetítés.

- Párhuzamos szelők és szelőszakaszok tétele. Középpontos hasonlóságok. Alakzatok hasonlósága.

- Elemi tételek háromszögekre, sokszögekre és körökre. Síkgeometriai feladatok szintetikus megoldása. Euklideszi szerkesztés, nevezetes szerkesztések. Az ellipszis, a hiperbola és a parabola, mint nevezetes síkbeli alakzatok.

- Konvex alakzatok. Ponthalmaz konvex burka. Sokszögek konvexitásának ekvivalens feltételei. Szabályos sokszögek. A konvex poliéder fogalma. A konvex poliéder lapjainak, éleinek és csúcsainak származtatása. Euler tétele konvex poliéderekre. Lapszög. Szabályos poliéderek.



Szintén új tantárgy az Elemi matematika.

Elemi matematika 1

Az elemi matematika kifejezetten a hallgatók majdani tanítását segítő tantárgy. Az órákon feladatokon keresztül dolgozzák fel az általános- és középiskolai matematika anyag különböző területeit. A tárgy nevében az „elemi” azt jelenti, hogy a feladatok megoldásához elegendő elemi matematikai eszközöket használni, vagyis szinte sosem kell több matekot tudni hozzájuk, mint az érettségi anyaga. A feldolgozás során a feladatok megoldásán túl nagy szerepet kap az anyagrészek és ezen belül az egyes feladatok taníthatósága, tanítása. Előkerül, hogy mi módon lehet továbbgondolni az egyes feladatokat, mi módon lehet egy témához feladatokat készíteni, de arról is sok szó esik, milyen problémák, nehézségek jelentkezhetnek az egyes feladattípusok tanítása során.

Az Elemi matematika 1. fő témaköre a számelmélet, vagyis a félév során főleg oszthatósággal, prímeikkel és egészegyütthatós egyenletekkel kapcsolatos feladatok fordulnak elő.

A félév tematikája:

- Feladatmegoldó szeminárium a gondolkodási módszerek, elemi számelmélet témakörében. Indoklások érvelések, szemléletes bizonyítások.

- Problémamegoldási stratégiák (invariancia elv, becslés, szisztematikus próbálgatás, skatulyaelv, indukció, analógia).

- Számelméleti alapfogalmak (oszthatóság; oszthatósági szabályok; számrendszerek; legnagyobb- és kitüntetett közös osztó, közös többszörös; felbonthatatlan szám, prímtulajdonság; osztók száma, osztók összege, maradékosztályok, egyszerű diofantoszi egyenletek) megértését és elmélyítését szolgáló feladatok, játékok, rejtvények és „bűvésztükkök”.

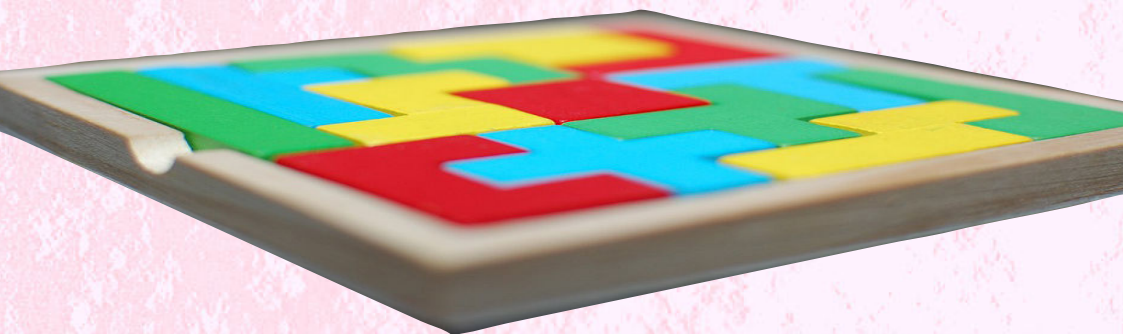
Két feladat a félév anyagából:

1. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, . . . , 1999, 2000 számokat (az első 2000 darab pozitív egészet). Ezek közül két tetszőleges számot letöröltünk, és helyettük a különbségüket írtuk fel. Ezt az eljárást addig ismételtük, amíg egyetlen szám maradt. Páros ez, vagy páratlan?

2. **(A tétova szultán)** Egy szultánnak a börtönében 100 rab sínylődött, magánzárkákban. (Egytől százig számozott cellákban.) Egy nap a szultánnak eszébe ötlött, hogy nini, épp 100 nap múlva lesz a születésnapja. Nyomban utasította is a börtönőrt, hogy nyissa ki minden rab celláján a zárat. (A cellákon olyan zár van, amelyeken egyet fordítva a zár nyitva lesz, újabbat fordítva visszazárul, megint egyet fordítva ismét nyitva stb.) A börtönőr ezt meg is tette, de minthogy a zárok jól karbantartottak voltak, ez oly csendben történt, hogy a rabok ebből mit sem vettek észre, és üldögéltek (járkáltak, áll-dogáltak, heverésztek, matekpéldákat oldottak stb) tovább a cellájukban.

Másnap a szultán arra gondolt, hogy ez azért mégis csak túlzás, így egy darab rabja sem marad, ezért utasította a börtönőrt, hogy minden második cella zárján fordítson egyet, vagyis ezeket a rabokat zárja vissza. Harmadnap ebben is elbizonytalanodott, és szól az őrnök, hogy most meg minden harmadik cella zárján fordítson egyet. Negyedik nap ismét elbizonytalanodott... Stb.

A születésnapja előestéjén leszóltak a cellákba a raboknak, hogy akinek nyitva van a cellája, az elmehet szabadon. Hányas számú cellákból szabadultak ki a rabok?



3. félév

A második év első félévében mindössze három matematikai tárgy szerepel a tanárszakosok képzésében. Folytatódik az *Analízis*, a *Geometria* és az *Elemi matematika*, míg az *Algebra és számelmélet* csak két félévnyi kihagyás után fog folytatódni.

Egyváltozós analízis 1

Ez a tárgy a két Bevezető analízis folytatása. Azok, akik a középiskolában emelt szinten tanulták a matematikát, sok ismerős fogalommal, tétellel találkozhatnak ebben a félévben.

A félév tematikája:

- Egyváltozós függvények folytonossága és határértéke, átviteli elv.
- Határérték és műveletek.
- Nevezetes határértékek.
- Folytonos függvények tulajdonságai.
- A differenciálhányados.
- Műveletek és elemi függvények deriváltjai.
- Monotonitás, konvexitás, szélsőértékek és inflexiós pontok.
- Taylor polinom és Taylor sor.
- A gyökkeresés Newton féle módszere.

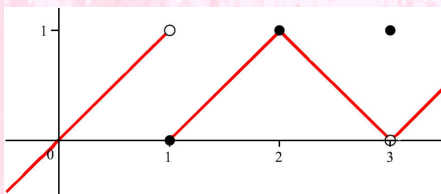
Két feladat a félév anyagából:

1. Határozzuk meg a következő függvények határértékeit a ∞ -ben és a $-\infty$ -ben!

a) $\frac{2x + 3}{5x + 7}$

b) $\frac{2x^2 - 7x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$

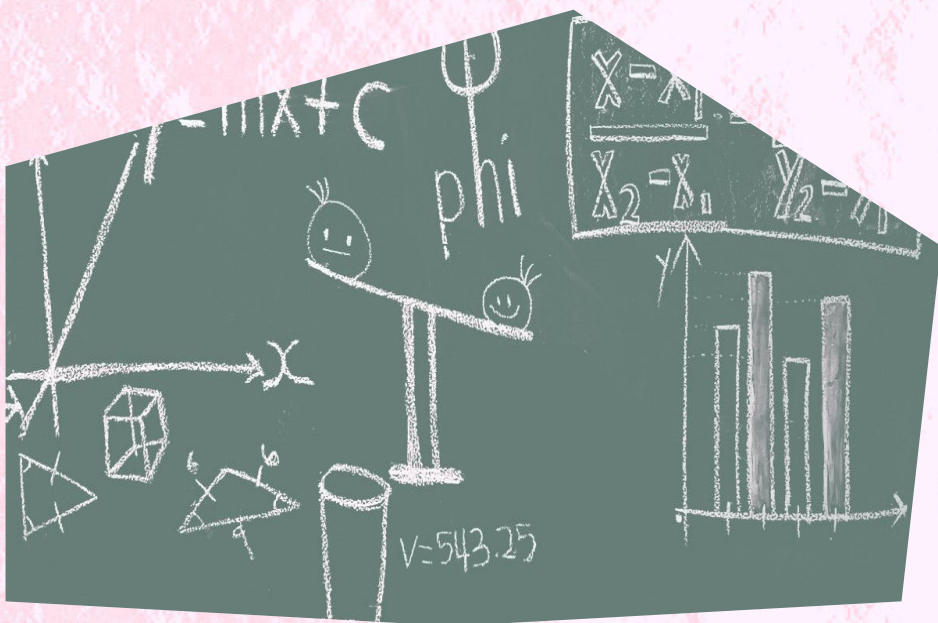
2. Az ábrán látható $f(x)$ függvény grafikonja alapján döntsük el, hogy léteznek-e az alábbi határértékek, és ha igen, adjuk meg ezt az értéket!



a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$



A Geometria ebben a félévben Analitikus geometria néven folytatódik. A középiskolában koordináta-geometria néven tanultatok hasonló dolgokról.

Analitikus geometria

A félév során vektorok segítségével bevezetik a koordinátákat, majd sor kerül a koordináták bevezetésére. Újdonság a középiskolához képest, hogy nem csupán a sík, hanem a tér néhány alakzatának az egyenletével is megismerkednek. Ugyancsak érdekes új tananyaga a félévnek a gömbi geometria néhány fogalma, tétele.

A félév tematikája:

- A szabad vektorok, mint irányított szakaszok ekvivalencia-osztályai. Vektorok összeadása. Vektor szorzása számmal. Lineáris kombináció. Ortonormált bázis, a vektorok koordinátái.

- A sík koordinátázása. A sík irányítása, elforgatás síkban, a szögfüggvények értelmezése. Két vektor skaláris szorzata, műveleti tulajdonságok. A tér irányítása. Két vektor vektoriális szorzata, műveleti tulajdonságok. A szorzat kifejezése a két vektornak egy ortonormált bázisra vonatkozó koordinátáiból. A kifejtési tétel. Három vektor vegyes szorzata. A vegyes szorzat geometriai jelentése. A felcserélési tétel.

- Síkbeli alakzatok egyenletei. Az ellipszis, a hiperbola és a parabola kanonikus egyenlete. A tér koordinátázása. Az egyenes paraméteres vektoregyenlete. A sík egyenlete, a gömb normálegyenlete. Távolság- és szögfeladatok analitikus megoldása. Pont körre és gömbre vonatkozó hatványa, a hatvány és a normálegyenlet kapcsolata. Hatványvonal, hatványsík.

- Távolság és hajlásszög a gömbfelületen. A gömbháromszög oldalai és szögei. A gömbi szinusztétel és a koszinusztételek. A gömbi háromszög-egyenlőtlenség.

- A kollineáris ponthármak osztóviszonya. A súlyozott pontrendszer súlypontja. Baricentrikus koordináták. A háromszög néhány nevezetes pontjának előállítása a csúcsok súlypontjaként. Ceva és Menelaosz tételei.

- Alakzat konvex burkának előállítása súlypontokkal.

Elemi matematika 2

Akárcsak az *Elemi matematika 1* tantárgy, ez is azt a célt szolgálja, hogy kapcsolatot teremtsünk az egyetemen tanult és az iskolában használt matematikai ismeretek között, valamint hogy az egyetemen tanultak alapján fejlesszük a feladatmegoldó rutinunkat. Ennek a félévnek a fő témája a kombinatorika, illetve a kombinatorika más matematikai témákkal való kapcsolata, például a geometriával vagy a számelmélettel. Az elsőhöz tartozik például az a kérdés, hogy hányféle különböző háromszög vehető fel egy szabályos hatszög csúcsain, ha az egybevágókat nem tekintjük különbözőnek. A másodikhoz meg olyasmik, mint például az, hogy hányféleképpen lehet pozitív egész számokból képezett összegként felírni egy adott számot.

A félév hivatalos tematikája:

- Kombinatorikai alapeseteket bevezető feladatsorok.
- Ismétléses, ismétlés nélküli kérdések.
- Rendezett és rendezés nélküli esetek.
- Leszámoláson alapuló szöveges feladatok.
- Logikai szita segítségével megoldható feladatok.
- Kombinatorikus számelméleti, geometriai problémák.
- A valószínűségszámítást előkészítő feladatcsoportok.
- A skatulyaelvet használó feladatcsoportok.
- Néhány kombinatorikus algoritmussal kapcsolatos feladat.
- Egész számok színezéseivel kapcsolatos feladatok.
- Az egyszerűbb Van der Waerden számok meghatározása.
- Válogatott versenyfeladatok a kombinatorika témakörében.
- Gráfelméleti bevezető feladatok.
- Szöveges feladatok megfogalmazása a gráfelmélet nyelvén.
- Fokszámmal, élszámmal kapcsolatos feladatok
- Néhány klasszikus feladat a gráfok körében.
- Gráfok összefüggősege.
- Fagráfok.

- Néhány kémiai kérdéssel kapcsolatos feladat.
- Irányított gráfok.
- Síkba rajzolhatóság.
- Néhány elemi feladat a kereszteződési számmal kapcsolatban.
- Gráfok színezése.
- Ramsey-típusú feladatok.
- Euklidészi–Ramsey feladatok a síkon, a térben.

Két feladat a félév anyagából:

1. A sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarokba hányféle útvonalon juthat el a jobbra vagy felefelé egy lépést tevő bábu?
2. Bizonyítsuk be, hogy egy hattagú társaságban vagy van mindig három ember, akik ismerik egymást, vagy van három, akik nem ismerik egymást!



4. félév

A negyedik félévben is csak három matematikai tárgy szerepel a képzésben, mindegyik előző félévi tantárgyak folytatása.

Egyváltozós analízis 2

Az analízis előző félévében a tananyaggal a differenciál-számításig, illetve annak néhány alkalmazásáig jutottak el. A folytatás ebben a félévben az integrálszámítás és annak néhány alkalmazása. Itt is sok dolog ismerős lehet a matematikát a középiskolában emelt szinten tanulóknak.

A félév tematikája:

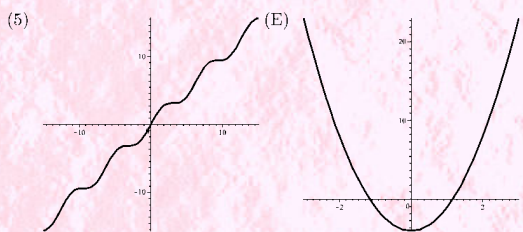
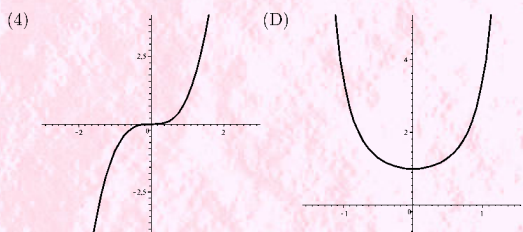
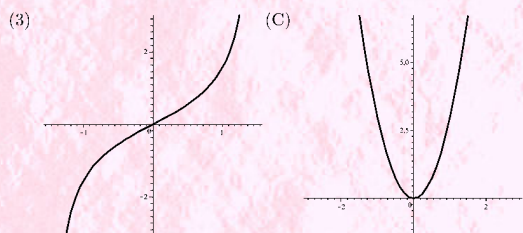
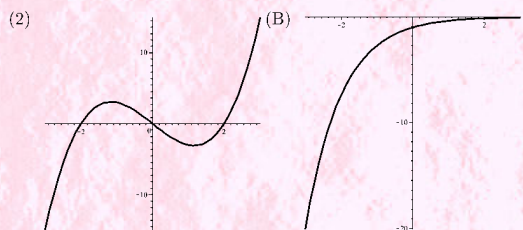
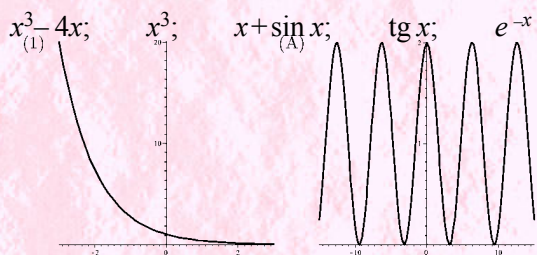
- Egyváltozós függvények integrálja.
- Alsó és felső integrál, Riemann integrál.
- Aaptulajdonságok, folytonos függvények integrálhatósága.
- A Simpson és a trapézmódszer.
- Primitív függvény, integrálási módszerek.
- Integrálfüggvény, Newton–Leibniz-tétel.
- Integrálszámítás alkalmazásai: terület-, térfogat- és ívhossz-számítás.
- Kitekintés: improprius integrál.

Két feladat a félév anyagából:

1. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat!

$$\text{a) } \int (1 + x + 5x^2) dx \quad \text{b) } \int \sqrt{x+2} dx$$

2. A következő függvényeket a baloldali oszlopban, deriváltjaikat a jobboldali oszlopban ábráztuk. Keressük meg őket!



Geometriai transzformációk

A negyedik félévi geometria anyag – mint a címe is mutatja – főleg a transzformációkkal foglalkozik. Magában foglalja a középiskolában már megismert tükrözések, elforgatások, eltolások és hasonlóságok részletesebb vizsgálatát és leírását. De ki is egészül további transzformációkkal, például az affinitással és az inverzióval. Ugyanebben a félévben kerül sor a síkidomok kerületének és területének, és bizonyos testek felszínének és térfogatának meghatározására.

A félév tematikája:

- A sík irányítástartó és irányításváltó egybevágóságai. A síkbeli egybevágóságok osztályozása. A tér egybevágósági transzformációi. Az egybevágóságok analitikus leírása. Hasonlósági transzformációk síkban és térben. A síkbeli forgatva nyújtás és tükrözve nyújtás, a sík hasonlóságainak osztályozása.

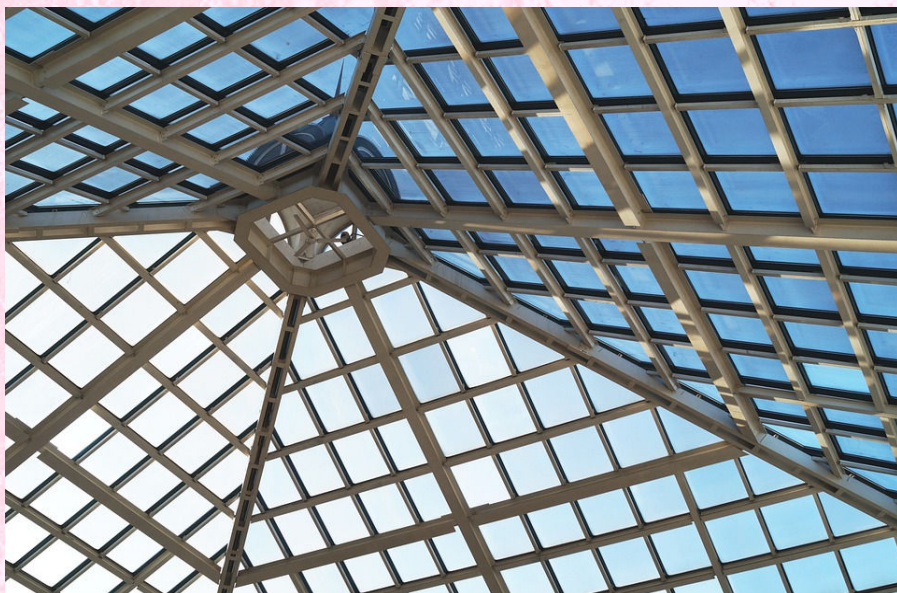
- Két sík közötti paralel vetítés tulajdonságai. A paralel vetülettel való ábrázolás. Az affin transzformációk és azok jellemzése. A síkbeli tengelyes affinitások. A síkbeli affinitás analitikus leírása. A síkbeli affinitás egyértelmű megadása nem kollineáris ponthármakkal. A geometriai transzformációk által alkotott csoportok és részcsoporthajk.

- A korlátos konvex síkidomok kerülete. A kör kerülete, a körív hossza. A sokszögek területe. Az elemi területfogalom korlátos síkidomokra. A körlemez területe. A poliéderek térfogata. Az elemi térfogatfogalom korlátos testekre. A Cavalieri-féle elv. A gömb térfogata. A transzformációk hatása a területre és a térfogatra. Korlátos konvex test felszínének értelmezése. A gömb felszíne. A gömbkét-szög és a gömbháromszög felszíne.

- Az inverzió fogalma síkban és térben. Egyenesek, körök, síkok és gömbök inverzióval nyert képei. Az inverzió szögtartó tulajdonsága. A sztereografikus vetítés. Szerkesztési feladatok megoldása a síkbeli inverzió alkalmazásával.

Egy összefoglaló táblázat négy transzformációtípusról:

	irányítástartó	irányításváltó
van fixpont	forgatás	tükrözés
nincs fixpont	eltolás	csúsztatva tükrözés



Elemi matematika 3.

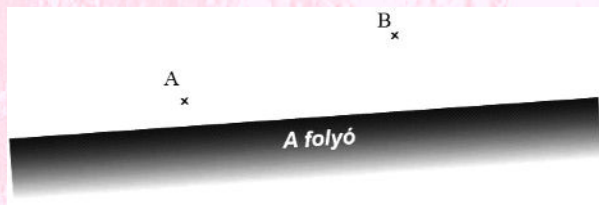
Ez a félév is a matematika majdani tanítását, az egyetemi és a középiskolai ismeretek összekapcsolását hivatott segíteni. Ebben a félévben ez geometriai feladatok megoldása és vizsgálata segítségével történik. A félév során klasszikus és koordináta-geometria feladatok egyaránt előkerülnek.

A félév tematikája:

- Elemi geometria szintetikus és analitikusan.
- A magyarországi feladatorientált matematikatanítási tradíciónak megfelelően az általános és középiskolai matematika tananyag geometria témaköreinek prototípus (a probléma-megoldási folyamatok indító, kidolgozási és elmélyítő) feladatait, jellegzetes megoldásait és a különböző megoldási módok összehasonlítását dolgozzuk fel.
- A problémamegoldások során a középiskolában és az egyetemen szerzett ismeretek reflektált alkalmazására, ezen belül kiemelten a különböző elemi és nem elemi megoldások összehasonlítása kerül sor.
- Adott feladat lehetséges variációi közül a hagyományosan is gyakran alkalmazott általánosítás mellett további variációk készítése is szerepel.

Két feladat a félév anyagából:

1. Jancsi szeretne eljutni a falujából (A) Juliskához (B), de út közben meg kell itatnia a lovát is, vagyis kerülni kell tennie a folyóparthoz. Merrefelé menjen, hogy a lehető legrövidebb úton célhoz érjen.



2. Hol a hiba a következő gondolatmenetben? Vegyük fel a síkon az A, B, C, D pontokat úgy, hogy ne legyenek egy körön, továbbá, az A, B és C, D pontpárok ne legyenek párhuzamos egyeneseken. Ekkor az AB szakasz felezőmerőlegese és CD szakasz felezőmerőlegese metszik egymást egy O pontban, de ez az O egyenlő távolságban van az A -tól és B -től – hiszen rajta van AB felezőmerőlegesén – és ugyanilyen oknál fogva C -től és D -től is, így O egyenlő távolságra van mind a négy ponttól, ezért van olyan O középpontú kör, amely tartalmazza a pontokat, holott ezeket úgy vettük fel, hogy ne legyenek egy körön.



5. félév

A harmadik év az utolsó, amelyben még ugyanazt tanulják azok is, akik középiskolai, és azok is, akik általánosiskolai matematika tanárnak készülnek. Az ötödik félévben visszatér az *Algebra* és *számelmélet* című tantárgy, és új tárgyként megjelenik a *Valószínűségszámítás* és az *A matematika tanítása*.

Valószínűségszámítás

A valószínűségszámítás a tanárszakos képzésben nem csupán a kombinatorikus, hanem egyéb valószínűségek kiszámolását is magába foglalja. E tárgy keretében tanítják a statisztika alpfogalmait is, a különféle eloszlásokat is.

A félév tematikája:

- Statisztikai mintavétel, statisztikai alapfogalmak – átlag, szórás, medián, kvantilis.
- Elemi valószínűség-számítás:
- A diszkrét modell.
- Geometriai valószínűség.
- Valószínűségi változók, eloszlások.
- Statisztikai következtetés, első- és másodfajú hiba.
- Feltételes valószínűség.
- A nagy számok törvénye.
- Egyszerű véletlen minta határeloszlása.
- Bolyongási problémák.
- Matematikai játékok, rejtvények.

Algebra és számelmélet 3

A félév során a korábbiaknál elvontabb fogalmak kerülnek elő algebrából. Kiderül – ami egyébként már középiskolában is látható lehetett volna, csak ott nem kapott ekkora hangsúlyt –, hogy nem csak számok között lehet műveleteket végezni – például szorzást –, hanem egyéb matematikai objektumok között is.

Megjelennek itt is a geometriából egy évvel korábban tanult vektorok, sőt a korábbinál általánosabb értelmet is nyernek.

A félév tematikája:

- A permutáció fogalma. Kompozíció, inverz. Inverzió, permutáció paritása (előjele) és ciklusfelbontása. A rend és az előjel leolvasása a ciklusfelbontásról. Az előjelek szorzástétele, a páros permutációk száma. A determináns definíciója, tulajdonságai (linearitás, oszlopcsere, transzponált). Kiszámítás Gauss-eliminációval. Vandermonde-determináns. A determinánsok szorzástétele. Előjeles aldetermináns, a kifejtési tétel. A ferde kifejtési tétel, az inverz mátrix képlete. Balinverz és jobbinverz kapcsolata.

- Vektortér, altér, függetlenség, generátorrendszer, bázis, dimenzió. Altérak összegének dimenziója, direkt összeg. Vektor koordinátái adott bázisban. Lineáris leképezések, transzformációk, műveletek, előírhatósági tétel, mátrixuk. Bázistranszformáció. Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, determináns. A determináns és a térfogat. Lineáris transzformáció invertálhatóságának jellemzői, nullosztók. Mátrix sor- és oszloprangjának egyenlősége. Szorzat rangja. Lineáris egyenletrendszer és a rang kapcsolata, Cramer-szabály.

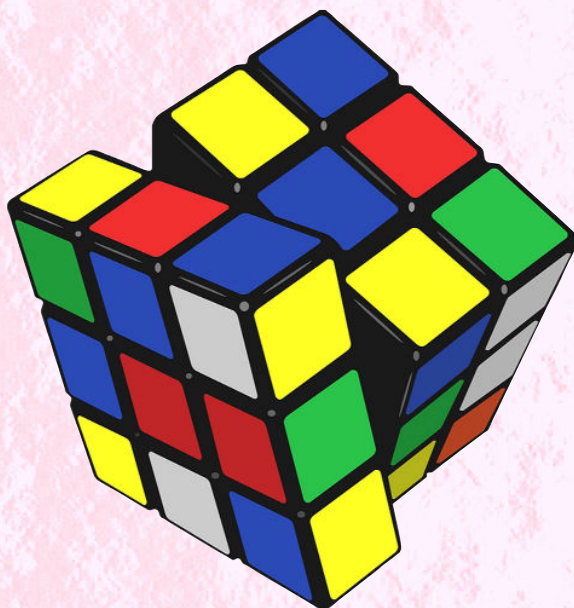
- Maradékos osztás polinomok között, euklideszi algoritmus, kitüntetett közös osztó. Az algebra alaptétele (bizonyítás nélkül). Irreducibilis polinomok test fölött, az irreducibilitás és a gyökök kapcsolata másod-, harmad- és magasabb fokú polinomok esetében. Az irreducibilis polinomok leírása komplex és valós fölött. Sajátérték, sajátvektor, karakterisztikus polinom, diagonalizálhatóság,

alkalmazások. Mátrix és transzformáció minimálpolinomja, Cayley-Hamilton-tétel, Jordan-alak (bizonyítás nélkül).

- A csoport fogalma, példák: mátrixok, szimmetrikus csoport, diéder- és kvaterniócsoport. A hatványozás azonosságai. Elemrend, ciklikus csoportok, izomorfia. Részcsoport, mellékosztály, Lagrange-tétele. Permutációcsoport, orbit, stabilizátor, leszámlálások, Cayley-tétel.

Két feladat a félév anyagából:

1. Mutassuk meg, hogy a Rubik-kockán nem két sarokkockát megcserélni úgy, hogy minden más kocka a helyén maradjon. Igaz-e ugyanez élkockákra?
2. Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai egy hatszög csúcsai, élei a hatszög oldalai és átlói, kivéve a főátlók. Hány szimmetriája van az így kapott gráfnak (a távolságokat nem kell „megőriznie” egy szimmetriának.)



A matematika tanítása 1

Ez az első olyan tantárgy, amelyik kifejezetten a matematika tanításával foglalkozik. Ez egy négyfélévből álló tárgy, az egyes félévek különböző szempontokból közelítik meg a matematikatanítás kérdéseit, feladatait. Az első félév „alapozó tárgy”, ennek során a hallgatók megismerkednek a matematika tanítás különböző módozataival, és egyéb elméleti anyagokkal. A félév során kiselőadásokat is tartanak egymásnak különböző témákból. Az általános- és középiskolai matematika anyag néhány konkrét anyagrésze is előkerül, megvizsgálják, összegyűjtik a tanításukhoz szükséges matematikai és módszertani tudnivalókat.

A félév hivatalos tematikája:

- A magyar matematikatanítás jellegzetességei, nemzetközi irányzatok.
- A matematika tanulási- tanítási folyamatának lényeges mozzanatai, a matematikai fogalmak reprezentációs szintjei, életkori sajátosságok.
- A matematikai fogalmak kialakulása a prematematikai fogalomcsíráktól a szabatos matematikai definíciókig.
- Gondolkodásfejlesztés területei (logika, kombinatorika).
- A számhalmazok és műveletek; számkörbővítések, műveletek kiterjesztése; kapcsolatuk az alapvető algebrai struktúrákkal.
- Elemi algebra.
- A számelméleti alapfogalmak.
- A függvények, sorozatok, relációk;
- A geometriai alapfogalmak és transzformációk;
- A nyitott mondatok, egyenletek és egyenlőtlenségek tanításának matematikai és matematikadidaktikai háttere.
- Az érvelés, indoklás, bizonyítás fogalma, fajtái, módszerei.

6. félév

Az általános- és középiskolai matematikatanár képzés utolsó közös féléve.

Az *Algebra és számelmélet* folytatódik, ahogy az *A matematika tanítása* is. A véget ért *Valószínűesszámitás* helyett az *Elemi matematika* 4 lép be, és megjelenik egy új és izgalmas tantárgy is, az *A matematika alkalmazásai*.

Algebra és számelmélet 4

Kiderül, hogy bár a valós számok körét lehetett még bővíteni, de ez a bővítés nem folytatható akármeddig. Ugyancsak korlátokba ütközünk az euklideszi szerkesztések során, ott az derül ki, hogy korántsem minden alakzat szerkeszthető meg így, és az is, hogy meglepő módon ennek bizonyítása nem geometriai, hanem algebrai módszerekkel történhet.

A félév tematikája:

- Kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrű. Példák: $\mathbb{Z}_m$, Gauss-egészek, racionális függvények teste. Inverz, hatvány, többszörös. Nullosztómentes gyűrűben szabad egyszerűsíteni. Minden test nullosztómentes. A $\mathbb{Z}_m$ gyűrű invertálható elemei, nullosztómentessége. Véges nullosztómentes gyűrű test. Polinomok gyűrű fölött, egységek. Karakterisztika, hatványozás véges karakterisztikában. Hányadostest. A komplex számok teste nem rendezhető. Frobenius tétele (bizonyítás nélkül). Művelettartó leképezés, példák: komplex konjugálás, maradékképzés, permutáció előjele, determináns, lineáris leképezések.

- Gauss-lemma, az irreducibilis polinomok jellemzése az egész együtthatós polinomok gyűrűjében, itt is érvényes a számelmélet alaptétele. A Schönemann–Eisenstein-kritérium. A körosztási polinom, rekurzív képlete, irreducibilitása.

- Algebrai és transzcendens számok, szám minimálpolinomja, kapcsolata az irreducibilitással. Nevezetes transzcendens számok. Testbővítés, fok, szorzástétel. Egyszerű testbővítés. Az algebrai számok testet alkotnak (bizonyítás nélkül). A geometriai szerkeszthetőség alapjai, nevezetes problémák. A legalább ötödfokú egyenlethez nincs gyökképlet (bizonyítás nélkül).

- Primitív gyök, index. Hatványmaradékok, Euler-lemma, kvadratikus reciprocitási tétel (bizonyítás nélkül). További számelméleti kitekintés: nevezetes diofantikus egyenletek; kriptográfiai alkalmazások; irracionális és racionális számok kapcsolata (approximáció); prímszámelmélet (prímek száma, prímek reciprokaiknak összege, Csebisev és Dirichlet tételei).

Két feladat a félév anyagából:

1. Határozzuk meg az x^2-1 és az x^2+1 polinomok gyökeit $\mathbf{H}$ -ban.
2. Szerkeszthető-e egy háromszög két oldalából és egy szögfelezőjéből?

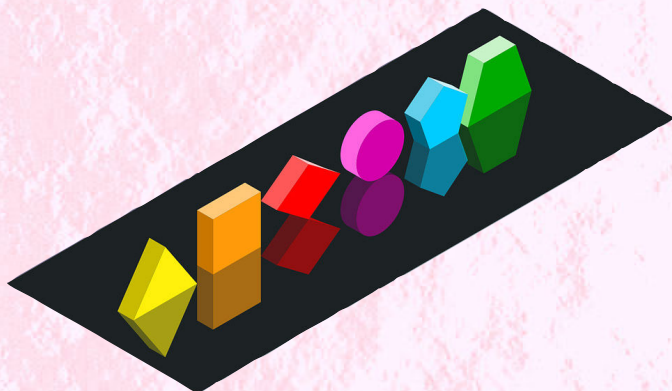


A matematika tanítása 2

Ez is még alapozó félév, de már több konkrét anyaggal, mint a tárgy első félévében. Most a hallgatók megismerkednek a matematika tanítás különböző órai formáival, a dolgozatok és egyéb feladatsorok összeállításának elméleti és gyakorlati kérdéseivel, az értékelés-osztályozás elméletével és technikáival. De szó kerül a szemléltetés jelentőségéről a matematika tanítása során, és a diákok szemléltető eszközöket is készítenek, mutatnak be.

A félév hivatalos tematikája:

- A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése.
- A tapasztalatszerzésre, kreativitásra épülő fejlesztő tanítás fogalma, megvalósításának módszerei, problémái.
- A matematika és az adott téma iránti érdeklődés felkeltésének eszközei.
- A segédeszközök helye és funkciója a matematikai tevékenység fázisaiban.
- Kiemelt területek és matematikai háttérük:
- Az aritmetika és algebra iskolai bevezetésének szakaszai.
- A függvényfogalom kialakításának folyamata, eszközei.
- A nyitott mondatok; egyenletek és egyenlőtlenségek tanítása.
- A geometria tanításának főbb módszertani szempontjai, a szemléletesség szerepe.
- A bizonyítási igény felkeltése, a bizonyítási készség kialakítása.



Elemi matematika 4

A cél továbbra is a középiskolai matematika anyag áttekintése tanítási szempontból, feladatokon keresztül.

Ennek a félévnek a témája az egyenletek, egyenlőtlenségek és a függvények.

A félév hivatalos tematikája:

- A tantárgy tanításának célja, hogy a hallgatók a különböző korosztályoknak szóló, különböző szintű feladatsorozatokon keresztül átfogó képet kapjanak a problémamegoldó készség fejlődéséről.

- Szerezzenek gyakorlatot a tanulók korosztályának és tehetségének megfelelő feldolgozásban, a különböző megoldási módok, bizonyítási módszerek összehasonlításában.

- Tematikusan az általános és középiskolai matematika tananyag aritmetika, algebra és elemi analízis körébe sorolható feladatanyag feldolgozása a cél.

Két feladat a félév anyagából:

1. A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|-x^2+4x+1|=p$ egyenletnek?

2. Döntsük el, igaz-e vagy hamis!

a) Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya végtelen, értékkészlete véges halmaz.

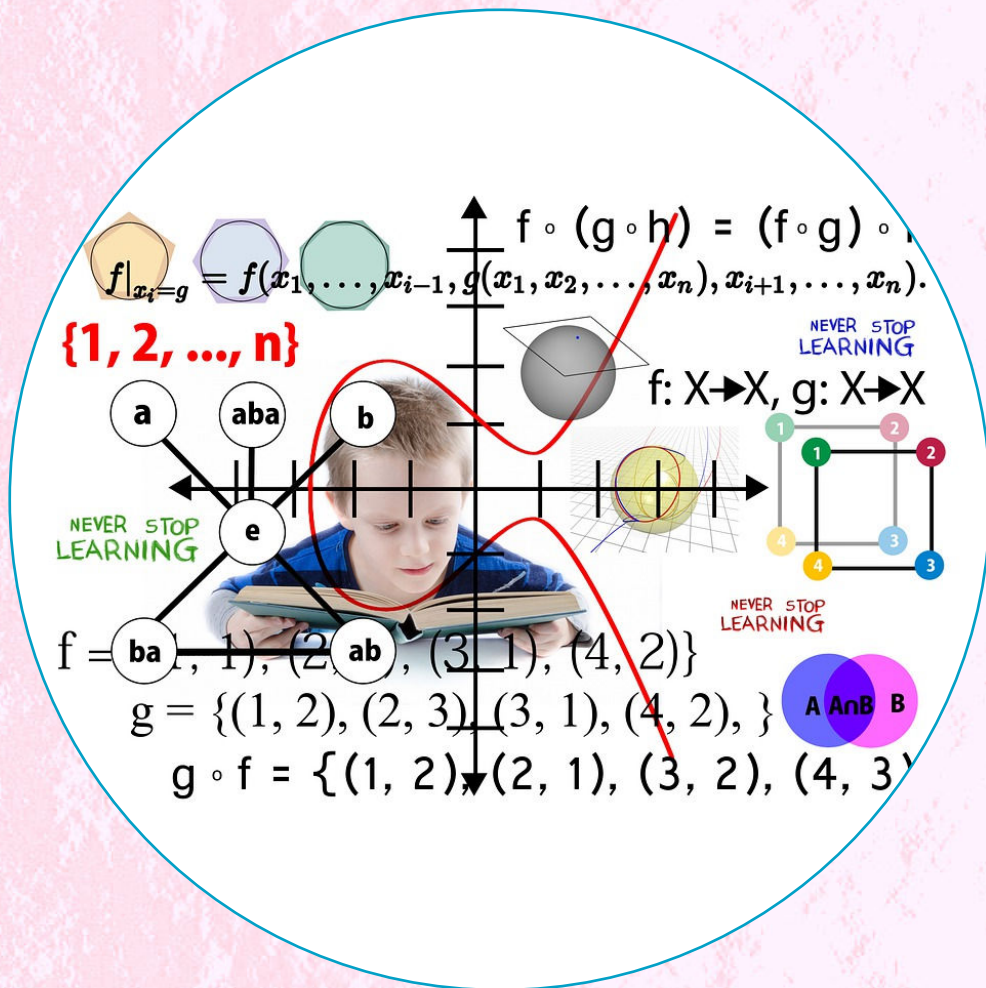
b) Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya véges, értékkészlete végtelen halmaz.

c) Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya korlátos, értékkészlete végtelen halmaz.

d) Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya végtelen, értékkészlete véges halmaz és kölcsönösen egyértelmű.

e) Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya is és értékkészlete is a valós számok halmaza és mégsem kölcsönösen egyértelmű.

f) Van olyan függvény, amely páros is meg páratlan is.



A matematika alkalmazásai

Ez a tárgy megpróbál segíteni megválaszolni azt a gyakran elhangzó kérdést, hogy „Mire jó a matematika?” A félév során számos előadás hangzik el. Az előadók jobbra külsős, tehát nem az egyetemen dolgozó szakemberek. Olyan, gyakran nemzetközileg is elismert szakemberek, akik munkájuk során jelentős mértékben használnak matematikát. Köztük pénzügyi szaktekintélyek éppúgy előfordulnak, mint pszichológusok vagy járványügyi kutatók.

A félév hivatalos tematikája:

- A tárgy célja, hogy a leendő tanárok tájékozódjanak a matematika néhány klasszikus és újabb területen való alkalmazásáról (mechanika, elektromosság, genetika, titkosítás, GPS, lézer, nyelvészet stb.).
- Célunk továbbá, hogy a tanárjelöltek megismerjenek az iskolában elmondható (esetleg leegyszerűsített) modelleket.
- Előadókat az adott terület szakemberei közül kérünk fel.



Három év – vagyis hat félév – után szétválík az általános iskolai és a középiskolai tanárképzés. Akik az előbbit választják, azok többnyire kicsit más tárgyakat tanulnak, mint az utóbbiak, és ami még fontos, ők két félévvel hamarabb tudnak diplomát szerezni.

A továbbiakban az általános iskolai képzés tárgyait kék, a középiskolai képzés tárgyait zöld színnek jelöljük.

Az általános iskolai tanárképzés további 4 féléve

7. félév

A félévben ismét megjelenik az *Analízis* és a *Geometria* – mindkettőből ez az utolsó félév. E kettőn kívül még egy módszertani tárgy az, amit a Matematikai Intézet keretein belül tanulnak a hallgatók.

Ebben a félévben kezdődik meg az általános iskolai tanárnak tanuló hallgatók képzésében az iskolai tanítási gyakorlat. Ezt a gyakorlatot többnyire az ELTE gyakorló iskoláiban végzik, vezetőtanárok irányítása mellett. A vezetőtanárok a gyakorló iskolák tanárai, több éve tanító, nagy tapasztalatú oktatók, akik nem csak a matematika tanításában jártasak, hanem a hallgatók gyakorlati felkészítésében is.

Többsváltozós analízis-ta

A Többsváltozós analízis éppúgy főleg függvényekkel foglalkozik, mint a korábbi Analízis tárgyak. A fő különbség a nevéből is kiderül, nevezetesen, hogy nem csak egy, hanem több változótól is függ a függvények értéke. (Ez nem feltétlen jelent nagyon elképzelhetetlen dolgot, például egy téglalap területe is több-, konkrétan kétváltozós függvénnyel adható meg, értéke a téglalap egyik és egy azzal szomszédos oldal hosszától is függ.) Nagyon sok korábban az egyváltozós függvényeknél megismert módszer különösebb nehézség nélkül alkalmazható többsváltozós függvények esetén is.

A félév tematikája:

- A differenciál és integrálszámítás egyes további alkalmazásai.
- A többváltozós analízis elemei.
- Az n dimenziós euklidészi tér.
- Konvergens pontsorozatok.
- A folytonosság és a függvényhatárérték fogalmának általánosítása.
- Kitekintés: topológia, dimenzió, fraktálok.
- Parciális deriváltak.
- Szélsőérték feladatok megoldása.
- Térfogatszámítás.
- Görbék. Az ívhossz és kiszámítása.
- Közönséges differenciálegyenletek.

Egy feladat a félév anyagából:

Határozzuk meg a következő függvények lehetséges legbővebb értelmezési tartományát!

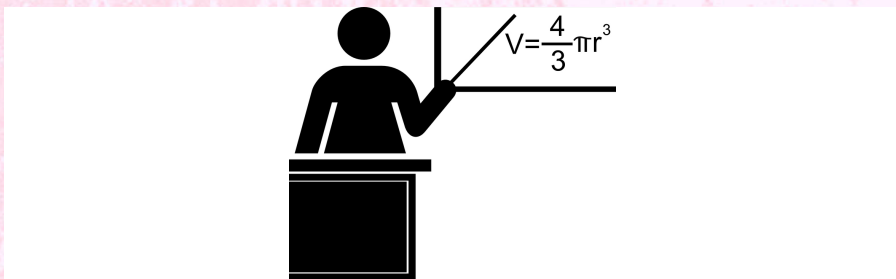
a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

b) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2+1}$

c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

d) $f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

e) $f(x, y, z) = \frac{z}{\sin x} \cos y$



Fejezetek a geometriából-ta

Ebben a félévben a korábbiakra alapozva a geometria különböző érdekes területeivel ismerkednek meg a hallgatók.

A félév tematikája:

- Az ellipszis, a hiperbola és a parabola vezéralakzatai. Az érintők értelmezése. A forgáskúp síkmetszetei, a Dandelin-gömbök alkalmazása. A forgáshenger síkmetszetei. Speciális egyenletekkel leírt kúpszeletek. Felületek megadása egyenlettel.
- A perspektív ábrázolás és a centrális vetítés geometriája. Ideális pontok értelmezése, az euklideszi sík és tér projektív bővítése. Pont- és sugárnégyes kettősviszonya, Papposz tétele. Harmonikus pontnégyesek. Teljes négyoldal. Véges projektív síkok.
- Az euklideszi geometria axiomatikus megalapozása. A párhuzamossági axióma függetlenségének problémája, helyettes axiómák. Bolyai János szerepe a hiperbolikus geometria felfedezésében. A hiperbolikus síkgeometria modelljei. A hiperbolikus síkgeometria elemi tételei.
- Fejezetek a sík és a tér elemi geometriájából: háromszögekkel és tetraéderekkel kapcsolatos nevezetes pontok, vonalak, körök, gömbök. Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőértékek.



Matematikatanítás és szakmódszertan1G-ta

Az előző két alapozó félév után ekkor már sokkal konkrétabb, a matematikatanításhoz közvetlenül kapcsolódó ismeretek kerülnek sorra, különös tekintettel a 10–16 éves korosztály tanítására. A félév végére a hallgatók képesek kell legyenek egy matematika óra önálló megtervezésére.

A félév tematikája:

- A matematika tanulás és tanítás sajátosságai a 10–16 éves korosztály esetében.
- A matematikai tevékenység különböző formái a matematika tanítási–tanulási folyamatában.
- A matematika órák szervezése (célok és munkaformák), felzárkóztatás, differenciálás és tehetséggondozás tanórán és tanórán kívüli foglalkozáson.

Az egyes általános iskolai matematikai témakörök tanításának közös és speciális szempontjai:

- A szám- és műveletfogalom fejlődése. Számolás fejben, írásban és géppel. A számelméleti ismeretek az általános iskolában.
- Az alapvető algebrai fogalmak bevezetésének és tanításának elvei és módszerei.
- Különböző típusú szöveges feladatok és megoldási lehetőségeik a felső tagozaton.
- A függvényfogalom kialakítása, a függvények tanításának kérdései.
- A függvénytulajdonságok és az egyenletek, egyenlőtlenségek kapcsolata.
- A geometriai alapelemeinek tanítása. A geometriai gondolkodás szintjei és a térszemlélet fejlődése és fejlesztési lehetőségei, a geometriai transzformációk az általános iskolában.
- A topológia és gráfelmélet fogalomcsíráinak tanítása.
- A kombinatorikus gondolkodás kialakításának és fejlesztésének lépcsőfokai.

Szaktárgyi tanítási gyakorlat-ta

A félév tematikája:

A gyakorlat keretében a hallgató az ELTE egyik gyakorlóiskolájában egy vezetőtanár irányítása mellett megismerkedik a tanári munkával és konkrét tapasztalatokra tesz szert a matematika tanításában. A vezetőtanár és az iskola további oktatói által tartott matematika órák látogatását, az úgynevezett hospitálást, követően a hallgatónak órákat kell tartania matematikából egy meghatározott számban (várhatóan úgy 15 órát a gyakorlat során). Ezen órák ütemezését és beosztását a vezetőtanár határozza meg. Az órákra való felkészülésben és az óratervek kidolgozásában a hallgatót a vezetőtanár segíti. Vele tudja a hallgató elemezni és értékelni a már megtartott órákat, illetve megbeszélni azok tapasztalatait. A tanítási gyakorlat során a hallgatónak lehetősége nyílik arra is, hogy fejlessze matematika módszertani és a pedagógiai ismereteit. A tanítási gyakorlat során végzett munkáját a vezetőtanár gyakorlati jeggyel értékeli.



8. félév

Ebben a félévben a módszertani órák kivételével csupa új tantárgy kerül a képzésbe. Ezek az *Informatika*, a *Matematikatörténet* és az *A matematika alapjai*. Ismét lesz *Elemi matematika*, és folytatódik a *Matematikatanítás és módszertan*, valamint a *tanítási gyakorlat*.

Ezzel a félévvel zárul a hallgatók matematikai képzése, a félév végén egy összefoglaló vizsgát, úgynevezett „Szakterületi záróvizsgát” kell tenniük.

InformatikaG-ta

A tárgy keretében olyan programok használatával ismerkednek meg a hallgatók, amelyeket majd jól tudhatnak hasznosítani a munkájuk során. Sorra kerülnek olyan programok, amik a diákoknak segíthetnek megérteni a matekot, olyanok, amik a matematika tanítását segítik, de olyanok is, amelyek a tanításhoz szükséges anyagok – óravázlatok, ábrák, grafikonok, animációk stb – elkészítését könnyítik meg.

A félév tematikája:

- Szövegszerkesztés: szedés, tördelés.
- LaTeX: felépítése, a matematikai mód, speciális karakterek kezelése, kiemelt képletek. Tételszerű környezetek, egyszerű grafikák, bibliográfia. Prezentációkészítés Beamerrel.
- Táblázatkezelés: adatok feldolgozása, ábrázolása, problémamegoldás táblázatkezelővel.
- Geometriai szoftver használata: alapvető műveletek, szerkesztések. Animációk, mértani helyek keresése. Statikus és dinamikus munkalapok készítése. Kompatibilitás a LaTeX-hel.
- Komputeralgebrai szoftver használata: nyelvi elemek, függvények. Két- és háromdimenziós grafika, egyéb lehetőségek. Példák: számelmélet, lineáris algebra, polinomok, határérték, összegek, integrálás, differenciálás, egyenletek, egyenletrendszerek megoldása.

MatematikatörténetE-ta

A tárgy előadások formájában valósul meg. Ezeken az előadásokon a diákok hallanak bizonyos matematikai gondolatok történetéről, változásairól az idők során, de lökerül néhány matematikatörténeti érdekesség is.

A félév tematikája:

- Rövid kronológiai áttekintés a legjelentősebb matematikusokról és a legfontosabb művekről.
- A bizonyítás fogalmának alakulása az elmúlt 2000 évben.
- A matematikai fogalmak kialakulásának folyamata a matematika és a matematikatanítás történetének tükrében.
- Néhány nevezetes matematikatörténeti probléma.
- A matematika történetéből olyan részletek kiemelése, amelyek közvetlenül segítik az iskolai matematikaoktatást, a leendő általános iskolai tanárok számára jobban megvilágítják egy-egy téma tanulása közben felmerülő tanulási akadályok hátterét matematikai, matematikatörténeti szempontból.
- A tanításban felhasználható saját probléma-gyűjtemény összeállítás.



A matematika alapjaiG-ta

Furcsa lehet, hogy az alapokkal a matematikai tanulmányaik végén találkoznak a hallgatók. De a dolog indokolt, ahhoz, hogy ezeket az alapokat és a rájuk való építkezést megértsük – beleértve azt is, hogy miért van szükség ilyen alapozásra –, igen hasznos, ha minél tágabb ismereteink vannak matematikából, minél nagyobb rálátásunk van a dolgokra. Ez az alapvetés halmazelmélet és matematikai logika segítségével történik.

A félév tematikája:

- Műveletek halmazokkal.
- Számosságok. Megszámlálható halmazok, kontínuum számosság.
- Cantor tétele a hatványhalmaz számosságáról.
- Paradoxonok, a Russell-paradoxon.
- A végtelen halmazok „meglepő viselkedése”.
- Műveletek számosságokkal.
- Kiválasztási axióma.
- Axiomatikus halmazelmélet.
- Kijelentéslogika.
- Játékos feladatok a logikai jelenségek bemutatására.

Két feladat a félév anyagából:

1. a) Valaki – nevezzük Tulajnak – építtetett egy olyan szállodát, amelyben végtelen sok (egyágyas) szoba van. A szálloda tele van, ami nem is csoda, hiszen ki ne szeretne egy ilyen szállodában megszállni! Kiköltözni sem akar/hajlandó senki. (Átköltözni egy másik szobába, azt igen. De kiköltözni??!) Az sem meglepő ezek után, hogy érkezik egy újabb vendég is, aki szintén itt szeretne éjszakázni. Mit tehet a recepciós, ha szeretne a szállodájában szobát adni az új vendégnek, de persze a régieket sem akarja elküldeni?

b) A szálloda oly népszerű, hogy másnap délután egy busz is érkezik 112 utassal és két sofőrrel. Hogyan lehetne őket is elszállásolni?

c) A szálloda népszerűsége töretlen, sőt! Harmadnap egy hatalmas busz érkezik, benne végtelen sok utassal. Hogyan tudná őket is elszállásolni a recepció? (A sofőrök most a buszban alszanak.)

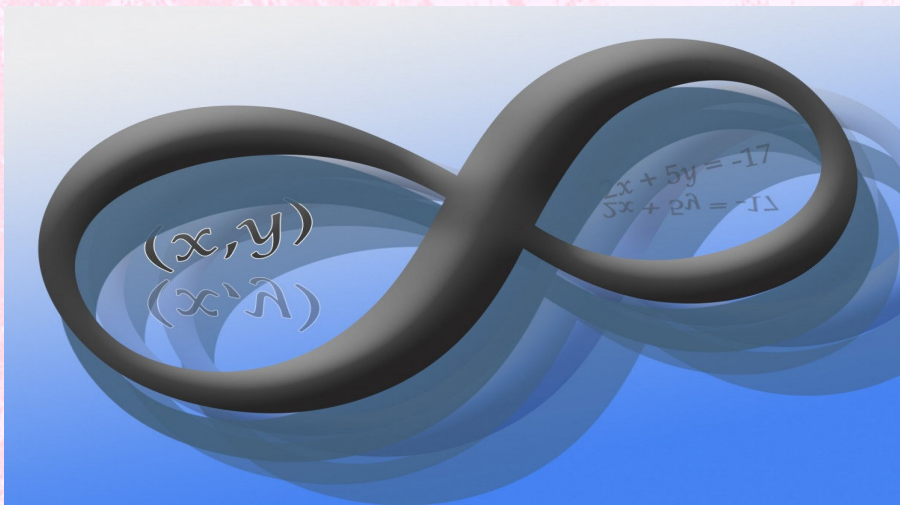
d) Negyednap senki sem érkezik, a 72 órája talpon lévő recepció egészen megkönnyebbül, még aludni is tud egy picit. Viszont a következő napon délután fél 6-kor egyszerre érkezik meg végtelen sok busz, mindegyikben végtelen sok utassal. (Még szerencse, hogy a szálloda parkolójában végtelen sok busznak is van hely.) Mit csináljon most szegény recepció, akit a Tulaj megfenyegetett, hogy kirúgja, ha csak egyetlen szobát kérőt is elutasít? (És a recepció nagyon nem szeretné, ha kirúgnák.)

2. A lovagok és lóköttők szigetén mindenki vagy lovag, vagy lóköttő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lóköttők mindig hazudnak.

a) Két emberrel találkozunk, A-val és B-vel. A azt mondja: Legalább az egyikünk lóköttő. Miféle A és B?

b) Három lakossal találkozunk, A-val, B-vel és C-vel. A ezt mondja: B és C egyforma típusú. Valaki megkérdi C-től: Egyforma típusú A és B? Mit válaszol C?

Oldjuk meg a feladatokat „józan paraszti ésszel”, illetve logikai formalizálás segítségével is!



Fejezetek az elemi matematikábólG-ta

Az utolsó Elemi matematika tárgy során vegyes feladatok kerülnek terítékre. A két fő terület, amikhez kapcsolódnak, a valószínűség-számítás (a statisztikával együtt) és a tehetséges gyerekekkel való foglalkozás.

A félév hivatalos tematikája:

- Valószínűség-számítás és matematikai statisztika feladatok az általános iskolában.
- Leszámlálások, összes eset számbavétele, ábrázolás gráfokon, esetek rendszerezett felsorolása.
- Helyzetparaméterek, azaz a medián a módusz és az átlag értelmezése tanulók által végzett kísérletek alapján.
- Legalább 2-3 foglalkozást szánunk gyakorlati kísérletek megtervezésére, végrehajtására és azok elemzésére.
- A tehetséggondozáshoz kapcsolódó magyarországi lehetőségek, versenyek és feladatbankok áttekintése, szemelvények az egyes versenyek jellegének megfelelően, típusfeladatok.
- Egyéni és csapatversenyek.



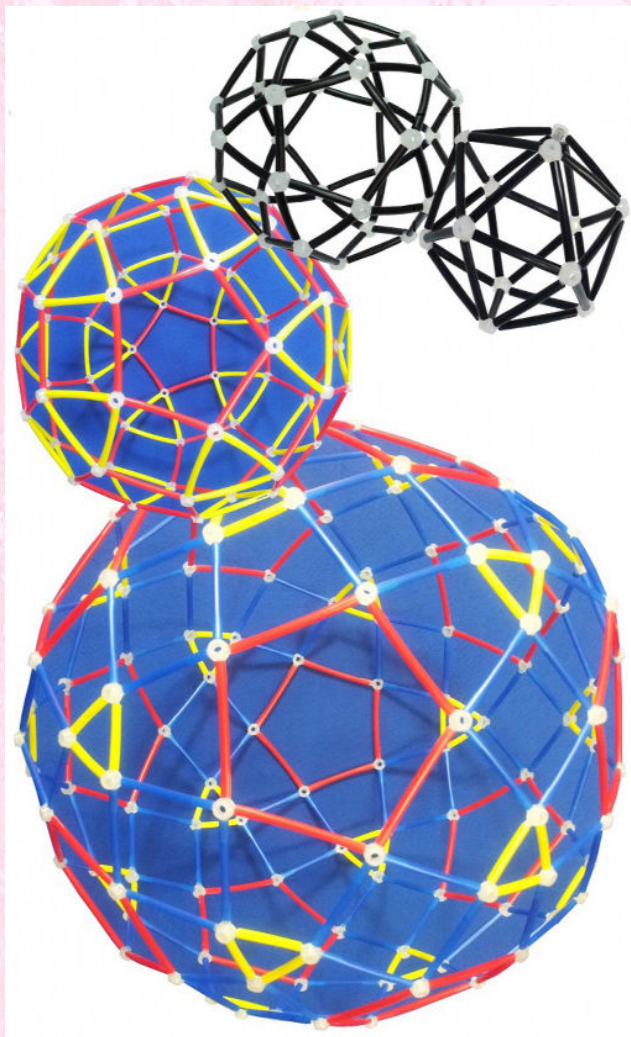
Matematikatanítás és szakmódszertan2G-ta

Folytatódik előző félév, de persze most a matematika tananyag más részeinek tanítására kerül a hangsúly. A félév végére a hallgatók képesek kell legyenek az általános iskolai matematika egy tanegysége tanításának önálló megtervezésére.

A félév tematikája:

- A valószínűesszámitás és a statisztika elemeinek tanítása az általános iskolában.
- A matematikatanítás hazai és nemzetközi történetének néhány jelentős mozzanata az általános iskolai matematikatanítás vonatkozásában.
- Az oktatási folyamat hosszú és rövidtávú tervezése. Az alsó tagozatból a felső tagozatba valamint a felső tagozatból a középiskolába való átmenet kérdései.
- A diagnosztikus, formatív és szummatív értékelés szerepe és lehetőségei a matematika órán. A házi feladat a matematika tanításában.
- A tananyag elrendezésének, a tantervek és a tanmenetek készítésének didaktikai és módszertani elvei. A tantervi témakörök egysége, az egyes témák összekapcsolásának lehetősége és szükségessége.
- Matematikai bizonyítások a felső tagozaton.
- A problémamegoldás és tanítási lehetőségei a felső tagozaton.
- Adott témához óratervek, foglalkozási tervek készítése.
- Valóságközeli szituációk és modellezési feladatok alkalmazása a felső tagozaton.
- A hatályos oktatási dokumentumok megismerése és alkalmazása.
- Hagyományos és elektronikus tankönyvek, munkalapok, segédanyagok és segédeszközök használata.
- Módszertani kutatások: matematika az általános iskolai tantervekben, tankönyvelemzés és adott szempontrendszer alapján tankönyvek összehasonlítása, a matematika és a többi

tantárgy kölcsönhatásai, feladatelemzés–feladatkészítés, modellezési feladatok készítése különböző szempontok alapján, különböző témákhoz módszertani szakirodalom keresése és feldolgozása.



Szaktárgyi tanítási gyakorlat-ta

Ezt a gyakorlatot is általában az egyetem egyik iskolában végzik a hallgatók. Általában úgy, hogy az egyik félévben főleg az egyik, másik félévben főleg a másik tárgyak tanítását gyakorolják.

A félév tematikája azonos az előző félévvel:

A gyakorlat keretében a hallgató az ELTE egyik gyakorlóiskolájában egy vezetőtanár irányítása mellett megismerkedik a tanári munkával és konkrét tapasztalatokra tesz szert a matematika tanításában. A vezetőtanár és az iskola további oktatói által tartott matematika órák látogatását, az úgynevezett hospitálást, követően a hallgatónak órákat kell tartania matematikából egy meghatározott számban (várhatóan úgy 15 órát a gyakorlat során). Ezen órák ütemezését és beosztását a vezetőtanár határozza meg. Az órákra való felkészülésben és az óratervek kidolgozásában a hallgatót a vezetőtanár segíti. Vele tudja a hallgató elemezni és értékelni a már megtartott órákat, illetve megbeszélni azok tapasztalatait. A tanítási gyakorlat során a hallgatónak lehetősége nyílik arra is, hogy fejlessze matematika módszertani és a pedagógiai ismereteit. A tanítási gyakorlat során végzett munkáját a vezetőtanár gyakorlati jeggyel értékeli.



A Szakterületi záróvizsga:

A Szakterületi záróvizsga annak megállapítására szolgál, hogy a vizsgázó biztos alapokkal és megfelelő áttekintéssel rendelkezik-e a legfontosabb témakörökben. A tematika bizonyos kereteket jelöl ki, melyeken belül sokféleképpen lehet jól számot adni a megszerzett tudásról, bemutatni az egyetemen megérett matematikai szemléletet és gondolkodásmódot. Érdemes kitérni a téma kapcsolatára más tantárgyakkal is.

A szakterületi záróvizsga jelenlegi tételsora az általános iskolai szakirányon:

1. Véges matematika és elemi halmazelmélet

Kombinatorikai leszámhlási alapfeladatok, szita-formula. Fibonacci-számok. Gráfok: összefüggőség, fák, síkbarajzolhatóság, színezések, Euler–Hamilton-témakör. Néhány ismert számosság, számosságok tulajdonságai.

2. Számelmélet

Oszthatóság, kitüntetett közös osztó, irreducibilitás, prímtulajdonság, a számelmélet alaptétele egész számokra, polinomokra testek és az egész számok gyűrűje fölött. Számelméleti függvények. Kongruenciák az egész számok között, csoportelméleti vonatkozások. Diofantikus egyenletek, nevezetes számelméleti problémák és tételek (Dirichlet, Csebisev, Goldbach, stb.).

3. Komplex számok és lineáris algebra.

Komplex számok, algebrai- és trigonometrikus alak, hatványozás és gyökvonás, egységgyökök, primitív egységgyökök. Alkalmazások geometriai feladatok megoldására. Lineáris egyenletrendszer, determináns. Vektortér, függetlenség, dimenzió. Lineáris leképezések és mátrixaik. Sajátérték, diagonalizálhatóság, minimálpolinom.

4. Absztrakt algebra.

Csoport, ciklikus csoport, permutációcsoport. Elem rendje. Abel csoportok. Orbit, stabilizátor. Burnside-lemma, leszámhlások. Testek, testbővítések, algebrai és transzcendens számok. Hányadostest. Test fölötti polinomok, gyökök, szimmetrikus polinomok.

5. Szintetikus geometria, szerkesztések.

Háromszögek nevezetes vonalai, körei és pontjai. Speciális négyszögek, sokszögek. Konvex poliéderek. Kerület, terület, térfogat, felszín. Kúpszeletek. Euklideszi szerkesztések. Nevezetes szerkesztési kérdések.

6. Analitikus geometria.

Térbeli szabad vektorok, műveletek vektorokkal. Vektor koordinátái. Szögfüggvények. Skaláris szorzat, vektoriális szorzat, vegyes szorzat. A sík és a tér koordinátázása. Speciális alakzatok egyenletei. Gömbi geometria, gömbháromszögek.

7. Geometriai transzformációk.

Egybevágósági transzformációk síkban és térben. A síkbeli egybevágóságok osztályozása és analitikus leírása. Hasonlósági transzformációk, középpontos hasonlóságok. Hasonló alakzatok. Síkbeli affin transzformációk. Síkbeli inverzió.

8. Sorozatok és függvények határértéke, folytonosság.

Sorozatok határértéke. Végtelen sorok. Függvények határértéke. Folytonos függvények. Elemi függvények és tulajdonságaik.

9. Differenciálszámítás.

A differenciálhatóság fogalma, geometriai jelentése. Függvényvizsgálat. Kétváltozós függvények parciális deriváltjai. Szélsőérték feladatok egy és két változóban.

10. Integrálszámítás.

Riemann-integrál. Primitív függvény, Newton–Leibniz-formula. Alkalmazás: terület-, térfogatszámítás.

11. Valószínűségszámítás

Valószínűségi mező. Feltételes valószínűség, Bayes tétele. Valószínűségi változók, nevezetes eloszlások. Várható érték és szórás. Mintaátlag és tapasztalati szórás. Függetlenség. A nagy számok törvénye.



9. és 10. félév

Az általános iskolai szakirány utolsó két féléve. Ekkor a hallgatók főleg külső iskolákban vannak, heti rendszerességgel bár nem túl magas óraszámban tanítják a szakjaikhoz tartozó tantárgyakat. Ebben a külső iskolák egy-egy tanára – a hallgató mentora vagy konzulense – segíti őket. A félév során mindkét szakjukból egy-egy bemutató órát tartanak.

A Matematikai Intézet keretén belül ekkor már csak az *Összefüggő egyéni gyakorlatot kísérő szakos szeminárium* című kurzusuk van, mindkét félévben, heti 1 órában. (Hasonló szemináriumuk van a hallgatóknak a másik tárgyból is és a PPK-n is.)

A tanulmányok zárásához minden hallgatónak szakdolgozatot is kell készítenie. A szakdolgozat bemutatása – „védése” – és egy módszertani záróvizsga az utolsó két teljesítendő feladat. Ezek sikere esetén a hallgató pár nappal később ünnepélyes keretek között megkapja tanári oklevelét.

Összefüggő egyéni gyakorlatot kísérő szakos szeminárium

A szeminárium célja, hogy segítséget nyújtson a hallgatóknak a külső iskolában – gyakran vidéken – végzett tanítási gyakorlatuk során felmerülő kérdésekben, problémákban.

A tantárgy hivatalos tematikája:

- Az óra előkészítése (életkori sajátosságok, óravázlat, tankönyv, példatár, eszközök, szemléltetés stb.)
- Bemutató óra megfigyelése és elemzése, alapvető feedback szabályok
- Az iskolai gyakorlattal kapcsolatos hallgatói tapasztalatok megbeszélése matematikai, didaktikai és módszertani szempontból
- Problémák és sikerek megosztása és megbeszélése, kiselőadások
- Konzultáció meghívott vezetőtanárokkal és/vagy egyetemi oktatókkal
- Beadandó egy óravázlat

A szakdolgozatról

A tanári szakdolgozat témájának a hallgató valamelyik szakjához kell kötődnie. Csak akkor kapcsolódik a Matematikai Intézethez, ha a hallgató a két szakja közül matematikából kívánja írni a szakdolgozatát.

A szakdolgozat a tanárképzésen folytatott tanulmányok végén megírt hosszabb terjedelmű mű. Célja, hogy a hallgató egy általa választott területen elmélyedjen, és azt feldolgozza. A hallgatót e munkájában témavezető irányítja. A témavezető segíti a hallgatót a szakirodalom kijelölésében, a megfelelő ütemezés kialakításában, a tartalmi és formai követelményekhez való igazodásban, mindemellett pedig rendszeres konzultációval támogatja a dolgozat elkészítését.

A szakdolgozat témáját a hallgató választhatja a Matematikai Intézet oktatói által meghirdetett témák közül, de saját témát is feldolgozhat, ha talál hozzá olyan oktatót, aki vállalja hozzá a témavezetést.

Matematika szakterületen a dolgozat témájának jellege lehet matematikai vagy matematika szakmódszertani (esetleg pedagógiai, pszichológiai). Matematikai jellegű téma esetén a dolgozatnak tartalmaznia kell olyan részt is, amely bemutatja a témának a tanári tevékenységhez való kapcsolódását. (Erre példa lehet egy szakkör tervezete az adott témakörben).

Ha a választott téma szakmódszertani jellegű, akkor a dolgozatnak a módszertanon kívül érdemi matematikai tartalommal is kell rendelkeznie.



A záróvizsgáról

Ez az utolsó számonkérés az egyetemi tanulmányok során.

Ha a hallgató matematikából írta a szakdolgozatát, akkor a vizsga része a szakdolgozat védeke is. Ez lényegében a szakdolgozat ismertetése a vizsgabizottság előtt és néhány a dolgozathoz kapcsolódó kérdés megválaszolása.

Maga a záróvizsga egy szóbeli vizsga a bizottság előtt, számadás a módszertanból elsajátított tudásról.

A tanári záróvizsga tételsora általános iskolai szakirány esetén

1. A Nemzeti alaptanterv (NAT) fejlesztési területei, nevelési céljai; a NAT által meghatározott nevelés–oktatás tartalmi és szemléleti alapjai. Egy választott matematikai témakör vagy fogalom elemzése a NAT Fejlesztési feladatai alapján. A fogalmi rendszerek kialakítását megalapozó tapasztalatszerzés folyamata. Feladattípusok a fogalmak tanításával kapcsolatban. Definiálási módok. *Választható témakörök: Számelmélet. Relációk, sorozatok és függvények. Nyitott mondat, állítások, egyenletek, egyenlőtlenségek. Síkidomok.*

2. A matematikatanítás tervezése és megvalósítása a kerettantervek alapján; a műveltségkép, a tudás- és tanulás értelmezése. Egy szakterület tanításának lehetőségei és a tanári szabadság lehetőségeinek bemutatása egy választott területen keresztül. *Választható témakörök: Geometria 5–10. osztály. Sorozat, függvénykapcsolat 5–10. osztály. Kombinatorika 5–10. osztály. Valószínűségi gondolkodás 5–10. osztályban.*

3. Modellalkotás a matematika tanításában, az alkalmazásorientált oktatás lehetőségei. A koordináta-rendszer bevezetése. Szemléltetés gráfokkal. Szöveges feladatok megfogalmazása egyenlet, egyenlőtlenség formájában. A halmazokkal történő szemléltetés lehetőségei.

4. Szemlélet és absztrakció a számfogalom tanításában. A számfogalom kialakítása, fejlesztésének szintjei; műveletek. Számkörbővítés a természetes számoktól a valós számokig, különös tekintettel a törtekre. A számelmélet elemeinek tanítása. Betűabsztrakció, az algebrai kifejezések tanítása. Törtek szemléltetése, racionális és irracionális törtek tizedes tört alakja.

5. Érvelések, bizonyítások, tételek tanításának alapkérdései, szemléletes okoskodások, indoklások, bizonyítási stratégiák és technikák a középiskolában. Az irányított felfedeztetés lehetőségei. A bizonyítási igény felkeltésének módszerei. Tételek megsejtését elősegítő eljárások. Az algoritmikus gondolkodás fejlesztésének lehetőségei. A gondolkodási módszerek tanítása. Az általános iskolában szereplő tételek és bizonyítások.

6. A matematikatanítás formái, módszerei, segédeszközei a tanulók életkori sajátosságainak figyelembe vételével, munkaszervezési formák, számonkérés, értékelés. A tanulók motiválásának lehetőségei. Háromszögekhez kapcsolódó ismeretek fejlődése az életkori sajátosságok szerint 5–10. évfolyamon. (Fogalomfejlődés, ismeretek alakulása, megfogalmazása, bizonyítása, alkalmazása.)

7. A problémamegoldási képességek fejlesztésének lehetőségei, problémamegoldási stratégiák, heurisztikák, a problémafelvetés és -megoldás folyamata. A feladatok osztályozása különböző szempontok szerint, problémamezők, problémavariációk. Feladatvariációk.

8. Differenciálás és tehetséggondozás. A szakkörök, speciális tagozatok és a versenyek szerepe a matematika tanításában. Tehetséggondozás; a gyengébb képességű és motivációjú tanulók felzárkóztatásának módszerei. Felkészítés az érettségi vizsgára. Magyarországi matematika-versenyek általános iskolásoknak. *Választható témakörök egy anyagrész két szinten való bemutatásához: A kombinatorika tanítása hátrányos helyzetű csoportokban és normál órákon. A geometriai transzformációk tanítása iskolában és szakkörön. Valószínűségi játékok felzárkóztató csoportokban és szakkörön. Számelmélet normál és versenyfeladatokban.*

9. Modern eszközök az oktatásban. A tanulók motiválásának lehetőségei. A tanítást és tanulást segítő eszközök (manipulációs eszközök, számítógép, internet, interaktív tábla) integrált alkalmazási lehetőségei. Geometriai szemléltetés síkgeometriai programok segítségével, függvénygrafikon szemléltetése.



A középiskolai tanárképzés további 6 féléve

A középiskolai szakirányt választók néhány tárgya megegyezik ugyan az általános iskolai szakirányt választók tárgyaival, de számos tantárgyuk több féléves tárgyként kerül a képzésükbe, lehetővé téve, hogy jobban elmélyedjenek azok anyagában. Van néhány olyan tárgyuk is, ami az általános iskolai tanárnak készülőknek nincsen.

7. félév

Ebben a félévben ismét van analízis, és *Algebra és számelmélet* is. Tanításhoz közvetlenül kapcsolódó tárgyként újra van *Elemi matematika*, módszertani tárgyként pedig folytatódik az *A matematika tanítása*.

Többszörös analízis1-tg

A Többszörös analízis éppúgy főleg függvényekkel foglalkozik, mint a korábbi Analízis tárgyak, de foglalkozik a tér szerkezetével is. A fő különbség az eddigi analízis tárgyak során vizsgált függvények és az újabbak között a tárgy nevéből is kiderül, nevezetesen, hogy nem csak egy, hanem több változótól is függ a függvények értéke. (Ez nem feltétlen jelent nagyon elképzelhetetlen dolgot, például egy téglalap területe is többszörös, konkrétan kétszörös függvénnyel adható meg, értéke a téglalap egyik oldalának és egy azzal szomszédos másik oldal hosszától is függ.) Nagyon sok korábban az egyváltozós függvényeknél megismert módszer különösebb nehézség nélkül alkalmazható többszörös függvények esetén is.

A félév tematikája:

- A differenciál és integrálszámítás egyes további alkalmazásai.
- Az n -dimenziós euklidészi tér.
- Gömbök, nyílt, illetve zárt halmazok, konvergens pontsorozatok,

Cauchy sorozatok.

- A metrikus tér fogalma, teljes terek.
- Többváltozós függvények folytonossága és határértéke. Kompakt halmazok az n -dimenziós euklideszi térben.
- Kompakt halmazokon értelmezett folytonos függvények tulajdonságai.
- Kitekintés: topológia, dimenzió, fraktálok.
- Parciális deriváltak, iránymenti deriváltak.
- Többváltozós függvények differenciálszámítása.
- Gradiens, Jacobi mátrix.
- Kétszer differenciálható függvények, első és második differenciál, Young tétele (bizonyítás nélkül).
- Szélsőérték feladatokkal kapcsolatos szükséges, illetve elégséges feltételek.
- Közönséges differenciálegyenletek.

Egy feladat a félév anyagából:

Határozzuk meg a következő függvények lehetséges legbővebb értelmezési tartományát!

a) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$

b) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 + 1}$

c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

e) $f(x, y, z) = \frac{z}{\sin x} \cos y$

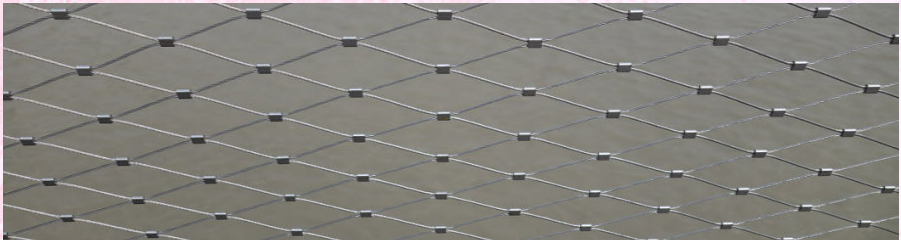


Algebra és számelmélet5-tg

Ez a tárgy lényegében az *Algebra és számelmélet* 3, illetve 4. folytatása.

A félév tematikája:

- Csoporthomomorfizmus, normálosztó, faktorcsoport, centrum, konjugáltság, jelentése a geometriai transzformációk körében. Egyszerű és feloldható csoportok, nevezetes tételek (bizonyítás nélkül), kapcsolat az egyenletek megoldhatóságával. Direkt szorzat, a véges Abel csoportok alaptétele, a redukált maradékosztályok csoportjának szerkezete. Kis elemszámú csoportok.
- Számelméleti alapfogalmak szokásos gyűrűben. Egység, felbonthatatlan, prím, kapcsolatuk a legnagyobb közös osztó létezésével és a maradékos osztással. A számelmélet alaptételének bizonyítása euklideszi gyűrűben. Gauss-egészek. A két négyzetszám-tétel. Példa nem alaptételes gyűrűre. Főideálgyűrű, az alaptételes gyűrűk jellemzése. Kitekintés: az ideálok szerepe a számelméletben.
- Gyűrűhomomorfizmus, faktorgyűrű, testek konstrukciója. Véges testek létezése, additív és multiplikatív csoportja, alkalmazások (például számelmélet, kódelmélet).
- Egyes korábban tárgyalt tételek bizonyítása (például prím számelmélet, kvadratikus reciprocitás, nevezetes diofantikus egyenletek, approximáció, algebrai számok).



Elemi matematika5G-tg

Az utolsó előtti *Elemi matematika* tárgy, témája a valószínűség-számítás és a statisztika.

A félév hivatalos tematikája:

- Valószínűség-számítás és matematikai statisztika feladatok a középiskolában.
- Leszámlálások, összes eset számbavétele, ábrázolás gráfokon, esetek rendszerezett felsorolása.
- Valószínűség és feltételes valószínűség becslése és kiszámítása.
- Helyzetparaméterek, azaz a medián a módusz és az átlag, valamint a szórás, szóródás értelmezése tanulók által végzett kísérletek alapján.
- Eloszlások modellezése és elemzése.
- Legalább 2-3 foglalkozást szánunk gyakorlati kísérletek megtervezésére, végrehajtására és tulajdonságaik részletes megbeszélésére.
- Elemi Markov láncok feladatokban.
- Az érettségin megjelenő valószínűség-számítás és statisztika feladatok megoldása és elemzése.
- Az OKTV-n és egyéb versenyeken szerepelt feladatok áttekintése.



A matematika tanítása3G-tg

Az előző két alapozó félév után ekkor már sokkal konkrétabb, a matematikatanításhoz közvetlenül kapcsolódó ismeretek kerülnek sorra. A félév végére a hallgatók képesek kell legyenek egy matematika óra önálló megtervezésére.

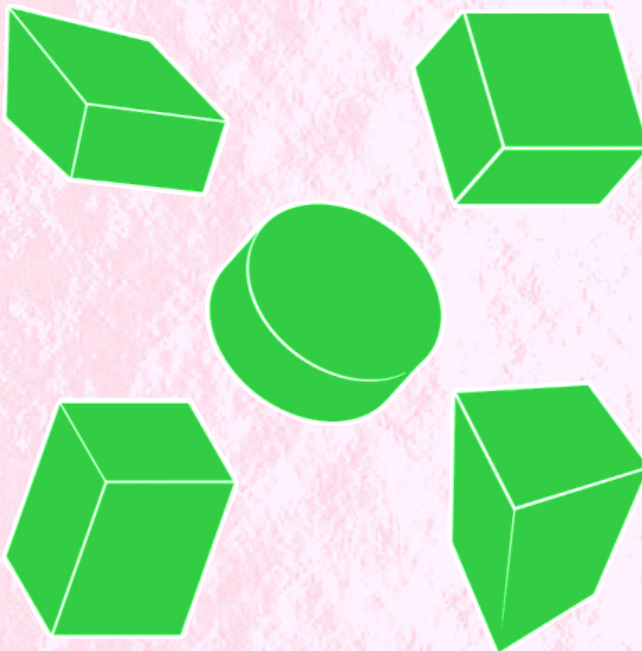
A félév tematikája:

- A matematikatanítás-tanulás legfontosabb céljai (társadalmi igények és a matematikáról alkotott mai kép alapján), a matematikatanítás mestersége, tudománya.
- A matematika tudomány és a matematika oktatás kapcsolata.
- A matematika és a matematikatanítás történetének összefüggései.
- A matematikai tevékenység különböző formái a matematika-tanulási folyamatban.
- A matematika órák munkaformái kitérve a tehetséggondozásra, a felzárkóztatásra, a differenciálásra tanórán és tanórán kívüli foglalkozáson.
- A fogalomépítkezés alapelvei.
- Az érvelések, okoskodások, bizonyítások szerepe és tanítása.

Néhány kiemelt témakör középiskolai tanításának módszertani szempontjai:

- A szám- és műveletfogalom fejlesztése. A számelméleti ismeretek és a számrendszerek tanítása a középiskolában, permanencia elv.
- Az algebra, algebrai struktúrák (természetes számok, egész számok gyűrűje, maradékosztályok, racionális számok, valós számok teste, szimmetriacsoportok, vektorterek) az iskolai tananyagban.
- Az analízis elemeinek tanítása: elemi függvényvizsgálat; függvénytulajdonságok és az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldási módszereinek kapcsolata.
- A geometriai gondolkodás szintjei. A geometriai transzformációk, a szintetikus és analitikus geometria tanítása. A geometriai térszemlélet fejlesztése.

- Topológia és gráfelmélet a középiskolai matematikában.
- A kombinatorikus gondolkodás fejlesztésének lépcsőfokai.
- A valószínűségszámítás és a statisztika tanítása a középiskolában (a sajátos gondolkodásmód érzékeltetése; alapfogalmak – véletlen, függetlenség, valószínűség, illetve gyakoriság, relatív gyakoriság, adattömörítés és szemléltetés – bevezetésének lehetőségei és nehézségei).
- Különböző módszerek bemutatása pl. kombinatorikus, geometriai valamint a valószínűségszámítási szemléltetések (lásd Venn diagram, fa diagram, kettős fa diagram) használata, mint a megértést segítő eszközök.
- A statisztika és a valószínűségszámítás kapcsolata. A téma gazdag alkalmazásainak érzékeltetése, bemutatása.



8. félév

Ebben a félévben egyetlen új tantárgy kerül a képzésbe az *A matematika alapjai*. A geometria pedig a *Projektív geometria-tg* cíművel. Folytatódik – változatlan névvel, de újabb tartalommal – a *Többváltozós analízis* és az *A matematika tanítása*.

Többváltozós analízis2-tg

Az előző félév anyaga az integrálszámítással folytatódik. A félév során több olyan matematikai eszközzel is megismerkednek a hallgatók, amik segíthetnek bizonyos fizikai, kémiai vagy akár gazdasági folyamatok, jelenségek leírásában.

A félév tematikája:

- A többváltozós integrálszámítás elemei.
- n -dimenziós téglák, téglán értelmezett korlátos függvény integrálhatósága, az egyváltozós integrálszámítás tételeinek általánosítása.
- A többszörös integrál kiszámítása.
- A Jordan féle térfogat, a térfogati integrál általános definíciója, integrálás normáltartományon.
- Térfogat számítás.
- Görbék és ívhosszuk. A vonalintegrál.
- A munka és az erőter fogalma a mechanikában; skaláris szorzat az n -dimenziós euklideszi térben, a vonalintegrál definíciója és kiszámítása.
- Konzervatív erőter, potenciál, a primitív függvény fogalma; a vonalintegrálokra vonatkozó Newton–Leibniz-formula.
- A primitív függvény létezésének szükséges és elégséges, illetve elégséges feltételei.
- Komplex változós komplex értékű függvény komplex értelemben vett differenciálhatósága.
- A komplex függvénytan elemei.

Projektív geometria

A projektív sík olyan geometriai világ, ahol a párhuzamosok „a végtelenben találkoznak”. Ebben a világban számos érdekes jelenség figyelhető meg, ezekkel foglalkozik a kurzus

A félév során részletesebben tárgyalják a kúpszeleteket is, vagyis az ellipszist, hiperbolát és a parabolát.

A félév tematikája:

- Az ellipszis, a hiperbola és a parabola vezéralakzatai. Az érintők értelmezése. A forgáskúp síkmetszetei, a Dandelingömbök alkalmazása. A forgáshenger síkmetszetei.
- Koordináta-transzformációk síkban és térben. Másodrendű görbék az euklideszi síkon. A síkbeli főtengeley-transzformáció. A másodrendű görbék osztályozási tétele.
- A centrális vetítés tulajdonságai. Ideális pontok értelmezése, az euklideszi tér ideális térelemekkel való bővítése, a projektív tér származtatása. A projektív sík analitikus modellje, meghatározó vektorok, homogén koordináták. Véges projektív síkok.
- Desargues tétele. Pont- és sugárnégyes kettősviszonya, Papposz tétele. Harmonikus pont- és sugárnégyesek, teljes négyszög és négyszöglet. A projektív sík kollineációi. Az euklideszi sík affin transzformációiból nyert kollineációk. A projektív geometria alaptétele. A centrális–tengeleyes kollineációk. A projektív sík másodrendű görbéi. A kúpszeletre vonatkozó konjugáltság, pont polárisa, egyenes pólusa. A kör és a kúpszeleti kettősviszony. Pascal tétele, Brianchon tétele. Steiner tétele projektív sugársorokra.



A matematika alapjaiG-tg

Furcsa lehet, hogy az alapokkal a matematikai tanulmányaik végén találkoznak a hallgatók. De a dolog indokolt, ahhoz, hogy ezeket az alapokat és a rájuk való építkezést megértsük –beleértve azt is, hogy miért van szükség ilyen alapozásra –, igen hasznos, ha minél tágabb ismereteink vannak matematikából, minél nagyobb rálátásunk van a dolgokra. Ez az alapvetés halmazelmélet és matematikai logika segítségével történik.

A félév tematikája:

- Műveletek halmazokkal.
- Számosságok. Megszámlálható halmazok, kontinuum számosság.
- Cantor tétele a hatványhalmaz számosságáról.
- Paradoxonok, a Russell-paradoxon.
- A végtelen halmazok „meglepő viselkedése”.
- Műveletek számosságokkal.
- Kiválasztási axióma.
- Axiomatikus halmazelmélet.
- Kijelentéslogika.
- Játékos feladatok a logikai jelenségek bemutatására.

Két feladat a félév anyagából:

1. a) Valaki – nevezzük Tulajnak – építtetett egy olyan szállodát, amelyben végtelen sok (egyágyas) szoba van. A szálloda tele van, ami nem is csoda, hiszen ki ne szeretne egy ilyen szállodában megszállni! Kiköltözni sem akar/hajlandó senki. (Átköltözni egy másik szobába, azt igen. De kiköltözni??!) Az sem meglepő ezek után, hogy érkezik egy újabb vendég is, aki szintén itt szeretne éjszakázni. Mit tehet a recepciós, ha szeretne a szállodájában szobát adni az új vendégnek, de persze a régieket sem akarja elküldeni?

b) A szálloda oly népszerű, hogy másnap délután egy busz is érkezik 112 utassal és két sofőrrel. Hogyan lehetne őket is elszállásolni?

c) A szálloda népszerűsége töretlen, sőt! Harmadnap egy hatalmas busz érkezik, benne végtelen sok utassal. Hogyan tudná őket is elszállásolni a recepció? (A sofőrök most a buszban alszanak.)

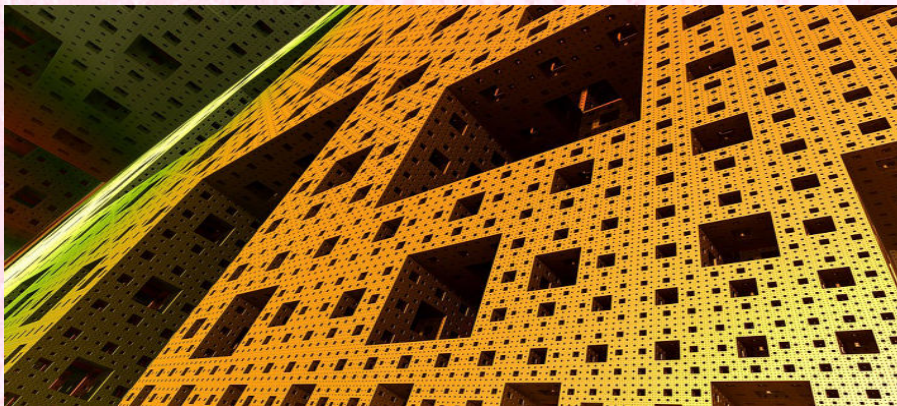
d) Negyednap senki sem érkezik, a 72 órája talpon lévő recepció egészen megkönnyebbül, még aludni is tud egy picit. Viszont a következő napon délután fél 6-kor egyszerre érkezik meg végtelen sok busz, mindegyikben végtelen sok utassal. (Még szerencse, hogy a szálloda parkolójában végtelen sok busznak is van hely.) Mit csináljon most szegény recepció, akit a Tulaj megfenyegetett, hogy kirúgja, ha csak egyetlen szobát kérőt is elutasít? (És a recepció nagyon nem szeretné, ha kirúgnák.)

2. A lovagok és lóköttők szigetén mindenki vagy lovag, vagy lóköttő. A lovagok mindig igazat mondanak, a lóköttők mindig hazudnak.

a) Két emberrel találkozunk, A-val és B-vel. A azt mondja: Legalább az egyikünk lóköttő. Miféle A és B?

b) Három lakossal találkozunk, A-val, B-vel és C-vel. A ezt mondja: B és C egyforma típusú. Valaki megkérdi C-től: Egyforma típusú A és B? Mit válaszol C?

Oldjuk meg a feladatokat józan paraszti ésszel, illetve logikai formalizálás segítségével is!



A matematika tanítása4G-tg

Ez a félév az utolsó az ilyen című tárgyak sorában. Az eddigre már számos óralátogatáson túl lévő hallgatóknak a félév végére a hallgatók képesek kell legyenek egy matematikai tanítási egység önálló megtervezésére.

A félév tematikája:

- A középiskolai tananyag elrendezésének, a tantervek, tankönyvek és a tanmenetek készítésének matematikai, didaktikai és módszertani szempontjai.
- A tantervi témakörök egysége, az egyes témák összekapcsolásának lehetősége és szükségessége.
- A középiskolai és a „felsőbb” (egyetemi) matematika kapcsolatai (pl. az általános és középiskolai oktatásban előforduló fogalmaknak az egyetemi oktatásban kiterjesztett és elmélyített „utóképei” és az iskolában előforduló témakörök egyetemikiterjesztései, valamint az egyetemen kiterjesztett, általánosított ismeretek visszavetítése a közoktatásban szereplőtananyagra).
- A matematikai modellezés és szerepe az oktatásban.
- A legfontosabb hatályos oktatási dokumentumok és a különböző tankönyvek szerepe a matematikatanításban.
- Hagyományos és elektronikus tankönyvek, munkalapok, segédanyagok és segédeszközök használata.
- Módszertani kutatások: adott témához óratervek, foglalkozási tervek készítése; tanterv- és tankönyvelemzés; a matematikaés a többi tantárgy kölcsönhatásai, feladatelemzés, modellezési feladatok, stb.

9. félév

A félévben a geometria a *Differenciálgeometria és nemeuklideszi geometriák* című tárggyal folytatódik. Ismét van egy *Véges matematika* és egy *Elemi matematika* kurzus is.

Ebben a félévben kezdődik meg a középiskolai tanárnak tanuló hallgatók képzésében az iskolai tanítási gyakorlat. Ezt a gyakorlatot többnyire az ELTE gyakorló iskoláiban végzik, vezetőtanárok irányítása mellett. A vezetőtanárok a gyakorló iskolák tanárai, több éve tanító, nagy tapasztalatú oktatók, akik nem csak a matematika tanításában jártasak, hanem a hallgatók gyakorlati felkészítésében is.

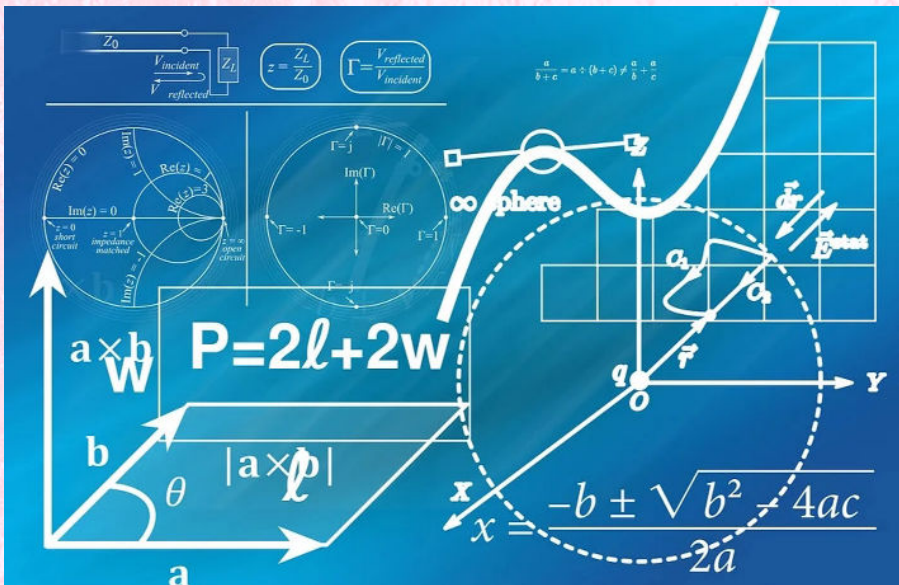
Differenciálgeometria és nemeuklideszi geometriák

A tárgy egyrészt görbék és felületek vizsgálatával, leírásával foglalkozik, másrészt megismertet a geometriák alapjaival is. Ez utóbbi keretében különösen nagy hangsúlyt kap a magyar vonatkozásokkal is bíró, Bolyai János által is megalkotott hiperbolikus geometria.

A félév tematikája:

- Paraméterezett görbék. Sebességvektor, érintő. Ívhossz, természetes paraméterezés. A görbe görbülete. Simulósík, simulókör. A síkgörbe előjeles görbülete. A görbe kísérő Frenet-bázisa. Frenet-képletek.
- Felületek leírása egyenlettel. Másodrendű felületek. Az elemi felület paraméteres előállítása. Érintősík, felületi normális. Első főmennyiségek. Felületi görbe ívhossza, felületdarab felszíne. Második főmennyiségek. A felület görbületi jellemzése normálmetszetekkel, az érintőirányhoz rendelt normálgörbület, főgörbületek, főirányok. A Gauss-görbület és annak geometriai jelentése. A felület geodetikus görbéi.

- A geometriák axiomatikus felépítésének alapelvei, a modellek szerepe. Az abszolút geometria axiómarendszere. A párhuzamossági axióma jelentősége, helyettes axiómák. Bolyai János szerepe a hiperbolikus geometria felfedezésében. A hiperbolikus geometria Cayley–Klein-féle gömbmodellje, egybevágósági transzformációk a modellben. A hiperbolikus sík Poincaré-féle modelljei. A háromszögek szögdefektusa és területe. A hiperbolikus síkgeometria elemi tételei.

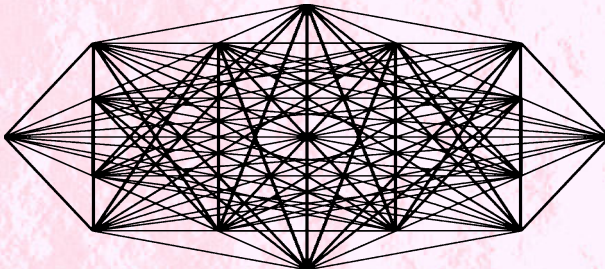


Véges matematika 2

Szokták a kombinatorikát – és ezen belül a gráfelméletet – „magyar” matematikának is nevezni. Erdős Pál elődei és utódai munkájának nyomán rengeteg kombinatorikai eredmény fűződik magyar matematikusok nevéhez. A félév anyaga nagyrészt gráfelmélet, így aligha meglepő, hogy a kurzus során is elhangzik számos magyar matematikus neve.

A félév tematikája:

- Minimax tételek. Páros gráfok és párosítások, König–Hall-tétel és változatai. Kapcsolat páros gráf különféle paraméterei között (Gallai tételei). Többszörös összefüggőség, kétszeresen össze függő gráf jellemzése körökkel. Mélységi bejárás.
- Lineáris rekurzióra vezető feladatok, állandó együtthatós lineáris rekurziók megoldása: a karakterisztikus egyenlet szerepe.
- Séták a rácspontokon, tükrözési elv, Catalan-számok (sor a pénztárnál), bolyongás a számegyenes rácspontjain.
- A Ramsey-tételkör. Az $R(k,l)$ és $R(3,3,\dots,3)$ Ramsey-számok becslése. Euklideszi Ramsey-tételek, a sík színezése 3 illetve 9 színnel.
- Halmazrendszerek kombinatorikája: a Sperner-tétel (kapcsolat párosításokkal: első bizonyítás) és a LYM egyenlőtlenség (ebből második bizonyítás). A De Bruijn–Erdős-tétel.
- Extremális gráfok: négyszöget nem tartalmazó gráfok, felső becslés az élszáma.
- Lineáris algebrai módszerek a kombinatorikában.

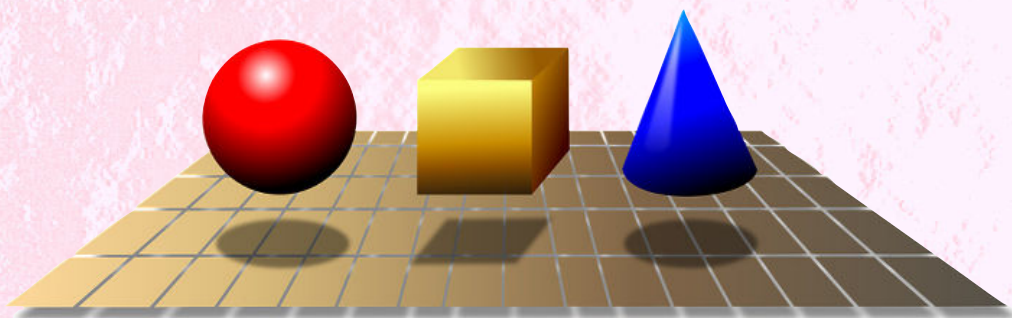


Elemi matematika6G-tg

Az utolsó Elemi matematika tárgy során vegyes feladatok kerülnek terítékre. Ezek a tehetséges gyerekekkel való foglalkozással, illetve az esetlegesen lemaradók felzárkóztatásával kapcsolatosak.

A félév hivatalos tematikája:

- A magyarországi tehetséggondozás hagyományai és központjai.
- A magyarországi matematika versenyek régen és ma.
- A versenyek és felkészítések szervezeti keretei és feladataik áttekintése, minta feladatsorok tanulmányozása és összeállítása a hallgatók munkái alapján.
- Nemzetközi kitekintés, más országok tehetséggondozási programjai, azok megjelenése a nyomtatott és az elektronikus médiában.
- Európai trendek.



Szaktárgyi tanítási gyakorlat-tg

A félév tematikája:

A gyakorlat keretében a hallgató az ELTE egyik gyakorlóiskolájában egy vezetőtanár irányítása mellett megismerkedik a tanári munkával és konkrét tapasztalatokra tesz szert a matematika tanításában. A vezetőtanár és az iskola további oktatói által tartott matematika órák látogatását, az úgynevezett hospitálást, követően a hallgatónak órákat kell tartania matematikából egy meghatározott számban (várhatóan úgy 15 órát a gyakorlat során). Ezen órák ütemezését és beosztását a vezetőtanár határozza meg. Az órákra való felkészülésben és az óratervek kidolgozásában a hallgatót a vezetőtanár segíti. Vele tudja a hallgató elemezni és értékelni a már megtartott órákat, illetve megbeszélni azok tapasztalatait. A tanítási gyakorlat során a hallgatónak lehetősége nyílik arra is, hogy fejlessze matematika módszertani és a pedagógiai ismereteit. A tanítási gyakorlat során végzett munkáját a vezetőtanár gyakorlati jeggyel értékeli.



10. félév

Egy félév erejéig visszatér a *Valószínűségszámítás*. Mellette két új tantárgy kerül a képzésbe, ezek az *Informatika*, az *A matematika-tudomány története*. Folytatódik a *tanítási gyakorlat* is a gyakorló-iskolákban.

Ezzel a félévvel zárul a középiskolai tanár szakos hallgatók matematikai képzése, a félév végén egy összefoglaló vizsgát, úgynevezett „Szakterületi záróvizsgát” kell tenniük.

Valószínűségszámítás 2

A Valószínűségszámítás 1-ben megszerzett alapokra építve véletlen folyamatok vizsgálata kerül sorra, és a statisztikai elemzések terén is újabb ismeretek kerülnek elő. A hallgatók kicsit belekóstolhatnak az Információelmélet alapjaiba is.

A félév tematikája:

- További fejezetek a valószínűségszámításból és a matematikai statisztikából: Nevezetes abszolút folytonos eloszlások, rendezett minták. Generátorfüggvény. Minta, nevezetes statisztikák. Becslések és tulajdonságaik. A hipotézisvizsgálat elemei. Nevezetes statisztikai eljárások. Iskolai kísérletek tervezése és kiértékelése.
- Véletlen bolyongás (arkusz szinusz törvény, nagy eltérések, iterált logaritmus tétel, tönkremenési problémák).
- Pontfolyamatok (Poisson-folyamat). Markov-láncok. Felújítási folyamatok. Elágazó folyamatok (Galton–Watson-folyamat). Sorbanállási modellek (stacionárius születési–kihalási-típusú sorbanállási rendszerek).
- Információelmélet: Entrópia, divergencia. Redundancia és nyelvészet. Egyértelműen dekódolható kódok. Hibajavítás.

InformatikaG-ta

A tárgy keretében olyan programok használatával ismerkednek meg a hallgatók, amelyeket majd jól tudhatnak hasznosítani a munkájuk során. Sorra kerülnek olyan programok, amik a diákoknak segíthetnek megérteni a matekot, olyanok, amik a matematika tanítását segítik, de olyanok is, amelyek a tanításhoz szükséges anyagok – óravázlatok, ábrák, grafikonok, animációk stb – elkészítését könnyítik meg.

A félév tematikája:

- Szövegszerkesztés: szedés, tördelés.
- LaTeX: felépítése, a matematikai mód, speciális karakterek kezelése, kiemelt képletek. Tételszerű környezetek, egyszerű grafikák (TikZ), bibliográfia, számlálók. Prezentációkészítés Beamerrel.
- Táblázatkezelés: adatok feldolgozása, ábrázolása, problémamegoldás táblázatkezelővel.
- Geometriai szoftver használata: alapvető műveletek, szerkesztések. Saját eszközök készítése, animációk, mértani helyek keresése. Statikus és dinamikus munkalapok készítése. Kompatibilitás a LaTeX-hel.
- Komputeralgebrai szoftver használata: nyelvi elemek, függvények. Két- és háromdimenziós grafika, egyéb lehetőségek. Könyvtárak, bővíthetőség. Példák: számelmélet, lineáris algebra, polinomok, határérték, összegek, integrálás, differenciálás, egyenletek, egyenletrendszerek megoldása, numerikus számítások. Egyszerűbb biológiai és fizikai modellezés.

A matematikatudomány története-tg

A tárgy előadások formájában valósul meg. Ezeken az előadásokon a diákok főleg a matematika fejlődésének sajátosságaival ismerkednek meg. De hallanak bizonyos matematikai gondolatok történetéről is, változásairól az idők során. A kurzus teljesítését kísérő füzetsorozat segíti.

A félév hivatalos tematikája:

A kurzusban tudományos igényesség, fogalmi és nyelvi egzsátság érvényesül, továbbá az a törekvés, hogy elkerüljünk olyan félrevezetően leegyszerűsítő, matematikai és történeti szempontból egyaránt abszurd közhelyeket, amelyek a népszerűsítő irodalom különböző fokain hagyományosan és széles körben elterjedtek. A kurzust nem az irányzatok, stratégiai áramlatok egyoldalú elvont szemlélete jellemzi, hanem a matematika tudomány jellege történeti változásainak konkrétumokban megjelenő, a kultúrtörténeti beágyazottságot is figyelembe vevő vizsgálata. Az esztörténeti vonulatok kiválasztásában (egyebek mellett) érvényesül egy olyan újszerű vezérelv, amely a kurzust felsőbb éves matematikatanár szakos hallgatók számára különösen érdekessé teszi: A matematika tudomány fejlődéstörténetének olyan csomópontjai, amelyekből bizonyos, az oktatásban elterjedt és a mai napig fennmaradt, századok, sőt évezredek folyamán megmerevedett és anakronisztikusan eltorzult fogalmi és nyelvi hagyományok indultak ki. A kurzus programjának tehát határozott, jól definiált, a hallgatóságban tudatosítandó gerince van. Az anyag azonban gazdagabb ennél. A fő vonalba szorosan nem tartozó, de más szempontból fontos tartalmak helyet kapnak

- a vonulatok csomópontjainak időbeli, személyes, tematikai környezetében;
- a csomópontok közötti – olykor időben nagyon hosszú – átmeneti korszakokban (például amikor egy matematikai diszciplína technikai apparátusa és alkalmazási potenciálja erőteljesen fejlődik, miközben a fogalmi megalapozás hiányai fennmaradnak).

A kurzust kísérő füzet sorozat tartalma kevesebb is és több is az előadásénál. Kevesebb, mert nem a szóbeli előadás élményt szerző közvetlenségével szól a tárgyról; több, mert olyan

- részletgazdagságot, olvasmányosságot és adatok olyan sokaságát,
- irodalmi útmutatásokat,
- feladatanyagot nyújt, ami a tankönyv, a kézikönyv és bizonyos értelemben a monográfia műfajához közelít. Az irodalmi útmutatások egyrészt a leendő matematikatanárok matematikatörténeti önművelésére szolgálnak, másrészt megkönnyítik az olyan történeti érdekességű feladatok gyűjtését, amelyek a hallgatók leendő iskolai tanítványai számára alkalmasak. A feladatanyagban pedig a hagyományos számítási, bizonyítási és szerkesztési feladatok mellett megjelennek újszerű interpretációs feladatok is, amelyek régi, klasszikus értékű matematikai szövegek értelmező olvasását, a hajdani és a mai fogalmi és nyelvi struktúrák elemző szembeállítását kívánják.

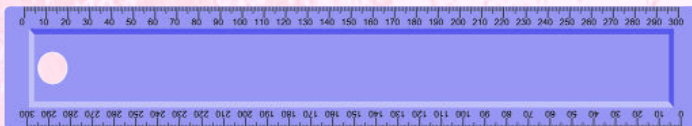


Szaktárgyi tanítási gyakorlat-tg

Ezt a gyakorlatot is általában az egyetem egyik iskolában végzik a hallgatók. Általában úgy, hogy az egyik félévben főleg az egyik, másik félévben főleg a másik tárgyak tanítását gyakorolják.

A félév tematikája azonos az előző félévivel:

A gyakorlat keretében a hallgató az ELTE egyik gyakorlóiskolájában egy vezetőtanár irányítása mellett megismerkedik a tanári munkával és konkrét tapasztalatokra tesz szert a matematika tanításában. A vezetőtanár és az iskola további oktatói által tartott matematika órák látogatását, az úgynevezett hospitálást, követően a hallgatónak órákat kell tartania matematikából egy meghatározott számban (várhatóan úgy 15 órát a gyakorlat során). Ezen órák ütemezését és beosztását a vezetőtanár határozza meg. Az órákra való felkészülésben és az óratervek kidolgozásában a hallgatót a vezetőtanár segíti. Vele tudja a hallgató elemezni és értékelni a már megtartott órákat, illetve megbeszélni azok tapasztalatait. A tanítási gyakorlat során a hallgatónak lehetősége nyílik arra is, hogy fejlessze matematika módszertani és a pedagógiai ismereteit. A tanítási gyakorlat során végzett munkáját a vezetőtanár gyakorlati jeggyel értékeli.



A Szakterületi záróvizsga:

A Szakterületi záróvizsga annak megállapítására szolgál, hogy a vizsgázó biztos alapokkal és megfelelő áttekintéssel rendelkezik-e a legfontosabb témakörökben. A vizsgán a matematika szakterületi képzés tananyagát kéri számon. A témakörök: algebra, analízis, geometria, matematika alapjai, számelmélet, valószínűségszámítás, véges matematika.

A szakterületi záróvizsga jelenlegi tételsora a középiskolai szakirányon

1. Kombinatorika és diszkrét valószínűségszámítás.

Kombinatorikai alapfeladatok és megoldásaik. Skatulyaelv, szita-formula. Állandó együtthatós lineáris rekurziók. Permutációk, csoportelméleti vonatkozások. Kombinatorikus valószínűségi mező, szerencsejátékok, mintavételezés.

2. Számfogalom. Az egész, a racionális, a valós és a komplex számok fölépítése. Hatványozás. Tizedes törtek. Algebrai és transzcendens számok. Korlátos számhalmazok. Alsó és felső határ. Halmazok számossága.

3. Számelmélet. A számelmélet alaptétele, következményei. Kongruenciák, Euler–Fermat-tétel, elem rendje csoportban, kapcsolat Lagrange tételével. Wilson-tétel, primitív gyök, diszkrét logaritmus, kapcsolat a p elemű testtel. Diofantikus egyenletek, nevezetes számelméleti problémák és tételek.

4. Vektorok és mátrixok. Vektortér, bázis, dimenzió. Térbeli szabad vektorok, skaláris szorzat, vektoriális szorzat. Mátrix rangja. Determináns. Lineáris egyenletrendszerek, megoldhatóság. Lineáris leképezések vektortereken. Lineáris transzformáció, sajátérték, sajátvektor, diagonalizálhatóság.

5. Polinomok és alkalmazásaik. Gyökök, gyöktényezők, a gyökök és együttthatók közti összefüggések, speciális egyenletek megoldása. A számelmélet alaptétele polinomgyűrűkben. Irreducibilis polinomok a racionális, a valós és a komplex számtest fölött. Testbővítések, a geometriai szerkeszthetőség algebrai elmélete.

6. Szintetikus geometria. A sík elemi geometriája. Sokszögek és konvex poliéderek. Kerület, terület, térfogat, felszín geometriai értelmezése. Kúpszeletek. Euklideszi szerkesztések. Geometriai axiómarendszerek, a párhuzamosság problémája. A hiperbolikus síkgeometria modelljei.

7. Analitikus geometria. Térbeli szabad vektorok, műveletek vektorokkal. Szögfüggvények. Skaláris szorzat, vektoriális szorzat. A sík és a tér koordinátázása, alakzatok egyenletei. Homogén koordináták a projektív síkon. Másodrendű görbék. Gömbi geometria, gömbháromszögek.

8. Geometriai transzformációk, szimmetriák. Egybevágósági transzformációk. A síkbeli egybevágóságok osztályozása és analitikus leírása. Hasonlósági transzformációk, középpontos hasonlóságok. Hasonló alakzatok. Síkbeli affin transzformációk. Kollineációk a projektív síkon. Inverzió síkban és térben. Csoportelméleti vonatkozások.

9. Sorozatok és függvények határértéke, folytonosság. Sorozatok határértéke. Végtelen sorok. Függvények határértéke. Folytonos függvények. Elemi függvények és tulajdonságaik. Pontsorozatok határértéke. Többváltozós függvények határértéke és folytonossága.

10. Differenciálszámítás. A differenciálhatóság fogalma, geometriai jelentése. Függvényvizsgálat. Taylor-polinom és Taylor-sor. Többváltozós függvények parciális deriváltjai. Kétváltozós függvények grafikonja, szintvonalai, differenciálhatósága, a grafikon érintősíkjá. Szélsőérték feladatok egy és több változóban.

11. Integrálszámítás. Riemann-integrál. Primitív függvény, Newton–Leibniz-formula. Jordan-mérték. Többszörös integrál, lebon-tási tétel. Alkalmazás: terület- és térfogatszámítás.

12. Valószínűségszámítás. Valószínűségi mező. Valószínűségi változók, nevezetes eloszlások. Várható érték és szórás. A nagy számok törvénye és a centrális határeloszlás tétel. Minta, alap-statisztikák. Becslések. A hipotézisvizsgálat alapjai. Diszkrét idejű Markov-láncok. A Poisson-folyamat.

13. Matematikai alkalmazások 1.

(A vizsgázónak a három altémakör közül kettőt kell választania.)

a) Gráfelméleti alapfogalmak (séta, út, kör, fa, összefüggőség). A szélességi bejárás. Euler-vonalak, Hamiltonkörök és Hamilton-utak. Síkgráfok, Euler-formula és geometriai következményei. Kuratowski tétele.

b) Szimmetrikus bolyongás, tönkremenési feladat. Bolyongás gráfokon. Elágazó folyamat. Diszkrét idejű Markovláncok. A Poisson-folyamat, sorbanállási modellek.

c) Az analízis felhasználása a geometriában. Paraméterezett görbék. Ívhossz, görbület. Paraméterezett felületek. Érintősík. Felszín.

14. Matematikai alkalmazások 2.

(A vizsgázónak a három altémakör közül kettőt kell választania.)

a) Páros gráfok és párosítások, König–Hall-tétel és változatai. Gráfszínezések. Ramsey- és Turán-tétel.

b) Közönséges differenciálegyenletek és alkalmazásaik. Szétválasztható változójú, elsőrendű lineáris, másodrendű homogén lineáris egyenletek és alkalmazásaik.

c) Kvadratikus maradékok, a számelmélet alkalmazása a kriptográfiában.



11. és 12. félév

A középiskolai szakirány utolsó két félévére. Ekkor a hallgatók főleg külső iskolákban vannak, ahol heti rendszerességgel bár nem túl magas óraszámban tanítják a szakjaikhoz tartozó tantárgyakat. Ebben a külső iskolák egy-egy tanára – a hallgató mentora vagy konzulense – segíti őket. A két félév során mindkét szakjuktól egy-egy bemutató órát tartanak.

A Matematikai Intézet keretén belül ekkor már csak az *Összefüggő egyéni gyakorlatot kísérő szakos szeminárium* című kurzusuk van, mindkét félévben, heti 1 órában. (Hasonló szemináriumuk van a hallgatóknak a másik tárgykükből is és a PPK-n is.)

A tanulmányok zárásához minden hallgatónak szakdolgozatot is kell készítenie. A szakdolgozat bemutatása – „védése” – és egy módszertani záróvizsga az utolsó két teljesítendő feladat. Ezek sikere esetén a hallgató pár nappal később ünnepélyes keretek között megkapja tanári oklevelét.

Összefüggő egyéni gyakorlatot kísérő szakos szeminárium

A szeminárium célja, hogy segítséget nyújtson a hallgatóknak a külső iskolában – gyakran vidéken, ha ott van a választott iskolájuk – végzett tanítási gyakorlatuk során felmerülő kérdésekben, problémákban.

A tantárgy hivatalos tematikája:

- Az óra előkészítése (életkori sajátosságok, óravázlat, tankönyv, példatár, eszközök, szemléltetés stb.)
- Bemutató óra megfigyelése és elemzése, alapvető feedback szabályok
- Az iskolai gyakorlattal kapcsolatos hallgatói tapasztalatok megbeszélése matematikai, didaktikai és módszertani szempontból
- Kiselőadások – problémák és sikerek – megosztása és megbeszélése
- Konzultáció meghívott vezetőtanárokkal és/vagy egyetemi oktatókkal
- Beadandó egy óravázlat

A szakdolgozatról

A tanári szakdolgozat témájának a hallgató valamelyik szakjához kell kötődnie. Csak akkor kapcsolódik a Matematikai Intézethez, ha a hallgató a két szakja közül matematikából kívánja írni a szakdolgozatát.

A szakdolgozat a tanárképzésen folytatott tanulmányok végén megírt hosszabb terjedelmű mű. Célja, hogy a hallgató egy általa választott területen elmélyedjen, és azt feldolgozza. A hallgatót e munkájában témavezető irányítja. A témavezető segíti a hallgatót a szakirodalom kijelölésében, a megfelelő ütemezés kialakításában, a tartalmi és formai követelményekhez való igazodásban, mindemellett pedig rendszeres konzultációval támogatja a dolgozat elkészítését.

A szakdolgozat témáját a hallgató választhatja a Matematikai Intézet oktatói által meghirdetett témák közül, de saját témát is feldolgozhat, ha talál hozzá olyan oktatót, aki vállalja hozzá a témavezetést.

Matematika szakterületen a dolgozat témájának jellege lehet matematikai vagy matematika szakmódszertani (esetleg pedagógiai, pszichológiai). Matematikai jellegű téma esetén a dolgozatnak tartalmaznia kell olyan részt is, amely bemutatja a témának a tanári tevékenységhez való kapcsolódását. (Erre példa lehet egy szakkör tervezete az adott témakörben).

Ha a választott téma szakmódszertani jellegű, akkor a dolgozatnak a módszertanon kívül érdemi matematikai tartalommal is kell rendelkeznie.



A záróvizsgáról

Ez az utolsó számonkérés az egyetemi tanulmányok során.

Ha a hallgató matematikából írta a szakdolgozatát, akkor a vizsga része a szakdolgozat védeése is. Ez lényegében a szakdolgozat ismertetése a vizsgabizottság előtt és néhány a dolgozathoz kapcsolódó kérdés megválaszolása.

Maga a záróvizsga egy szóbeli vizsga a bizottság előtt, számadás a módszertanból elsajátított tudásról.

A tanári záróvizsga tételsora középiskolai szakirány esetén

Információk. A szakmódszertani fejelet témájának kijelölése az alábbi tétel-sorból való tételhúzás formájában történik. Amennyiben a vizsgázó az 1., 2. vagy 8. tételek valamelyikét húzza, akkor az ott szereplő választható témakörök közül kettőt meg kell jelölnie, amelyekből a vizsgabizottság választja ki, hogy a vizsgázó melyik téma mentén építse fel a fejeletét.

A vizsgán csak a tételsor használható, a vizsgára készülést segítő irodalomjegyzék nem.

1. A Nemzeti alaptanterv (NAT) fejlesztési területei, nevelési céljai; a NAT által meghatározott nevelés–oktatás tartalmi és szemléleti alapjai. Egy választott matematikai témakör vagy fogalom elemzése a NAT Fejlesztési feladatai alapján. A fogalmi rendszerek kialakítását megalapozó tapasztalatszerzés folyamata. Definiálási módok. *Választható témakörök: Számfogalom. Relációk, sorozatok és függvények. Nyitott mondat, állítások, egyenletek, egyenlőtlenségek. Speciális négyszögek. A függvényfogalom fejlődése 9–12. osztályig.*

2. A matematikatanítás tervezése és megvalósítása a kerettantervek alapján; a műveltségkép, a tudás és tanulás értelmezése. Egy szakterület tanításának lehetőségei és a tanári szabadság lehetőségeinek bemutatása egy választott területen keresztül. *Választható témakörök: Geometria 9–10. osztály. Függvényfogalom 11–12. osztály.*

Kombinatorika 9–12. osztály. Trigonometrikus, exponenciális, logaritmusos egyenletek. A valószínűség fogalmának bevezetése.

3. Modellalkotás a matematika tanításában, az alkalmazásorientált oktatás lehetőségei. Koordinátageometria mint a sík analitikus modellje, a gráfok, gráfelmélet tanítása. Az egyenlet, egyenlőtlenség mint matematikai eszköz a matematikai modellekben. A halmazokkal történő szemléltetés lehetőségei.

4. Szemlélet és absztrakció a számfogalom tanításában. A számfogalom kialakítása, fejlesztésének szintjei; műveletek. Számkörbővítés a természetes számoktól a valós számokig, különös tekintettel a valós számokra, a permanencia-elv. A számelmélet elemeinek tanítása. Betűabsztrakció, az algebrai kifejezések tanítása. A valós számok lehetséges megjelenései.

5. Érvelések, bizonyítások, tételek tanításának alapkérdései, szemléletes okoskodások, indoklások, bizonyítási stratégiák és technikák a középiskolában. Az irányított felfedeztetés lehetőségei. A bizonyítási igény felkeltésének módszerei. Tételek megsejtését elősegítő eljárások. Az algoritmikus gondolkodás fejlesztésének lehetőségei. A gondolkodási módszerek tanítása. A középiskolában szereplő tételek és bizonyítások.

6. A matematikatanítás formái, módszerei, segédeszközei a tanulók életkori sajátosságainak figyelembe vételével, munkaszervezési formák, számonkérés, értékelés. A tanulók motiválásának lehetőségei. Háromszögekhez kapcsolódó ismeretek fejlődése az életkori sajátosságok szerint 9–12. évfolyamon. (Fogalomfejlődés, ismeretek alakulása, megfogalmazása, bizonyítása, alkalmazása.)

7. A problémamegoldási képességek fejlesztésének lehetőségei, problémamegoldási stratégiák, heurisztikák, a problémafelvetés és -megoldás folyamata. A feladatok osztályozása különböző szempontok szerint, problémamezők, problémavariációk. Feladatvariációk.

8. Differenciálás és tehetséggondozás. A szakkörök, speciális tagozatok és a versenyek szerepe a matematikatanításában. Tehetséggondozás; a gyengébb képességű és motivációjú tanulók felzárkóztatásának módszerei. Felkészítés az érettségi vizsgára. Magyarországi matematikaversenyek középiskolásoknak.

Választható témakörök egy anyagrész két szinten való bemutatásához: Kombinatorika, gráfelmélet, tanítása matematika tagozaton és általános osztályokban. Valószínűesszámitás fakultáción és normál osztályban. A geometriai tanítása 9. évfolyamon gimnáziumban és szakközépiskolában. Trigonometrikus, exponenciális, logaritmus egyenletek.

9. Modern eszközök az oktatásban. A tanulók motiválásának lehetőségei. A tanítást és tanulást segítő eszközök (manipulációs eszközök, számítógép, internet, interaktív tábla) integrált alkalmazási lehetőségei. Függvények grafikonjának ábrázolása, függvényvizsgálat, egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása alkalmas programokkal.



A kiadvány
az EFOP-3.4.4-16-2017-00006
számú projekt matematika alprojektje
keretein belül készült



SZÉCHENYI 2020



MAGYARORSZÁG
KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap



BEFEKTETÉS A JÖVŐBE