Az amőba egy variációja, és annak matematikai háttere

HégerTamás

ELTE TTK Számítógéptudományi Tanszék

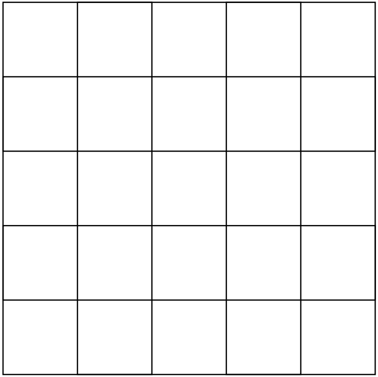
Kutatók éjszakája, 2023. szeptember 29.

Kazimierz Zarankiewicz
1902–1959

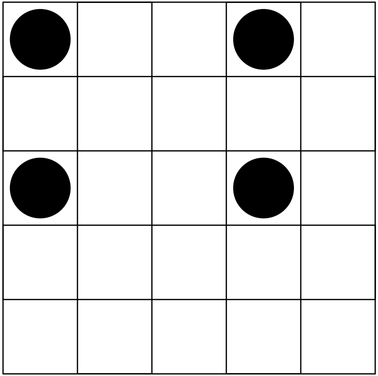
A kérdés 1951-ből

Maximum hány korongot tehetünk egy $n \times m$ tábla mezőire,
ha tilos a rácsvonalakkal párhuzamos oldalú téglalapot kirakni?

Példa 5×5 táblán

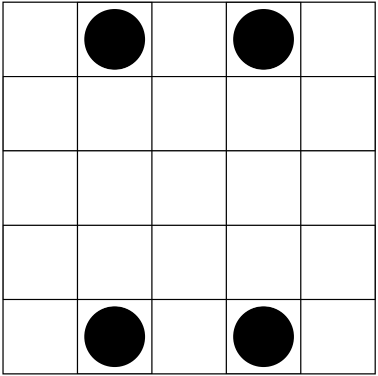


Példa 5×5 táblán



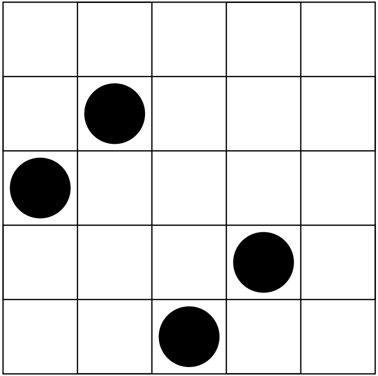
Tilos!

Példa 5×5 táblán



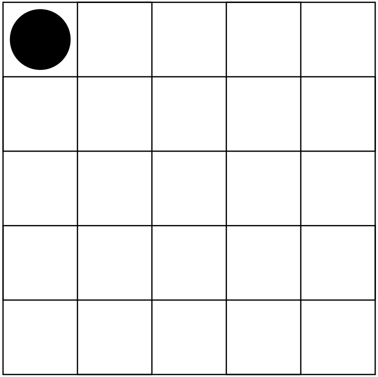
Tilos!

Példa 5×5 táblán

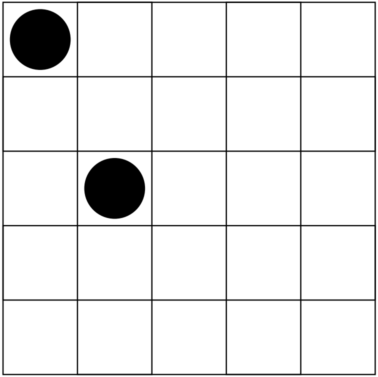


OK!

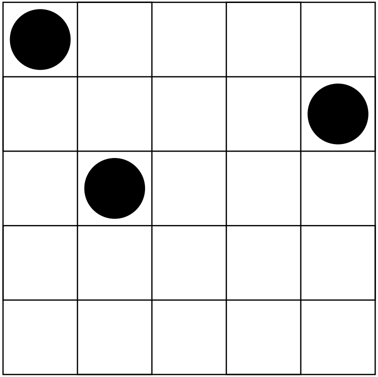
Példa 5×5 táblán



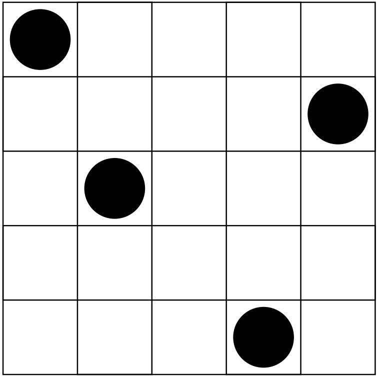
Példa 5×5 táblán



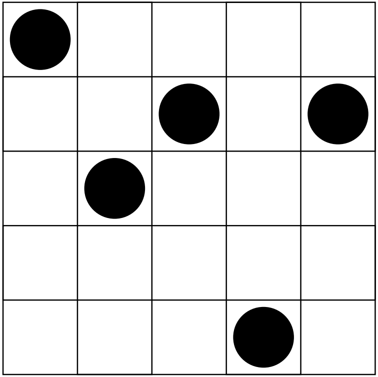
Példa 5×5 táblán



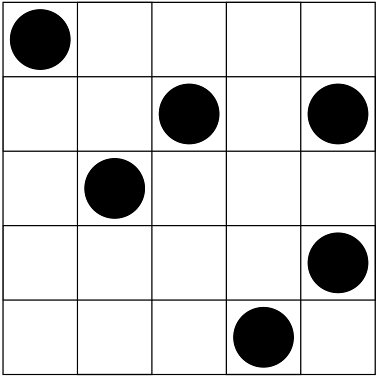
Példa 5×5 táblán



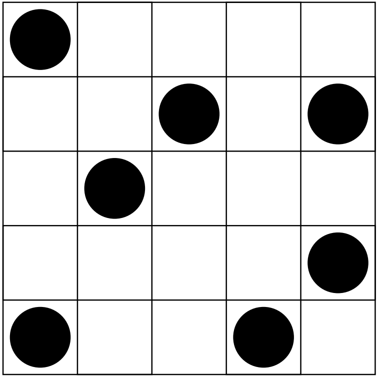
Példa 5×5 táblán



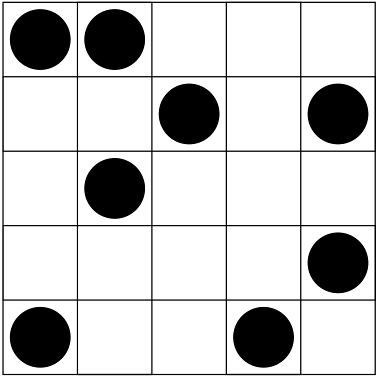
Példa 5×5 táblán



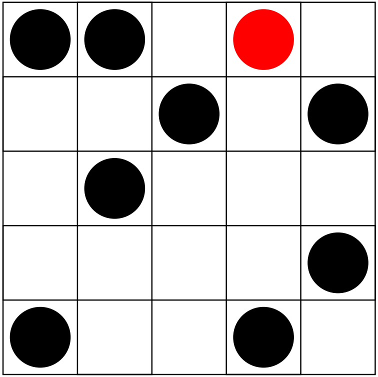
Példa 5×5 táblán



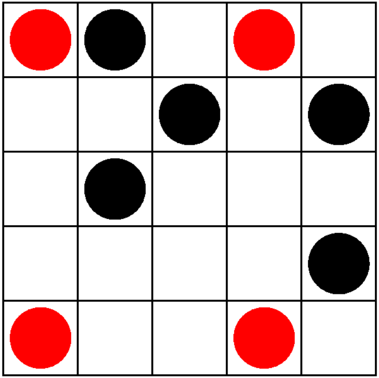
Példa 5×5 táblán



Példa 5×5 táblán



Példa 5×5 táblán



Kutatók és diákok

ELTE kutatódiák program, 2010

Kutató: Szőnyi Tamás

Diákok: Damásdi Gábor
Fábián Kata
Hörömpöli Balázs
Sápi András

Segéd: Héger Tamás

Kutatók és diákok

Szőnyi Tamás

Kutatók és diákok

Damásdi Gábor

Néhány játékváltozat

Két játékos felváltva tesz ugyanolyan / különböző korongokat a tábla mezőire.

Aki kirak téglalapot, az nyer / veszít.

Néhány játékváltozat

Két játékos felváltva tesz ugyanolyan / különböző korongokat a tábla mezőire.

Aki kirak téglalapot, az nyer / veszít.

Néhány játékváltozat

Két játékos felváltva tesz ugyanolyan / különböző korongokat a tábla mezőire.

Aki kirak téglalapot, az nyer / veszít.

Próbáljuk ki az amőbaváltozatot!

Játékok alapkérdései

Alapkérdések:

- Ki nyer?
- És hogyan?

Játékok alapkérdései

Alapkérdések:

- Ki nyer?
- És hogyan?

Játékok alapkérdései

Alapkérdések:

- **Ki nyer?**
- És hogyan?

Játékok alapkérdései

Amőba típusú játékoknál a 2. játékos **sosem** nyerhet
(ha az első jól játszik).

Bizonyítási módszer: **stratégialopás**.

Játékok alapkérdései

Amőba típusú játékoknál a 2. játékos **sosem** nyerhet (ha az első jól játszik).

Bizonyítási módszer: **stratégialopás**.

Játékok alapkérdései

Amőba típusú játékoknál a 2. játékos **sosem** nyerhet (ha az első jól játszik).

Bizonyítási módszer: **stratégialopás**.

A stratégialopás

Ha a 2. játékosnak volna **nyerő stratégiája**

A stratégialopás

Ha a 2. játékosnak volna **nyerő stratégiája**: az 1. játékos rakjon bárhová egy korongot, majd **tegyen úgy, mintha második játékos lenne** (kövesse a nyerő stratégiát, mint ha most kezdődne a játék).

A stratégialopás

Ha a 2. játékosnak volna **nyerő stratégiája**: az 1. játékos rakjon bárhová egy korongot, majd **tegyen úgy, mintha második játékos lenne** (kövesse a nyerő stratégiát, mint ha most kezdődne a játék).

- a „bónusz” korong a második játékosnak nem segít (saját szín)

A stratégialopás

Ha a 2. játékosnak volna **nyerő stratégiája**: az 1. játékos rakjon bárhová egy korongot, majd **tegyen úgy, mintha második játékos lenne** (kövesse a nyerő stratégiát, mint ha most kezdődne a játék).

- a „bónusz" korong a második játékosnak nem segít (saját szín)
- a „bónusz" korong az első játékosnak csak hasznára lehet (aki kirak, az nyer)

A stratégialopás

Ha a 2. játékosnak volna **nyerő stratégiája**: az 1. játékos rakjon bárhová egy korongot, majd **tegyen úgy, mintha második játékos lenne** (kövesse a nyerő stratégiát, mint ha most kezdődne a játék).

- a „bónusz" korong a második játékosnak nem segít (saját szín)
- a „bónusz" korong az első játékosnak csak hasznára lehet (aki kirak, az nyer)

Ha a stratégia valóban nyerő volna a második játékos számára, akkor az első játékos nyerne.

A stratégialopás

Ha a 2. játékosnak volna **nyerő stratégiája**: az 1. játékos rakjon bárhová egy korongot, majd **tegyen úgy, mintha második játékos lenne** (kövesse a nyerő stratégiát, mint ha most kezdődne a játék).

- a „bónusz” korong a második játékosnak nem segít (saját szín)
- a „bónusz” korong az első játékosnak csak hasznára lehet (aki kirak, az nyer)

Ha a stratégia valóban nyerő volna a második játékos számára, akkor az első játékos nyerne. Ez ellentmondás, tehát nincs ilyen stratégia.

Zarankiewicz-amőba

Tehát vagy döntetlen, vagy az első nyer. Melyik az igazság?

Kutatók és diákok

Fábián Kata

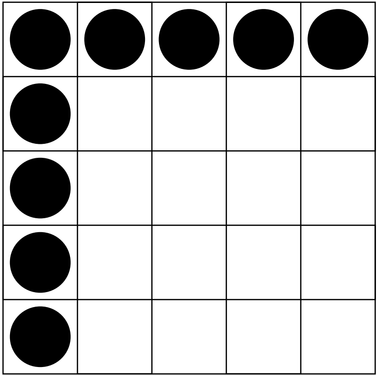
Játsszunk Zarankiewicz-csel! (BSc szakdolgozat, 2014)

Zarankiewicz-amőba

Tehát vagy döntetlen, vagy az első nyer. Melyik az igazság?

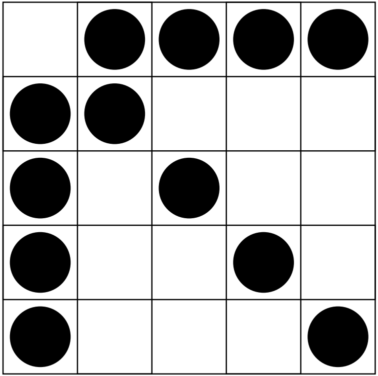
Térjünk vissza a Zarankiewicz kérdéséhez!

5 × 5 táblára hány korong fér el téglalap nélkül?



Egy példa 9 jól elhelyezett korongra.

5 × 5 táblára hány korong fér el téglalap nélkül?



Egy példa 12 jól elhelyezett korongra.

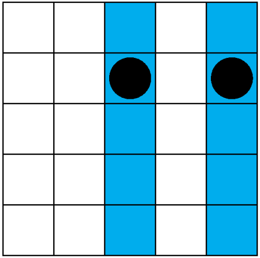
5×5 táblára hány korong fér el téglalap nélkül?

12-nél több korong elfér?

5×5 táblára hány korong fér el téglalap nélkül?

12-nél több korong elfér?

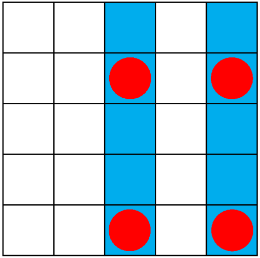
Kulcsgondolat: két egy sorban levő korong kijelöl egy oszloppárt.



5×5 táblára hány korong fér el téglalap nélkül?

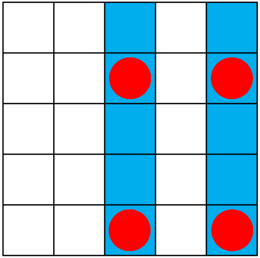
12-nél több korong elfér?

Kulcsgondolat: két egy sorban levő korong kijelöl egy oszloppárt.
Bármely oszloppár csak egyszer lehet kijelölve!



12-nél több korong elfér?

Kulcsgondolat: két egy sorban levő korong kijelöl egy oszloppárt.
Bármely oszloppár csak egyszer lehet kijelölve!



Számoljunk kicsit!

5×5 táblára hány korong fér el téglalap nélkül?

12-nél több korong elfér?

5×5 táblára hány korong fér el téglalap nélkül?

12-nél több korong elfér? Nem!

5×5 táblára hány korong fér el téglalap nélkül?

12-nél több korong elfér? Nem! Tehát **nem lehet döntetlen:**

5×5 táblára hány korong fér el téglalap nélkül?

12-nél több korong elfér? Nem! Tehát **nem lehet döntetlen:**

telerakott táblán az első játékosnak 13 korongja lesz!

Sok korongot a táblára: hogyan?

Egy korongelhelyezés akkor jó, ha

Sok korongot a táblára: hogyan?

Egy korongelhelyezés akkor jó, ha

- bármely két oszlophoz **legfeljebb egy** sor lehet, ahol mindkettő oszlopban korong van

Sok korongot a táblára: hogyan?

Egy korongelhelyezés akkor jó, ha

- bármely két oszlophoz **legfeljebb egy** sor lehet, ahol mindkettő oszlopban korong van
- bármely két sorhoz **legfeljebb egy** oszlop lehet, ahol mindkettő sorban korong van

Sok korongot a táblára: hogyan?

Egy korongelhelyezés akkor jó, ha

- bármely két oszlophoz **legfeljebb egy** sor lehet, ahol mindkettő oszlopban korong van
- bármely két sorhoz **legfeljebb egy** oszlop lehet, ahol mindkettő sorban korong van

Jó lenne, ha minden sorpár minden oszloppár ki lenne jelölve.

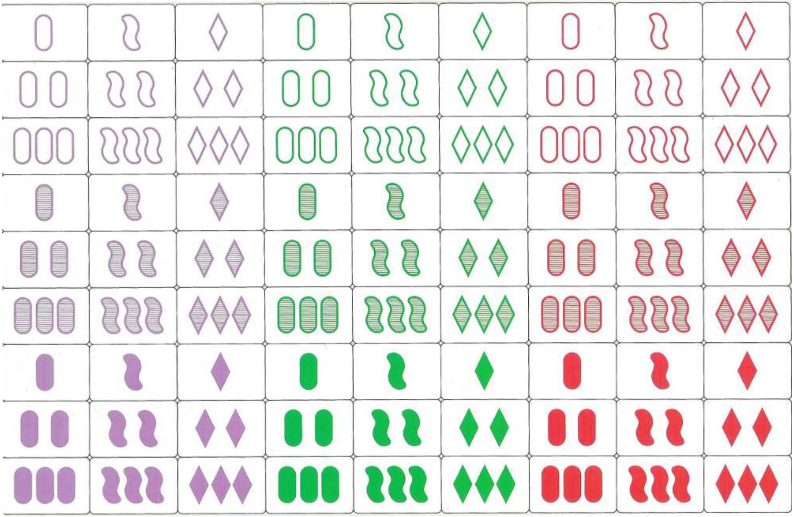
Sok korongot a táblára: hogyan?

Egy korongelhelyezés akkor jó, ha

- bármely két oszlophoz **legfeljebb egy** sor lehet, ahol mindkettő oszlopban korong van
- bármely két sorhoz **legfeljebb egy** oszlop lehet, ahol mindkettő sorban korong van

Jó lenne, ha minden sorpár minden oszloppár ki lenne jelölve. Vagy legalább mondjuk minden sorpár.

A SET készlet

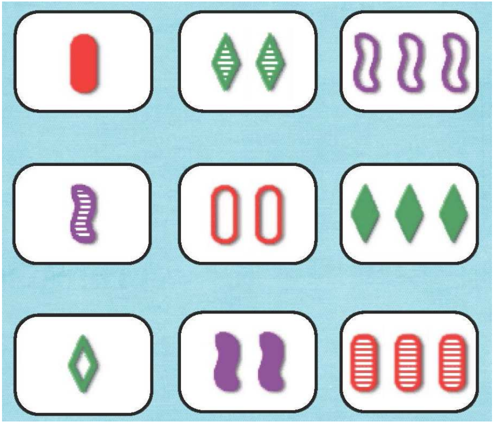


A SET játék

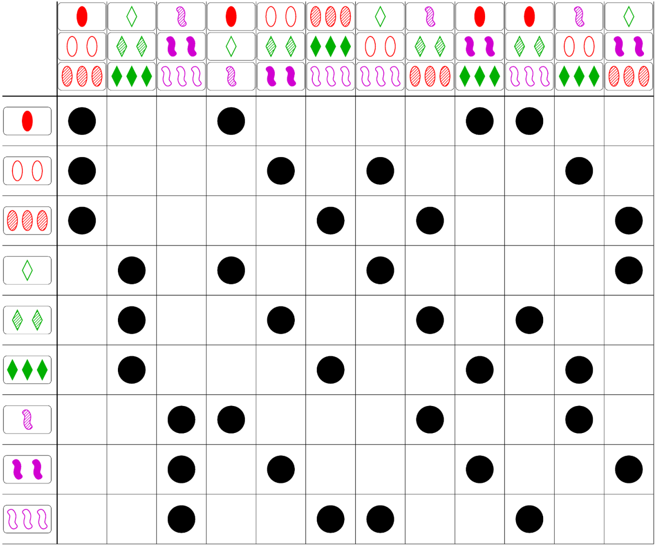
Tulajdonságok: szín
darabszám
forma
kitöltés

Három kártya akkor alkot SET-et, ha minden egyes tulajdonságukra nézve vagy egyformák, vagy háromfélék.

A SET játék



A SET játék



Egy geometriai ötlet: pontok és egyenesek

- két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet
- két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van
- vegyünk néhány pontot és egyenest
- a táblázat sorai a pontoknak, oszlopai az egyeneseknek feleljenek meg
- tegyünk korongot egy sor/oszlop metszetébe, ha a sor pontja rajta van az oszlop egyenesén
- nem keletkezhet téglalap: a két oszlop egyeneseinek két közös pontja lenne

Egy geometriai ötlet: pontok és egyenesek

- két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet
- két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van
- vegyünk néhány pontot és egyenest
- a táblázat sorai a pontoknak, oszlopai az egyeneseknek feleljenek meg
- tegyünk korongot egy sor/oszlop metszetébe, ha a sor pontja rajta van az oszlop egyenesén
- nem keletkezhet téglalap: a két oszlop egyeneseinek két közös pontja lenne

Egy geometriai ötlet: pontok és egyenesek

- két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet
- két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van
- vegyünk néhány pontot és egyenest
- a táblázat sorai a pontoknak, oszlopai az egyeneseknek feleljenek meg
- tegyünk korongot egy sor/oszlop metszetébe, ha a sor pontja rajta van az oszlop egyenesén
- nem keletkezhet téglalap: a két oszlop egyeneseinek két közös pontja lenne

Egy geometriai ötlet: pontok és egyenesek

- két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet
- két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van
- vegyünk néhány pontot és egyenest
- a táblázat sorai a pontoknak, oszlopai az egyeneseknek feleljenek meg
- tegyünk korongot egy sor/oszlop metszetébe, ha a sor pontja rajta van az oszlop egyenesén
- nem keletkezhet téglalap: a két oszlop egyeneseinek két közös pontja lenne

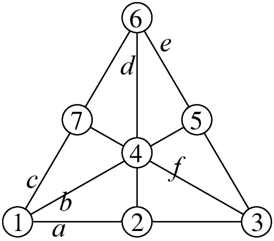
Egy geometriai ötlet: pontok és egyenesek

- két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet
- két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van
- vegyünk néhány pontot és egyenest
- a táblázat sorai a pontoknak, oszlopai az egyeneseknek feleljenek meg
- tegyünk korongot egy sor/oszlop metszetébe, ha a sor pontja rajta van az oszlop egyenesén
- nem keletkezhet téglalap: a két oszlop egyeneseinek két közös pontja lenne

Egy geometriai ötlet: pontok és egyenesek

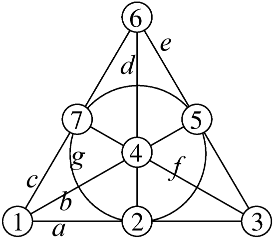
- két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja lehet
- két pontnak pontosan egy összekötő egyenese van
- vegyünk néhány pontot és egyenest
- a táblázat sorai a pontoknak, oszlopai az egyeneseknek feleljenek meg
- tegyünk korongot egy sor/oszlop metszetébe, ha a sor pontja rajta van az oszlop egyenesén
- nem keletkezhet téglalap: a két oszlop egyeneseinek két közös pontja lenne

A Fano-sík és a 7 × 7-es tábla kitöltése



	a	b	c	d	e	f
1	●	●	●			
2	●			●		
3	●				●	●
4		●		●		●
5		●			●	
6			●	●	●	
7			●			●

A Fano-sík és a 7 × 7-es tábla kitöltése



	a	b	c	d	e	f	g
1	●	●	●				
2	●			●			●
3	●				●	●	
4		●		●		●	
5		●			●		●
6			●	●	●		
7			●			●	●