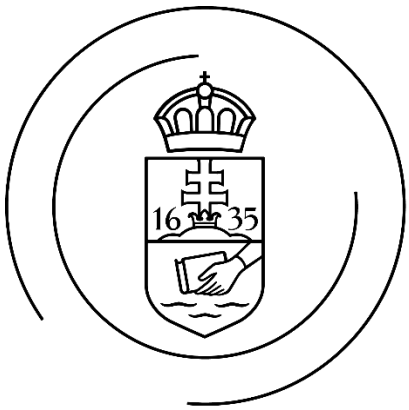
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Szakdolgozat

Ajtai Boglárka
kémia-matematika
osztatlan tanári mesterszak



ELTE

2025

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi Kar

Szakdolgozat

Játékok a matematikai tehetséggondozásban

Témavezető:
Varga Eszter
mesteroktató

Készítette:
Ajtai Boglárka
kémia-matematika
osztatlan tanári mesterszak

2025

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés 5

2. Matematikai háttér 7

2.1. Kombinatorikus játékok 7

2.1.1. Fogalmak 7

2.1.2. A nim játék 11

2.1.3. A *k*-nim 12

2.2. Stratégiai játékok 13

2.3. A Quarto 14

2.4. Blokkoló játékok 15

2.4.1. Páros vagy páratlan nim (odd or even nim) 15

2.4.2. Modulo *n* blokkoló nim 17

2.5. Szimmetriák a Quartoban 19

2.5.1. A bábuk szimmetriái 21

2.5.2. A tábla szimmetriái 22

2.6. A Quarto a csavar nélkül 27

3. Módszertani szakirodalmi háttér 31

3.1. A matematikatanítás céljai 31

3.2. Tanuláselméletek 33

3.3. Játékok az oktatásban 35

3.4. Néhány jó gyakorlat a játékok alkalmazásairól 36

3.4.1. Sakk 36

3.4.2. Játéktár a matematika szertárban 37

3.4.3. Komplex Instrukciós Program (KIP) 38

3.4.4. Játék a matekórán 39

3.4.5. A társasjátékkal töltött idő kifizetődik 39

3.4.6. Tehetségfejlesztés stratégiai társasjátékok segítségével 40

3.5. Nehézségek játékok használata során 41

4. Quarto foglalkozásterv 43

4.1. A foglalkozásokról 44

4.2. A Checkpoint Charlie 44

4.3. A foglalkozások eszközei 45

4.4. A foglalkozások vázlatos felépítése 48

4.5. A foglalkozások részletes tervei: 48

1. Foglalkozás 49
2. Foglalkozás 53
3. Foglalkozás 55
4. foglalkozás 58
4.6. Reflexió a foglalkozásokról 65
4.7. Kérdőívek a foglalkozások előtt és után 71
4.8. A kérdőívek kiértékelése 73
4.8.1. A sástói kérdőívek eredményei 73
4.8.2. A pálkövei kérdőívek eredményei 75
4.9. Néhány lehetőség a foglalkozások feladatainak bővítésére 77
5. Záró gondolatok 78
6. Irodalomjegyzék 79
7. Az MI használatáról szóló nyilatkozat 82

1. Bevezetés

A szakdolgozatom egy társasjáték köré épül. Nagyon szeretek társasjátékokkal játszani mind családi és baráti körökben, mind pedig gyerekkel, gyerekeknek játékot tanítva. Egyetemista éveim alatt rengeteg társasjátékot ismertem meg kollégiumunk heti rendszerességű társasestjén. Ezen játékokból kiemelkedett kettő, amelyek játszása közben rengeteg ötletem támadt arra, hogy milyen matekfeladatokat lehetne írni azokkal kapcsolatban, milyen matematikai tartalmú kérdéseket lehetne feltenni. Ez a két játék a Quarto és a Checkpoint Charlie. Valahányszor ezekkel játszottunk újabb és újabb kérdések merültek fel. A felmerülő kérdések legtöbb esetben a kombinatorika témaköréből kerültek ki.

Ezekből az ötletekből nőtte ki magát egy foglalkozásterv, amit nyári Medve Matek táborokban ki is próbáltam diákokkal. A foglalkozásokat az évek alatt több korosztályban is megtartottam, a tapasztalatok alapján módosítottam. A foglalkozásokban helyet kap a játék, amikor a résztvevők maguk is kipróbálhatják a társasjátékokat, átélhetik a játék és a felfedezés örömét, és természetesen a matematika is. Feladatokat, problémákat oldanak meg a diákok, amelyek a játékokhoz kapcsolódnak, azokból indulnak ki. A foglalkozásokon a diákokat is próbáltam kérdések megfogalmazására ösztönözni, hogy ők is átélhessék azt, amiben nekem volt részem a feladatok kitalálása során. A szakdolgozat tartalmazza ezeknek a foglalkozástervnek a bemutatását, a tábori foglalkozások reflexióit, tanulságait. Kíváncsi voltam a diákok hozzáállására a játékokkal, az azokon keresztül való tanulással kapcsolatban, így ezt kérdőívvel mértem fel a táborok elején és végén. A kérdőívek eredményei, kiértékelése is helyet kapott a dolgozatban.

Az évek alatt amikor egyre jobban érdekeltek a társasjátékok matematika tanítás terén való alkalmazásai, számos jó példával találkoztam, amelyek megerősítettek abban, hogy ez egy olyan tevékenység, amivel érdemes foglalkozni. Utánajártam annak, hogy miért lehet hasznos játékokat használni, hogyan lehet minél többet profitálni a tevékenységből. A dolgozatban ismertetem az általam feltárt gyakorlatokat. Bízom benne, hogy a foglalkozástervvel én is egy érdekes, mások számára is használható, kipróbálásra érdemes anyagot készítettem el. A foglalkozásterveket és az elkészített eszközöket, anyagokat szeretném megosztani a Matematika Összeköt Egyesület tagjaival, hogy a matektáborok során ők is kipróbálhassák ezeket.

Szakdolgozatom harmadik pillére a matematika. A matematika tanárképzés tantervében nem szerepel játékelmélet, de az alapszintű ismerete hasznos egy ilyen témájú foglalkozás megtartása során. Ennek a fejezetnek a megírása során arra törekedtem, hogy az egy kevés előismerettel rendelkező Olvasó számára is befogadható legyen. Ezen rész elkészítéséhez szükség volt arra, hogy önállóan új ismereteket sajátítsak el írott tananyag segítségével, és matematikai cikkeket dolgozzak fel. A foglalkozások megtervezésében, megtartásában pedig tanári szerepben próbáltam ki magam. Ezt a két tevékenységet tökéletesen összekapcsolták a játékok.

2. Matematikai háttér

A szakdolgozat ezen fejezetében játékelméleti alapfogalmak, tételek és bizonyítások szerepelnek. Megismerkedünk benne a Quarto-val, ami az egyik társasjáték, amelyet a foglalkozásokon használtam, és néhány Quarto-ból kiinduló matematikai cikkel. A fejezetben vannak tételek, melyeket bizonyítással közlök és vannak olyanok is, amelyeknek csak a forrását jelölöm meg, ahonnan a bizonyítás teljes egészében elérhető. A témakörben több olyan bizonyítás is szerepel, amely sok eset megvizsgálását igényli. Ezek a bizonyítások gyakran technikai jellegűek, sok új gondolatot nem tartalmaznak, így ezek közlése nem tenné könnyebben érthetővé a szakdolgozatot.

2.1. Kombinatorikus játékok

A fejezet megszerkesztése során az elsődleges cél az Olvasó segítése volt a későbbi fejezetek megértésében, valamint az, hogy a témakör későbbi feldolgozásához szilárd matematikai alapot biztosítsunk. A fejezet forrása Végh László, Király Tamás és Papp Júlia Játékelmélet jegyzete (Végh, 2024). A szükséges részeket átfogalmazva, a bizonyításokat néhol kicsit kibővítve közlöm, ezzel is segítve azt, hogy azok elemi eszközökkel is követhetőek legyenek akár a játékok iránt érdeklődő nem matematikusok számára is.

2.1.1. Fogalmak

Definíció. *Kombinatorikus játéknak* nevezünk egy olyan játékot, ami teljesíti a következő feltételeket:

- Kétszemélyes, és a két játékos felváltva lép, azaz a játék szekvenciális.
- Meg lehet adni egy (V, E) irányított gráfot, ahol V a lehetséges pozíciók (másnéven állások) halmaza (V lehet végtelen is) és az élek pedig az egyes csúcsokból kiinduló lehetséges lépések. A gráfnak teljesítenie kell a következőket:
    - A játék végesfokú, azaz minden állásból csak véges sok másikba lehet lépni, azaz a gráfban minden csúcs kifoka véges.
    - A játék véges, azaz tetszőleges állásból véges sok lépésben véget ér a játék, nincsen végtelen hosszú irányított séta a gráfban.
    - Adott lehet egy p_0 kezdőállás is, vagy a lehetséges kezdőállások V-beli halmaza, a játék paramétereként.
    - A játéknak kétféle kimenetele lehet: vagy az egyik játékos nyer és a másik veszít, vagy pedig döntetlen. A játék végállapotai a nyelők: azon elemei V-nek,

ahonnan nem vezet él kifelé. Minden nyelő *N*, *P* vagy *D* típusú lehet. Ha az utolsónak lépő játékos *N*-beli nyelőbe lép, akkor veszít, ha *P*-belire, akkor nyer, ha pedig *D*-belire akkor a játék döntetlennel ér véget.

Éles normál játékról beszélünk, ha minden nyelő *P* típusú, betlijátékról pedig, ha minden nyelő *N* típusú.

Definíció. *Személytelen játék*nak nevezünk egy játékot, ha tetszőleges kezdőállás megengedett.

Definíció. *Partizán játék*nak nevezünk egy játékot, ha a játékban a két játékos szerepe különböző. Adott a pozíciók egy (V_1, V_2) partíciója. A V_1 elemei az első játékos, a V_2 elemei a második játékos pozíciónak felelnek meg. V_1-beli állásból csak V_2-belibe lehet lépni, V_2-beliből pedig csak V_1-belibe.

Példák ismert kombinatorikus játékokra:

- sakk: egy ősi játék, amely korokon átívelő nagy népszerűségnek örvend. 1997-ben fordult elő először, hogy egy számítógép legyőzte a világ legjobbját, az aktuális világbajnok Garri Kaszparovot sakkban. Ma már tudjuk, hogy a kezdőnek van nemvesztő stratégiája, azonban az esetek nagy száma miatt konkrét nemvesztő stratégia nem ismert, így a sakk nem veszítette el érdekességét, továbbra is izgalmas szellemi párbajt nyújt a játékosoknak.
- malom: elterjedt táblajáték, melyet korongokkal játszanak.
- go: egy kínai eredetű, ősi táblajáték. A go-t a mesterséges intelligencia számára a sakknál lényegesen komolyabb kihívásnak tartották, mára viszont a Google fejlesztette algoritmus ebben is diadalmaskodott az ember felett.
- nim játék: Egyik leggyakoribb változata: adott egy kupacban *n* kavics. A két játékos felváltva lép. A soron következő játékos mindig egy, kettő vagy három kavicsot vehet el. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Erről a játékról még a későbbi fejezetekben is olvashatunk.
- amőba: véges méretű táblán játszik két játékos. Az nyer, aki tud gyűjteni *k* jelet egymás mellett egyenesen, vagy átlóban. (A végtelen méretű táblán játszott amőba játék nem kombinatorikus játék, mert egy játszma akár örökké is tarthat.)

Definíció. *Stratégia* alatt egy $V \to V$ függvényt értünk, amely minden V-beli nem nyelő helyzethez hozzárendeli az egyik ki-szomszédját: azaz tetszőleges álláshoz hozzárendeljük az egyik lehetséges lépést.

Definíció. Egy stratégia *nyerő stratégia*, ha azt követve mindig nyerni tudunk a másik játékos lépéseitől függetlenül. Egy stratégia *nemvesztő stratégia*, ha azt követve a játék kimenete döntetlen, vagy nyerni tudunk, azaz biztosan nem vesztünk.

Tétel. *A kombinatorikus játékelmélet alaptétele*. Minden éles kombinatorikus játékban pontosan az egyik játékosnak van nyerő stratégiája. Minden kombinatorikus játékban vagy az egyik játékosnak van nyerő stratégiája, vagy mindkettőnek van nemvesztő stratégiája.

Bizonyítás. Nem lehet mindkét játkosnak nyerő stratégiája, mert akkor, ha mindketten a stratégiájuknak megfelelően játszanak, mindketten nyernek, ami nem lehetséges.

> ***Lemma*:** Véges és végesfokú játékban létezik egy $\beta(p)$ szám minden p pozícióra, amelyre p-ből indulva $\beta(p)$ lépésen belül mindenképpen végetér a játék.
>
> ***Definíció.*** A lemmában szereplő tulajdonsággal rendelkező játékot *korlátos lépésszámú*nak nevezzük.
>
> ***Bizonyítás.*** A végesség mellett a végesfokúságot kihasználva: Tegyük fel indirekt, hogy p_0:=p-ből indulva nem korlátos a lehetséges játékok hossza. A végesfokúság miatt az *i.* játékos csak véges sok lépésből választhat, ezek között kell lennie egy olyan p_1-nek, ahonnan még tetszőleges hosszú játék lehetséges. Ugyanezen ok miatt p_1-ből található egy p_2, ahonnan tetszőleges hosszú játék lehetséges. Ezt folytatva egy $p_0, p_1, p_2, p_3 \ldots$ végtelen játékmenetet kapunk. Ez ellentmondás a végességgel. (A különböző p_i-k akár egybe is eshetnek, például, ha egy körön megyünk körbe-körbe.) ■

$\beta(p)$-t válasszuk a legkisebb értéknek úgy, hogy teljesítse a lemma feltételét. Ez p-ből indulva a lehető leghosszabb játék hossza. Minden $pq \epsilon E$ élre $\beta(q) \leq \beta(p) - 1$. Ha p nyelő, akkor a kifoka nulla, vagyis $\beta(p) = 0$.

Nézzük a bizonyítást először éles normál játékokra. Bontsuk a V-t N és P halmazok uniójára úgy, hogy pontosan az N-beli állásokból nyerhessen mindig a soron következő játékos. Ehhez az kell, hogy az N-beli állásból menjen él P-belibe, P-beliből viszont csak N-belibe. Ekkor egy N-beli pozícióból indulva az első játékosnak nyerő stratégiája az, ha egy N-beli

pozícióból mindig egy *P*-belibe lép. A második játékos minden lépésében csak *P*-beli állásból *N*-beli állásba léphet. Ha a játék *P*-beli pozícióból indul, akkor ugyanez a stratégia a második játékosnak nyerő stratégia.

A két halmazba sorolást $\beta(p)$- szerinti indukcióval végezzük. A nyelőket, amikre $\beta(p) = 0$ helyezzük a *P*-be. Tegyük fel, hogy minden olyan *q*-t, amelyre $B(q) < \beta(p)$ már besoroltuk *P*-be vagy *N*-be. Ha van legalább egy $pq \in E$ lépés, amelyre $q \epsilon P$, akkor helyezzük *p*-t *N*-be. Ha minden $pq \in E$ -re $q \epsilon N$, akkor helyezzük *p*-t P-be. Így a *V* halmaz elemeit két halmazba soroltuk.

Nem éles játékok esetén a pozíciókat három halmazba soroljuk: *N*, *P* és *D* halmazokba. *D* halmaz azokat az állásokat tartalmazza, ahonnan indulva bármelyik játékos garantálni tudja a legalább döntetlen kimenetelt, de nem tudja garantálni a győzelmet. A halmazokba sorolást ebben az esetben is $\beta(p)$- szerinti indukcióval végezzük. Először a nyelőket soroljuk be az *N*, *P* és *D* halmazokba. Az éles esethez hasonlóan, ha létezik legalább egy $pq \in E$ lépés, amelyre $q \epsilon P$, akkor helyezzük *p*-t *N*-be. Ha ilyen *q* nincsen, de létezik legalább egy olyan, amelyre $q \in D$, akkor helyezzük *p*-t *D*-be. Ha egyik eset sem teljesül, azaz minden $pq \in E$ lépés esetén $q \epsilon N$, akkor helyezzük *p*-t P-be. ■

Megfigyelhető, hogy *D*-beli pozícióból mindenképpen *D*-beli pozícióba érdemes lépni, különben a másik játékosnak lesz lehetősége nyerni.

Definíció. Egy éles normál játékban a *P* halmazt a *játék magjának* nevezzük. Azaz a $P \subseteq V$egyértelmű halmaz, amire *P*-beli csúcsról csak $V \setminus P$ -belire lehet lépni, de $V \setminus P$-beliről lehet *P*-belire lépni a játék magja.

Definíció. Egy állás típusának nevezzük a *P*, *N* és *D* közül azt, amelyik halmazban benne van.

Tétel. A véges táblán játszott amőba játékban a kezdőnek mindig van nem vesztő stratégiája.

Bizonyítás. A kombinatorikus játékelmélet alapján tegyük fel indirekten, hogy a második játékosnak van nyerő stratégiája. Helyezzen el a kezdő játékos egy tetszőleges m_0 mezőn egy X-et. Tegyen úgy, mint ha ez nem lenne ott és most kezdődne a játék. Játsszon úgy, ahogy a második játékos játszaná a nyerő stratégiáját. Az m_0 mezővel csupán akkor lehet probléma, ha a stratégia szerint éppen ide kellene tennie. Ilyen helyzetben válasszon egy tetszőleges még üres m_1 mezőt és tegyen ebbe. Ekkor m_1 veszi át a láthatatlan X szerepét és az első játékos úgy játszik tovább, mint ha m_0-ra lépett volna a stratégiájának megfelelően. A játék

során szükséges lehet m_1-et további m_2, m_3, … mezőkkel helyettesíteni. A játék döntetlennel végződik, vagy pedig a kezdőjátékos fog nyerni, ami ellentmond az indirekt feltételnek. ■

Definíció. A fenti tétel bizonyításában használt bizonyítási módszert *stratégialopásnak* nevezzük.

Definíció. *Hipergrafikus játéknak* nevezünk egy olyan játékot, amelyben adott egy U alaphalmaz és egy U részhalmazaiból álló $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ halmaz. A két játékos felváltva jelöli meg az U alaphalmaz egy-egy elemét. Az a játékos nyer, akinek először sikerül megjelölnie a saját elemeivel egy $\mathcal{H}$-beli halmaz minden elemét. Ha az U elemei elfogynak anélkül, hogy bármelyik játékos nyerne, akkor a játék döntetlennel zárul.

Tétel. Hipergrafikus játékban a kezdőnek mindig van nemvesztő stratégiája.

Megjegyzés. Ezt a tételt bizonyítani stratégialopással lehet, hasonlóan, mint ahogy az amőbánál történik.

Definíció. *Grundy-számozásnak* nevezzük egy adott kombinatorikus (V, E) játékra a $g: V \to \mathbb{N}_0$ függvényt, ha minden $p \in V$-re

$$g(p) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : n \neq g(q)\ \forall\, pq \in E\}$$

Megjegyzés. Minden p nyelőre $g(p) = 0$ teljesül. Egy g számozás esetén $P = \{p : g(p) = 0\}$ és $N = \{p : g(p) > 0\}$, mert $g(p)$ azokra az értékekre pozitív, amelyekre $\exists\, pq \in E$, hogy $g(q) = 0$.

Tétel. Minden éles kombinatorikus játéknak létezik és egyértelmű a Grundy-számozása.

Megjegyzés. A tétel bizonyítása hasonlóan történik a kombinatorikus játékelmélet alaptételének bizonyításához.

2.1.2. A nim játék

A nim játékban adott egy kupacban valahány kavics. Két játékos felváltva vesz el kavicsokat. A szabály rögzíti, hogy hány kavicsot vehetnek el a játékosok. Egy gyakori változata a nim játéknak, amikor a játékosok egy, kettő vagy három kavicsot vehetnek el. Az a játékos nyer, aki az utolsó kavicsot veszi el.

Tétel. A nim játék egy, kettő vagy három kavics elvételét megengedő verziójában a kezdőnek van nyerő stratégiája, ha a kavicsok száma nem osztható néggyel és a második játékosnak, ha a kavicsok száma osztható néggyel.

Bizonyítás. A végső állásban a kavicsok száma 0, ami osztható néggyel. Ha egy pozícióban néggyel osztható a kavicsok száma, akkor abból csak olyan pozíció következhet, ahol nem osztható néggyel a kavicsok száma. Ha kezdetben nem osztható néggyel a kavicsok száma, az első játékos minden lépésében el tud venni annyi kavicsot, hogy néggyel osztható legyen a maradék darabszáma, így ő fogja elvenni az utolsó kavicsot is. Ha kezdetben néggyel osztható volt a darabszám, akkor a második játékos tud mindig annyit elvenni, hogy a maradék néggyel osztható legyen, így ekkor ő fogja elvenni az utolsó kavicsot is. ■

Megjegyzés. Hasonló tételek hasonló bizonyítások miatt igazak egyéb nim verziókra, amikor az elvehető kavicsok darabszáma nem csak 1, 2 vagy 3 lehet. Például, ha 1, 2, 3, vagy 4 kavics elvétele megengedett, akkor a néggyel való oszthatóságot ötre cserélve hasonlóan működik a bizonyítás.

A nim játéknak sokféle általánosítása ismert. Ezek közül az egyik a *k*-nim.

2.1.3. A *k*-nim

A k-nim játékban adott *k* kupac kavics, n_1, n_2, …, n_k kupacmérettel. A játékosok felváltva vesznek el kavicsokat. Az elvételt mindig egy kupacból tehetik meg, onnan viszont bármennyit elvehetnek, de legalább egy kavicsot el kell venniük. A nimhez hasonlóan az nyer, aki elveszi az utolsó kavicsot.

Definíció. A *nim-összeadáson* a következő műveletet értjük. A két számot átírjuk kettes számrendszerbe, majd az összeadást helyiértékenként végezzük modulo 2, átvitel nélkül. A nim-összeadás kommutatív és asszociatív művelet. A nim-összeadás jelölése: $\oplus$.

Tétel. Az n_1, n_2, …, n_k kupacokkal játszott k-nimben a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha a kupacméretek nim-összege nulla.

Bizonyítás. Legyen *P*-beli egy állás, ha a kupacok nim-összege nulla, különben pedig legyen *N*-beli. Azt kell belátnunk, hogy *P*-beli pozíciókból csak *N*-belibe lehet menni és minden *N*-beli állásból lehet *P*-belibe menni.

Tegyük fel, hogy egy *P*-beli állásban vagyunk és a *j*. kupacból veszünk el kavicsot. A *j*. kuapc mérete, azaz az n_j kettes számrendszerbeli alakja éppen megegyezik a többi kupac nim-összegével, mert ezek nim-összege nulla. Ha elveszünk kavicsokat a *j*. kupacból, akkor a nim-összeg már nem lehet nulla, azaz *P*-beli pozícióból nem juthatunk *P*-beli pozícióba.

Tegyük fel, hogy *N*-beli állásban vagyunk. A kupacméretek nim-összegében legyen a *t*. a legnagyobb olyan helyiérték, ahol egyes szerepel. Nézzük a kupacméretek kettes számrendszerbeli felírását. A kupacok közül páratlan sok olyan kell legyen, ahol a *t*. helyen egyes szerepel. Legyen ezek közül n_j az egyik. Legyen a az n_j-től különböző kupacméretek nim-összege. Megfigyelhető, hogy $a < n_j$, mert a *t*. helyiértéken nulla szerepel, amiatt, hogy n_j-t kihagyjuk belőle, amiben pedig egy szerepel és minden nagyobb helyiértéken nulla szerepel benne. Ha a *j*. kupacból $n_j - a$ darab kavicsot veszünk el, azaz a darab kavicsot hagyunk benne, akkor a kupacok méretének nim-összege éppen nulla lesz. ■

2.2. Stratégiai játékok

Definíció. Véges stratégiai játéknak nevezzük a következő feltételeket kielégítő játékot:

- Véges sok játékos van.
- Az *i*. játékoshoz megadható egy véges S_i halmaz, aminek elemei az *i*. játékos stratégiái.
- A játék egy lehetséges kimenetele, hogy minden játékos választ egyszerre egy-egy stratégiát. A kimenetelek halmaza $S := S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$
- Feltesszük, hogy a játékosok a kimenetelekhez hozzá tudnak rendelni egy valós számot, hogy mennyi a nyereségük az adott helyzetben. Az *i*. játékos nyereségét az $u_1 : S \to R$ nyereségfüggvény írja le. A veszteség negatív értékű nyereség, a nulla kimenetel semlegesnek számít. A játékosok célja a saját nyereségüknek a maximalizálása.
- A játék egylépéses szinkron: a játékosok egyszerre választják ki egy-egy stratégiájukat, a többiek döntésétől függetlenül.
- A játék teljes információs: minden játékos ismeri az összes S_i halmazt és u_i nyereségfüggvényt.
- A játékosok racionálisak, azaz tudják a saját preferenciáikat, célfüggvényeikkel, lehetséges döntéseikkel, arra törekszenek, hogy a célfüggvényeiket maximalizálják. A racionalitás köztudott is a játékosok körében: tudják egymásról, hogy racionálisak, azt is, hogy a többiek tudják, hogy ők tudják, hogy racionálisak és így tovább…

Definíció. A játék *determinisztikus*, ha a szabályai között nem szerepel véletlen tényező (például kockadobás).

Definíció. Egy stratégiai játék *nulla összegű*, ha a játékosok össznyeresége minden kimenetelnél nulla, azaz a játékosok egymás kárára tudnak nyerni.

Definíció. Egy kétszemélyes játék *szimmetrikus*, ha a két játékos stratégiáinak a halmaza közt van egy bijekció úgy, hogy felcserélve őket a másik játékos nyereségeit kapjuk.

Megjegyzés. A kombinatorikus játékok is felírhatóak véges stratégiai játékként. A stratégia ebben az esetben egy olyan függvény, amely minden lehetséges pozícióhoz hozzárendel egy lépést. Ha a két játékos a játék kezdete előtt kiválasztja a stratégiáját, onnantól a játék kimenetele tökéletesen determinálva van.

2.3. A Quarto

A Quarto egy kétszemélyes stratégiai játék, ami hasonlít az amőbához. A játékot 4×4 -es táblán játsszák 16 bábuval. A bábuknak négy tulajdonságuk van: a színük (sötét vagy világos), a méretük (magas vagy alacsony), az alakjuk (kör vagy négyzet) és a tetejük (lyukas vagy teli). Minden lehetséges bábuból pontosan egy található a készletben. A két játékos felváltva lép, az nyer, aki egy sorba, oszlopba, vagy átlóba helyezi a negyedik bábut, úgy, hogy a négy bábuknak legyen közös tulajdonsága, azaz olyan tulajdonság, amely mind a négy bábu esetén megegyezik. A játékban a csavar az amőbához képest, hogy a játékosoknak nincsen saját bábuja, vagy tulajdonsága, hanem mindig az ellenféltől kapják azt a bábut, amit a táblára kell helyezni. Egy játékos köre abból áll, hogy lerakja a másik játékostól kapott bábut a táblára, majd kiválaszt egyet a még fel nem helyezettekből, amit pedig az ellenfelének kell a tábla egy mezőjére tenni. A játékot Blaise Müller svájci matematikus találta ki. A játék több díjat kapott, ezek közül a legrangosabb az 1993-ban elnyert Mensa Select díj.

A Quarto-val való játék egy matematika iránt érdeklődő ember számára több kérdést felvethet. Szakdolgozatomban foglalkozom azzal, hogy a kérdésfeltevés gyerekekkel hogyan működik, bennük milyen gondolatok fogalmazódnak meg, továbbá azzal is, hogy a matematikusok milyen kérdéseket tettek fel a játék kapcsán és ezekre milyen válaszokat adtak.

Az egyik problémakör, amit a Quarto motivál, az a másik játékos lépésének korlátozása. A Quarto-ban egy kör azzal ér véget, hogy a játékosok meghatározzák, hogy ellenfelük melyik bábuval végezhetik el a lépésüket. A kombinatorikus játékok szabályait ezzel módosítva új

játékváltozatokat kapunk. Ezeket a játékokat Furman Smith és Pantelimon Stănică cikkükben comply/constrain games, vagy games with Muller twist-ként nevezik. A szakdolgozatomban én blokkoló játékként hivatkozom rájuk (Smith & Stănică, 2002). A 2.4.1. fejezetben ezen munkájukat foglalom össze.

2.4. Blokkoló játékok

2.4.1. Páros vagy páratlan nim (odd or even nim)

A páros vagy páratlan nim esetén a nim játék szabályait azzal a korlátozással egészítjük ki, hogy a soron lévő játékos miután elvett kavicsokat a kupacból megmondja a másik játékosnak, hogy páros vagy páratlan számú kavicsot vehet el a következő lépésben. Minden játékos köre két lépésből áll: el kell vennie kavicsokat betartva a rá vonatkozó korlátozásokat, majd korlátozásokat kell tennie az ellenfele következő lépésére, meg kell adnia, hogy páros vagy páratlan sok kavicsot vehet-e el a másik játékos. Az a játékos veszít, aki nem tud elvenni kavicsot. Vegyük észre, hogy a páros vagy páratlan nim véget érhet úgy is, hogy van még kavics valamelyik kupacban, vagy kupacokban, de a soron lévő játékos nem tud elvenni kavicsokat a korlátozás miatt.

Tétel. A P-beli pozíciók a páros vagy páratlan nimben a következők:

1. A kupacméretek nim-összege 1 és páros korlátozás van.
2. A kupacméretek nim-összege 0 és páros korlátozás van.
3. A kupacméretek nim-összege 0, páratlan korlátozás van és minden kupac mérete páros.

Bizonyítás. Jelölje C azon pozíciók halmazát, amelyek megfelelnek a tételben jelölt 1., 2., vagy 3. tulajdonságnak. Legyen C_1 azon pozíciók halmaza, amelyek az első tulajdonságnak felelnek meg, C_2, amelyek a másodiknak és C_3 pedig a harmadik tulajdonságnak megfelelő pozíciók halmaza.

Megmutatjuk, hogy a C halmaz elemei eleget tesznek a P definíciójának, azaz a C halmazbeli elemekből csak V/C halmazbelibe lehet lépni ($i.$) és V/C halmaz elemeiből eljuthatunk a C halmazba ($ii.$). Az $i.$-t először C_1 és C_2 halmaz elemeire fogjuk belátni, majd pedig a C_3 halmaz elemeire.

Ahhoz, hogy nem lehet C-beli pozícióból C-beli pozícióba menni, vegyük észre, hogy egy C-beli pozícióban a kupacméretek nim-összege 0 vagy 1. Azaz a kupacméretek kettes

számrendszerben olyan értékek, hogy páros sok kupacban áll a kettes, négyes, nyolcas… stb. helyiértékeiken egyes jegy. Ha a korlátozás az, hogy páros sok kavicsot kell elvenni, akkor valamelyik helyiértéken az egyik kupacban a paritás megváltozik, így az ekkor keletkezett pozíció már nem lehet C-beli. Emiatt C_1 és C_2 halmazból nem juthatunk C halmazbeli pozícióba.

C_3 esetében minden pozíciónál minden kupac mérete páros, a korlátozás páratlan és a kupacok nim-összege 0. Emiatt minden kupac méretének kettes számrendszerbeli alakjában az egyesek helyiértékén 0 áll. A különböző kupacoknál minden más helyiértékeken pedig összesen páros sok egyes szerepel. Ahhoz, hogy páratlan számú kavicsot távolítsunk el az egyik kupacból legalább az egyik helyiérték paritása megváltozik, emiatt a nim-összeg nem lehet sem 0, sem pedig 1 így C_3-beli pozícióból sem juthatunk C-beli pozícióba.

Az (*ii*.) bizonyításához három esetet fogunk megvizsgálni:

a) páros korlátozás nem nulla vagy 1 nim-összeggel
b) páratlan korlátozás nem nulla nim-összeggel
c) páratlan korlátozás nulla nim-összeggel és legalább egy páratlan kupacmérettel

Tegyük fel, hogy egy páros korlátozással rendelkező pozícióval szembesülünk, amely nem C-beli. Ennek nim-összege nem lehet nulla vagy egy, mert akkor C-belinek kellene lennie. Minden oszlopösszeget nullára állíthatunk, utolsó kivételével (az vagy 0 vagy 1 lehet attól függően, hogy eredetileg milyen volt). Ezután a következő lépést párosra korlátozhatjuk és így egy C_1 vagy C_2-beli pozíciót kapunk attól függően, hogy az utolsó helyiértéken mi szerepel.

Most vegyük azt az esetet, amikor egy páratlan korlátozással rendelkező pozícióval szembesülünk, amely nem C-beli. Ekkor vagy a nim-összeg nem nulla, vagy nem minden kupacméret páros. Ha a nim-összeg nem nulla, minden helyiértéken páros paritást érhetünk el, kivéve az utolsót (az vagy 0 vagy 1 lehet attól függően, hogy eredetileg milyen volt), és megkapunk egy C_1 vagy C_2-beli pozíciót attól függően, hogy az utolsó helyiértéken mi szerepel.

Az utolsó eset, amit meg kell vizsgálnunk, amikor páratlan korlátozás van nulla nim-összeggel és legalább egy páratlan kupacmérettel. Ekkor elvehetünk egy kavicsot az egyik páratlan méretű kupacból. A nim-összeg ennek az egy kavicsnak az elvételével nulláról egyre változik. Ekkor páros korlátozást adva P-beli pozícióba jutottunk.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a *C* halmaz elemei éppen a *P*-beli pozíciók. ■

2.4.2. Modulo *n* blokkoló nim

A páros vagy páratlan nim egy általánosítását közölte Hillevi Gavel és Pontus Strimling cikkükben (Gavel & Strimling, 2004). A következő fejezetben ennek a cikknek az eredményeit foglalom össze.

Ebben az általánosításban a játékosok ellenfelük lépését modulo *n* korlátozhatják, azaz ugyanúgy több kupac kavics van, ugyanúgy egy kupacból szabad elvenni bármennyit, de legalább egyet, azonban nem lehet elvenni *x*-et modulo *n*, mindig az aktuális korlátozásnak megfelelően. Az a játékos veszít, aki először nem tud elvenni kavicsot.

A páros vagy páratlan nim a 0 vagy 1 modulo 2 blokkoló nimnek felel meg az általánosításban. Ugyanis, ha nem lehet elvenni kettővel osztva nulla maradékot adó darabszámú kavicsot, az éppen azt jelenti, hogy páratlan darabszámú kavicsot kell elvenni, ha pedig nem lehet elvenni kettővel osztva egy maradékot adó kavicsot, akkor páros sok kavicsot kell elvenni.

Tétel. Az 1 modulo *n* blokkoló nimben a *P*-beli állások a következők.

A kupacok elemszámai: $k_1, k_2, k_3, \dots, k_l$ és $\left\lfloor \frac{k_l}{2} \right\rfloor$ a kupac elemszámának felének alsó egészrészét jelöli.

1. $\left\lfloor \frac{k_1}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_2}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_3}{2} \right\rfloor \oplus \dots \oplus \left\lfloor \frac{k_l}{2} \right\rfloor = 0$ és a korlátozás pedig az, hogy nem lehet elvenni 1 kavicsot modulo *n*.
2. $\left\lfloor \frac{k_1}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_2}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_3}{2} \right\rfloor \oplus \dots \oplus \left\lfloor \frac{k_l}{2} \right\rfloor = 0$ és bármilyen korlátozás van meghatározva továbbá minden kupacban páros sok kavics van.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az 1. vagy 2. típusú pozíciókból csak a komplementer pozíciókba lehet lépni, azaz, hogy 1. vagy 2. típusú pozíciókból nem lehet 1. vagy 2. típusúba jutni (ha van még lehetséges lépés.)

1. Az első esetben legalább 2 kavicsot el kell venni. Ez megváltoztatja az egyik kupac elemszámát és elemszámának felét is és így megváltozik a felek nim-összege is. Emiatt egy olyan pozícióba léphetünk csak, ahol a nim-összeg nem nulla. (Az, hogy a felek nim-összege nulla volt azt jelenti, hogy a kupacok elemszámának nim-

összege nulla vagy 1 lehet. A legalább 2 kavics elvétellel megváltozik kettes számrendszerben legalább egy számjegy az egyesen kívül, ami vagy változik, vagy nem. Így nem lehet nulla a nim-összeg.)

2. Ha minden kupacban páros sok kavics van és az elemszámok felének nim-összege nulla, akkor legalább egy kavicsot elvéve a kupacok elemszámainak felének megváltozik a nim-összege és már nem lehet nulla.

Most megmutatjuk, hogy ha nem 1. vagy 2. pozícióból indulunk, akkor mindig léphetünk 1. vagy 2. tulajdonsággal leírt pozícióba.

1. Ha a kupacméretek felének nim-összege nem nulla, akkor van lehetőség megváltoztatni a darabszámokat úgy, hogy nulla legyen. Korlátozás nélkül kétféle lehetőség is van a változtatásra, hiszen ez már a kupacméretekkel és nem azok felével történik, egy úgy, hogy az elvett kavicsok száma páros, egy pedig úgy, hogy páratlan. A korlátozás csak az egyik lehetőséget blokkolja ezek közül, így a másikat véghez tudjuk vinni.
2. Ha a nim-összeg nulla, de legalább az egyik kupacban páratlan sok kavics van és engedélyezett az egy kavics elvétele, akkor egyet elvéve az egyik páratlan sok kavicsot tartalmazó kupacból a nim-összeg nem változik és megfelelő korlátozást téve 1. vagy 2. típusú pozícióba juthatunk. ■

A bizonyításban nem használtuk, hogy a blokkolás során milyen n-et választunk modulusnak, csupán az volt lényeges, hogy el lehet-e venni egy kavicsot, vagy sem.

Megjegyzés. A kapott P-pozíciók megfeleltethetőek a páros vagy páratlan nimben a P-pozícióknak. Vegyük észre, hogy ha a kupaméretek nim-összege 1 vagy 0, akkor a kupacméretek felének nim-összege 0.

A páros vagy páratlan nim 1. és 2. P-pozíciója így megfeleltethető a modulo n blokkoló nim 1. sorszámú P-pozíciójának. Ugyanis itt páros korlátozás van érvényben és az 1 mod 2 korlátozás is éppen azt jelenti, hogy páros sok kavicsot lehet elvenni.

A páros vagy páratlan nim 3. P-pozíciója megfeleltethető a modulo n blokkoló nim 2. sorszámú P-pozíciójának, ugyanis mindkét esetben minden kupacban páros sok kavics van. Ha minden kupacban páros sok kavics van, akkor az, hogy a kupacméretek nim-összege 0 és az, hogy a kupacméretek felének nim-összege nulla ekvivalensek. A páros vagy páratlan nim-ben a korlátozás az, hogy páratlan sok kavicsot kell elvenni, a modulo n blokkoló nim-

ben pedig bármilyen korlátozás lehet a 2. esetben. A 2. eset páros sok kavics elvételét megengedő korlátozása a páros vagy páratlan nim 2. esetének feletethető meg.

Páros vagy páratlan nim.	Modulo *n* blokkoló nim.
1. A kupacméretek nim-összege 1 és páros korlátozás van.	1. $\left\lfloor \frac{k_1}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_2}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_3}{2} \right\rfloor \oplus \ldots \oplus \left\lfloor \frac{k_l}{2} \right\rfloor = 0$ és a korlátozás pedig az, hogy nem lehet elvenni 1 kavicsot modulo *n*.
2. A kupacméretek nim-összege 0 és páros korlátozás van.	2./1. $\left\lfloor \frac{k_1}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_2}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_3}{2} \right\rfloor \oplus \ldots \oplus \left\lfloor \frac{k_l}{2} \right\rfloor = 0$ és nem lehet elvenni 1-et modulo *n*, továbbá minden kupacban páros sok kavics van.
3. Minden kupac mérete páros és a kupacméretek nim-összege 0. Páratlan korlátozás van.	2./2. $\left\lfloor \frac{k_1}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_2}{2} \right\rfloor \oplus \left\lfloor \frac{k_3}{2} \right\rfloor \oplus \ldots \oplus \left\lfloor \frac{k_l}{2} \right\rfloor = 0$ és el lehet venni 1-et modulo *n*, továbbá minden kupacban páros sok kavics van.

1. *táblázat*: *P*-pozíciók megfeleltetése a páros vagy páratlan és a modulo *n* blokkoló nimben.

2.5. Szimmetriák a Quartoban

Luc Goossens 1998-ban bizonyította, hogy ha Quartoban mindkét játékos tökéletesen játszik, akkor a játék döntetlennel zárul (Goossens, 2004). A bizonyítás számítógéppel történt, különböző játékmeneteket lefuttatva. A Quartoban sokféle játékmenet előfordulhat. Egy felső becslés a játékmenetek számára a következő: először kiválasztunk egy bábut a 16-ból, amit a 16 üres helyből a táblán bárhová tehetünk. Aztán a maradék 15 bábuból kiválaszthatunk egyet, amit a maradék 15 üres hely bármelyikére tehetünk a táblán és így tovább egészen az utolsó bábuig, amit az utolsó üres helyre tehetünk.

$$16 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 = (16!)^2 \approx 4{,}4 \cdot 10^{26}$$

(Goossens, 2004)

Ez felső becslés, hiszen egy játék hamarabb is véget érhet, mielőtt betelne a tábla, ha valamelyik játékos nyer. Ez az összeszámlálás nem foglalkozik azzal sem, hogy a játékmenetek között vannak megegyezőek. Nem veszi figyelembe sem a bábuk, sem a tábla szimmetriáit, amivel lényegesen lehet csökkenteni az esetek számát. A következőkben ezekkel a szimmetriákkal foglalkozom.

Az ekvivalens állások meghatározásához Matthew Kerner munkájában transzformációkat használ (Kerner, 2001).

***Definíció*.** A mezőtranszformáció a tábla mezőinek permutációja. A bábutranszformáció a bábuk permutációja. A transzformáció egy olyan függvény, amely során egy mezőtranszformációt és egy bábutranszformációt hajtunk végre.

Mivel a transzformáció permutációk szorzataként áll elő, igazak a következő tulajdonságok rá:

1. *Tulajdonság*. A transzformációk injektív leképezések.
2. *Tulajdonság*. A transzformációk szürjektív leképezések.
3. *Tulajdonság*. A transzformációk megőrzik a táblán lévő bábuk számát.
4. *Tulajdonság*. A transzformációknak van inverze. Minden transzformációhoz van egy olyan transzformáció, amelyet alkalmazva a képre visszakapjuk a transzformációk előtti állást.
5. *Tulajdonság*. A transzformációk komponálhatóak. A transzformációk kompozíciója is transzformáció. A kompozícióként kapott transzformációt egy transzformációval is tudjuk helyettesíteni.

   Mint minden kombinatorikus játéknak, a Quarto-nak is meg lehet adni az első fejezetben felvázolt (V, E) irányított gráfját, a transzformáció ezen a gráfon is értelmezhető. Szeretnénk, hogy a transzformációk gráfautomorfizmusoknak feleljenek meg, azaz a gráfokhoz izomorf gráfokat rendeljenek hozzá, vagyis a kapott gráfban két csúcs között akkor legyen él, ha az eredeti gráfban az eredeti két csúcs között is volt.

Definíció. Két állás ekvivalens, ha az általuk meghatározott csúcsokból irányított úton elérhető csúcsok által feszített részgráfok (az N, D, P címkék figyelembevételével) izomorfak.

Például:

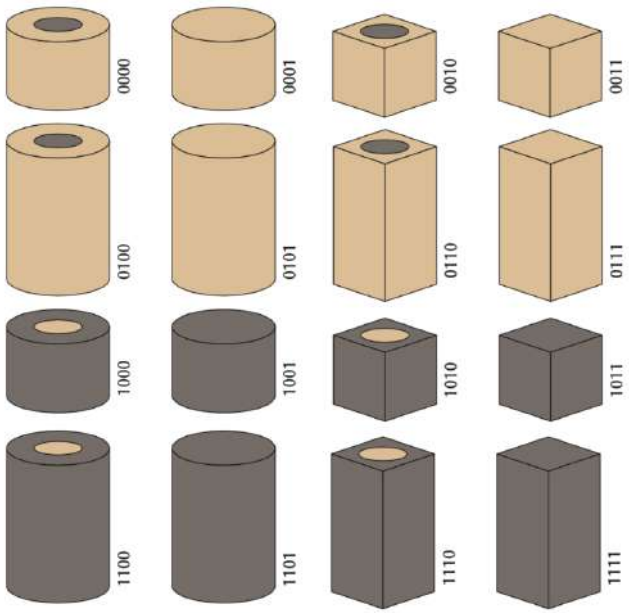
4			
3			
2			
1			

1	2	3	4

Ennek a definíciónak a következménye, hogy ha két állás ekvivalens, akkor az ugyanazt a kimenetelt eredményezik a játék végén.

2.5.1. A bábuk szimmetriái

Egy transzformációt bábuszimmetriának nevezünk, ha a transzformáció előtti és utáni állások ekvivalensek a táblán bárhogyan is vannak bábuk a táblára helyezve. Felcserélhetjük például a világos és a sötét tulajdonságokat minden bábu esetén, azaz a sötét bábuk színét világosra cseréljük, a világosokét pedig sötétre. Ez a csere nem eredményez új esetet a játék szempontjából.



1. *ábra*: A Quarto bábuk. (Rowlett, 2022)

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

2. *táblázat*: a szín felcserélésével kapott párok a kettes számrendszerbeli kódolással

Másik lehetőség a bábuk egymásnak megfeleltetésére, ha a méretüket cseréljük fel az alakjukkal. Azaz például az alacsonyokat a megfelelő körrel helyettesítjük, a magasakat pedig a megfelelő négyzettel. Egy ilyen megfeleltetés a következő:

$0000 \to 0000$	$0100 \to 0010$	$1000 \to 1000$	$1100 \to 1010$
$0001 \to 0001$	$0101 \to 0011$	$1001 \to 1001$	$1101 \to 1011$
$0010 \to 0100$	$0110 \to 0110$	$1010 \to 1100$	$1110 \to 1110$
$0011 \to 0101$	$0111 \to 0111$	$1011 \to 1101$	$1111 \to 1111$

Állítás. Összesen $4! \cdot 2^4 = 438$ bábuszimmetria van.

Bizonyítás. A bábuk négy tulajdonságát a kettes számrendszerbeli kódolásban tetszőleges sorrendben írhatjuk fel, ez 4! lehetőséget ad.

Minden tulajdonság esetén megcserélhetjük az értéket: mindegy, hogy sötét vagy világos bábukról van szó, ha mindegyiknél megcseréljük a színt, vagy bármely más tulajdonságot, ugyanúgy egy ekvivalens állást kapunk. Ez 2^4 lehetőséget ad. Annak a bizonyítása, hogy nincs más bábuszimmetria Kerner cikkjében megtalálható. (Kerner, 2001)

2.5.2. A tábla szimmetriái

A mezőtranszformációk felcserélik a táblán a mezőket. Összesen 16! darab mezőtranszformációt különböztethetünk meg: a tábla négyzeteinek különböző permutációit. Ezek között azonban vannak olyanok, amelyek nem eredményeznek lényegében új játékmenetet. A mezőtranszformációt mezőszimmetriának nevezünk, ha a transzformáció előtti és utáni állások ekvivalensek a táblán, bárhogyan is vannak bábuk a táblára helyezve. Például elforgathatjuk a táblát 90°-kal. A mezőszimmetriák vizsgálata során elsődlegesen a sorokat, oszlopokat és átlókat vizsgáljuk, ezeket együttesen nyerő állásoknak nevezzük. Vegyük észre, hogy egy mezőszimmetria nyerő állást nyerő állásba visz és nem nyerő állást, nem nyerő állásba visz.

Példa egy olyan mezőtranszformációra, ami nem mezőszimmetria.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

E	B	C	D
A	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

A két ábrán a tábla egy mezőtranszformációja látható. A nagy betűk a mezők címkéi, azt jelzik, hogy melyik mező hova került. Megfigyelhető, hogy az A és E mezők felcserélése ekvivalens állást adhat, ha ezeken még nincsen bábu. Azonban a transzformációk során megváltozik az, hogy melyik mező hány nyerő állásban van benne. A példában az A mező az eredetileg három ilyenben szerepel: egy sorban, egy oszlopban és egy átlóban, a transzformáció utáni táblán viszont már csak kettőben. Emiatt ez a transzformáció legalább egy nyerő állást nem nyerő állásba visz, így nem mezőszimmetria.

A következőkben bemutatok néhány szükséges feltétel ahhoz, hogy egy mezőtranszformáció mezőszimmetria legyen.

Néhány tulajdonság az átlókról:

- Minden átlóban elhelyezkedő mező három nyerő állásban szerepel.
- Az A és P mezők egy négyzetet alkotnak a D és M mezőkkel, amik a másik átlón vannak.
- Az F és K mezők egy négyzetet alkotnak a G és J mezőkkel, amik szintén a másik átlón vannak.

Minden mezőszimmetriának biztosítania kell, hogy az eredetileg átlóban lévő mezők felsorolt három tulajdonsága megmaradjon. Meggondolható, hogy ha ezek a tulajdonságok sérülnek, akkor nem kaphatunk ekvivalens táblákat. Például az A, P, D és M mezők közül bármelyik kettő benne van egy nyerő állásban, de négyen nem alkotnak nyerő állást.

Lemma. Minden mezőszimmetria minden sort sorba képez, vagy minden sort oszlopba képez, de nem lehet, hogy sort átlóba képez, vagy néhány sort oszlopba néhány sort pedig sorba képez.

Bizonyítás. Először figyeljük meg, hogy a mezőszimmetriák megőrzik a nyerő állások metszeteinek a számosságát. A sorok metszete üreshalmaz, ezért a képeik metszete is üreshalmaz kell legyen.

Ha egy sort oszlopba képezne a transzformáció, míg egy másik sort oszlopba, akkor a sornak és az oszlopnak lenne közös mezője, viszont a soroknak eredetileg nem volt.

Ha egy sort átlóba képezne, akkor csak egyetlen olyan nyerő állás lenne, amiben nem szerepel az átló egyetlen eleme sem: a másik átló. De eredetileg három ilyen is volt, a többi sor.

Emiatt csak úgy kaphatunk ekvivalens állást, ha minden sor képe sor vagy minden sor képe oszlop. ■

Megjegyzés. A következő állítás is igaz: Minden mezőszimmetria minden oszlopot oszlopba képez, vagy minden oszlopot sorba képez, de nem lehet olyan, hogy van olyan oszlop, amit sorba képez és olyan is, amit oszlopba és nem képezhet oszlopot átlóba sem. Ezt az állítást bizonyítani az előző lemmához hasonlóan lehet, a gondolatmenetben a sorokat oszlopokra kell cserélni.

Lemma. Minden mezőszimmetria az átlókat átlóba képezi.

Bizonyítás. Tíz nyerő állás van táblán. Ebből a leképezés nyolcat rendel hozzá a sorokhoz és az oszlopokhoz az előző lemma és a megjegyzés miatt, így a maradék kettő pedig az átlókban lesz. ■

Lemma. Minden mezőszimmetria az átló minden külső elemét vagy az átló külső elemeibe képezi, vagy az átló belső elemeibe, de olyan nem lehet, hogy egy részét kintre egy részét pedig bentre.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy van olyan transzformáció, ami az egyik átló egyik külső négyzetét bentre képezi, míg a másik külső elemét kintre.

A			●
	F		
		K	
			P

F			
	A		●
		K	
	●		P

Nézzük azt a mezőt, ami eredetileg az A sorának és P oszlopának metszete. Ez kezdetben egy átlós mező, így az előző lemma miatt átlós mezőbe kell kerülnie. A transzformáció során ez A-val egy sorba vagy oszlopba kerül és P-vel is egy oszlopba, vagy sorba kerül, így a második ábrán láthatóak a lehetséges elrendezései. Ezek viszont nem átlós mezők. ■

Összesen 32 mezőszimmetria van a Quartoban. Ezen szimmetriák megtalálásával Kevin S. Brown és Luc Goossens is foglalkozott munkáikban (Brown, 2005; Goossens, 2004).

Az ekvivalenciát biztosító mezőtranszformációk a következő 5 transzformáció kompozíciójaként állíthatók elő:

1. Tükrözés az áltóra

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

→

A	E	I	M
B	F	J	N
C	G	K	O
D	H	L	P

2. Forgatás 90°-kal az óramutató járásának megegyezően a tábla középpontja körül.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

→

M	I	E	A
N	J	F	B
O	K	G	C
P	L	H	D

3. A belső sorok és oszlopok cseréje

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

→

A	C	B	D
I	K	J	L
E	G	F	H
M	O	N	P

4. Külső sorok és oszlopok cseréje a szomszédos belső sorokkal és oszlopokkal

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

→

F	E	H	G
B	A	D	C
N	M	P	O
J	I	L	K

Ez a transzformáció megcseréli a külső és belső átlós mezőket, de a soraikat és oszlopaikat megtartja.

5. Külső sorok és oszlopok cseréje, belső sorok és oszlopok cseréje, majd ismét külső sorok és oszlopok cseréje. A cseréket mindig a szomszédos oszlopokkal és sorokkal hajtjuk végre.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

→

P	N	O	M
H	F	G	E
L	J	K	I
D	B	C	A

Ezen öt transzformáció mindegyike megőrzi az átlóban lévő négyzetek átlós pozícióját. Ezek a transzformációk mind mezőszimmetriák és minden mezőszimmetria előáll ezen

transzformációk kompozíciójaként. Azt, hogy ezen 5 transzformáció kompozíciója az összes szimmetriát lefedi Kerner munkájában belátja (Kerner, 2001).

Lemma. A fenti öt transzformáció kompozíciója is mezőszimmetria.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy t_1 mezőszimmetria és az *i* mezőt *i'*-re képezi le. Legyen egy másik t_2 mezőszimmetria, amely *i'*-t *i''*-re képezi le. Az *i*-ből irányított úton elérhető csúcsok által feszített részgráf és az *i'*-ből irányított úton elérhető csúcsok által feszített részgráf (az *N*, *D*, *P* címkék figyelembevételével) izomorfak. Hasonlóképpen, az *i'*-ből irányított úton elérhető csúcsok által feszített részgráf és az *i''*-ből irányított úton elérhető csúcsok által feszített részgráf izomorfak. A gráfizomorfia tranzitivitása miatt az *i*-ből irányított úton elérhető csúcsok által feszített részgráf és az *i''*-ből irányított úton elérhető csúcsok által feszített részgráf izomorfak. A $t_3 = t_2 \circ t_1$ kompozíció az *i*-t az *i''* -be viszi, amely állások az előző megállapítás szerint ekvivalensek. Így a t_3 transzformáció szintén mezőszimmetria. ■

2.6. A Quarto a csavar nélkül

Már foglalkoztunk a Quarto-val, illetve kombinatorikus játékokkal, melyeket Müller-csavarral egészítettünk ki, a következő fejezetben pedig a csavar nélküli Quarto variációt tanulmányozzuk.

A játék szabályai annyiban térnek el 3. fejezetben ismertetett játékszabályoktól, hogy a játékosok maguk választják ki a bábuikat, amiket a táblára tesznek, nem pedig az ellenfelük jelöli ki számukra. A játékosok bármelyik még fel nem helyezett bábut választhatják következő lépésükhöz és a győzelem feltétele sem változik meg, az a játékos nyer, aki a táblára helyez egy bábut úgy, hogy egy sorban, oszlopban vagy átlóban mind a 4 bábunak van közös tulajdonsága.

Arthur Holshouser és Harold Reiter cikkükben bebizonyították, hogy a második játékosnak nyerő stratégiája van a csavar nélküli Quarto-ban (Holshouser & Reiter, 2003). Ebben a fejezetben az ő munkájukat foglalom össze a fent említett cikk alapján.

A stratégia a következő.

Legyen *f* egy függvény, amely a tábla mezőihez a tábla mezőit rendeli a következőképpen: adott sorszámú mezőhöz a tőle különböző azonos sorszámút rendeli.

1	5	5	1
2	6	6	2
3	7	7	3
4	8	8	4

Legyen *g* egy olyan függvény, amely a bábukhoz bábukat rendel a következőképpen: egy rögzített jellemzőt, például a színt felcseréli. Azaz minden bábuhoz a rögzített jellemzőben éppen ellenkező tulajdonságú bábut rendeli hozzá.

Állítás. A második játékosnak ekkor a nyerő stratégiája:

1. Az első játékos lépése után nézze meg, hogy van-e olyan lépés, amivel nyerni tud. Ha van ilyen, akkor végezze el azt a lépést.
2. Ha nincsen olyan lépés, amivel nyerni tudna az aktuális körben és az előző lépésben az első játékos az *x* mezőre az *y* bábut tette, akkor ő tegye az *f(x)* mezőre a *g(y)* bábut.

Bizonyítás. A szakdolgozatban csak azt mutatjuk meg, hogy ezzel a stratégiával a játék vagy döntetlennel, vagy a második játékos győzelmével végződik.

Tegyük fel, hogy már *2n* lépés megtörtént, ahol $1 \leq n \leq 7$ és még nem ért véget a játék. Ekkor az első játékos következik és ő a $2n + 1$. lépésben nem tud nyerni.

Bizonyítsuk ezt indirekt. Tegyük fel, hogy az első játékos a *2n+1*. lépésben nyerni tud. A tábla számozása és a 2. játékos által követett stratégia miatt egyik sorban sem lehet quarto az első játékos lépése után. Így, ha nyer, akkor az csak az egyik oszlopban vagy átlóban lehetséges. Nézzük azt az esetet, amikor az egyik oszlopban nyer. A bizonyítás az átlókra is hasonlóan történne.

Tegyük fel, hogy az első játékos az 1. oszlopba helyezett bábuval nyer a *2n+1*. lépésben. Ekkor a lépése előtt az első oszlopban volt három olyan bábu, amiknek van közös tulajdonsága. Ez azt jelenti, hogy a táblán második játékos a *2n*. lépés előtt vagy már ott van

a három azonos tulajdonsággal rendelkező bábu az első oszlopban, vagy hogy ezek közül az egyiket ő helyezi le éppen a *2n.* lépésben.

Két esetet kell vizsgálnunk aszerint, hogy az első oszlopban lévő bábuknak melyik tulajdonsága közös.

1. eset: nem a *g* függvény által felcserélt tulajdonság a közös az első oszlop bábuiban.

Ebben az esetben a jobboldali legszélső oszlop is tartalmaz három bábut a *2n+1*. lépés előtt, amiknek ugyanaz a tulajdonság közös tulajdonsága, mint az első oszlop három bábujának. Például a balszélső és a jobbszélső oszlopban található három bábu mind alacsonyak. Ekkor azonban a *2n.* lépés előtt is az egyik oszlopban a két szélső közül már lennie kellett három bábunak, amelynek van közös tulajdonsága és még ilyen tulajdonsággal rendelkező bábuból van olyan, ami nincs a táblán, hiszen az első játékos is tudott ilyet feltenni a táblára. Így a *2n*. lépésben a második játékosnak kellett volna nyernie. Tehát ellentmondásra jutottunk.

2. eset: a *g* függvény által felcserélt tulajdonság a közös az első oszlop három bábujában.

Ekkor a második játékos *2n.* lépése előtt az első vagy az utolsó oszlopban lennie kellett három bábunak, amelynek van közös tulajdonsága. Ha az első oszlopban volt ilyen, akkor ott például mindegyik sötét volt, ha pedig az utolsóban, akkor ott mindegyik világos. Mivel a sötét és a világos bábukat felváltva játszák ki a játékosok a stratégia szerint és még hátra van legalább két lépés a második játékos *2n*. lépése után ($1 \leq n \leq 7$ miatt). Ezért sötét és világos bábu is van még olyan, ami nincsen felhelyezve a táblára így a második játékos szintén nyerni tudott volna a *2n.* lépésben. Tehát ellentmondásra jutottunk.

Megmutattuk, hogy az első játékos nem tud nyeri a lépésében, tehát beláttuk, hogy a játék döntetlennel, vagy a második játékos győzelmével zárul. ■

Arthur Holshouser és Harold Reiter cikkükben azt is belátták, hogy ezzel a stratégiával a második játékos győzni tud (Holshouser & Reiter, 2003). Ez a bizonyítás az utolsó lépés előtti tábla szerint 12 esetet megvizsgálva látja be az állítást. Ezt a bizonyítást terjedelme miatt a szakdolgozatomban nem közlöm, célom a bizonyítás lényegi gondolatmenetének átadása volt. Az irodalomjegyzékben megjelölt forrásban azonban megtalálható a teljes bizonyítás az esetek részletes leírásával együtt.

Megjegyzés. A Quarto eredeti szabályaival, a Müller-csavarral nem hipergrafikus játék, mert nincsen a játékosoknak saját tulajdonsága, mint például az amőbában a ○ és az X. Ha a

csavar nélkül játsszuk a Quarto-t, még akkor sem hipergrafikus a játék, mert továbbra sincs saját tulajdonsága a játékosoknak, így nincs ellentmondás azzal a 2.1.1. fejezetben található tétellel, miszerint a hipergrafikus játékokban a kezdőnek mindig van nemvesztő stratégiája.

3. Módszertani szakirodalmi háttér

3.1. A matematikatanítás céljai

A matematika absztrakt tudomány. Megértése és elsajátítása sok tanuló számára nehézséget okoz. Dienes Zoltán a következőt mondta: „Senki sem tagadhatja, hogy a matematika absztrakt tudomány. Nincsenek ide-oda röpködő matematikai objektumok a valós világ tárgyai és eseményei között” (Dienes, 2007). Ennek a mondatnak az igazságtartalma megkérdőjelezhetetlen. Tényleg vannak olyan szavak, fogalmak, amelyekkel sok matematikát tanuló ember csak a matematikaórák köntösében találkozik, a hétköznapi életben kevéssé használja azokat. Ezek a fogalmak már a matematika tanulás elején jelentkeznek, a nyolcadikos tankönyvből (Wintsche, 2023) néhány ilyen példa a hatványkitevő, transzformáció, de a Pitagorasz-tételt sem használja a legtöbb felnőtt a mindennapjai során. Azonban a matematika tanításának célja szerintem lényegesen több annál, hogy fogalmakat, tételeket, módszereket tanítsunk a gyerekeknek. A 2020-as nemzeti alaptanterv a matematikatanítás következő céljait fogalmazza meg (Nemzeti alaptanterv, 2021):

„ A matematika tanulásának legfontosabb célja, hogy a tanuló:

1. megtapasztalja a matematika értékeit, hasznosságát, szépségét;
2. megismerje a matematikai gondolkodás természetét és a matematika alapvető sajátosságait;
3. fejlessze a szövegértését, a szövegalkotó és absztrakciós képességét a matematika nyelvének és szimbólumainak szóbeli és írásbeli alkalmazása során;
4. fejlessze a számolási készségét, a modellezési, a problémamegoldó és döntési képességét;
5. fejlessze a logikus, pontos, kreatív, mérlegelő, stratégiai, és rendszerező gondolkodását;
6. alkalmazható tudásra tegyen szert.”

Sajnos a szép célok ellenére is nagyon sok gyerek nem szereti a matematikát, már egészen kis korától negatív a hozzáállása. Mindez származhat a szüleik megítéléséből, ha ők úgy állnak hozzá, hogy soha nem szerették és tudták a matematikát. A gyermek iskolában szerzett kudarcélményei sem segítik a tantárgy megszeretését. A tanítás során a pedagógus hozzáállása is nagy hatással lehet a gyerekek tantárgy iránti szeretetétre. Egészen apró

dolgok jelenthetnek áttörést a szeretem és a nem szeretem óra között. Saját tanítványom mesélte egyik korábbi matektanárjáról, hogy vele mennyire szerette a matekot, mert hallgathatott zenét, ha hosszabb önálló munka volt, vagy mert jutalmazta a nem teljesen tökéletes megoldását is. Pólya György a következőt vallotta: „...nem szabad semmi olyat elmulasztani, aminek valami esélye van arra, hogy a diákokhoz közelebb hozza a matematikát. A matematika nagyon absztrakt tudomány – éppen ezért nagyon konkrétan kell előadni." (Pólya, 1977). Én is úgy gondolom, hogy meg kell ragadni minden olyan lehetőséget, ami megszerettetheti a gyerekekkel a matematikát. Lehet ez akár néhány engedmény a zenehallgatás terén, néhány érdekes kérdés, egy új munkaforma vagy a valóságból származó feladat. Szintén Pólya Györgytől származik a következő gondolat:

„A NAGY felfedezések nagy feladatokat oldanak meg, de nincs olyan feladat, amelynek megoldásához ne volna szükség valami kis felfedezésre. Lehet, hogy a feladat, amelyen gondolkozol, egyszerű; de ha felkelti érdeklődésedet, mozgósítja találékonyságodat és végül, ha sikerül önállóan megoldanod, átéled a felfedezés izgalmát és diadalát. Ha még fogékony korban sikerül ilyen tapasztalatot szerezned, kedvet kaphatsz a szellemi munkára, és ez talán egész életre szóló nyomot hagy a gondolkodásodban és jellemedben.

Hogy mindebből mi válik valóra, az nagymértékben a matematikatanáron múlik. Ha a matematikatanár a rendelkezésre álló időt azzal tölti, hogy sablonos példákon gyakorlatoztatja tanítványait, akkor kiöli belőlük az érdeklődést, fékezi szellemi fejlődésüket és visszájára fordítja kedvező lehetőségeit. Ha azonban tudásukhoz mért feladatokkal felkelti érdeklődésüket és rávezető kérdésekkel segítségükre van a megoldásban, kedvet csinálhat nekik és eszközt adhat a kezükbe az önálló gondolkodáshoz." (Pólya, 1977).

Bizonyára minden matematikatanár szeretne így matematikát tanítani, azonban sajnos vannak nehezítő körülmények is. Ha valaki egy nagyobb csoportot tanít, esetleg egész osztályt, nehéz, olykor lehetetlen küldetésnek tűnhet mindenki számára a tudásához mért feladatot adni. Az oktatás általában kimenet-orientált, egy-egy szakasz sikeres teljesítését követelményekhez kötik. A gimnáziumi tanulmányokat az érettségi vizsga zárja le, amit 2005 óta két szinten: közép- és emelt szinten tehetnek a tanulók, de az addig való eljutás és az arra való felkészítés is sok korlátozást és elvárást támaszt a tanárok felé azzal kapcsolatban, hogy mit és mikor tanítsanak tanulóiknak.

Tananyagok fejlesztése és tanítása során is érdemes tisztában lennünk azzal, hogy a tanulás hogyan működhet, milyen okai lehetnek annak, hogy mit mikor kell tanítani. A következő fejezetben különböző tanuláselméletekkel és azoknak matematikatanításra vonatkozó következményeivel foglalkozom.

3.2. Tanuláselméletek

Arról, hogy a tanulás, és kifejezetten a matematikatanulás hogyan történik, különböző elméletek vannak. Ezen elméletek közül Jean Piaget konstruktivista, Lev Szemjonovics Vigotszkij szocio-konstruktivista és Jerome Bruner reprezentációs tanuláselmélete a legmeghatározóbbak a matematikatanításban (Pető, 2020).

Jean Piaget svájci pszichológus a 20. század első felében dolgozta ki a konstruktivista tanuláselméletét. A 20. század elején a meghatározó nézet az volt, hogy a gyerekek tanulását büntetéssel és jutalmazással lehet befolyásolni. Piaget elmélete viszont azokon az alapfeltevéseken nyugszik, hogy a gyerekek felnőtt és más társaik nélkül is megtanulnak dolgokat, a motivációjuk a tanulásra intrinzik, azaz nem szükséges jutalmazás vagy büntetés hozzá, és hogy a fejlődéshez a környezettel folytatott interakció elengedhetetlen. Piaget az értelmi fejlődést négy nagy szakaszra bontotta, amelyek sorrendje meghatározott, de időbeli lefolyásuk között lehetnek eltérések a különböző embereknél. A négy szakasz

1. A szenzomotoros szakasz. Ez a születéstől körülbelül kétéves korig tart. Ekkor a gyermekek megtapasztalják, hogy hatni képesek a világra.
2. A művelet előtti szakasz. Ez körülbelül kétéves kortól hatéves korig tart. Ekkor történik a nyelvelsajátítás. Ebben az életkorban a gyerekek egyszempontú osztályozásra képesek. Be tudják sorolni a tárgyakat csoportokba, de csak egyetlen szempontot tudnak figyelembe venni. Éppen emiatt ekkor még nem jellemző a mennyiségek állandóságának ismerete. A matematikatanítás szempontjából izgalmas kérdés lehet, hogy ennek a szakasznak a határán a gyerekek alsó tagozatban tanulnak mérni és mértékegység átváltásokkal is meg kell ismerkedniük. Ez a mennyiségek állandóságának megszilárdult ismerete nélkül problémákat, zavarokat okozhat és akár ez is állhat annak a hátterében, hogy sok gyereknek jelent nehézséget az elsajátítása.
3. A konkrét műveletek szakasza. Ez a szakasz körülbelül hatéves kortól tizenkét éves korig tart. Ilyenkor a gyerekek már képesek mentális műveletekre, tárgyak és

cselekvések fejben való csoportosítására, sorba rendezésére, de még szükség van arra, hogy konkrét példákat, tárgyakat lássanak.

4. A formális műveletek szakasza. Ez körülbelül tizenkét éves kortól tizenkilenc éves korig tart. Ekkor a serdülő már képes több szempontot figyelembe venni, tud a jövőről gondolkozni, tervezni és ami a matematikatanítás szempontjából a legfontosabb: ekkor válik absztrakttá a gondolkodás (Győri Miklós, 2017).

Piaget elképzelései ma már nem teljesen elfogadottak, kísérletekkel bizonyították, hogy a gyerekek az általa gondoltaknál minden szakaszban többet tudhatnak. De ugyanennek a fordítottja is igaz, azaz nem feltétlenül tart minden gyerek az adott korosztályban az általa sugallt absztrakciós szinten, sokszor lassabb a fejlődés, a különböző fejlődési szintek elérésének időbeli alakulásának nagy a szórása.

Azonban az elméletei segíthetnek megérteni a gyermekek fejlődését és fontos kiindulópontjai későbbi elméleteknek, a neokonstruktivista modelleknek.

Lev Vigotszkij elméletében fejlődési zónákról beszél. A gyerek egy tanulási folyamatban áll egy szinten, ezen a szinten magától véghez tud vinni feladatokat. Van olyan szintű feladat is, amit a gyerek magától még jelenleg nem tud megoldani. A kettő között található rés a legközelebbi fejlődési zóna, ahová a gyerek egy hozzáértő kis segítségével, beavatkozásával el tud jutni (Cole, 2003). A tanítás során ezt fontos szem előtt tartani. Ha egy tanuló lemarad egy szinten, valamit nem sikerül megugrania, akkor egyre távolabb kerül tőle a többi diák aktuális szintje, így amit ők már segítséggel el tudnak érni, az a lemaradt tanulónak nehézséget okoz.

Bruner reprezentációs elmélete szerint a gondolkodás három síkon mehet végbe. Az első a materiális, azaz enaktív sík. Itt az ismeretszerzés konkrét tárgyi megjelenéshez kötött. A következő az ikonikus sík, ahol az ismeretszerzés ábrák, elképzelt szituációk alapján történik. A harmadik sík pedig a szimbolikus sík. Ez az ismeretanyag megjelenése matematikai szimbólumok formájában. A tanulók esetében a három sík egymásba fonódik, változó, hogy mikor melyik kerül előtérbe. Az egyik síkról a másikra való áttérés növeli a problémamegoldás hatékonyságát (Ambrus, 1995).

Játékok alkalmazása a tanítás során kiváló lehetőséget biztosít arra, hogy ezeket a síkokat felváltva aktivizáljuk. Ha egy játékot adunk a gyerekek kezébe, az egy valós, megfogható tárgy. Ki lehet vele próbálni dolgokat, lehet pakolgatni, cselekvéseket végrehajtani vele. Ez

aktivizálhatja az enaktív síkot. Ha a játék alapján fogalmazunk meg állításokat, rajzokat készítünk, lejegyezzük a látott megfigyelést, akkor áttérünk az ikonikus síkra. Ha pedig általánosítunk, elrugaszkodunk a játéktól, akkor áttérhetünk a szimbolikus síkra is.

3.3. Játékok az oktatásban

A játékok használatának számos előnye van. Maár Tiborné a következő előnyöket foglalta össze:

„A jó játékkal a monoton munkát felélénkíthetjük, izgalmával az órákat érdekesebbé tehetjük, osztályunk tanulóit szellemi frissességben tarthatjuk. A játék stabillá, ugyanakkor mozgékonnyá teszi az ismereteket. Megtanítja a gyerekeket a szerzett tudásanyag aktív, tevékeny alkalmazására, elkülönült anyagrészek rendszerbe illesztésére, a lényeg felismerésére, kombinációkra. Képessé teszi őket az ismeretek szokatlan helyzetekben való felidézésére és alkalmazására, tehát önálló, rendszerező gondolkodásra és tanulásra nevel." (Maár, 2009).

Maár Tiborné azt is kifejtette, hogy a játék időtartama nem lehet egész óra, az ideális időkeret a tevékenységre 20-25 perc. Egyetértek azzal, hogy nem lehet minden órán állandóan játszani. Habár különböző szintjei vannak annak, hogy a játék mennyire része a tanítási folyamatnak, még ha szorosan kapcsolódik hozzá, akkor is elinflálódhat az értéke, elveszítheti a varázsát. Ami eleinte izgalmas és motiváló, az megszokássá válhat. Saját tanítási gyakorlatom során találkoztam a jelenséggel, amikor egy másik kolléga helyett mentem helyettesíteni egy csoportba, hogy a diákok nem jöttek el, mert a kolléga helyettesítések alkalmával „csak" játékot játszat.

Maszler Irén a játék feszültségoldó hatása mellett a személyiségfejlesztésre gyakorolt hatását fejti ki, továbbá örömforrásként tekint a játékra (Maszler, 1966). Nagy szükség lehet az örömforrásra, feszültségoldó hatásra a matematikaórák kereteiben is, hiszen sok gyerek teljesítményét befolyásolja a matematikai szorongás.

Az iskolának a személyiségfejlesztésben is fontos szerepe van. Egy megfelelő szempontok mentén kiválasztott játékban döntések sorozatát kell meghoznia a játékosoknak. Ezek a döntések hatással lehetnek későbbi döntéseikre, vagy egyéb következményeket is vonhatnak maguk után. Emiatt a kerettantervben megfogalmazott célok közül a döntési képesség,

logikus gondolkodás, problémamegoldó képesség és stratégiai gondolkodás fejlesztését is elősegítheti a játék. Ezek mellett nem elhanyagolható az sem, hogy a játék általában társas tevékenység. Párban, kisebb csoportokban a gyerekeknek kommunikálni kell egymással, ezáltal a csoport közösségének formálására és a szociális készségek fejlesztésére is alkalmas lehet a játszás.

Ha játékot használunk a tanítás során, az egy új, szokatlan szituációt eredményezhet a diákok és a tanár számára is. Ha a játékra kikapcsolódásként, önfeledt tevékenységként tekintünk, akkor ez felboríthatja a megszokott viselkedési normákat. Nagyobb zajjal járhat, mint egy hagyományos matekóra, ami öngerjesztő folyamatként még nagyobb zajt eredményezhet. Ha egy játék, vagy játékosabb tevékenység után vissza akarnánk térni a megszokottabb keretekhez, frontális munkához, akkor is nehézségekbe ütközhetnénk. Ezek miatt elengedhetetlennek gondolom az új helyzet szabályainak megalkotását, akár a tanulókkal együtt, és azoknak a rögzítését is a játékos feladatok, játszás megkezdése előtt.

3.4. Néhány jó gyakorlat a játékok alkalmazásairól

A következő alfejezetekben néhány gyakorlatot foglalok össze a játékok alkalmazásáról a tanításban, a matematikatanításban. Szó lesz a játékok hatásairól a gyermekek hozzáállásra a matematikához és annak tanulásához, illetve a játékok teljesítményre gyakorolt hatásáról is.

3.4.1. Sakk

A sakk egy ősidők óta ismert, sportként is elfogadott stratégiai játék. Logikai gondolkodást igényel, a kiemelkedő matematikai készségek gyakran párosulnak sakktehetséggel is. A sakkoktatás ma már megjelenhet az általános iskola alsó tagozatán is, ehhez segítséget nyújt Polgár Judit Sakkpalota című sorozata, amely tankönyveket, munkafüzeteket és feladatgyűjteményeket foglal magába (Polgár, 2013). A Polgár család története az egyik legismertebb és legsikeresebb példa a sakk nevelésben való alkalmazására. Polgár László szerint bárkiből lehet zsenit nevelni a sakk segítségével megfelelő módszereket használva. A módszerek között kiemeli, hogy nagyon korán kell elkezdeni foglalkozni egy konkrét területtel, amit a gyerek maga is megszeret és ez motiválja őt a teljesítményre (Polgár, 1989). A sakk hatásait a matematikai teljesítményre Misetáné Burján Anita is vizsgálta (2014). Ő a sakkoktatás és sakkversenyeken való szereplés hatását a diákok felvételin nyújtott teljesítményén figyelte. Azt tapasztalta, hogy a csoportjából a sakkozó gyerekek matematika

pontszámának átlaga a nyolcadikos felvételin jóval magasabb lett, mint a többi tanuló átlaga. Munkájában kiemeli, hogy a sakk a matematikaoktatásban erősíteni tudja a geometriai, tájékozódási készségeket. Doktori értekezésében ezek mellett még a játék logikai kvantorok, lehetetlenségi és egzisztencia bizonyítások elsajátításában fejtett hatásáról is beszámol.

Több feladatgyűjtemény is létezik, amely sakkal és matematikával kapcsolatos feladatokat tartalmaz. Ilyen például Gémes Margit tanárnő gyűjteménye, amely a sakktábla különböző alakzatokkal való lefedéséről, színezéséről is tartalmaz feladatokat (Gémes, 2013), vagy Raymond Smullyan Sherlock Holmes sakkrejtélyei című könyve is (2022).

A sakkoktatás és a matematikai teljesítmény kapcsolatában könnyen ütközhetünk a tyúk vagy a tojás problémájába. Mi volt előbb, a tyúk vagy a tojás? A sakk miatt jobb a matematika teljesítmény? Vagy a matek miatt jobb a sakk teljesítmény? Elképzelhető, hogy a sakkozó diákok jobb matematikai képességeit a sakk hatásának köszönhetik, azonban az is, hogy a sakk azokat a diákokat ragadja magával, akik már sakk nélkül is nyitottabbak a logikus gondolkozásra, jobban szeretik és ügyesebbek matematikából a társaiknál. Ezeket az ok-okozati következményeket nagyon nehéz mérésekkel alátámasztani, hiszen minden gyermek más, ha egy kontrollcsoportos kutatást végzünk, akkor is a sakkozáson kívül számtalan paraméterben különbözhet a két csoport.

3.4.2. Játéktár a matematika szertárban

A Matematika Összeköt Egyesület szervezésének köszönhetően lehetőségem nyílt az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gyakorló Gimnázium matematika szertárában egy vezetett látogatáson részt venni 2023 őszén. A szertárban összegyűjtött és rendszerezett segédeszközök népes gyűjteménye mellett jó néhány társasjáték is sorakozott. Ekkor hallottam, hogy a NTP-TFJ-19 kódjelű pályázaton kaptak támogatást arra, hogy segédeszközöket szerezzenek be a síkban és térben való tájékozódás kompetenciájának fejlesztésére. A forrásból több társasjátékot sikeresen beszereztek annyi példányban, hogy egész csoportok számára alkalmazhatóak legyenek a játékok. Ezeket a játékokat matematika szakkörök keretein belül, továbbá egyéni fejlesztéseken használták. A szakköri felhasználáshoz feladatlapokat készítettek a játékokhoz. A szakkörök a játékok megismerésével, szabad játékkal kezdődtek. A diákok közül volt olyan, aki számára ez elegendő is volt, de voltak olyanok is, akik tovább haladva a játékokhoz kapcsolódó feladatlapok által matematikai problémákon gondolkoztak. A pályázat keretein belül

készítettek feladatlapot a következő játékokhoz: Geomag, Kingdomino, Polyuniverse, Tantrix, Zoometol. Használták továbbá a következő játékokat is a foglalkozások keretein belül: Match Madness, Battle Sheep, Száguldó Robotok, Rush Hour, Tangram, Pentomino, Block by Block. A szakkörök célja a beszámolók alapján a matematika megszerettetése, érdeklődés felkeltése és a logikus gondolkodás fejlesztése volt.

3.4.3. Komplex Instrukciós Program (KIP)[1]

A komplex instrukciós program magyarországi bevezetése és megvalósítása K. Nagy Emese nevéhez és a hejőkeresztúri iskolához kötődik. Hejőkeresztúrban nagyon sok hátrányos helyzetű gyermek van, sokan nem motiváltak a tanulás iránt. A komplex instrukciós program alkalmas a gyermekek között lévő nagy különbségek kezelésére és fejlődési lehetőséget kínál nem csak a legjobb tanulók, hanem a heterogén összetételű osztály minden tagja számára. A program részét képezi a csoportmunka, amiben a különböző szerepekkel azt próbálják elérni, hogy előismerettől függetlenül mindenki megtalálja a saját feladatát, a saját fejlődési lehetőségét a munka során és ebben a diákok elfogadják és támogassák egymást. A feladataikra jellemző, hogy több tantárgyat, több kompetenciát foglalnak magukba, gyakran nyílt végűek, ezzel fejlesztve a tanulók gondolkodását és készségeit. A célok között szerepel, hogy az órák során ne rutinfeladatokkal tréningezzék a gyerekeket, hanem teret hagyjanak a kreativitásnak, problémamegoldó készségnek. A program sikerét mutatja egy 2013-as adat, mely szerint minden tanuló továbbtanul az általános iskola elvégzése után és a tanulók 70%-a érettségit adó intézményben folytatja a tanulmányait (K. Nagy, 2013).

A program másik pillére a Logikai Táblajáték Program. Ennek keretein belül logikai és táblajátékokat használnak a tanórákon és azokon kívül a gyerekek értelmi képességeinek, szociális készségeinek fejlesztésére. A megfogalmazott célok között szerepelnek a következők: összpontosítás, kreativitás, absztrakció, önállóság, analitikus gondolkodás, lényegre törő fogalmazás, érvelés, tájékozódás fejlesztése. A játékokat a matematikán kívül más tantárgyakhoz is kapcsolják, például történelem, földrajz, ének, irodalom vagy informatika órákba is beépítik. A játékok használata közben a tanulóknak sikerélményben van részük, akár a győzelem során, akár csak abban, hogy ha sikerül megérteniük és elsajátítaniuk egy játékszabályt. A sikerélmény pedig magabiztosságot kölcsönöz számukra,

[1] A komplex instrukciós programról a következő weboldalon tájékozódhatunk: http://komplexinstrukcio.hu/index.php?layout=edit&id=12

megnő az önmagukba vetett hitük, ami által az élet más területein, a tanulásban is sikeresebbek lehetnek.

3.4.4. Játék a matekórán

A 2024-es Varga Tamás Módszertani napokon volt szerencsém hallani Antal Zoltán tanár úr Játék és matematika című előadását. Az előadásban bemutatta egy kísérletét, melyben bejövő hetedikes diákok egyik matematika csoportjának heti négy matematika órájából egyet társasjátékokkal töltöttek el. A tapasztalatai azt mutatták, hogy azok a csoportok, ahol hetente az egyik óra társasjátékos óra volt, nem maradt le a másik csoporthoz képest, ahol heti négy órában sajátították el a diákok ugyanazt a matematika tananyagot. Ehhez a játékos órához átgondolt tematikát fejlesztett ki, amellyel a logikus gondolkodás fejlesztésén túl a csoport formálásának segítése és a gyerekek ismerkedésének támogatása is célja volt. Az általa használ játékok között vannak kooperatív játékok, NIM variánsok, kártyajátékok, nyerő stratégiák és a SET is megtalálható közöttük. A tematikában helyet kapott néhány beszélgetős, ismerkedős játék is, mint például a Top10, vagy asszociációs játék, például a Szókapocs (Varga Tamás Módszertani Napok: Játék és matematika).

3.4.5. A társasjátékkal töltött idő kifizetődik

Dukán András Ferenc, Fried Katalin és Szabó Csaba 2021-ben megjelent cikke egy hasonló kísérletről és eredményeiről számol be, mint Antal Zoltán tanár úr munkássága (Dukán, 2021). A következő alfejezetben az ő eredményeiket és munkájukat foglalom össze. A Madách Imre Gimnázium bejövő nyelvi tagozatán végeztek kísérletet. Ennek az osztálynak heti három matematikaórája volt a nyelvi előkészítő évében, amelyeknek fő célja a matematikai ismeretek szinten tartása és a tanulók közös szintre hozása. A matekórákon a diákok két csoportban vettek részt és az egyik csoport a három órából egyet társasjátékokkal töltött fél éven keresztül. A kiválasztott játékok ebben a kísérletben az Avalon és a Da Vinci Code voltak. A második félévben a kontrollcsoport az Azul nevű játékot próbálhatta ki hasonló körülmények között. A kísérletben a hipotézisek beigazolódtak. Nem maradtak le azok a tanulók, akik az első félévben minden héten játszottak az egyik órán. Ezek a tanulók hasonlóan jó eredményt értek el a kimeneti mérésekben a kontrollcsoporthoz képest. A kísérleti csoportban nem volt olyan tanuló, aki lemaradt volna, míg a kontrollcsoportban

volt. A gyerekek élvezték a játékos órákat, sokan a legjobb matekórákként nyilatkoztak róluk. A kérdőívek eredménye szerint a tanulók érezték a játékos órák hatását társas kapcsolataikban is, és jobban megismerték osztálytársaikat a játékok által.

3.4.6. Tehetségfejlesztés stratégiai társasjátékok segítségével

A Szent István Gimnáziumban végzett hosszúgyakorlatom alatt ismerkedtem meg Magyar Zsolt tanár úrral, akit a hazai társasjátékos közösség jelentős része ismerhet külföldi társasjátékos rendelései miatt. Beszélgetéseink során világossá vált számomra, hogy nagyon elhivatott a társasjátékok iskolai foglalkozások keretében történő felhasználásával kapcsolatban. A mestertanári programjának címe: Tehetségfejlesztés stratégiai társasjátékok segítségével. A program céljai között szerepelnek a következők: összetett logikai gondolkodás fejlesztése, szociális kompetenciák fejlesztése, lexikális memória fejlesztése, a tanulás motivációjának növelése, szövegértés és elemző olvasási készség javítása. A program során játékos foglalkozásokra havi rendszerességgel kerül sor. A foglalkozások általában a tanórákon kívül valósulnak meg. Azonban végzett olyan kísérletet is, amelyen havonta egy duplaórás matematika óra idejében játszottak a tanulók a játékokkal. A játékok összetettsége és hossza miatt a 45 perces tanórákban a megvalósítás nagy kihívás, egyes játékok esetén pedig lehetetlen élvezetes módon. A délutáni foglalkozások viszont tág időkeretet biztosítanak a résztvevőknek a szabályok elsajátítására és a játékok kipróbálására. A célok elérésének követése a programban kérdőívvel történik. A programban nincsen kontrollcsoport, mert senkit nem szeretett volna kizárni a játék élményéből a tanár úr. A kérdőívet a diákokkal közösen alkották meg és kitér a játék értékelésére, például, hogy mennyire bonyolult, milyen hosszú, hányan lehetett játszani. Emellett a játék fejlesztő és szórakoztató hatását is méri a következő szempontok mentén: mennyire élvezetes a játék, fejleszti-e a memóriát, kommunikációt, koncentrációt, mennyire domináns benne a szerencse, tudás, kooperáció és a résztvevőknek arról is állást kell foglalniuk, hogy mennyire ajánlanák másoknak a játékot. A használt játékok újgenerációs stratégiai játékok, amelyek általában összetett szabályrendszerrel rendelkeznek. Néhány példa a használt játékok közül: Arkadia, Citadella, Galaxis Roncsderbi, Samurai, Stone Age (Magyar, 2012).

A Közép-Pesti Pedagógiai Napok keretében 2025.02.13-án lehetőségem volt megnézni egy játékos foglalkozást egy hetedikes osztályban és utána egy beszélgetésen is részt vehettem az órát megfigyelő többi tanárral és a foglalkozást vezető tanárral. A foglalkozáson egy fél

osztály vett részt és egy új játékot tanultak meg, amit még senki nem játszott a tanulók közül. Ezen a foglalkozáson terítéken lévő játék a Manhattan TraffIQ volt. A játékot a diákok 3-4 fős csoportban játszották és már előre az asztalokon kipakolva a kezdő elrendezéssel várta a tanulókat. A rövid elrendeződés után 15-20 percben a szabályok ismertetése történt. Ezt a tanár úr mondta el nekik, ők pedig aktívan figyeltek. A szabályok megértésében nagy különbségek voltak a tanulóknál. Voltak, akik azonnal átláttak a szabályokat, jobbnál jobb kérdéseik voltak magyarázat közben is. De akadtak olyanok is, akik elveszítették a fonalat, közben társaikkal beszélgettek, így a játékidő elején is sokáig a szabályok elsajátításával voltak elfoglalva. Ezután játszottak a játékkal. A játékidő a doboz szerint körülbelül 30 perc. A diákoknak is szükségük volt ennyi időre. Ez volt az utolsó órájuk és a terem is szabad volt az óra után, így kicsengetés után 15 perccel még minden csapat játszott. Jellemzően egy kört tudtak lejátszani a gyerekek és ez idő alatt jól belerázódtak a játékba, ügyesen elsajátították a szabályokat. A játékban lapkákat kellett lehelyezni és érdekes volt megfigyelni, hogy a lapkák megfelelő forgatása, lehelyezése komoly fejtörést okozott néhány tanulónak.

A beszélgetés során halhattam a tanár úr programjának motivációjáról. Elmesélte, hogy minden alkalommal új játék kerül sorra, csak az utolsó alkalom során van lehetőség a kedvencet visszakapni. Ezzel az a célja, hogy a tanulási folyamatot szeretné elősegíteni a sok játék megtanulása során, amit az iskolában is tudnak kamatoztatni a diákok.

3.5. Nehézségek játékok használata során

Az előző alfejezetekben számos előnyét mutattam be a játékok alkalmazásának, azonban mint sok más módszernek, ennek is megvannak a hátrányai. A játék időt igényel. Még ha egy rövidebb játékkal is játszunk, azzal egyéb tevékenységektől vesszük el az időt. Az iskolai tanév során sok tanóra elmaradhat, több idő lehet szükséges egy-egy tananyag alapos elmélyítésére, mint elsőre gondolnánk és ezt a tevékenységet játszással háttérbe szorítjuk.

Egy játékos órához játékra van szükség. Ez a játék pénzbe kerül, amit valahogyan elő kell teremteni, vagy pedig nekünk kell alkatrészeket, elemeket gyártani, ami a tanártól igényel sok előkészületet. A játékot valahol tárolni kell, ha több készletünk van, esetleg több játékból, akkor az sok helyet igényelhet.

Saját tapasztalatom, hogy vannak olyan gyerekek, akik nem szeretnek játszani, nem érzik hasznosnak a tevékenységet, másra lenne igényük. Az ő foglalkoztatásukra egyéb

megoldásokat kell kitalálni és megvalósítani. A játék a lelkes tanulókat és a tanárt is új helyzet elé állítja, amiben újszerű megoldásokra, szabályokra lehet szükség.

Nehéz mérhető kutatást végezni a játék következményeiről, mert egy diák személyiségére és tanulására, matematikához való hozzáállására számtalan körülmény van hatással, amelyek folyamatosan változnak. Nagy kihívás ebből egyetlen elemet kiválasztani, a játékot, és minden mást figyelmen kívül hagyva, vagy minimalizálva következtetéseket levonni a hatásairól. Azonban mindezek ellenére szerintem érdemes olykor lehetőséget teremteni egy-egy játékos foglalkozásra.

4. Quarto foglalkozásterv

Korosztály: 8. osztályt végzett tanulók

Előzetes ismeretek:

Kombinatorika:

- összeszámolási feladatok - az esetek strukturált összegyűjtése
- sorba rendezési feladatok: ismétlés nélküli permutáció
- feladatok megoldása ágrajzzal
- kombináció: kis elemszámmal az összes eset összegyűjtése
- ismétlés nélküli variáció kis elemszámmal
- feladatok megoldása gráffal, alapvető gráfelméleti fogalmak

Számhalmazok és műveletek:

- racionális számok halmaza, műveletek a racionális számok körében
- valós számok halmaza
- hatványozás: azonosságok, pozitív egész kitevővel
- négyzetgyökvonás
- számrendszerek

Számelmélet:

- oszthatóság
- oszthatósági szabályok
- prímszám
- prímtényezős felbontás

Foglalkozás célja:

- kombinatorikus gondolkodás fejlesztése
- problémamegoldó készség fejlesztése
- érdeklődés felkeltése, motiváció
- tapasztalat szerzése az önálló kérdésfeltevésben, felfedezésben
- kritikus gondolkodás fejlesztése
- csoportkohézió növelése

4.1. A foglalkozásokról

A foglalkozások két játékra épülnek. Az egyik játék a Quarto, a másik pedig a Checkpoint Charlie. Mindkét játék erősen épít a logikus gondolkozásra, a játékok során kombinatorikához kapcsolódó kérdések sokasága felmerülhet a játékosokban.

A Quarto leírása megtalálható a szakdolgozat 2.3. fejezetében.

4.2. A Checkpoint Charlie

A Quarto-val ellentétben a Checkpoint Charlie nevű társasjátéknak van kerettörténete. A történet a hidegháborúban játszódik az 1960-as években. Helyszíne Checkpoint Charlie, a berlini fal egyik leghíresebb határátkelő helye. A kerettörténetében a játékosok őrkutyák, akik a Checkpoint Charlie határterületét felügyelik. Az ügynökök meg akarják találni a macskák között a kémet.

A játékban 32 macska található, melyeknek 5 tulajdonsága van és mindegyik kétféle értéket vehet fel.

A tulajdonságok:

- Lehetnek szürkék vagy narancssárgák a macskák.
- Lehetnek kalapban vagy anélkül.
- Lehetnek kabátban vagy pulcsiban.
- Lehetnek újsággal vagy anélkül.
- Lehetnek szemüvegben vagy anélkül.

Ha 5 játékos játszik, akkor a játékosok egy-egy tulajdonságot ismernek, a másik négyet, amit a többi játékos ismer, kezdetben még nem. A játékosok egymás után sorban húznak egy kártyát a 32 macska közül és megnézik, hogy az ő tulajdonságukkal rendelkezik-e vagy sem. Ha rendelkezik, akkor képpel felfelé fordítva maguk elé teszik úgy, hogy a többi játékos is láthassa. Ha nem rendelkezik, akkor a saját dobópaklijukba teszik képpel lefelé fordítva így a többi játékos ezt nem láthatja. A játék során az ügynök őrkutyák egymás ellen versengenek, hogy ki találja meg leghamarabb azt a kém macskát, amire mind az 5 játékos tulajdonsága illik.

A játék során a játékosok előtt gyűlnek azok a kártyák, amelyekkel a saját tulajdonságuk megegyezik így a többi játékos következtetéseket vonhat le, hogy kinek mi a megfigyelt tulajdonsága. A játék során több forduló is játszható és pontozásra is van lehetőség, azonban

egy-egy forduló után is lehet győztest és további helyezetteket is hirdetni. A foglalkozások során én ezt a verziót játszottam a résztvevőkkel.

Ha a csoport létszáma nem osztható öttel a játékot 3 vagy 4 fővel is lehet játszani. Ekkor a kimaradó egy vagy két tulajdonság a játék során felfedésre kerül. Én a könnyebb lebonyolítás érdekében ilyen esetben a kimaradó tulajdonságokat már a játék legelején felfedtem.

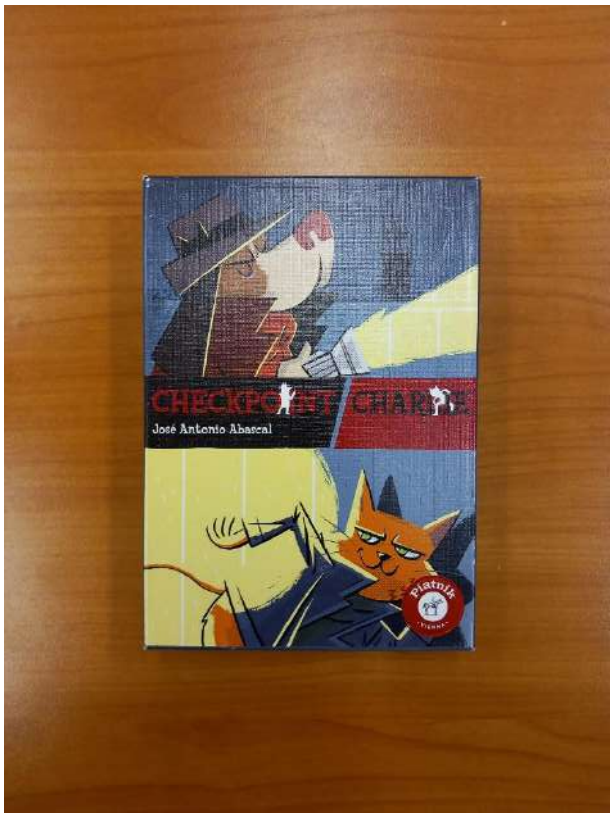
4.3. A foglalkozások eszközei

A foglalkozásokon a diákok játszhatnak a játékokkal, kipróbálhatják azokat, azonban ehhez eszközökre van szükség. Mindkét játékból van egy saját példányom, amelyet elvittem a foglalkozásokra, megmutattam a diákoknak és használhatták is azokat. Az, hogy éppen ki használhatta ezeket, változott amiatt, hogy mindenkinek lehessen tapasztalata az igazi társasjátékokkal. A Quarto-ból egy készlet a tábori társasjátékok között is megtalálható, így abból két eredeti készlet is rendelkezésre állt.

Ahhoz, hogy a játékok megléte nélkül minden diák játszani tudjon, ezeket a társasokat sokszorosítottam. A Quarto játszható logikai készlettel, pontosabban annak egy részével hiszen abban is megtalálhatóak teli és lyukas, kör és négyzet (sőt, több alakzat is), világos és sötét (sőt, több szín is) és kicsi és nagy tulajdonságokkal rendelkező lapok minden kombinációja. A logikai készleteket kartonból kivágott lapokkal is helyettesíthetjük, amelyek elég tartósak, így kibírják, hogy több csoportban megtartsuk a foglalkozásokat. A lapokkal a diákok saját füzetükbe rajzolt táblákon játszhatnak vagy akár megfelelő méretű laminált négyzetrácsot is gyárthatunk hozzá.

A Checkpoint Charlie játszhatóságának feltétele a macskákat ábrázoló 32 kártya, amelyek szintén reprodukálhatóak, és ezt jóval kevesebb példányban elég beszerezni, hiszen egy készlettel többen tudnak játszani.

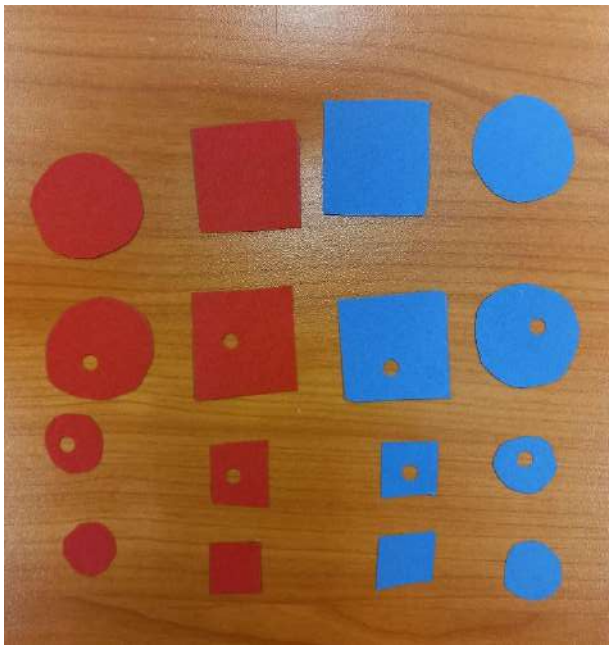
2. *ábra*: A Quarto társasjáték eredeti példánya.



3. *ábra*: A Checkpoint Charlie társasjáték eredeti példánya.

4. *ábra*: A Checkpoint Charlie társasjáték tartalma.

5. *ábra*: A sokszorosított Quarto készletek.



6. *ábra*: A sokszorosított Quarto lapok.

7. *ábra*: A sokszorosított Checkpoint Charlie kártyák.

4.4. A foglalkozások vázlatos felépítése

A tervek 4 darab 1,5 órás foglalkozásra készültek. Az egyes foglalkozások címszavakban:

1. Ismerkedés a Quarto-val, játék párokban, feladványok az állásokkal, feladatok megoldása, kérdések feltevése.
2. Sorba rendezések, konstrukciókereső feladatok és játékverziók kitalálása.
3. Csoport által feltett kérdések megválaszolása, nyerő stratégiás feladatok.
4. Checkpoint Charlie és a barkochba.

4.5. A foglalkozások részletes tervei:

1. Foglalkozás

Időkeret	Az óra menete	Részletek	„Módszer”
5 perc	Rövid bemutatkozás	A téma ismertetése, szabályok rögzítése a következő napokra: egymás ötleteinek meghallgatása, szabad rosszat mondani, sokszor játszani fogunk, de attól még nem szabad rendetlenkedni, kézjel ismertetése, ami felmutatásakor csend és figyelem kell legyen újra. Az órán való részvételért lehet batkát kapni, aki aktív, sok jó választ bemond, jól viselkedik több batkát kap.	
5 perc	Névtanulós, ismerkedős kör	A diákok elmondják a nevüket, illetve a kedvenc (társas)játékukat.	
5 perc	Quarto bemutatása	Egy olyan játékkal fogunk foglalkozni, amiben bábuk vannak. Minden bábu különböző, mindegyiknek 4 féle tulajdonsága van és minden tulajdonság kétféle lehet. Hány bábu van a játékban? **Megoldás:** 16 A megoldás elhangzása után játék nevének felírása, feladat vázlatos rögzítése a táblán. Különböző megoldási módok megbeszélése, hogy ezzel is felelevenítsük, közös szintre hozzuk az előzetes ismereteiket. A megoldási módok, amiket szeretnék, ha előkerülnének: ➢ ágrajz ➢ független döntések a tulajdonságokról: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ ➢ összes lehetőség felsorolása: megmutatom a bábukat, meg lehet számolni	Szükséges eszközök: a játék, tábla, filc. A feladatot ebben a formájában elmondom, a diákok jelentkezés után válaszolhatnak. Ha nem értik a kérdést ebben a formájában, akkor tulajdonságok konkretizálásával segítek.

5 perc	Szabályismertetés befejezése	Négyzet alakú táblán játszák, kérdés: hány négyzet az oldala a táblának, ha minden bábut felpakolva minden mezőn éppen egy bábu áll? **Megoldás**: 4 A játék hasonlít az amőbára, két játékos felváltva pakol bábukat a táblára, az nyer, aki egy sorban, oszlopban vagy valamelyik átlóban elhelyezi a 4. bábut úgy, hogy van olyan tulajdonság, ami mind a 4 bábuban közös. Viszont nincs saját tulajdonsága senkinek, emiatt mindenki köre azzal ér véget, hogy ad egy bábut a másik játékosnak és neki azt kell lehelyeznie, amit a másiktól kapott.	
5 perc	Saját verzió megmutatása	Megmutogatni a saját készleteiket, készletek kiosztása, bábuk tulajdonságainak tanulmányozása. Felmutatok egy bábut, mutassák fel a saját készletükben a megfelelőt.	Szükséges eszköz: a készletek.
25 perc	Játék párokban	Párokat alakítanak a diákok pl. ülésrend szerint és játszanak. Legalább két kört mindenkinek engedünk végig játszani. Játék közben körbejárok, figyelem a játékot, lehet kérdezni a szabályokról, ha valami nem világos.	
15 perc	Logikai feladatok	Önállóan gondolkozva megoldják a kapott fejtörőket, ami a játék szabályait segít elmélyíteni, a játék logikáját segít felvenni, segít kérdéseket megfogalmazni. Ha készen vannak, akkor ezeket a feladatokat leellenőrizzük. Batkát lehet adni a jó megoldásokért, feladatelmondásokért, legtöbb jó válaszért.	Szükséges eszköz: a színesben kinyomtatott feladatlapok. Lásd a foglakozástervek után.
10 perc	Néhány kérdés bemutatása, az így keletkezett feladatok megoldása	1. a) Lehet-e olyan, hogy egy sorban lévő 4 bábu esetén nincs olyan tulajdonság, ami mindegyikben közös? **Megoldás**: igen, például egyik bábu + az, ami minden tulajdonságában különbözik b) Mit jelentene, ha nem lehetne ilyen?	

		Megoldás: bárhogyan is lerakva a 4. bábut egy sorba, az illető biztosan nyer. 2. Kivágtam 6 db nagy piros kört. Hány készletre elég? (**Megoldás**: 3) Hányat kell kilyukasztanom belőle, hogy ezekbe a készletekbe be is kerülhessenek? (**Megoldás**: 3) 3. Megváltoztatjuk a tulajdonságok számát és a tábla méretét. Minden tulajdonság továbbra is 2 féle lehet. Milyen táblaméretekhez van megfelelő bábu szám? Milyen bábuszámokhoz van megfelelő táblaméret? **Megoldás**: Azokhoz a bábuszámokhoz van megfelelő táblaméret, amikor a tulajdonságok száma páros és azokhoz a négyzetekhez van megfelelő bábuszám, ahol az oldal kettőhatvány. Kell: $2^k = n^2$ ahol $k, n \epsilon \mathbb{N}$ k a tulajdonságok száma, n pedig a négyzet oldala. $\Rightarrow k$ páros, mert egy négyzetszám prímtényezős felbontásában minden tényező kitevője páros és n pedig kettőhatvány.	A 2. feladatnál segítség: **S1**: Milyen bábuszámot eredményez, ha 3, 5 vagy 6 tulajdonság van? **S2**: megmutatni néhány példán, hogy mit jelent az, hogy van megfelelő táblaméret és megfelelő bábuszám. Például: 3 tulajdonság esetén: 8 bábu van, de nincs olyan négyzet alakú tábla, amin 8 mező van. **S3**: Lehet még segíteni azzal is, ha táblázatot íratunk fel a diákokkal, amiben a lehetséges táblaméretek és bábuszámok

			szerepelnek, megmondjuk, hogy figyeljék meg, hogy milyen számok fordulnak elő mindkét helyen. Érdemes egymás után feladni a két kérdést, ha valaki az egyiket megválaszolja, utána a másikat.
15 perc	A diákok kérdéseinek megfogalmazása	A kérdéseket felírjuk a táblára, közben, ha elakadnak, lehet játszani. „Jó” kérdés rögtön batkát ér.	

2. Foglalkozás

Időkeret	Az óra menete	Részletek	„Módszer”
5 perc	Kérdésírás említése	Egész órán lehet kérdéseket írni a táblára. Készletek kiosztása.	Szükséges eszköz: készletek.
10 perc	Nyerő állás mentes kirakás készítése	1. Pakolják fel az összes bábut a táblára úgy, hogy ne legyen nyerő állás. Nem kell a szabályos játékot követni, elég csak felpakolni a bábukat. 2. Pontosan 1 nyerő állás legyen. 3. Legfeljebb hány nyerő állás lehet? **Megoldás**: 10 Döntetlen kérdése: Megbeszéljük, hogy azzal, hogy kiraktunk döntetlen állást még nem bizonyítottuk be, hogy ha a játékosok a lehető legjobban játszanak lehet döntetlen az állás, de azt viszont megmutattuk, hogy kirakható döntetlen állás.	Párokban dolgoznak, a párok egymást ellenőrzik. Batkát kapnak a jó megoldásra.
10 perc	Quarto kódolása	Milyen ötletük van a Quarto számokkal való kódolására? Például: számozzuk meg 1-16-ig, vagy kettes számrendszer: minden tulajdonság egy helyiértéknek felel meg, rögzítjük, hogy a 0 és az 1 melyik értéknek felel meg.	A kettes számrendszerről már hallhattak korábban, de érdemes kicsit felelevenïteni, átbeszélni, hogy mi mit jelent.
40 perc	Konstrukciókeresős feladatok	1. Rakd sorba a sötét négyzeteket úgy, hogy a szomszédosok csak egy tulajdonságban térjenek el! 2. Tudsz kört is csinálni belőle? 3. Tudsz ilyet az összes négyzet felhasználásával? 4. És az összes bábu felhasználásával? 5. Válassz ki négy olyan bábut, amivel nem lehet ezt megtenni! 6. Lehet-e úgy kört csinálni 3 bábuból, hogy a szomszédosok egy tulajdonságban térjenek el? 7. Lehet-e 5 bábuból kört csinálni úgy, hogy a szomszédosok egy tulajdonságban térjenek el?	A feladatokat elmagyarázom és rögzítjük a táblán és a füzetben. Extra feladat: 1. Hányféleképpen tudjuk sorba

		8. Lehet-e ilyet bármilyen páratlan számú bábuval tenni? **Megoldások**: Több jó megoldás is van a feladatokra, egy-egy példát mutatok be. A bábuk kódolását az 1. ábra szerint végzem. 1. 1010, 1110, 1111, 1011 2. az első példa körbe is zárható 3. 1010, 1110, 1111, 1011, 0011, 0111, 0110, 0010 (ez körbezárható is) 4. 0000, 0100, 0101, 0001, 1001, 1000, 1100, 1101, 1111, 1011, 1010, 1110, 0110, 0111, 0011, 0010 (ez körbe is zárható) 5. például: 0000, 1111, 1110, 1101 a szomszédos bábuk között 1 számjegy térhet el, de a 0000-tól mindegyik három számjegyben is eltér. 6. Nem lehet, mert az 1. bábutól a 2. egy számjegyben tér el, a 2. a 3.-tól szintén egyben, emiatt az 1. és a 3. vagy 0-ban, de ez azt jelenti, hogy ugyanazok és mindegyikből csak egy van, vagy pedig kettőben és ez sem jó. 7. Nem lehet, az előzőhöz hasonlóan meg lehet mutatni, hogy az 1. és 5. között csak páros sok számjegyben lehet eltérés. 8. Nem lehet, mert csak páros sok számjegyben térhet el az első és az utolsó számjegy.	rendezni a négyzeteket? **Megoldás:** 8! 2. Hányféleképpen tudjuk körbe rendezni a négyzeteket? **Megoldás**: 7!
15 perc	Párcsere és szabad játék	Mindenki kap egy bábut, meg kell keresniük azt, ami minden tulajdonságában különbözik a sajátjuktól. Az így keletkezett párjukkal játszhatnak egyet.	Páratlan sok diák esetén mi is beszállunk, vagy valaki két bábut is kap, így két párt is megkeres.
10 perc	Játékverziók	Próbálják ki azt, amikor a 2x2-es négyzetek is számítanak. Közben ilyenen verziókon is törhetik a fejüket.	

3. Foglalkozás

Időkeret	Az óra menete	Részletek	„Módszer”
5 perc	A foglalkozás elkezdése	A diákok által összeszedett játékvariációk összegyűjtése, összegzése, hogy mivel foglalkoztunk már és még mivel nem.	
5 perc	2x2-es tábla	2x2-es táblán játszunk 2 tulajdonság van, mindenki a másiktól kapja a bábut. A kezdő, vagy a második játékos szeretnénk lenni? (a kezdő, aki először rak bábut a táblára, ezt előtte a második játékos választja ki) **Megoldás**: A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája: ha „ügyesen” csinálja a lépéseit, akkor nyerhet. Azt a bábut kell a második játékosnak adnia, amely az általa lerakott bábutól mindkét tulajdonságban eltér. Ha mindenki magának veheti el a bábut, akkor melyik játékosnak van nyerő stratégiája? **Megoldás**: A másodiknak.	Próbálják ki a játékot, vagy a Quarto készletek segítségével, vagy a kódolás segítségével.
10 perc	Játékmenetek száma	Hányféle kirakása lehetséges a táblának, amikor mind a 4 bábu rajta van? (Megkülönböztetjük a mezőket és figyeljük a játékmenetet, nem hagyjuk abba, ha valaki győz.) **Megoldás**: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$ Ha csak a táblára nézünk rá a végén, nem számít, hogy milyen sorrendben kerültek fel a bábuk, csak a végeredmény? **Megoldás**: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$	
35 perc	3x3-as tábla	1. Hogyan lehetne 3x3-as táblán játszani? Hány tulajdonság kellene és mindegyik hány féle értéket vegyen fel? **Megoldás**: 2 tulajdonság legyen és ezek 3 féle értéket vehessenek fel. Kódolással: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22	

		Próbálják ki a játékot úgy, hogy maguknak dönthetik el, hogy mit raknak le a táblára, nem pedig a másik játékos adja nekik, játsszanak így néhány kört, jegyezzék fel, hogy melyik játékos nyerte a játékot (kezdő vagy második) Nyerő stratégia keresése. Kinek lehet, mi lehet az? **Megoldás**: A kezdő játkosnak van nyerő stratégiája. Tegyen középre egy bábut. Ezután, ha tud nyerni, akkor lépje azt, ha nem akkor pedig tükrözze a középső mezőre a második játékos lépését. Legyen a kezdő játékos első lépése, hogy a 00 bábut középre teszi. A második játékos, ha olyan bábut tesz a táblára, amelynek valamelyik jegye 0, akkor a kezdő körében veszít. Ha olyat vesz el, amelynek egyik jegye sem 0, akkor kezdő azt bábut tegye fel, amelynek első jegye különbözik, de nem nulla, a második jegye pedig megegyezik a második játékos bábujával. Két ilyen körben elfogynak a nullát nem tartalmazó bábuk és másodiknak kell leraknia az első olyat, amiben szerepel nulla. Ekkor kezdő tud nyerni, ha ezt is tükrözi a középső mezőre és azt a bábut választja, amiben ugyanazon a helyen nulla szerepel, mint a második bábujában.	
35 perc	Játék a kockán	Készítsenek kockákat gyurma és fogpiszkáló segítségével a diákok. A játékot nyolc bábuval játsszák, mindegyiknek 3 féle tulajdonsága van, amelyek mind kétféle értéket vehetnek fel. Felhasználhatóak a Quarto bábuk például úgy, hogy csak a kékekkel játszunk. Bábukat elhelyezni a kocka csúcsaiba lehet. Mindenki maga választhatja ki, hogy melyik még fel nem rakott lapot teszi fel a következő körben. Az a játékos nyer, aki a kocka egyik lapjára teszi a negyedik bábut, hogy mind a négy bábunak van közös tulajdonsága (ebbe nem számít bele a Quarto lapok 4. tulajdonsága). Próbálják ki a játékot jegyezzék fel, hogy a kezdő, vagy a második játékos nyert-e a körben. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája?	Szükséges eszközök: gyurma és fogpiszkáló.

		Megoldás: a második játékosnak van nyerő stratégiája. A második játékos első lépése: az első játékos első lépése után éppen az átellenes csúcsba a teljesen különböző bábut tegye, majd ezt ismételjék meg még egyszer. Ezután az első játékos bármit lép, a második nyerni tud.	

4. foglalkozás

Időkeret	Az óra menete	Részletek	„Módszer”
5 perc	Szabálymagyarázás	A Checkpoint Charlie szabályának ismertetése. Feladat: 5 tulajdonság, mindegyik kétféle lehet, minden lehetséges macskából egy van. Hány macska van a készletben? **Megoldás**: 32	Szükséges eszköz: Checkpoint Charlie társasjáték.
30 perc	Játék	4-5 fős csoportokban játszanak. Közben körbejárok, segítek, ellenőrzöm, hogy értik-e a játékot.	
20 perc	Feladatok megoldása	Feladatokat kapnak feladatsoron, önállóan/párokban gondolkoznak, a végén megbeszéljük a megoldásokat 1. Legkevesebb hány lap felfordítása után fordulhat elő, hogy mindenki biztosan tudja, milyen tulajdonságot figyel a játékos? **Megoldás**: 2 2. Maximum hány olyan lapot fordíthat fel egy nagyon szerencsés játékos, hogy a többiek még ne tudják a tulajdonságát? **Megoldás**: 8 3. Hány húzásig fordulhat elő olyan, hogy valakinek egy macskája sincs lent, azaz egyik felhúzott lapra sem teljesül a tulajdonsága? **Megoldás**: 16 4. Készítettem egy olyan kártyapaklit, amiben 25 db kártya van. Van néhány tulajdonság és mindegyik ugyanannyi féle értéket vehet fel. Hány tulajdonsága van a kártyáimnak? **Megoldás**: 2 5. Készítettem egy kártyapaklit, amiben 16 kártya van. Hány tulajdonsága lehet a kártyáimnak? **Megoldás**: 4 vagy 2	Extra feladatok: 1. Hányféleképpen tudjuk úgy sorbarendezni a macskákat, hogy az egymás mellettiek különböző színűek legyenek? **Megoldás**: Kezdjük sárga macskával. Ekkor minden páratlan sorszámú helyen sárga macska van, ami 16! féleképpen lehet. A páros sorszámú helyeken szürke macska szerepel,

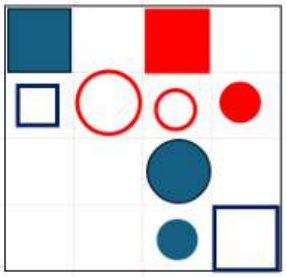
			ami szintén 16! féleképpen lehet. Ez $16! \cdot 16!$ lehetőség. De szürke macskával is kezdhetünk, így összesen $2 \cdot 16! \cdot 16!$ sorrend van.
35 perc	Barkochba	1. Gondoltam egy macskára. Tegyenek fel kérdéseket, amikre csak igen / nem válaszokkal válaszolok. Sikerül kitalálni? Játszák el párokban is. Hány kérdéssel sikerült kitalálni. Feljegyezzük a válaszokat. 2. a) Mennyi a legkevesebb kérdés, amivel biztosan ki lehet találni? b) És a Quarto-t? **Megoldás**: a) 5 kérdéssel biztosan ki lehet. Ez elég: minden kérdéssel kiderítjük az egyik tulajdonságot. Szükséges is: Minden kérdéssel két halmazra bontjuk a macskákat, az egyik halmazban lévőkre igen a válasz, a másikban lévőkre nem. Ördög módszert használunk: nem döntjük el előre, hogy melyik macskára gondolunk, de mindig úgy válaszolunk, hogy legyen még macska, amire gondolhattunk volna kezdetben is. Ilyenkor mindig legfeljebb megfelezni tudjuk a még szóban forgó macskákat, ezért 32 macska esetén 5 kérdésre mindenképpen szükség van. b) 4 kérdésre van szükség. 3. Gondoltam egy számra 1-100 között. Ezt hány kérdéssel lehet kitalálni? **Megoldás**: 7 kérdésre van szükség. 4. Gondoltam egy diákra a csoportból. Itt hány kérdés szükséges?	

		Megoldás: $\lceil \log_2(\text{diákok száma}) \rceil$ 5. Előre leírt kérdések esetén mennyire van szükség? **Megoldás**: Ugyanannyi kérdés elég akkor is, kettes számrendszerben kódoljuk a válaszokat és a számjegyekre kérdezünk rá. 6. 10 kérdéssel legfeljebb hány elemből tudom biztosan kitalálni a gondolt dolgot? **Megoldás**: Legfeljebb 2^{10}= 1024 elemből. 7. Mi a helyzet, ha a Quarto bábuk közül gondolok egyre és az első 4 kérdés közül egyszer hazudok? Akkor hány kérdésre van szükség? **Megoldás**: ekkor 6 kérdésre van szükség, két kérdéssel ki lehet deríteni, hogy a 4 első kérdésből melyik volt a hamis, kevesebb kérdés nem elég.	

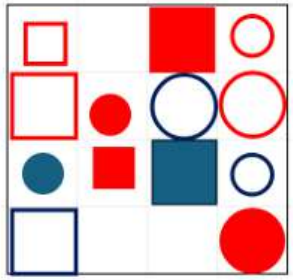
A feladatlap:

A következő feladványokban karikázd be a nyerő állást!

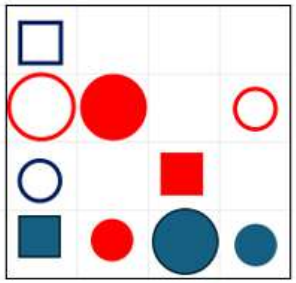
1.



2.

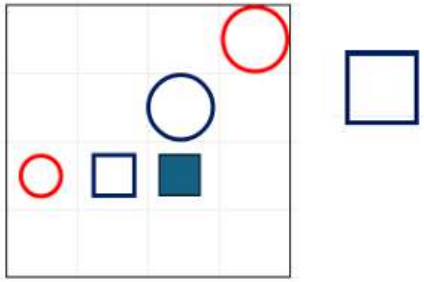


3.

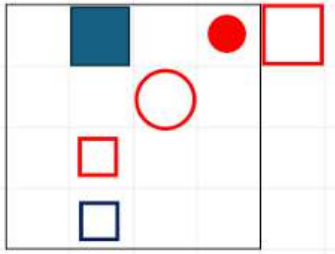


A következő feladványokban keresd meg, hogy hova teheted a kiválasztott bábut, hogy nyerj! Ahol több lehetőség is van, keresd meg az összeset!

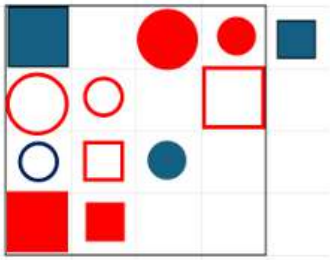
4.



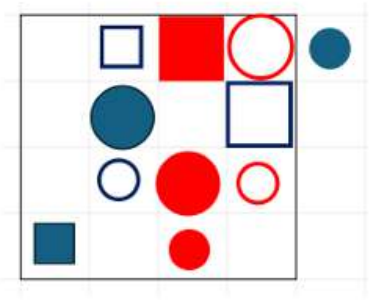
5.



6.

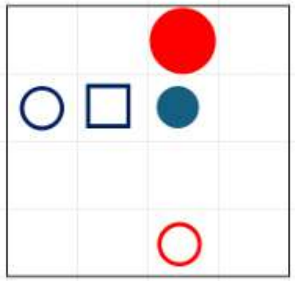


7.

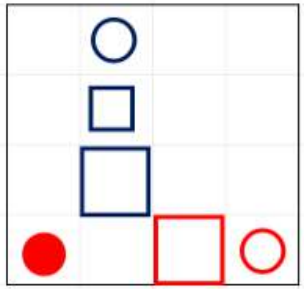


A következő feladványokban találd ki, hogy melyik bábut adhatod, hogy ne veszíts! Ahol több lehetőség is van, keresd meg az összeset!

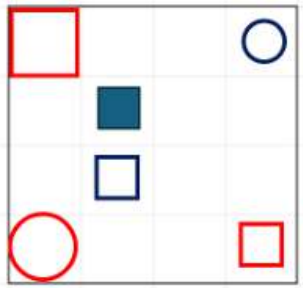
8.



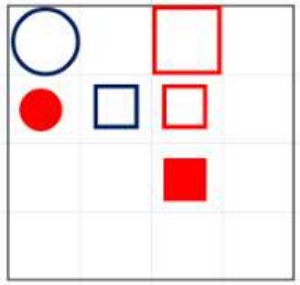
9.



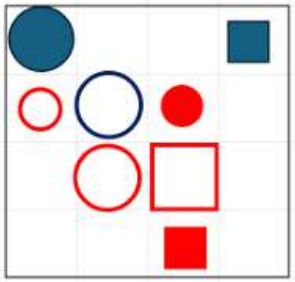
10.



11.



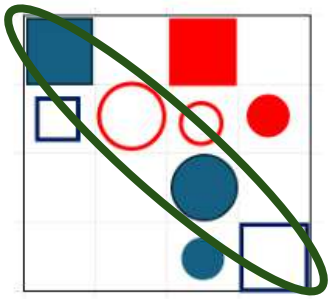
12.



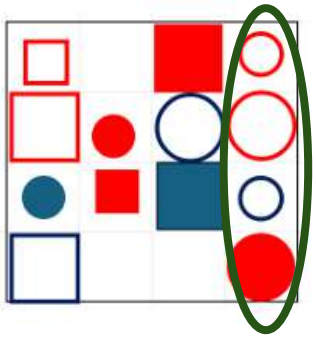
A megoldások:

A következő feladványokban karikázd be a nyerő állást!

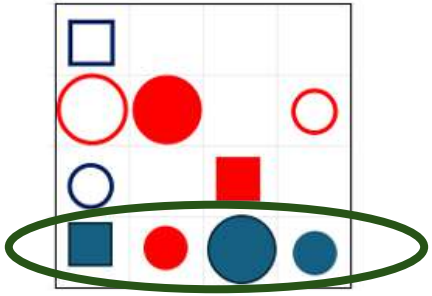
1.



2.

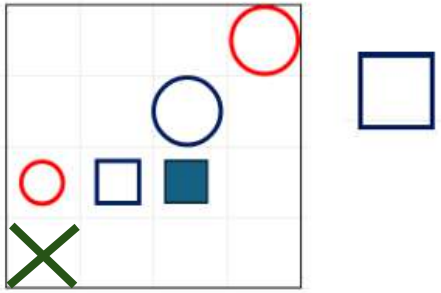


3.

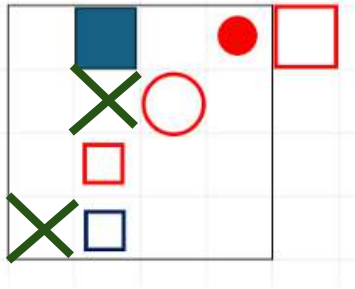


A következő feladványokban keresd meg, hogy hova teheted a kiválasztott bábut, hogy nyerj! Ahol több lehetőség is van, keresd meg az összeset!

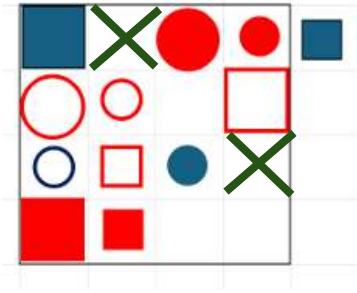
4.



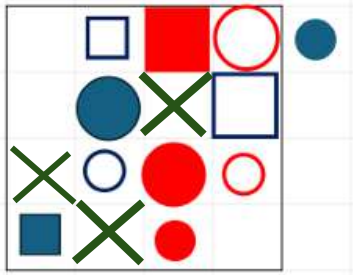
5.



6.

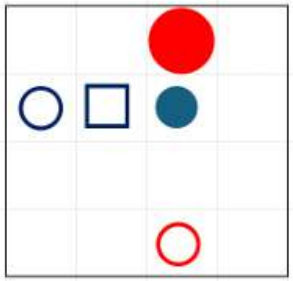


7.



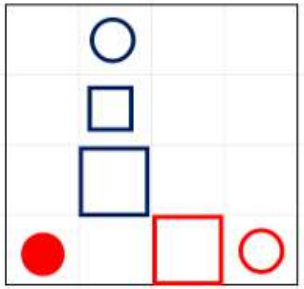
A következő feladványokban találd ki, hogy melyik bábut adhatod, hogy ne veszíts! Ahol több lehetőség is van, keresd meg az összeset!

8.



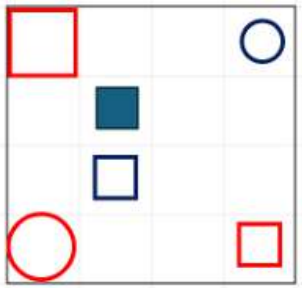
Megoldás:

9.

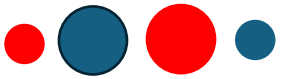


Megoldás: nincs bábu, amit adni lehetne, mert sem a piros, sem a kék nem jó.

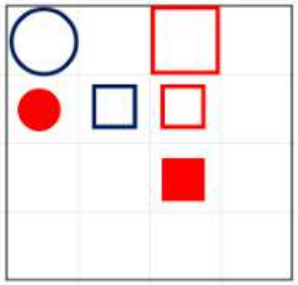
10.



Megoldás:

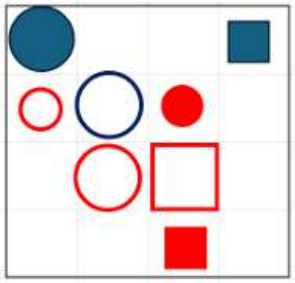


11.



Megoldás:

12.



Megoldás:

4.6. Reflexió a foglalkozásokról

A Medve Matektáborokról:

A Medve Matektáborokon jellemzően olyan diákok vesznek részt, akik motiváltak, szeretik a matematikát, de nem feltétlenül a legjobbak a korosztályukban, nem szükséges, hogy versenyeken vegyenek részt. A diákok különböző iskolákból érkeznek, így egy csoporton belül különböző előismeretekkel rendelkező tanulók lehetnek jelen. A tábor során két tanáruk van, akik mindketten négy darab 90 perces foglalkozást tartanak délelőttönként. A foglalkozások célja, hogy megszerettessük a matekot, vagy megerősítsük a matematika szeretetét a diákokban, gondolkozzanak, és közben barátkozzanak, új embereket ismerhessenek meg. Ezen célokból fakad, hogy a foglalkozások mindenkinek szólnak, a legügyesebb, versenyző gyerekektől egészen azokig a gyerekekig, akik sokkal inkább barátaik miatt érkeznek a táborba, mintsem a matematika miatt. A táborok motivációs eszköze a batka. A táborozók batkát kapnak a foglalkozásokon és a többi programon való aktív részvételre. A batkát a tábor végén ajándékokra válthatják a batkaboltból, vagy akik az izgalmakat kedvelik, licitbe szállhatnak az árverésen.

A csoport adatai

2024-ben a 3. sástói turnusban tartottam meg ezt a foglalkozástervet július 13. és július 19. között. Az M csoportot tanítottam, akik a tábor egyetlen nyolcadikos csoportja voltak. 13 főből állt a csoport, akik közül 8 lány és 5 fiú volt. A gyerekek sok különböző településről érkeztek, voltak közöttük, akik osztálytársak voltak és olyanok is, akik korábbi táborokból már ismerték egymást. A települések, ahonnan a gyerekek érkeztek: Balatonfüred, Budapest, Békéscsaba, Gyula, Helvécia, Piliscsaba, Sárospatak és Szigetszentmiklós. A csoport egy nagyon aktív csoport volt, sokat jelentkeztek, ügyesen dolgoztak. Akadtak azonban fegyelmezési gondjaim a foglalkozások során. Az egyik fiú gyakran kivonta magát a foglalkozásokból, volt, hogy társait is zavarta a munkában, vele gyakran külön kellett foglalkoznom, külön feladatokat, tevékenységeket kapott.

A foglalkozások

A foglalkozások szorosan követték a terveket, azoktól nagyobb mértékben nem tértünk el. A bábuk számának kérdésére sokan kapásból tudtak válaszolni a szorzási szabály ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$) használatával, azonban nyitottak voltak más megoldási módokra és hamar megértették az ágrajzos felírást is. Ez nem általuk mondott megoldás volt, de ez a módszer segítette a szorzási szabály felelevenítését azok számára, akiknek nem sikerült kapásból

megoldaniuk a feladatot. Az, hogy batkát kaphattak a kérdésekért nagyon motiváló volt számukra, akik kevésbé voltak gyorsak vagy ügyesek a foglalkozás elején, ők is többször próbáltak kérdést megfogalmazni, nem idegenkedtek ettől. A kérdések megfogalmazása közben a gyerekek játszhattak is, ez elősegítette szerintem a kérdések felvetését. A következő kérdések születtek (zárójelben a kérdést feltevő diák keresztnevének első betűje szerepel, a kérdések feltevőinek nevét a táblára is felírtuk):

- Lehet-e a játék kimenete döntetlen? (Á.)
- Mi a magyarázata annak, hogy lehet döntetlen? (E.)
- Hogy működne a játék akkor, ha egy-egy tulajdonság nem csak 2 féle lehetne? (L.)
- Lehetne játszani olyan téglalap alakú táblán, ami nem négyzet? (T.)
- Hogy működne a játék, ha 3D-s táblán játszanánk? (B.)

Megfigyelhető, hogy vannak kérdések, amik az eredeti Quarto játékhoz kapcsolódnak és vannak olyan kérdések, amik ettől elrugaszkodva új játékverziók lehetőségeit vetik fel. Az új játéklehetőségek kitalálását külön kiemeltem nekik, erre sok más ötlet is érkezett. Voltak, akik egészen más jellegű játékok játszására használták volna a készletet, például építkezésre.

A feladatlap megoldása jól és gyorsan ment a csoportban. A leggyakoribb hiba abból származott, hogy olyan bábukat is felsoroltak a 3. típusú feladatban, amelyek már a táblán voltak. A játék során ilyen hibát nehéz elkövetni, mert a bábuk fizikailag is rendelkezésükre állnak, viszont a papíron ez könnyen elkerülte a figyelmüket. Ezt a feladatsort kinyomtatva minden diák megkapta. A későbbiekben hasonló foglalkozás tartásához inkább laminálva osztanám ki a résztvevőknek, táblafilccel dolgozhatnának rajta, utána pedig le lehetne törölni és egy másik csoportban is lehetne használni.

A 2. foglalkozás konstrukciókeresős feladatait nagyon ügyesen és gyorsan oldották meg a diákok. Párokban, kisebb csoportokban dolgozva mindenki eljutott a megfelelő konstrukciókig, élvezték ezeket a feladatokat, itt nem volt gond a fegyelmezéssel. A kódolás során volt, aki rögtön a kettes számrendszert vetette fel ötletként, így a többi általam gondolt lehetőség már kevésbé volt izgalmas, mert ez nagyon jól működő kódolásnak bizonyult. A csoportban volt 2 lány, akik már jobban ismerhettek a foglalkozások során előkerülő gondolatokból néhányat, mert ezt is ők mondták, illetve a barkochbában is látszódott, hogy ismerik, találkoztak már vele korábban.

A párválasztós játék tetszett nekik, azonban a párcsere, a megszokott asztalok felbomlása sokkal kevésbé. A játék és a párkeresés során én is beszálltam a gyerekek páratlan létszáma

miatt, de arra is volt példa ennek kiküszöböléseként, hogy valakik ketten játszottak egy ember ellen, vagy valaki szimultán két táblán is játszott két különböző emberrel egyszerre.

A foglalkozást egy másik táborban is megtartottam a nyáron a 2. pálkövei turnusban augusztus 5. és 11. között. Ekkor egy hetedikes diákokból álló, többségében jó iskolákból érkező, Medve Szabadtéri Csapatversenyen döntős tanulókat felsorakoztató csoport tanára voltam. Az L csoportot 11 fiú alkotta, akik iskolái között szerepelt a miskolci Földes Ferenc Gimnázium, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, az ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium, a budapesti Eötvös József Gimnázium, a Németh László Gimnázium, és érkeztek diákok Győrből is. Az ő csoportjukban három foglalkozást tartottam, így a Sástón kipróbált tematikát módosítva tartottam meg. Náluk szintén a Quarto-val kezdtünk. A konstrukciókeresős feladatokat tartalmazó foglalkozást hagytam ki, így a Quarto-val való ismerkedés után annak játékverzióin ötleteltünk, azokat próbálták ki és kerestek nyerő stratégiákat. Végül ebben a csoportban is a Checkpoint Charlie-val és a Barkochbával zártunk.

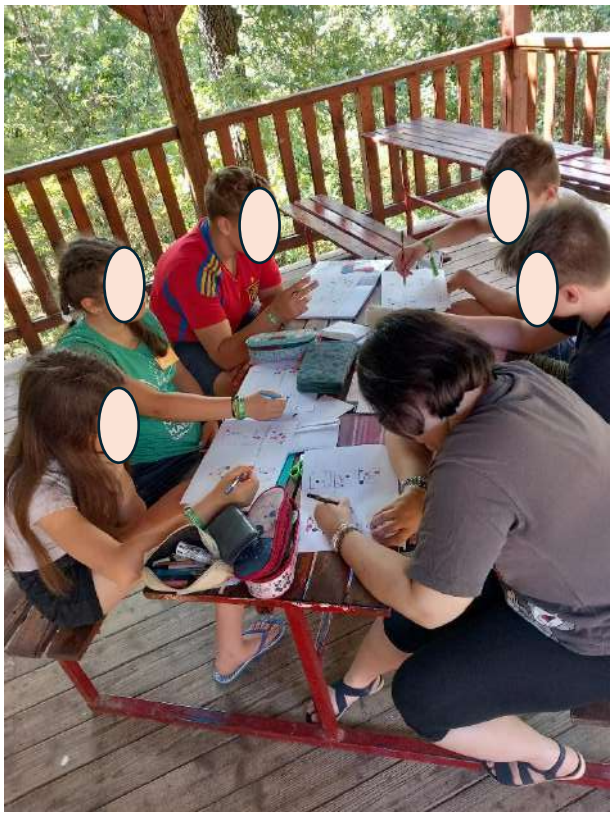
Ebben a csoportban a legnagyobb sikerű foglalkozás a nyerő stratégiás foglalkozás volt. Minden tanuló be tudott vonódni, nagyon élvezték, hogy a kitalált stratégiájukat kipróbálhatták ellenem, így emiatt én is állandóan játékban voltam. A csoportban néhány diáknak volt előismerete nyerő stratégiás játékok terén, az első foglalkozáson a kérdések megfogalmazásánál az egyik első kérdés is ehhez kapcsolódott:

- Van-e nyerő, nem vesztő taktika a játékban? (T.)

Ezen kívül a következőket kérdezték még a csoport tagjai:

- Lehet-e döntetlen? (A.)
- Ötlet játékverzióra: Győzelem feltétele: A sorban/oszlopban/átlóban lévő 4 bábunak 2 közös tulajdonsága legyen. (B.)

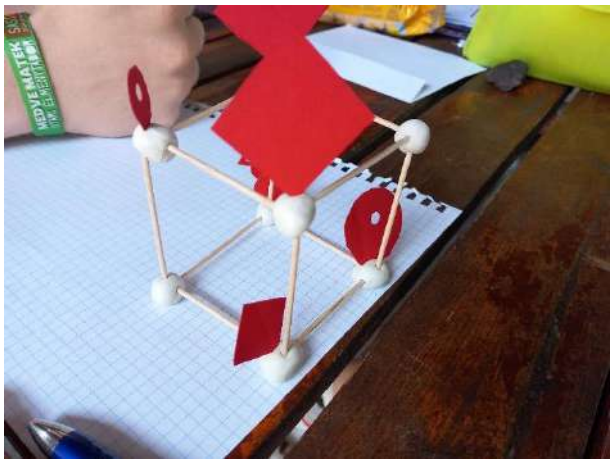
Ez a csoport kevésbé volt fogékony a kérdezésre, sokkal jobban motiválták őket a konkrét feladatok. Ez a különbség a két csoport között adódhatott abból, hogy volt egy év különbség a diákok között, de akár abból is fakadhatott, hogy egy foglalkozással rövidebb idő állt rendelkezésre, így én is kevésbé szorgalmaztam ezeknek a kitalálását.



8. *ábra*: A feladatlapok megoldása.

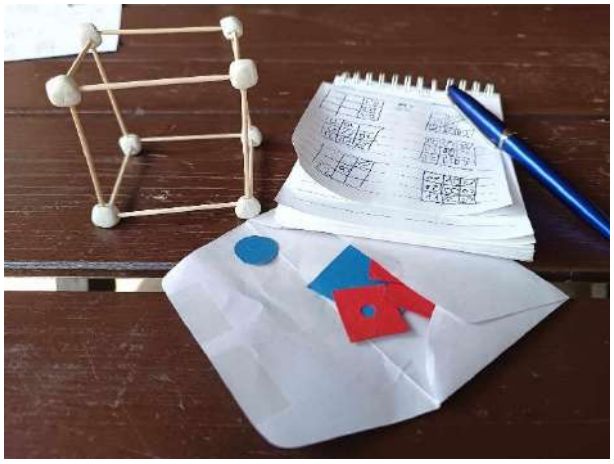
9. *ábra*: Játék a Quarto készletekkel.

10. *ábra*: Kockakészítés a 3D Quarto-hoz.

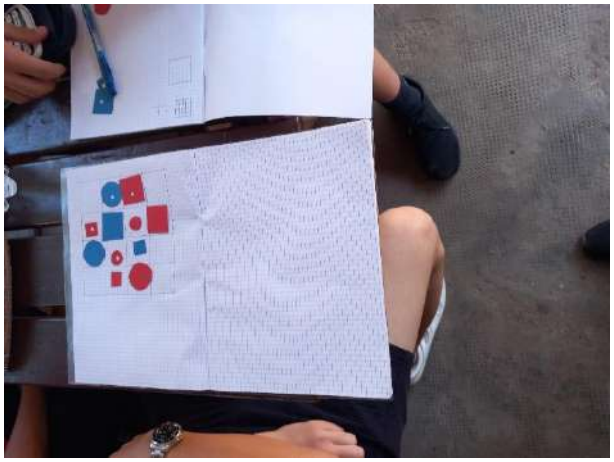


11. *ábra*: 3D Quarto.

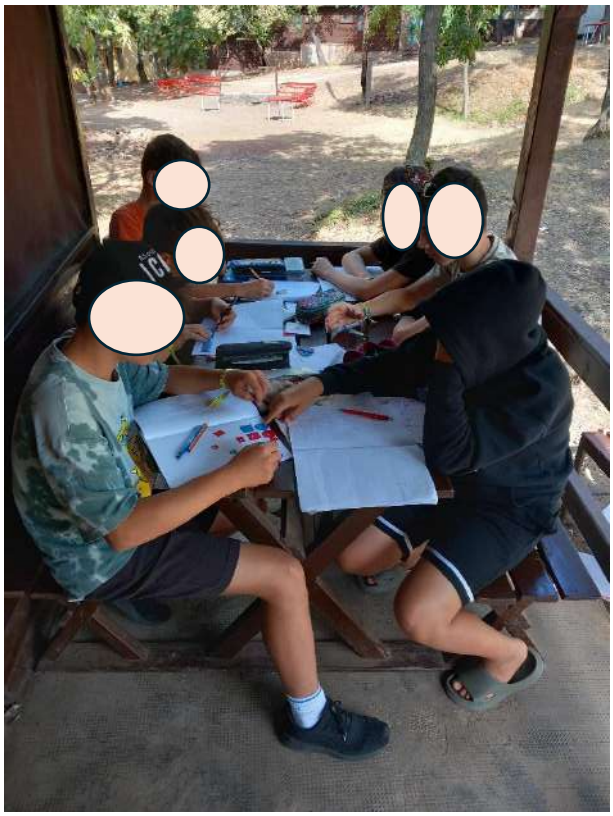
12. *ábra*: Játék a Checkpoint Charlie-val.



13. *ábra*: Quarto játékverziók Pálkövén.



14. *ábra*: Quarto játék Pálkövén.



15. *ábra*: Quarto Pálkövén.

4.7. Kérdőívek a foglalkozások előtt és után

Az első foglalkozás elején és az utolsó foglalkozás végén egy-egy névtelen kérdőív kitöltésére kértem a foglalkozáson résztvevő tanulókat, melyen keresztül a diákok attitűdjét szerettem volna felmérni a társasjátékok és a tanulás terén. Kíváncsi voltam arra, hogy mit gondoltak a játékok és a matektanulás kapcsolatáról a táborok elején és hogy változott-e ez a foglalkozások végére. Az volt a hipotézisem, hogy a foglalkozások pozitív irányba befolyásolhatják játékokon keresztül tanulás megítélését.

A kérdések a következőek voltak a foglalkozások előtt:

Húzd alá a következő kérdésekben a rád igaz válaszokat!

1. Szokott játék lenni az iskolai matekórákon?

Igen, gyakran előfordul. Igen, egy-két alkalommal volt már. Nem, még sohasem volt játék az iskolai matekórán.

Ha igen, milyen játék volt?

……

2. Szerinted lehetséges játékokon keresztül tanulni?

Igen. Nem.

3. Szeretsz társasjátékot játszani?

Igen. Nem.

A foglalkozás után:

1. Szerinted lehetséges játékokon keresztül tanulni?
   Igen Nem

2. Mennyire tartottad érdekesnek a foglalkozásokat? (1: nagyon unalmas volt, 4: nagyon érdekes volt)
   1 2 3 4

3. Mennyire volt nehéz követni a foglalkozásokat, mennyire voltak nehezek a feladatok?
   (1: nagyon könnyű volt, 4: nagyon nehéz volt)
   1 2 3 4

4. Mi tetszett a legjobban a foglalkozásokban?

5. Mi tetszett a legkevésbé a foglalkozásokban?

4.8. A kérdőívek kiértékelése

4.8.1. A sástói kérdőívek eredményei

A sástói táborban a következőképpen alakultak az 1. kérdés válaszai:

1. *diagram*: A foglalkozás előtti kérdőív első kérdésre adott válaszok megoszlása Sástón.

Pálkövével ellentétben Sástón a csoport több, mint fele azt válaszolta, hogy még soha nem volt játék az iskolai matekórán. Ez a különbség a két adatsor között adódhat abból, hogy Sástón inkább kisebb településekről érkeztek a diákok és elképzelhető, hogy ezeken a helyeken kevésbé elterjedt a játék használata tanítás során. Az is okozhatja a különbséget, hogy másként gondoltak a játékra a két csoport tagjai, a pálkövei csoportban a kérdőívekből az derült ki, hogy a játékos feladatokat is a játék kategóriába sorolták. Természetesen az is elképzelhető, hogy a különbség oka pusztán a véletlen merítésekből fakad.

A Sástón felsorolt játékok között szerepel az egyszámjáték, számkirály, fejszámolás, logikai játékok, Kahoot!, dobókocka használata, és társasjátékok.

A sástói csoport minden tagja azt válaszolta, hogy szeret társasjátékot játszani és két fő kivételével mindenki úgy gondolta a tábor előtt, hogy lehet társasjátékokon keresztül tanulni.

A foglalkozások utáni kérdőívet 12 fő töltötte ki, mert egy diák hamarabb hazament a táborból. A 12 kitöltő közül egy valaki válaszolta, hogy szerinte nem lehet játékokon keresztül tanulni, 11 pedig azt, hogy igen. A diákok válaszainak átlaga a foglalkozás érdekességéről 3,25 volt.

A foglalkozásokat ebben a csoportban a diákok nem érezték nehéznek, nehezen követhetőnek.

A foglalkozásokban a legjobban a következő dolgok tetszettek a tanulóknak:

- A játék. (2)
- A kettes számrendszer alkalmazása.
- Villámkérdések.
- A Quarto és a 3D Quarto.
- A játék és a kapcsolatteremtések a matematikával.
- Az, hogy nem unatkoztam.
- A Checkpoint Charlie.
- Jó hangulatú órák.
- A játékokon keresztül tanulás.
- A téma kicsivel könnyedebbnek tűnt a játékok miatt, ezért jobban fenntartotta a figyelmünket.
- Nyerő stratégiák.

A foglalkozásokon a következő dolgok tetszett a legkevésbé a résztvevőknek:

- A kombinatorika.
- Túl kevés játék. (3)
- A Checkpoint Charlie.
- Kevés feladat. (2)
- A rosszalkodó fiúk.

A válaszokból megállapítható, hogy ami az egyik tanulónak tetszett, kevesellte, azt valaki más éppen nem szerette, sokallta. Szerintem az elérhetetlen egy csoportban, hogy mindenkinek saját kedve szerint lehessenek a tevékenységek, főleg, ha egy tevékenységhez, mint például a játékhoz több diák részvétele szükséges. Azonban, ha változatos tevékenységeket kínálunk, jobb eséllyel találhat mindenki számára tetsző elfoglaltságot. A differenciálás is egy jó megoldás lehet, adhatunk könnyebb, nehezebb feladatokat az egyes diákoknak a saját szintjüknek és lelkesedésüknek megfelelően. A foglalkozást érdemes kiegészíteni néhány feladattal, amit igény esetén fel lehet adni a gyorsabb, a játékokat kevésbé kedvelő tanulóknak. Erre adok példát a 4.9. fejezetben.

4.8.2. A pálkövei kérdőívek eredményei

2. *diagram*: A foglalkozás előtti kérdőív első kérdésre adott válaszok megoszlása Pálkövén.

A diákok jelentős része már legalább néhány alkalommal találkozott játékkal vagy játékos feladattal az iskolai matekórák keretében. A felsorolt játékok a következők voltak: fejben számolás, dobbantásos egyetértés egy helyes válaszra vagy egy helyes egyenletre, bumm, versenyek, játékos feladatok, Quizlet, társasjáték, logikai játék. Ezeből megfigyelhető, hogy leginkább játékosabb feladatok vannak, továbbá, hogy a diákok a kevésbé hétköznapi módszereket is játékként foghatják fel. Én nem sorolnám játéknak a versenyt és a fejben számolást sem, de a diákok annak élték meg.

Mind a 11 diák a tábor elején azt állította, hogy szeret társasjátékot játszani és 10 diák úgy gondolta, hogy lehetséges játékokon keresztül tanulni.

A tábor végén a kérdőívet 10 diák töltötte ki, mert egy táborozó betegség miatt hamarabb elhagyta a tábort. Ekkor mind a 10 kitöltő azt nyilatkozta, hogy szerinte lehetséges játékokon keresztül tanulni. Persze előfordulhat, hogy pont az a diák ment haza korábban, aki kezdetben úgy gondolta, hogy nem lehet játékokon keresztül tanulni.

A foglalkozásokat a diákok érdekesnek találták, a kérdésnél a bekarikázott számok átlaga 3,5 volt.

A foglalkozások követhetősége és a feladatok nehézsége megjelölésénél a legtöbb tanuló a 2-3 választ jelölte meg. Azonban már a tábor során kiderült, hogy ez a kérdés nem elég pontos és hogy a foglalkozások követhetősége és a feladatok nehézsége nem feltétlenül ugyanazt a választ jelenti.

Arra a kérdésre, hogy mi tetszett a legjobban a foglalkozásokban, többféle válasz érkezett. A válaszokat 2 csoportba tudom osztani tartalmuk alapján. Az egyik csoport a játékokat emelte ki: A játék, a játékos feladatok. A másik csoport pedig az új ismeretszerzést emelte ki:

- Hogy nagyon sok olyan dolgot megtanultam, amit még nem tudtam.
- Érdekes volt, sok újat tanultam.
- Érdekesek voltak, a legtöbbet nem is tanultuk az iskolában.
- Tartalmassága és mindenkinek volt esélye részt venni.
- Sok új dolgot tanultam úgy, hogy közben jól éreztem magamat.
- Új megoldástípusok.

A foglalkozások ezen válaszok alapján elérték a céljukat. A diákok úgy tanulhattak új dolgokat és gondolkozhattak, hogy közben jól érezték magukat.

Ami a legkevésbé tetszett a foglalkozásokban:

- Korán voltak. (6 válasz)
- Néha túl gyors magyarázás.
- Számomra néhány dolog túl nehéz volt és nem teljesen értettem.
- Nem volt ilyen. (2 válasz)

A foglalkozások a táborban reggeli után, magyar idő (a táborban tábori időszámítás van, amely egy órával több, mint a magyar idő, hogy a táborozók egy órával „tovább” lehessenek ébren és „később” kelljen felkelniük) szerint 9:00-kor kezdődnek és kettő van egymás után 30 perc szünettel. Általában első foglalkozást tartottam és ekkor gyakori probléma volt, hogy néhány diákra várni kellett, nem értek oda a foglalkozás helyszínére pontosan. Ez a kezdés jóval későbbi a legtöbb iskola első órájának becsengetéséhez képest, de a nyári szünetben, vagy ilyen sok más program és izgalom mellett érthető számomra, hogy korai lehet ez a kezdés is a gyerekeknek.

Az órákon igyekeztem mindig lehetőséget biztosítani a kérdezésre, ha valaki valamit nem értett. A csoport jelentős része nagyon gyors és ügyes volt ezért gyorsan tudtunk haladni, ami viszont egy-két lassabb diáknak kényelmetlen tempó lehetett. Ezt a feladatmegoldásokkal, extra feladatokkal, esetleg még több extra feladat összegyűjtésével lehet kiküszöbölni a jövőben.

4.9. Néhány lehetőség a foglalkozások feladatainak bővítésére

A kérdőívek eredményeképpen a foglalkozásba érdemes lehet beépíteni még további extra feladatokat, amelyekkel nem kell minden diáknak találkoznia, segít a differenciálásban. Azoknak a tanulóknak érdemes odaadni, akik a játéktevékenységgel szemben előnyben részesítik a szokásosabb jellegű matekfeladatok megoldását. A következő két feladat erre a bővítésre ad példát.

1. Hatosztályos felvételi feladat 2022. január 27.

„Egy játék minden bábuja 4 tulajdonsággal rendelkezik. Magassága szerint egy bábu lehet alacsony vagy magas, színe szerint fehér vagy fekete, lyukassága szerint lyukas vagy teli, és alakja szerint henger vagy négyzetes oszlop alakú. A játék mindegyik lehetséges bábuból egyet tartalmaz.

a) Hány bábu van egy játékban? .....

b) Hány olyan bábu van a játékban, amelyik alacsony és henger alakú? .....

c) Hány olyan bábu van a játékban, amelyik a magas fekete, lyukas és henger alakú bábutól pontosan egy tulajdonságban tér el? .....

d) Hány olyan bábu van a játékban, amelyik a magas, fekete, lyukas és henger alakú bábutól legalább két tulajdonságban eltér? .....”

Ez a feladat a hetedikes, nyolcadikos korosztály számára már kisebb kihívást jelent, mint a hatodikosoknak, de oda lehet nekik adni az első foglalkozáson.

2. Arany Dániel Matematikaverseny 2020/21-es tanév Kezdők I-II. kategória 2. forduló

„A tic-tac-toe (vagy ix-ox) játékban két játékos felváltva tesz X, illetve O jelet egy 3 × 3-as táblára. Az nyer, akinek sikerül egy vonalban három azonos jelet elhelyeznie, vízszintes, függőleges vagy átlós irányban. Hány különböző olyan játékmenet létezik, amelyben X kezd, és a játszma döntetlennel végződik? (Két játékmenetet akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik lépésben máshova kerül jel a két játékban.)”

Ez egy nehezebb feladat, a harmadik foglalkozás elejéhez passzol a témájában.

5. Záró gondolatok

Szakdolgozatom három fő pillérre épült. Első pillérként vizsgáltam a játékok használatát az oktatásban. Összefoglaltam a környezetemben az évek során megismert jó gyakorlatokat és a szakirodalomban fellelhető tudást a témában. Ezen vizsgálatok, megfigyelések tanulságosak és izgalmasak voltak számomra, motiválóan hatottak rám a társasjátékok használatával kapcsolatban. Ennek a tevékenységnek köszönhetően nem csak játékokat ismertem meg, hanem iskolákat, matematikatanárokat és a matematikatanítás új szempontjait is, ami a pályán való elinduláshoz egy jó kezdőlöketet ad.

Második pillérként magam is kipróbáltam egy foglalkozásterv összeállítását és a gyakorlatban is megfigyeltem annak működőképességét. A foglalkozástervben törekedtem arra, hogy lehessen differenciálni, hiszen a foglalkozásokat meg is tartottam és én is szembesültem vele, hogy mennyire különböző szinteken lehetnek a diákok. A foglalkozásokat 2024 nyarán 24 diákkal próbáltam ki. A diákok visszajelzései és saját megítélésem szerint is a foglalkozások sikeresek voltak, a diákok élvezték az órákat és épültek általuk. Tökéletes terv nem létezik, a valóságba átültetve és a gyakorlatban kipróbálva mindig érkeznek visszajelzések, amelyek alapján tovább lehet fejleszteni a foglalkozásokat. Én is igyekeztem a visszajelzéseket beépíteni és ezáltal még jobb tervet készíteni.

A harmadik pillér a matematika volt. Nagyon szeretem a matematikát. A matematika tanítása során legfőbb célkitűzésem, hogy ezt a szeretetet átadjam tanítványaimnak, megmutassam a matematika és a gondolkodás szépségeit. A szakdolgozat lehetőséget biztosított számomra arra, hogy matematikai cikkeket és szakirodalmat dolgozhassak fel, alaposabban elmélyedhessek a matematika egy általam kevésbé ismert területében. Korábban ilyesmiben még nem szereztem tapasztalatot, de úgy érzem, hogy ezt megismerve még hitelesebben tudom majd a matematikát tanítani és esetleg kutatói pályán elindítani leendő diákjaimat.

6. Irodalomjegyzék

A komplex instrukciós program, https://komplexinstrukcio.hu/index.php?layout=edit&id=12

Ambrus, A. (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába.* Eötvös Kiadó.

Antal, Z. (2024.11.09.). Játék és matematika. Bemutatkozik egy heti egy órás tantárgy a hetedik vagy kilencedik évfolyamon, Varga Tamás Módszertani Napok https://docs.google.com/document/d/e/2PACX-1vT3Oz3Up2GP9-K8VqFIzBpharj_0FDBnt8UeEtyydlpQ5wT1TsCk6VMhpuI6xeWkg0PpfZ7FLyC93t3/pub

Arthur Holshouser and Harold Reiter, Quarto without the Twist, October 29, 2003

Cole, M., Cole, S., R., (2003). *Fejlődéslélektan*. Osiris Kiadó.

Dienes, Z. P. (2007). Some thoughts on the Dynamics of learning mathematics. In Srirman, B., *The montana mathematics enthusiast*, (pp. 1–118.), https://www.zoltandienes.com/wp-content/uploads/2018/08/ZPD_and_Dynamics_of_Math_Learning-Monograph2_2007.pdf (2025.02.10.)

dr. Wintsche, G., Paróczay, E., Tamás, B., (2023). *Matematika 8. tankönyv.* Oktatási hivatal. https://www.tankonyvkatalogus.hu/tankonyvek?nat=&title=&author[0]=1271

Dukán, A., F., Fired, K., Szabó, Cs., (2021). The time spent on board games pays off: links between board game playing and competency motivation. *Teaching Mathematics and Computer Science.19*(1). 119 –131. https://doi.org/10.5485/TMCS.2021.0523

Gavel, H. and Strimling, P., Nim with a Modular Muller Twist, Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 4 (2004)

Gémes Margit Rejtvények és matematikai feladatok a sakktáblán: https://margitgemes.web.elte.hu/Sakktabla_rejtvenyek_feladatok.pdf

Goossens, L. (2004). https://web.archive.org/web/20041012023358/http://ssel.vub.ac.be/Members/LucGoossens/quarto/quartotext.htm

Győri, M. (2017). Az értelmi és a nyelvikommunikációs fejlődés, a kognitív fejlődési zavarok és az intelligencia. In N. Kollár, K., & Szabó, É., *Pedagógusok pszichológiai kézikönyve 1.* (pp. 459–465). Osiris Kiadó.

Rowlett, P. (2022). https://chalkdustmagazine.com/features/quarto-in-higher-dimensions/

Játéktár a matematika szertárban http://radnoti-elte.edu.hu/matematika2/?q=node/22

K. Nagy, E. (2013). A hejőkeresztúri modell https://index.hu/video/2013/11/26/hejokereszturi_modell/

Kevin S. Brown. 414298141056 quarto draws suffice! http://www.mathpages.com/home/kmath352.htm, June 2005

Maár, T. (2009). A játék módszerének alkalmazása a tanítás során. *Iskolakultúra, 19*(1-2), 44–55.

Magyar, Zs. (2012). Tehetségfejlesztő szaktanácsadó szakirányú továbbképzés szakdolgozat Tehetségfejlesztés stratégiai társasjátékok segítségével

Maszler, I. (1966). *Játékpedagógia*. Comenius Bt.

Matthew Kerner and Dana Angulin, An Exploration of Gameplay in Quarto p.12.-30.

Misetáné Burján, A. (2014). Sakk és matematika. Játéktól a valóságig. *Gyermeknevelés, 2*(2), 37–44.

Nemzeti alaptanterv: A Kormány 5/2020- (I. 31) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI.4.) Korm. rendelet módosításáról. Kihirdetve. 2021. január 31.

Pető, I. (2020). Mit tanulhatunk a fejlődéselméletekből a matematika tanítása számára?. *OxIPO, 2*(2), 33–61. https://doi.org/10.35405/OXIPO.2020.2.33

Polgár, J. (2013). Sakkpalota sorozat

Polgár, L. (1989). *Nevelj zsenit!.* Interart Kiadó.

Pólya, Gy. (1977). *A gondolkodás iskolája*. Gondolat Kiadó.

Smith, F. and Stănică, P., Comply/Constrain Games or Games with a Muller Twist, Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 2 (2002)

Smullyan, R. (2022). *Sherlock Holmes sakkrejtélyei*. Typotex Kiadó.

Végh L., Király T., Pap J.a, (2024). *Játékelmélet jegyzet.*

7. Az MI használatáról szóló nyilatkozat

Alulírott Ajtai Boglárka nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	***Felhasznált eszköz***	***Felhasználás helye***	***Megjegyzés***
Szakszöveg fordítása	OpenAI ChatGPT (GPT-4)	2.4.1. fejezet 2.4.2. fejezet 2.5.1. fejezet 2.5.2. fejezet	A fordítás a megértést segítette, a szövegek általam megfogalmazva kerültek a dolgozatba.

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.

Szerencs, 2025.04.22.

Ajtai Boglárka