Szakdolgozat

Cselényi Luca

informatikatanár – matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2024

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Informatikai Kar

Szakdolgozat

A Modern Classroom Project a matematikaoktatásban

Témavezető:

Varga Eszter

mesteroktató

Készítette:

Cselényi Luca

informatikatanár – matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2024

Tartalomjegyzék

Bevezetés 5

A matematikai szorongás 7

A matematikai szorongás definíciója és vizsgálatának története 7

A matematikai szorongás definíció kifejtése, kapcsolata másféle szorongástípusokkal 8

A matematikai szorongás komponensei 9

A matematikai szorongás mérése 9

A matematikai szorongás okai 9

A tanár szerepe a matematikai szorongás kialakulásában, megoldások 10

A Modern Classroom Project 12

A Modern Classroom Project kidolgozásának kiváltó okai 12

Az MCP története 13

A Modern Classroom Project leírása 13

A tanár szerepe a Modern Classroom Project-ben 15

Kutatási eredmények 15

Párhuzam a Modern Classroom Project és a 2020-as Nemzeti alaptanterv között 18

A Modern Classroom Project a Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában 18

Modern Classroom Project és matematika 22

Tapasztalataim 22

Saját MCP óráim 23

Első óra 23

Második óra 25

Harmadik óra 26

Negyedik óra 27

Ötödik óra 28

Hatodik óra 28

Hetedik óra 29

Nyolcadik óra 30
Tanulságok 30
Az általam Modern Classroom Project módszerre tanított témakörök matematikája különböző oktatási szinteken 33
A középpontos hasonlóság matematikája a hatályos tantervekben, illetve egyetemi felépítésben 33
Általános iskola 34
Középiskola 36
Osztatlan tanárképzés 38
A hasonlóság és a háromszögek hasonlóságának matematikája a hatályos tantervekben, illetve egyetemi felépítésben 39
Általános iskola 39
Középiskola 43
Osztatlan tanárképzés 45
Összegzés 49
Irodalom 51

Bevezetés

A ***Modern Classroom Project (MCP)*** egy forradalmi pedagógiai módszer mely teret ad a differenciált oktatásnak, csökkentheti a szorongást, és talán legkiemelkedőbb vívmánya, hogy a diákoknak lehetőséget biztosít az önálló tanulási tempóban való haladásra. Ebben a felgyorsuló, és bizonytalan korban érdemes figyelmet szentelni az MCP módszernek, hiszen olyan eszközt ad a pedagógusok kezébe, melynek segítségével bár bizonyos feltételekkel, de az oktatás egy biztos pont legyen a gyerekek életében. Hálás vagyok, hogy szaktárgyi tanítási gyakorlatom során volt szerencsém megtapasztalni a módszer kihívásait.

Tanítási gyakorlatomat a 2023/24-es tanév tavaszi félévében végeztem a jóhírű Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában, Iványiné Harró Ágota tanárnőnél. Tőle hallottam először az MCP-ről, ő pedig egy angolos kollégájától értesült a módszerről, amit már 2 éve használ előszeretettel, de nem kizárólagosan, ügyelve a változatosságra. A módszert egy ingyenes online képzés[1] keretein belül lehet elsajátítani, melyet Ágota is elvégzett, és számos összetevőjét adaptálta tanítási gyakorlatába, bár valamelyest a körülményekhez és a gyerekekhez kellett igazítania. A diákok a tananyagot és a feladatokat az iskola által használt Learning Management System (LMS) rendszerben (Canvason) kapják meg, amit bármikor, bárhonnan elérhetnek. A feladatokat, melyeket 3 különböző szintre sorolnak be, és az elméleti anyagrészeket magyarázó interaktív, kérdésekkel tűzdelt videókat a diákok önállóan dolgozzák fel a saját tempójukban, egy előre kitűzött időtartam alatt. A továbbhaladáshoz teljesíteniük kell bizonyos kötelező egységeket, melyek lehetnek videók meghallgatása, feladatok megoldása, vagy akár feleletek, számonkérések. A tanteremben vannak fix funkciójú asztalok, hogy a diákok tudják, hogy hol kereshetik az új feladatokat, segédeszközöket, és hol kell leadniuk a megoldott feladatokat, vagy hol kell valamilyen számonkérést teljesíteniük. Nagyon szimpatikus volt továbbá, hogy minden óra egy „becsekkoló" kérdőívvel kezdődik, ami a diákok aktuális hangulatát és a tananyaghoz való hozzáállását méri fel.

Először nem tetszett az ötlet, hogy a tanár és diákjai között minimális valós idejű kapcsolat van, hiszen meggyőződésem, hogy a diákok tanuláshoz való hozzáállását és motivációját a tanár személyisége is befolyásolja. Szokatlan volt a (jórészt) csendes matek órákon hospitálni, hiszen először csak annyit láttam, hogy a gyerekek nyomkodják a telefonjukat, és percekkel becsöngetés után kezdenek csak írni vagy feladatokat megoldani. Ráadásul mivel mindenki a saját tempójában haladt, nem is ugyanazokkal a feladatokkal foglalkoztak, mint

[1] A képzésre jelentkezni az alábbi linken lehet: https://www.modernclassrooms.org/free-course.

társaik. Ágota felkészített a helyzetre, de mégis letaglózott, mikor az első néhány alkalommal találkoztam a módszerrel. Vezetőtanárom első benyomásom szöges ellentétéről számolt be. A módszer segítségével több gyereket ér el, hiszen a diákok saját tempójukban tanulnak, nem vesznek el, a tanárnak pedig sokkal nagyobb rálátása van arra, hogy mennyire értik a tanulók az adott anyagrészt, hogy hogyan haladnak, sőt, még több egyéni segítséget is tud nyújtani a diákok számára. Izgalmas volt óráról órára megtapasztalni, hogy hogyan épül fel egy témakör az MCP-ben, és lenyűgöző volt látni az akkor 8. osztályos gyerekek egyedülálló önállóságát és felelősségteljes tanuláshoz való hozzáállását.

Rövid időn belül választásra kényszerültem, és el kellett döntenem, hogy követem-e vezetőtanárom módszerét, vagy maradok az akkor még számomra nem megszokott, de hagyományos tanítási módszernél. Számtalan kérdés és az előrelátható rengeteg munka ellenére úgy döntöttem, belevágok, és MCP módszerrel adok bepillantást a 8. osztályosoknak a középpontos hasonlóság és néhány kapcsolódó témakör rejtelmeibe, Ágota pedig kész volt mindenben támogatni. Azóta is az egyik legjobb tanításhoz fűződő élményemként, és inspiráló tapasztalatként gondolok vissza a Radnótiban eltöltött időszakra.

Szakdolgozatomban a matematikai szorongásról, vizsgálatának történetéről, méréséről és lehetséges okairól írok, kitérve arra, hogy mit tehet egy pedagógus a matematikai szorongás csökkentésének érdekében. Ezt követően az MCP módszer kidolgozásának kiváltó okait, történetét és leírását fejtem ki, itt is kitérve a tanár szerepére, és kutatási eredményekre. A dolgozatban szerepel az is, hogy a Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában hogyan működik az MCP, milyen saját tapasztalatokat és élményeket gyűjtöttem én magam, illetve saját MCP foglalkozásaim egy részét részletesen is leírom, és kifejtem ezek matematikai hátterét.

A matematikai szorongás

Tapasztalataim alapján a matematikai szorongás mára hétköznapi problémává vált az oktatásban és a mindennapi életben, ezért fontos ismernünk a hátterét és igyekeznünk kell segítséget nyújtani diákjainknak a szorongás leküzdésében. Meggyőződésem, hogy az MCP csökkentheti a matematikai szorongást, és segíthet a tanulók számára stabil és biztonságos órai illetve tanulási környezet kialakításában. Szerettem volna erre bizonyítékot is találni.

A matematikai szorongás definíciója és vizsgálatának története

A ***matematikai szorongás*** története egészen 1937-re vezethető vissza. Ekkor fogalmazta meg először az ausztrál oktató, Schonell, hogy a számolási nehézség hátterében érzelmi tényezők is állhatnak. (Schonell, 1937, hiv. Dreger és Aiken,1957). Ezt követően kutatások sora erősítette azt a felvetést, hogy a matematikai nehézségek eredete nem feltétlenül a gyenge szellemi kondíció. Megszületett az önmagát definiáló fogalom, a „matematikai fóbia" (Gough, 1954), aztán pedig a matematikához való negatív viszonyulást jelentő „numerikus szorongás" kifejezés (Dreger és Aiken,1957). A 70-es években Richardson és Suinn megalkottak egy olyan definíciót a matematikai szorongásra, amelyre a mai napig gyakran hivatkoznak: „egyfajta nyomás és szorongás érzése, amely számokkal való foglalkozás és matematikai problémák megoldása során jelentkezik széleskörűen a hétköznapi életben és iskolai helyzetben egyaránt." (Richardson, Suinn, 1972. 551. old.) Azóta számos más definíció látott napvilágot:

- „a matematikai szorongás feszültség, nyugtalanság, illetve tanácstalanság, mentális probléma, félelem és rettegés érzése a számokkal való manipuláció és a matematikai problémamegoldás során" (Ashcraft és Faust, 1994; Nótin, Páskuné Kiss és Kurucz, 2012. 223. o.),
- „a matematikai szorongás a matematikai műveletek végzése közben jelentkező szorongó érzések és nyomás érzése" (Levine, 1995; Nótin, Páskuné Kiss és Kurucz, 2012. 223. o.),
- „a matematikai szorongás egyszerű számtanpéldákkal való találkozáskor jelentkező érzelmi és viselkedéses válasz" (Ashcraft, 2002; Nótin, Páskuné Kiss és Kurucz, 2012. 223. o.),

- „a matematikai szorongás egy passzív tanulási tapasztalat, élmény, vagyis a matematika tanulási folyamat érzelmi lenyomata” (Luo, Wang és Luo, 2009. 13. o.; Nótin, Páskuné Kiss és Kurucz, 2012. 223. o.).

A matematikai szorongás definíció kifejtése, kapcsolata másféle szorongástípusokkal

Meglátásom szerint tehát a matematikai szorongás bármilyen matematikával kapcsolatos helyzetben jelentkező kellemetlen, nyugtalanító érzés, mely hatással van az egyén matematika teljesítményére, sőt mi több, az érzelmi állapotára és a viselkedésére is. Tanulmányok szerint a matematikai szorongás gyenge matematika teljesítményt eredményez (Ashcraft, 2002), és nem pedig fordítva, de nem csupán erről van szó. A matematikai szorongástól szenvedőket érzelmi szinten terheli a nyomás, sőt, gyakran viselkedésükben is megnyilvánul a stressz (Ashcraft, 2002). Nézelődve és mozgolódva oldják meg a feladatokat, sietnek, hogy mielőbb túlessenek a kellemetlen kihíváson. Az sem kell, hogy iskolai, vagy teszthelyzetben találkozzanak matematikával, elég akár egy mindennapi bevásárlás, vagy mondjuk a sütés közben adódó számolási és átváltási teendők.

Ezek alapján a matematikai szorongás nem összekeverendő sem a tesztszorongással, sem a vonás- és állapotszorongással, önálló szorongástípus (Hembree, 1990). A ***tesztszorongás*** bármilyen teszthelyzetben átélt szorongás (pl. dolgozatok, meccsek), a ***vonásszorongás*** személyiség béli kérdés (pl. szorongás publikum előtt való megnyilvánulástól), az ***állapotszorongás*** pedig bizonyos helyzetekben, állapotokban átélt szorongás (pl. éjszakai autóvezetés). Az előbbi szorongástípusok és a matematikai szorongás között azonban kétségtelenül kapcsolat fedezhető fel (Bernáth, Krisztián, 2017), hiszen „a matematikai szorongás esetében azonos idegrendszeri területek aktiválódnak, mint az egyéb szorongásos helyzetekben” (Bernáth, Krisztián, 2017. 2. o.; Young, Wu és Menon, 2012).

Kutatások alapján a szorongás fokozhatja a teljesítményt (Wigfield és Meece, 1988), a matematikai szorongás épp ellenkezőleg, blokkolja a matematikai teljesítményt, főként a kevésbé mechanikus, összetett, szerteágazó és alapos előismeretek igénylő feladatok megoldása közben, amikor nagy szerepe van a munkamemóriának (Skemp, 1975). A korábbiakra hivatkozva a matematikai szorongás érzelmi teher, mely nem hagyja teljes mértékben koncentrálni az egyént, így elvonva energiáit a magas kogníciót igénylő feladatok megoldásától, ezáltal csökkentve a teljesítményt.

A matematikai szorongás komponensei

A matematikai szorongásnak számos komponense van, melyek együtt felelősek a teljesítményromlásért. Nem elhanyagolható az érintett személye, melyben a témával kapcsolatos kritikus pontok a matematikával kapcsolatos ***attitűd***, az ***énkép***, illetve az ***énhatékonyság-érzés*** (Nótin, Páskuné Kiss és Kurucz, 2012).

Az attitűd egyféle hozzáállást jelent, kézenfekvő tehát, hogy a negatív attitűddel rendelkezők kerülik a problémát, vagy gyorsan átesnek a megoldáson; a pozitív attitűdűek pedig örömmel szentelnek időt a megoldásra és megértésre, akár az elmélyedésre. Az énképről és az énhatékonyságról összefüggésben érdemes beszélni. Az énkép jelentése az önmagunkról alakított kép, az énhatékonyság-érzés pedig a saját magunkba vetett hit. Tanulmányok alapján „minél pozitívabb az egyén matematikai énképe, illetve minél magasabb a matematikai énhatékonyság érzése, annál alacsonyabb lesz a matematikai szorongás szintje." (Nótin, Páskuné Kiss és Kurucz, 2012. 229. o.)

A matematikai szorongás mérése

Manapság megannyi matematikai szorongást mérő teszttel megállapítható a szorongás mértéke, ezek egyike a MAS-UK, mellyel magam is találkoztam felsőfokú tanulmányaim során. Ez a teszt, egy korábbi 98 itemes teszt, az úgynevezett MARS (*Mathematics Anxienty Rating Scale*) teszt továbbfejlesztése, mely az első matematikai szorongást mérő teszt volt. A MAS-UK a MARS rövidített és kiegészített, illetve helyenként egyértelműsített változata. Előnye, hogy a mindennapi élethelyzetekben felbukkanó matematikai szorongást is kimutatja. (Bernáth, Krisztián, 2017)

A matematikai szorongás okai

Számos kutatás témáját képezi a matematikai szorongás hátterében lévő okok feltárása. Elmondható, hogy a kutatási eredmények metszete tartalmazza az iskola és a tanári attitűd hatásait, mégsem megállapíthatók egyértelműen a kutatási eredmények alapján a matematikai szorongás okai. A kutatások közös eredménye azonban, hogy a matematikai szorongás számos összetevő együttese.

Newstead (1995) szerint például a matematikai szorongás hátterében a következő okok állnak: „**(1)** a tanár szorongása; **(2)** szociális, oktatási és környezeti faktorok; **(3)** a matematika belső jellemzői; **(4)** korai tapasztalatok a matematikával kapcsolatban és **(5)** kudarcélmények" (Nótin, Páskuné Kiss és Kurucz, 2012. 224. o.).

Newstead csoportosításának második és harmadik elemére az oktatás közvetlen részvevőinek, tehát a tanároknak és a diákoknak nem sok befolyása van, azonban a maradék három tényezőt érdemes közelebbről megvizsgálni. Miért szorong a tanár? Hogyan hat ez a diákokra?

A tanár szerepe a matematikai szorongás kialakulásában, megoldások

Pedagógus családban nőttem fel és jómagam is szereztem némi tapasztalatot gyakorlataim során, így tudom, hogy a tanár szorongásának számos forrása lehet. Kezdő tanárként én is találkoztam a kollégákkal és diákokkal kapcsolatos fenntartásokkal, a pedagógiai és szaktárgyi ismeretekkel kapcsolatos kétellyel, a rengeteg adminisztrációs teendővel és az asztal szélére halmozott javítatlan dolgozathegyekkel.

Fiatal, hatodéves egyetemistaként a kiégés fogalma sem ismeretlen számomra. Felnézek tapasztalt kollégáimra, és megnyugvással tölt el az érzés, hogy bizony nekik is vannak nehéz napjaik, tehát nem velem van baj. Azonban ha ez nekem feltűnik, diákjaink is minden bizonnyal észreveszik a jeleket. Ráadásul a fiatal generáció tapasztalataim alapján kifejezetten érzékeny és tudatos a lelki kérdésekben, köszönhetően többek között a közösségi médiának. A lényeg, hogy a tanóra, a tananyag feldolgozása és elsajátítása bizony nem elsősorban tankönyvtől, vagy a tanulási környezettől függ, hanem bizony a tanártól. Hiszem, hogy a tanár személyisége meghatározó a tanulási folyamat során. A tanár a minta, a személy, akitől kérdezni lehet, akivel együtt gondolkodunk az órán, aki koordinálja a feladatvégzést és a tanulást. Amennyiben a „félt” tantárgy tanára nem kiegyensúlyozott, a tanulók attitűdje könnyen negatívvá válhat.

Sajnos számos rossz példával találkozunk; tanárokkal, akik nem magyaráznak, akik nem teszik életközelibbé és emészthetőbbé a gyerekek számára a tananyagot, akik nem szemléltetnek, akik nem hajlandóak elszakadni régi, jól bevált módszereiktől, akik büntetésként használják a tudásról való számadást, akik nem adnak kellőképpen részletes visszajelzést, és még sorolhatnám... Az ezekhez hasonló viselkedés szintén hozzájárul a diákok negatív attitűdjének kialakulásához, a rossz tapasztalatok és kudarcélmények gyűjtéséhez.

Egyértelmű, hogy tanárként hatalmas, bár nem kizárólagos felelősségünk van diákjaink iránt, és tehetünk azért, hogy csökkenjen, vagy egyáltalán ne alakuljon ki matematikai szorongásuk. Egy tanárnak képesnek kell lennie megújulni, alkalmazkodni az aktuális igényekhez. Az unalmas, száraz, előadásszerű frontális oktatás helyett, ha nem is mindig, de alkalmanként helyet kaphat a csoportmunka és a játék (Bernáth, Krisztián, 2017).

Karen Newstead kutatásában (más szempontok mellett) azt vizsgálta, hogy vajon azoknak a tanulóknak, akik valamilyen alternatív módon (tehát a megértést célzó, problémamegoldást fejlesztő, kiscsoportos megbeszélést igénylő módon) oldottak meg életközeli problémákat, átlagosan alacsonyabb-e a matematikai szorongásuk, mint azoknak a tanulóknak, akik hagyományos tanítási módszereknek voltak kitéve. A kutatásban 171 diák vett részt, akik közül 58-an alternatív, 118-an hagyományos módon tanultak. A kutatás megerősítette, hogy az alternatív módszerrel tanítottak (*CAN – „Calculator Aware Number Curriculum”*) szignifikánsan alacsonyabb szorongásról számoltak be, mint a hagyományosan oktatott csoport (Newstead, 1995).

A Modern Classroom Project

A következő fejezetben a Modern Classroom Project létjogosultságának magyarázata, története és leírása olvasható, a fejezet kitér továbbá a tanár szerepére ebben az oktatási módszerben, és néhány, az MCP-vel kapcsolatos kutatási eredményre. A fejezet megírásában nagyban támaszkodtam *Rhiannon Dunn The Modern Classrooms Project: Student Efficacy and Achievement* című disszertációjára (Dunn, 2023), és a *Modern Classroom Project hivatalos honlapjára*.

A Modern Classroom Project kidolgozásának kiváltó okai

Az MCP kidolgozását olyan hétköznapi problémák indokolták, melyekkel bármely oktatási intézményben találkozhatunk. A tanulók a hiányzások következtében lemaradnak a tananyagban, felzárkóztatásukra pedig nem mindig van lehetőség a kötött tanmenetnek és a tanárok leterheltsége miatt, így, ha más segítséget nem keresnek, csökken a teljesítményük.

A diákok képességei különböznek, különösképpen matematikából, ennek következtében gyakori jelenség, hogy az ügyesek unatkoznak, és akár elveszítik a motivációjukat, a gyengébbek pedig lemaradnak, és ismét teljesítménycsökkenés tapasztalható.

A tanulócsoportok létszáma nő. A matematika még azon szerencsés tantárgyak közé tartozik, melyből sok iskola törekszik a csoportbontás megtartására, ezekben az iskolákban a tanárnak elegendő „csupán” 15-20 különböző gyermek, 15-20 különböző képességi szintjéhez és igényeihez alkalmazkodni. Vannak azonban olyan iskolák, ahol az erőforrások hiányában már matematikából sem tud megvalósulni a csoportbontás, ami komoly nehezítő tényező az oktatásban.

A hagyományos frontális oktatás egyre kevésbé alkalmas a diákok figyelmének lekötésére, hiszen a technológia fejlődésével és a közösségi média “egyperceseinek” térhódításával az új generációk koncentrációs ideje jelentősen csökkent; a minimális erőbefektetéssel szerzett, gyors információszerzés került a fókuszba; a széleskörű, hosszútávú tudást kevésbé értékelik. Ezáltal a tartós figyelmet igénylő tartalmak elsajátításában és feladatok megoldásában alábbhagy a fiatalok motivációja, a motiváció apadása pedig teljesítménycsökkenést eredményez.

A teljesítmény csökkenésével a diákok és a tanár szorongása is nő.

Az MCP története

Kareem Farah és Robert Barnett hasonló problémákkal találkoztak washingtoni középiskolai matematikatanárként. A 2016/17-es tanévben kidolgoztak egy olyan oktatási modellt, melynek célja az volt, hogy minden diák elsajátíthassa a kulcsfontosságú tantárgyi elemeket. Idővel ez a modell fejlődött a ma ismert ***Modern Classroom Project***-té.

A módszert egy 5 modulból álló ingyenes, angol nyelvű online tanfolyamon lehet elsajátítani regisztrációt követően, néhány személyes adat (név, e-mail, jelszó), továbbá iskolai adatok (foglalkozás, iskola neve, címe) megadását követően.

Az MCP kulcselemei a ***vegyes tanulás (blended learning)***, az ***önálló haladási tempójú tanulás (self-pacing)*** és a ***tanulási eredmény alapú értékelés (mastery-based grading)***. A következő alfejezet ezen kulcselemek mentén mutatja be, az MCP módszert.

A Modern Classroom Project leírása

A ***vegyes tanulás*** az oktatás egy olyan formája, melyben a jelenléti és a digitális tanítás és tanulás keveredik. Az MCP-ben úgy valósul meg, hogy a tanár az elméleti tananyagot az önálló haladás érdekében rövid, 5-7 perces videókban rögzíti, melyekbe gyakran beágyazott megjegyzéseket, kérdéseket és feladatokat importál. A diákok ezeket a videókat nézik meg a szokásos tanári előadások helyett, ezáltal a tanárnak lehetősége van egyéni figyelmet nyújtani diákjai számára, segítséget adva azoknak a diákoknak, akiknek szükséges, de nem visszafogva tudásszomjas társaikat.

Természetesen az elméleti anyagrészek feldolgozásának része a jegyzetelés, illetve a feladatok megoldása, és az azonnali visszajelzést nyújtó ellenőrző kérdések megválaszolása is. Lehetőség van az ellenőrző kérdésekre adott tanulói válaszok alapján elágazást helyezni a videókba, és az adott választól függő visszajelzést adni a diákoknak.

A vegyes tanulás biztosítja a tanulók felzárkózásának lehetőségét, és csökkenti a lemorzsolódás valószínűségét. A videókat, ahogyan egyébként a tananyag részét képező megoldandó feladatokat is, egy megbízható, távolról is elérhető rendszerben osztja meg a tanár diákjaival; így ők egy rossz nap, vagy egy betegség után, vagy akár a témakör végi ismétlés során is elérhetik a gondosan összeállított, érthetően elmagyarázott és szépen szemléltetett tananyagot.

Az ***önálló haladási tempójú tanulás*** egyfajta képesség az önálló tudáselsajátításra, illetve a tanulás önálló megszervezésére megfelelő időbeosztással és stratégiákkal. Az MCP-ben azt jelenti, hogy a tanulók rendelkezésére állnak az előre megtervezett elméleti és gyakorlati „blokkok", melyeken megadott sorrendben és idő alatt kell végig haladniuk, de a feldolgozás időbeosztását maguknak kell szabályozniuk.

Jelentős felelősség hárul a diákokra, de természetesen nincsenek teljesen magukra hagyva. A tanár ellenőrzi a tanulók haladását, illetve a diákok is hozzáférnek saját haladási naplójukhoz, melyben látják az előttük álló feladatokat is, ezzel segítve a tervezést. Sőt, társaik haladását is nyomon követhetik, ami hathat egyrészt motivációs erővel, másrészt segíthet megtalálni azokat az osztálytársakat, akikkel közösen dolgozhatnak.

A ***tanulási eredmény alapú értékelés*** azt jelenti, hogy a diákok a tanulási eredményeik bemutatására kapnak értékelést, nem beleértve a tanulók általános készségeit, befektetett energiáját és viselkedését. E szempont fontossága az MCP-ben abból ered, hogy a módszer Amerikából származik, ahol a tanulók értékelésének szerves része a befektetett energia figyelembevétele. Magyarországon a 2020-as Nemzeti Alaptanterv (NAT) szerint a diákok értékelésének célja a tanulás és a fejlődés támogatása; a magatartást és a szorgalmat a diákokat tanító tanárok közösen értékelik, mintha "önálló tantárgyak" lennének. Előfordulhat, hogy egyes pedagógusok a jegyeket nem rendeltetésszerűen, nevelési célból adják a diákoknak, de saját tapasztalataim alapján a magyar pedagógusok igyekeznek objektíven a tanulók tudását értékelni.

A számonkérési formák ebben a módszerben is lehetnek feleletek, röpdolgozatok, beadandó feladatok és témazáró dolgozatok, melyek a haladást megszakítva „ellenőrző pontként" funkcionálnak. Lényeges összetevője továbbá az értékelésnek, hogy szinte valós idejű, ezáltal a diákokban nem rögzülnek a téves gondolatok és megoldásmenetek, valós ismeretekkel vághatnak bele a következő feladatukba és folyamatos visszajelzést kapnak munkájukról, ami pozitívan hathat motivációjukra.

A másik fontos összetevő a javítási lehetőség, illetve a kötelező feladatok esetében a kötelező javítás. Tehát a diák addig nem haladhat tovább a következő egységre, amíg korábbi, kötelező feladatokban ejtett hibáit ki nem javítja, ezáltal garantálva a tanulságok levonását, erősítve a helyes megoldások megértését. A kötelező feladatokon kívül vannak szorgalmi feladatok, melyek segítik a megértést és a tudás elmélyítését, illetve emelt szintű/nehezebb

feladatok, melyek az érdeklődő, törekvő tanulóknak szólnak. A javítás az ilyen típusú feladatok esetében nem kötelező, de ajánlott.

A tanár szerepe a Modern Classroom Project-ben

Az MCP a tanárokra bizonyos területeken extra terhet ró, hiszen hosszútávú, alapos tervezést igényel, hogy valóban megvalósulhasson a tanulók önálló, személyre szabott haladása, továbbá a valós idejű visszajelzések nagy mennyiségű és gyors javítási teendőt eredményeznek.

Más területeken viszont időt nyerhet a pedagógus. Megszűnik a hagyományos tanári előadás, nem kell vesztegetni az osztály idejét az egyes tanulók megértést célzó kérdéseinek megválaszolására és a feladatok megoldásainak közös megbeszélésére. Persze a hagyományos oktatásban ez nem teljesen elvesztegetett idő, hiszen mélyíti a megértést és fejleszti a tanulók nem szaktárgyi készségeit is, de a haladási tempót lassítja. Továbbá nem kell időt szánni az órán a szemléltetésre, hiszen a videók közvetlen lehetőséget biztosítanak erre a digitális eszközök segítségével.

Mindezek által sokkal több „minőségi" időt tud eltölteni a pedagógus diákjaival egyénenként a tanóra közben, segítséget tud nyújtani a munkaszervezésben, szükség esetén megválaszolhatja a szakmai kérdéseket, illetve párbeszédeket folytathat a diákokkal, tehát előre lép a tanár-diák kapcsolat is. Fejlődik továbbá a diákok kapcsolata is, hiszen ahogy korábban is szerepelt, nem kell, hogy egyedül birkózzanak meg feladataikkal, sőt, kifejezetten előnyös, ha kis csoportokban dolgozzák fel a tananyagot. Természetesen mindenkinek el kell készítenie saját jegyzetét és egyedül kell megfelelnie az „ellenőrző pontokon", de a közös gondolkodás és munka segíti a megértést, fejleszti a csoportos készségeket és motivációs erőként is hathat.

Kutatási eredmények

Az MCP módszerrel kapcsolatban Dunn végzett részletes kutatást. (Dunn, 2023) A kutatás alanyai egy északkelet-tenessee-i középiskola 9. osztályos angol tagozatos tanulói voltak, akik közül 2 csoport hagyományos, 1 csoport pedig MCP módszerrel tanult. A kutatás témáját képezte számos, az MCP és a hagyományos módszer összehasonlítását, illetve az MCP eredményeit célzó kérdés.

Számomra a legérdekesebb a tanuláshoz való hozzáállás kérdése, így a következő kutatási kérdésekkel foglalkoztam:

- van-e különbség a hagyományos és az MCP módszerrel tanulók tanuláshoz való hozzáállásában (RQ4),
- van-e különbség az MCP módszerrel tanulók tanuláshoz való hozzáállásában a szemeszter közepén, illetve végén (RQ9),
- van-e különbség a hagyományos és az MCP módszerrel tanulók év végi vizsgán való teljesítményében (RQ1).

Várakozásaimmal ellentétben az *első kérdés (RQ4)* esetében az derült ki, hogy nem volt nagy különbség a kétféle módszer között. Mindössze egy kismértékű eltérés mutatkozott az MCP-ben tanulók javára, de Dunn kiemelte, hogy kapott olyan visszajelzést, miszerint a tanulók élvezik a helyzetet, hogy irányító szerepben érezhetik magukat. Elgondolkodtató viszont, hogy volt olyan tanuló, akiknek tetszett bár az innovatív módszer, preferálta volna a hagyományos, év végi vizsgára felkészítő tesztek gyakorlását.

Vajon az év végi teszten, vagy a tanuló hozzáállásán lenne érdemes csiszolni? Úgy gondolom, hogy aki egy kicsit is érintett az oktatási kérdésekben, gondolkodott már az oktatási rendszer felépítésén, átjárhatóságán és az érettségi követelményeken. Tiszta sor, hogy az intézmények közötti átjáráshoz, illetve a továbbtanuláshoz szükség van standard kimeneti követelményekre, hiszen ezek nélkül mi alapján tudná eldönteni az intézmény, hogy a jelentkező diák alkalmas-e arra, hogy az intézményben tanuljon; vagy fordítva, mi alapján tudná eldönteni a diák, hogy az intézmény alkalmas-e számára. Kellenek ilyen irányelvek, hiszen ezek nélkül még nehezebb lenne a tanulóknak megtalálni az utat, ami céljaikhoz vezet; és az intézményeknek is nehezebb lenne olyan diákokkal feltölteni padsoraikat, akik céljai közel hasonlók az intézményi célokhoz.

Ezek az irányelvek a tanulás és tanítás meghatározó pontjai: „Készüljünk a felvételire!”, „Készüljünk az érettségire!”, „Készüljünk a nyelvvizsgára!”. Jól van ez így? Az iskola a fejlődés színtere (és nem csak a diákok számára). A tanulók az idejük nagy részét az iskolában töltik, itt formálódik a személyiségük, itt kezdenek el bizonyos tudományterületek iránt érdeklődni, és itt hozzák meg az egész életüket befolyásoló nagy döntéseket a továbbtanulásról. Természetesen a gimnáziumi felvételi, illetve az érettségi megfelelő színvonalú teljesítése feltétele a továbbtanulásnak, de vajon mennyire alkalmasak arra, hogy fiatal emberek

sorsát határozzák meg az ezeken elért eredményeik alapján… Hogyan derül ki az eredmény alapján, hogy a diákok egyéni fejlődésük során mekkora utat jártak be? Hogyan szűrhetők ki a bizonyos tudományterületeken kimagaslóan tehetséges tanulók? Vajon ezekkel a kimeneti követelményekkel boldogulni fognak a továbbiakban a diákok? …És mi van, ha a gyermek egyszerűen szorong a teszthelyzetekben, vagy matematikai szorongással küzd?

Alternatív iskolákra, sőt, speciális matematika tagozatokra is jellemző, hogy kettős stratégiát követnek, tehát az érettségi előtti években folyik az oktatás lényegi része, az érettségi követelményeket figyelmen kívül hagyva, majd a nagy megmérettetés évében pedig kifejezetten az érettségire készítik fel a tanulókat. Ennek hátterében talán az állhat, hogy az ilyen iskolák pedagógusaiban is megfogalmazódott, hogy a tudásátadás nem egy és ugyanaz, mint a vizsgára való felkészülés, a vizsgázást külön gyakorolni kell.

Visszatérve az általam vizsgált kérdésekhez, a *második kérdés (RQ9)* kapcsán sem volt helyes a feltételezésem e kutatás tekintetében, hiszen a tanulók tanuláshoz való hozzáállása változatlan maradt a szemeszter során. Változatlanul átlag feletti. Nem egyedi eset, hogy az innovatív iskolákban, innovatív pedagógusokkal tanuló gyermekek az átlagosnál magasabb tanulási motivációval rendelkeznek, ezért is lehetséges, hogy nem volt informatív a tanuláshoz való hozzáállás változásának mérési eredménye az MCP módszerrel tanuló csoportban.

Az alternatív tanítási módszerekkel szemben alapvető elvárás, hogy legalább a hagyományos módszerrel elért eredményeket produkálja, így különösen fontos a teljesítményre vonatkozó *harmadik kérdés (RQ1)*. Dunn esettanulmányában az MCP módszerrel tanított diákok év végi teszten elért pontszámai magasabbak voltak a hagyományos módszerrel tanuló diákok pontszámainál, de a különbség nem volt szignifikáns. Dunn kifejtette, hogy ennek hátterében oktatásszervezési tényezők állhatnak, hiszen a két csoportban azonos volt tananyag, az értékelési formák, illetve a tanárok még a csoportok párhuzamos haladására is figyeltek. Ezen kívül a Dunn által vizsgált csoport kicsi volt, és a kutatás rövid ideig tartott.

Nagyobb volumenű vizsgálat a 2019/20-as tanévben a Johns Hopkins Egyetem által végzett kutatás az MCP módszerrel kapcsolatban, melyben 55 tanár és közel 2000 diák vett részt (Wolf, 2020). A kutatásban szereplő, MCP módszerrel tanító tanárok eredményei jó differenciálásról, szakmai fejlődésről és nem utolsó sorban kevesebb stresszről árulkodnak. Az MCP módszerrel tanuló diákok eredményeinek fontos komponensei a magabiztos tudáselsajátítás (önbevallásos alapon) és a tanáraikkal kialakított jó kapcsolat. A kutatás a diákok teljesítményére sajnos nem terjedt ki.

Párhuzam a Modern Classroom Project és a 2020-as Nemzeti alaptanterv között

A 2020-as NAT, valamint az MCP módszer elvei és célkitűzései között párhuzam fedezhető fel. A Rendelet Melléklet I. Részének I.1.2. pontjában felmerülnek a ***csoportos tanulás*** előnyei, a ***differenciálás*** fontossága, továbbá a ***tanulást támogató értékelés***. Ezek az elvek az MCP-ben is kiemelt szerepet kapnak. Az azonos tempóban haladó diákok együtt dolgozhatnak, a tanulók segíthetnek egymásnak, közösen tehetik meg a tananyaggal kapcsolatos felfedezéseiket. Az MCP a differenciálás kiváló eszköze. A diákok saját tempójukban haladhatnak a tananyaggal, nem kell tartaniuk a lemaradástól; illetve nem kell unatkozniuk, ha gyorsabbak, mint társaik. Továbbá a kevésbé ügyes diákok a kötelező feladatokon kívül az extra feladatokkal is gyakorolhatnak, elmélyíthetik tudásukat; az ügyesebbek pedig foglalkozhatnak a kihívást jelentő, nehezebb feladatokkal. A tanulási eredmény alapú értékelés tanulást támogató hatásai véleményem szerint megkérdőjelezhetetlenek. Az értékelés célja a tudásról adott reális visszajelzés, továbbá fontos része a diákok számára kötelező vagy opcionális javítási lehetőség, mely a fejlődésüket és tanulásukat szolgálja.

Úgy gondolom, hogy az MCP módszerben a NAT alapelvei között megfogalmazott ***tevékenységközpontú tanulás*** is szerepet kap, hiszen a diákok kapnak egy vezérfonalat, de bizonyos következtetéseket és tanulságokat maguknak kell megfogalmazniuk saját tapasztalataik alapján, persze egy jól megtervezett és felépített keretben, megfelelő támogatással.

Az MCP egy olyan modern, digitális technológiai eszközökkel támogatott tanulási módszer, melyen keresztül a ***hátránykompenzációra*** és a ***tehetséggondozásra*** is kielégítő megoldás található, ezek az elemek a NAT-ban is hangsúlyosak.

Nem utolsó sorban az MCP módszer digitális mivoltából fakadóan a tanár kiváló minőségű és könnyen érthető (a matematikában kiemelten fontos) ***szemléltetéseket*** készíthet diákjainak, illetve változatos ***matematikai szoftverekkel*** ismertetheti meg a tanulókat, egyszerűen, a módszerhez eleve szükséges LMS rendszeren keresztül.

A Modern Classroom Project a Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában

A Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában, ahol szaktárgyi tanítási gyakorlatomat végeztem, vannak pedagógusok, akik az MCP módszert is alkalmazzák tanításukban, köztük Iványiné

Harró Ágota, volt vezetőtanárom is. Megkérdeztem tőle[2], hogy honnan jött az ötlet, mióta és milyen eredményekkel alkalmazzák az MCP-t, illetve feltettem néhány a módszerrel kapcsolatos matematikaspecifikus kérdést is. Ágota 2 éve vágott bele a Modern Classroom Projectbe, miután egy angol szakos kollégájától hallott róla. Kíváncsi volt a módszerre, kecsegtető volt, hogy több gyereket, nagyobb hatékonysággal tud elérni, illetve a nagyobb rálátás a diákok haladására, és az egyéni segítségnyújtás is meggyőző érvek voltak.

Egykori vezetőtanárom a módszert lényegében az ingyenes online tanfolyamon ismertetetteknek megfelelően adaptálta saját tanítási gyakorlatába. A diákok önállóan dolgozzák fel a tananyagot az EdPuzzle online videófelvevő és szerkesztő felületen készített és Canvas rendszerben megosztott interaktív videók segítségével. A megoldandó feladatokat tartalmazó cetliket a diákok a tanórán egy fix funkciójú asztalról vehetik el, a hiányzók pedig Canvasban találják ezeket.

A csoport számára elérhető a haladási napló egy Google Táblázatban, melyben színek szerint csoportosítva találhatók meg a kötelező, a szorgalmi és az emelt szintű feladatok, illetve a kötelező ellenőrzőpontok, melyek teljesítése a továbbhaladás feltétele. A tanterem elrendezése támogatja az együttműködést a diákok, illetve a tanár és diákjai között is; a diákok tudják, hogy hol keressék a tanárt, ha segítségre van szükségük, hol találják a soron következő feladatokat, illetve a szükséges segédeszközöket.

Az órák „becsekkoló kérdőívvel” kezdődnek, melyek a diákok lelki állapotát és az aktuális anyagrészhez való hozzáállását hivatottak felmérni, illetve ráhangolódást biztosítanak a tanórára. Ágota elmondta, hogy törekszik a változatosságra, így a csoporttól és a korosztálytól függően nem minden anyagrészt MCP módszerrel tanít, az alacsonyabb évfolyamokon például többször tanít egy-egy tananyagrészt hagyományos módszerekkel, mint felsőbb évfolyamokon. Ennek oka, hogy az alsóbb évfolyamokon a gyermekek szocializációjában, illetve a friss osztályokban az osztályközösség kialakulásában hátrányt jelenthet a gyakori, folyamatos önálló vagy kiscsoportos munkaforma.

[2] 2023. november 14-én, 15:15-kor interjút készítettem Iványiné Harró Ágotával a Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában, melyről jegyzetet és hangfelvételt készítettem. A hangfelvételt tartalmazó fájl sajnos megsérült, ezért nem szerepel a hivatkozásaim között a hangfelvételre mutató link, de az interjú kérdései az irodalomjegyzékben szereplő Google Drive-on megtalálhatók. Az interjúról az összefoglalót jegyzeteim és emlékeim alapján készítettem.

Felmerült bennem a kérdés, hogy mennyire nehéz matematikát MCP módszerrel oktatni, vannak-e speciális változtatások, amelyek a tárgy jellegéből adódóan szükségeltetnek. Ágotával folytatott beszélgetésünkből kiderült, hogy a kihívást a módszerhez passzoló feladattípusok megtalálása okozhatja. Fontos, hogy a megoldandó feladatok egymásra épüljenek, hiszen a diákoknak meg kell tudniuk oldani az aktuális feladatot az addig elsajátított ismeretek és korábban gyakorolt feladatok tanulságai alapján.

Drasztikus változás továbbá a szokásos előadás helyett alkalmazott elméleti videók. Magam is tapasztaltam, hogy összetett feladat egy maximum 8-10 perces videót készíteni megfelelő minőségben, megfelelő szemléltetéssel úgy, hogy szerepeljen benne minden kulcs gondolat, de csak az, mellyel a tanulók elindulhatnak a tananyag felfedezésének útján. Ezen videók összeállítása és felvétele lényegesen hosszabb időt vesz igénybe, mint az órán előadásszerűen prezentálni, de megéri. Különösen matematikából.

Ágotával egyetértünk abban, hogy a tanulási tempóban mutatkozó különbségek erősen indokolják a módszer alkalmazását, ezen a tudományterületen (is). Ezen kívül kevesebb idő alatt, mélyebb megértés érhető el. Nagy előny, hogy a tanulónak elég csupán elővenni okoseszközét, és újra megnézni az elméleti videót, ha szeretné feleleveníteni az elhangzottakat az eredeti, gondosan tervezett szemléltetéssel együtt.

Amúgy is bevett szokás, így az MCP módszerrel tanított témakörök végén is értékelő kérdőívet töltenek ki a diákok a Radnótiban a tananyag elsajátításakor szerzett tapasztalataikról. A visszajelzéseket az MCP-t alkalmazó tanárok közösen megvitatják, majd amennyiben szükséges, újratervezik és módosítják módszerüket. Példaként Ágota említette, hogy azt is megkérdezték a diákoktól, hogy az elméleti videókban szükséges-e, hogy lássák tanáraik arcát a magyarázat közben, és egyértelműen az az eredmény született, hogy a tanulók szükségét érzik, hogy a tanárt is lássák magyarázat közben.

Beszélgettünk az órai szorongásról és a matematikai szorongásról is. Ágota tapasztalatai alapján az órai szorongás megszűnt, hiszen a gyerekeknek nincs oka rá. Saját maguk szabják meg a haladási tempót, úgy dolgoznak, ahogy akarnak, előre tudják, hogy mikor, milyen számonkérésre számíthatnak az ellenőrzőpontokon, és akkor vágnak bele, ha már készenállnak. Akik hiányzás miatt megcsúsznak a tananyaggal, utolérhetik magukat, Ágota a hosszas távollétek esetén rugalmasan új határidőket is kész felajánlani.

Úgy gondolom, hogy a matematikai szorongás enyhülése sem kizárt az érintetteknél, hiszen a tanárra és a diákokra nehezedő stressz is alacsonyabb, továbbá minimalizálódik a lehetséges kudarcélmények száma is a javítási lehetőségekkel és az ellenőrzőpontok önálló ütemezésével. Azt is megvitattuk, hogy a módszer kiválóan támogatja a differenciálást, hiszen a tanulók személyre szabott segítséget kapnak a tanártól, saját tempójukban haladhatnak és szükség esetén plusz feladatokkal támogathatják ismereteik elmélyülését, továbbá az érdeklődők nehezebb feladatokkal is foglalkozhatnak. Bár az MCP-vel elért teljesítményt nem méri, Ágota úgy tapasztalja, hogy a diákok a módszer segítségével stabilabb és mélyebb tudásra tesznek szert.

Vezetőtanárom pozitívan nyilatkozott az MCP-ről, szereti ezt a tanítási módszert. Megjegyezte azt is, hogy természetesen más munkaszervezést és beosztást igényel, mint a hagyományos tanítás. Tanításhoz való hozzáállását nem változtatta meg az MCP, hiszen ő mindig örömmel tanított. Felemelő volt Ágotával beszélgetni, hálás vagyok, hogy időt szakított rám, innovatív hozzáállása és inspiráló személyisége újra megragadott kezdő, lelkes tanárként, akárcsak gyakorlatom idején.

Modern Classroom Project és matematika

Szaktárgyi tanítási gyakorlatom alatt a 2022/23-as tanév tavaszi félévében volt szerencsém kipróbálni az MCP módszert a Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában, vezetőtanárom, Iványiné Harró Ágota koordinálásával. A gyakorlatot a 8. C osztály 3-as csoportjában végeztem, mely egy 15 fős csoport, jó képességű, érdeklődő tanulókkal, akik tanultak már az MCP módszer segítségével.

A 15 órás gyakorlat során a középpontos hasonlóságról, tulajdonságairól és szerkesztéséről (szabad kézzel és GeoGebrával) volt szó; beszéltünk a hasonlóságról és annak tulajdonságairól; szántunk időt a háromszögek hasonlóságának alapeseteire, illetve az ezzel kapcsolatos alkalmazási feladatokra; végül pedig a hegyesszögek szögfüggvényeiről és a szögfüggvények alkalmazásáról tanultunk.

Dolgozatom ezen részében kifejtem, hogy milyen tapasztalatokat gyűjtöttem a ***középpontos hasonlóság***, a ***hasonlóság*** és a ***háromszögek hasonlóságainak alapesetei*** témakörökkel kapcsolatban. A hegyesszögek szögfüggvényeivel és ezek alkalmazásával kapcsolatos órákat itt nem fejtem ki, hiszen vezetőtanárom engedélyével az ő elméleti videóit használtam fel ezekhez.

Tapasztalataim

Az MCP módszer a tanárra számos extra terhet ró, olyan teendőket, melyeket a hagyományos, illetve kevésbé modern módszerek nem így, és nem ilyen mértékben követelnek meg. A magasfokú tervezés és precizitás; a tananyag rövid, tömör, teljesség igényére törekvő összefoglalása; a javítási teendőkkel való naprakészség mind-mind elengedhetetlenek a módszert alkalmazó pedagógus számára. Sőt, mindemellett jól kell bánnia a digitális eszközökkel, körültekintően kell kezelnie a tanulók által használt LMS rendszert.

Ezen kihívások teljes tudatában vágtam bele az MCP módszerbe gyakorlatom során, hiszen nagyon érdekelt, hogy hogyan működik a módszer, illetve úgy gondoltam, hogy van benne fantázia. Egyébként most is az a véleményem, hogy számos olyan problémára adhat megoldást, amivel a közoktatás résztvevői nap, mint nap küszködnek (pl. gyerekek sorozatos hiányzása, osztályok/csoportok heterogén összetétele). Hozzáteszem, hogy kíváncsiságomat az is fokozta, hogy úgy gondoltam, hogy talán nem lesz többé olyan csoportom, akikkel ki tudom próbálni a módszert. Be kell látnom, hogy nem könnyű az MCP kivitelezése akármilyen iskola, akármilyen osztályának, akármilyen csoportjában, akármilyen szociális háttérrel

és motivációval rendelkező gyerekekkel. Véleményem szerint az MCP olyan tanulók esetében alkalmazható, akik motiváltak a tanulásra, felelősséget éreznek a tudás elsajátítása iránt, és van elég önkontrolljuk, hogy önállóan haladjanak a tanulásra kijelölt úton.

Azt gondolom, hogy MCP-t alkalmazó tanár sem lehet akárki. Szerencsére, nekem rengeteg segítségem volt, Ágota minden egyes órám megtervezésében, a videók elkészítésében és a megoldandó feladatok kitűzésében is mellettem állt. A legnagyobb kihívás számomra talán a videók elkészítése volt, hiszen szoros időkerethez voltam kötve, minden videó legfeljebb 10 perces lehetett, hogy a diákok a videó teljes hosszát figyelemmel tudják kísérni, azonban ezeknek a videóknak tartalmaznia kellett minden, a megértéshez szükséges információt és szemléltetést, példákat is. A videókban az általam előre elkészített és alaposan átgondolt prezentációk láthatók, továbbá én magam, ahogy igyekszem röviden és tömören elmagyarázni az aktuális témakör elméletét.

Utólag visszanézve a videóimat, érdekes megfigyelni fejlődésem ívét, hiszen hiába telt 2 órába első videóm megtervezése és felvétele, sokkal többet hibázom, és bizonytalanabbnak tűnök benne, mint utolsó videóimban, melyek tervezése és kivitelezése már gördülékenyen ment. Annak ellenére, hogy meggyűlt a bajom a videók felvételével, talán a legizgalmasabb és legélvezetesebb része is ez volt az MCP-s munkámnak. Motivált, hogy a gyerekek egy pontos, precíz, igényes és informatív videón keresztül sajátíthassák el a tudásanyagot.

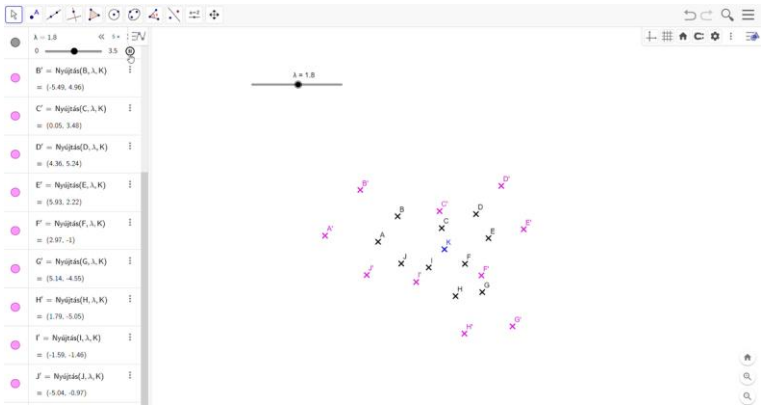
Az órai feladatok összeállításában segítségemre volt vezetőtanárom, a velem párhuzamosan gyakorlatot végző Szijjártóné Majrik Katalin, a Nemzeti Köznevelési Portál (NKP) és az oktatási hivatal által 2016-ben kiadott 8. évfolyamos matematika tankönyv (Csahóczi, Csatár, Kovács, Morvai, Széplaki, Szeredi, 2021), illetve a Sokszínű matematika 8. osztályos tankönyv (Jakab, Kothencz, Kozmáné, Pintér, Vincze, 2021).

Saját MCP óráim

Első óra

Első órámat egy rövid kísérlettel kezdtem, amiben a kicsinyítést és a nagyítást modelleztük, a középpontos hasonlóság fogalmának bevezetése céljából. A kísérlet élőben zajlott, hiszen ez volt a csoporttal az első órám, és szerettem volna egy kicsit megismerkedni és interakciót létesíteni velük. A kísérletben a gyerekek voltak a sík pontjai, illetve egyikük a középpontos hasonlóság középpontja. A középpontot szimbolizáló diákhoz először közelednie kellett a

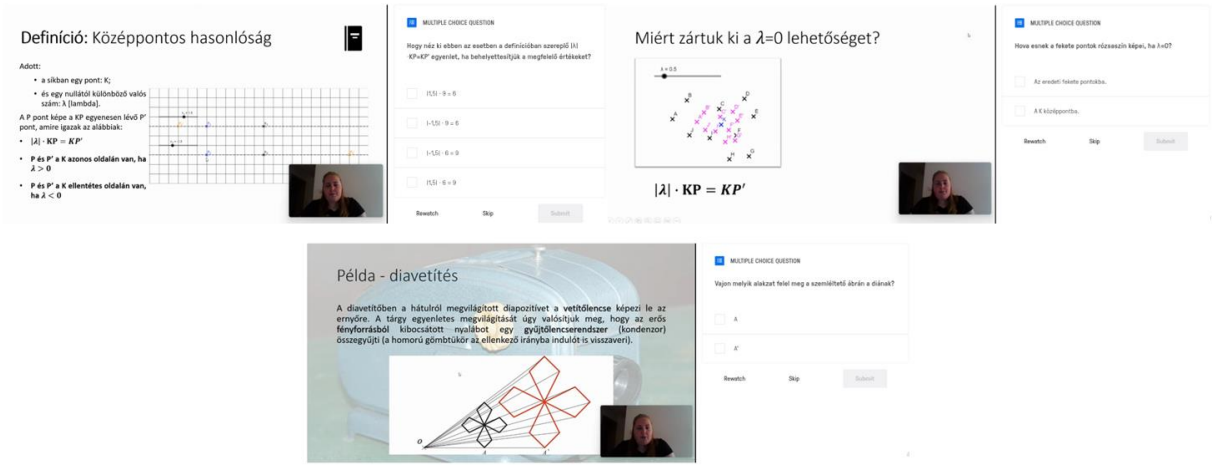
többieknek, majd távolodni. A kísérletről GeoGebra illusztrációt is készítettem, amit később megnézhettek diákjaim az óra Canvas felületén.



1. ábra: Képernyőkép a GeoGebrában modellezett kísérletről

A tanítás MCP módszerrel folytatódott, mely során a tanulók okostelefonjaik és iskolai felhasználói fiókjuk segítségével beléptek az iskola Canvas felületére. A matematika órának létrehozott Canvas kurzusban egy elkülönített modulban láthatták a diákok az aktuális témához tartozó videókat és feladatokat.

Az általam készített elméleti videóból a tanulók megismerték a középpontos hasonlóság fogamát, mutattam nekik 3 példát, melyekben a hasonlóság λ arányára teljesül, hogy $\lambda > 0$, $\lambda < 0$, illetve $\lambda = 0$, továbbá egy hétköznapi életből vett példáról is beszéltem, melyben bemutattam, hogy hogyan működik a diavetítő.



2. ábra: Részletek az első óra elméleti videójából

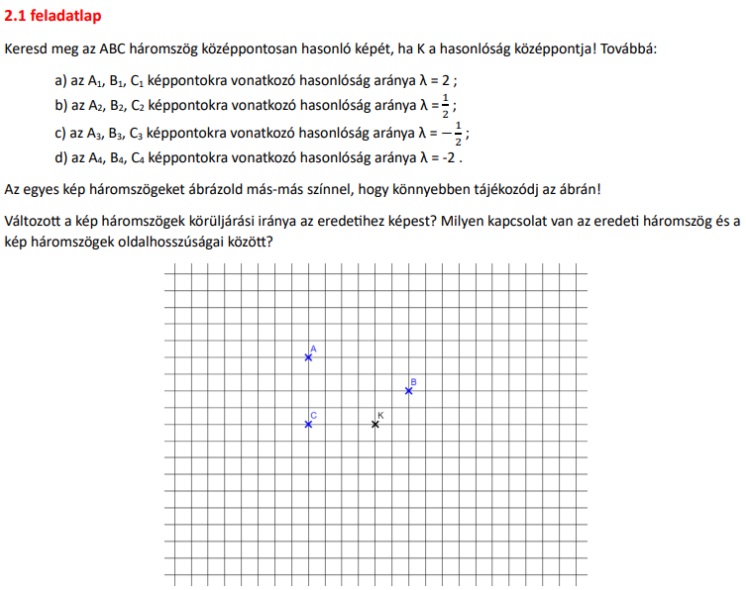
Az Edpuzzle online videókészítő alkalmazás egy felhasználóbarát felület, használatával könnyedén megvalósíthatók a videókészítés technikai elemei. Emellett a felület arra is lehe-

tőséget biztosít, hogy a videó kimerevedésével legyen lehetőség a figyelmet fenntartó, ellenőrző, vagy éppen a megértést segítő kérdések feltevésére, azonnali visszajelzést adva a válaszok helyességéről.

A 9 perces elméleti bevezetőt feladatmegoldás követte, a feladatok között 3 kötelező (piros), 1 extra (narancssárga) és 1 nehéz (kék) feladat szerepelt. A kötelező feladatokban adott pontok, illetve alakzatok középpontosan hasonló képeit kellett megkeresni adott hasonlósági középponttal és aránnyal, az extra feladatban a hasonlósági arányt vagy a hasonlóság középpontját kellett megadni a megfelelő adatok ismeretében, a nehéz feladatban pedig adott háromszögek közül középpontosan hasonló háromszögeket kellett keresni a hasonlóság középpontjának és arányának megadásával.

Második óra

A második óra ismét MCP módszerben zajlott. A bevezető kötelező feladatban egy háromszög középpontosan hasonló képeit kellett meghatározni adott hasonlósági középponttal és pozitív egész, pozitív tört, negatív egész és negatív tört aránnyal egy négyzetrácsos lapon szerkesztés nélkül. Továbbá át kellett gondolni, hogy változott-e a képháromszögek körüljárási iránya az eredetihez képest, illetve, hogy milyen kapcsolat van az eredeti háromszög és a kép háromszögek oldalhosszúságai között.



3. ábra: A második óra első feladata

Ezt követően a diákoknak eddigi tapasztalataik alapján ki kellett tölteniük az általuk már az egybevágósági transzformációk témaköréből jól ismert táblázatot, mely a középpontos hasonlóság tulajdonságairól szólt.

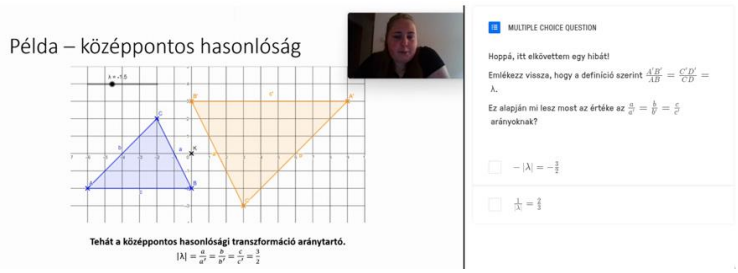
2.2 feladatlap

A középpontos hasonlóság tulajdonságai

Kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés?		Ha a P képe P', akkor P' képe P?	
Egyenestartó?		Párhuzamos egyenesek képe párhuzamos?	
Szögtartó?		Van fix pontja?	
Távolságtartó?		Van fix alakzata?	
Körüljárástartó?		Van invariáns alakzata?	
Egy szakasz párhuzamos a képével?		Végrehajtható mozgatással?	

4. ábra: Kitöltendő táblázat a középpontos hasonlóság tulajdonságairól

A táblázat kitöltése után a tanulók egy általam készített videóban megismerkedhettek az aránytartás fogalmával. A videóban szereplő példában elkövettem egy hibát, melyre vezetőtanárom hívta fel a figyelmemet. A videó ismételt felvétele helyett beépítettem egy helyesbítő kérdést némi segítséggel, melyben a hibásan megadott $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ arányt kellett korrigálni a gyerekeknek, hiszen az valóban igaz, hogy $|\lambda| = \frac{3}{2}$, de az $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ arányok értéke $\frac{1}{|\lambda|} = \frac{2}{3}$.

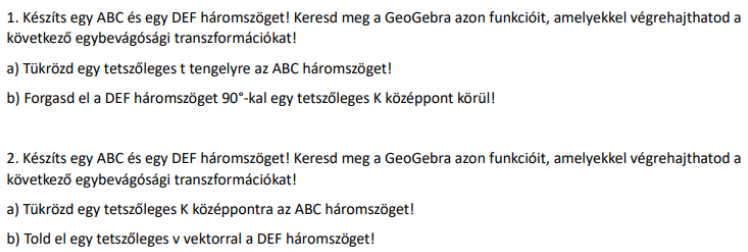


5. ábra: Részlet a második óra elméleti videójából

A videót követően 2 további középpontos hasonlósággal kapcsolatos kötelező feladat, 1 extra és 1 nehéz feladat követte, melyek célja a középpontos hasonlósági transzformáció fogalmának elmélyítése volt.

Harmadik óra

A harmadik órán vezetőtanárom kérésére az iskola egyik géptermében tükrözéssel, eltolással és elforgatással kapcsolatos feladatokat oldottak meg a tanulók GeoGebrában. A diákok a feladatokat ezen az órán is Canvason keresztül érték el, de az óra nem MCP módszerrel zajlott. Nagyban támaszkodtam korábbi GeoGebra tudásukra és tapasztalatukra, emellett természetesen körbejártam és segítettem nekik.



6. ábra: A harmadik órán megoldott GeoGebra feladatok

A gépterem adottságaiból kifolyólag 2-2 tanuló ült egymás mellett, és egyiküknek az 1-es, másikuknak a 2-es feladatot kellett megoldania. Természetesen, aki időben végzett, annak a párja feladataival is foglalkoznia kellett. Bár nem MCP módszerrel zajlott az óra, mégis komoly tapasztalatokkal szolgált számomra. Akkor is, és azóta is hajlamos vagyok óráim túltervezésére. Vezetőtanárom javaslatára mégis kizárólag a fenti 2 kötelező, 2 opcionális feladattal készültem. Aggódtam, hogy esetleg túl kevés, és túl könnyű feladat lesz ez diákjaim számára, de hamar bebizonyosodott, hogy éppen megfelelő volt ez a feladatmennyiség. A technikai problémáktól kezdve, a GeoGebra használatának felelevenítésén keresztül, az elkészült alkotások elmentéséig számos probléma és kérdés merült fel, így csupán néhány diáknak volt arra ideje, hogy az opcionális feladatot is megoldja, vagy elkezdje megoldani.

Negyedik óra

A negyedik órán a középpontos hasonlósággal kapcsolatos négyzetháló nélküli, Euklideszi szerkesztési feladatokat tűztem ki, a 4 kötelező feladatban adott hasonlósági középponttal és aránnyal kellett képalakzatokat szerkeszteni, illetve a hasonlósági arány ismerete nélkül, de az eredeti alakzat egy pontjának képpontja, és a hasonlósági középpont ismeretében kellett képalakzatot szerkeszteni. Az extra feladatban a hasonlóság középpontját kellett megkeresni, a nehéz feladatban pedig szakaszok megfelelő arányú osztópontjait kellett megszerkeszteni.

Ehhez a tanórához nem készült videó, vezetőtanárommal egyeztetve egyszerűen nem éreztük szükségét egy bemutatóvideó készítésének, hiszen minden, a szerkesztéshez szükséges információ birtokában voltak ekkora a diákok. Az MCP fontos részének gondolom azt is, hogy a gyerekekkel éppen annyi információt osszunk meg, amennyi szükséges, se többet, se kevesebbet.

Ötödik óra

Az ötödik óra ismét gépteremben zajlott, amikor már középpontossági hasonlósággal kapcsolatos szerkesztési feladatokat oldottak meg a tanulók GeoGebrában. A friss ismeretanyagra és a közelmúltbéli GeoGebrás tapasztalatokra való tekintettel, erre az órára bátran állítottam össze 3 kötelező és 1 extra feladatot. Azzal is számoltam, hogy a GeoGebrában adott arányú és középpontú középpontos hasonlóság megszerkesztése 2 kattintás, és természetesen ezt a gyerekeknek is megmutattam személyesen (nem MCP módszerrel).

Hatodik óra

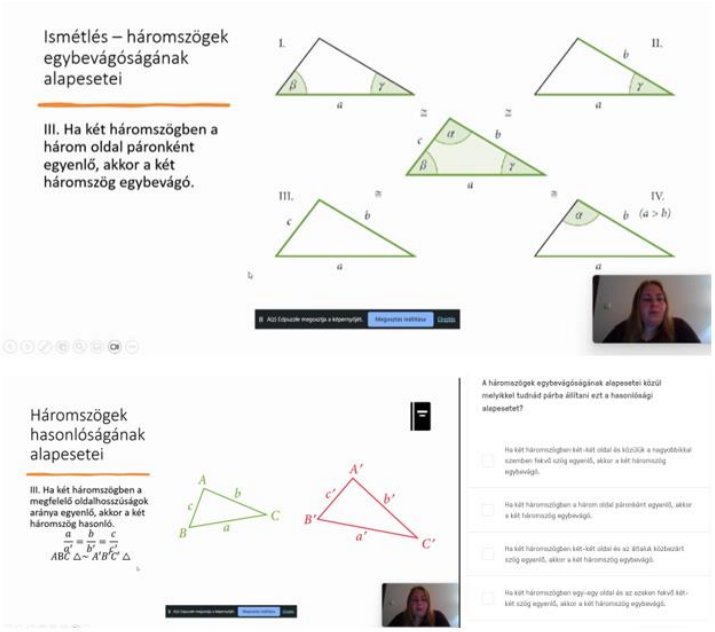
A hatodik órán tovább léptünk a hasonlóság témakörére, az általam készített videóban ismertettem a hasonlóság és két alakzat hasonlóságának fogalmát, különösen ügyelve a szemléltetés és a példák fontosságára, továbbá a videóban a hasonlóság tulajdonságait is ismertettem, a már említett táblázat alapján, az aránytartásra külön kitérve. A tulajdonságokat a diákok önállóan is képesek lettek volna megállapítani, ahogy azt korábban a középpontos hasonlóságnál tették. Úgy gondolom, hogy az önálló átgondolással, és tapasztalással szerzett információk mély és hosszútávú tudásként raktározódnak el, így a felfedezés a legértékesebb módja a tanulásnak. Sok feladattal készültem az órára, de mindenképpen szerettem volna, ha rögzítésre kerülnek a tulajdonságok is, ezért időmegtakarítás céljából úgy döntöttem, hogy ezeket a videóban ismertetem.

7. ábra: Részletek a hatodik óra elméleti videójából

A kitűzött kötelező feladatokban hasonló síkbeli alakzatokat kellett keresni, síkbeli és térbeli alakzatok hasonlóságával kapcsolatos állítások igazságértékét kellett meghatározni, illetve adott oldalhosszúságú téglalapok hasonlóságának arányát kellett meghatározni. Az extra feladatokban az eredeti alakzathoz hasonló képeket kellett előállítani, illetve adott kerületű és adott oldalarányú háromszög oldalhosszait kellett meghatározni.

Hetedik óra

A hetedik óra a háromszögek hasonlóságainak alapeseteit ismertető, általam készített videóval kezdődött. Ágota javaslatára építettem a háromszögek egybevágóságainak alapeseteire, ezek ismétlésével kezdtem, majd párhuzamot vontam a hasonlósági alapesetekkel, ami véleményem szerint hozzájárult ahhoz, hogy a diákok könnyen vették a témakört. A következő témakör előtti kötelező felelés eredményei arról árulkodtak, hogy a gyerekek otthonosan mozognak a háromszögek hasonlóságainak alapeseteiben.



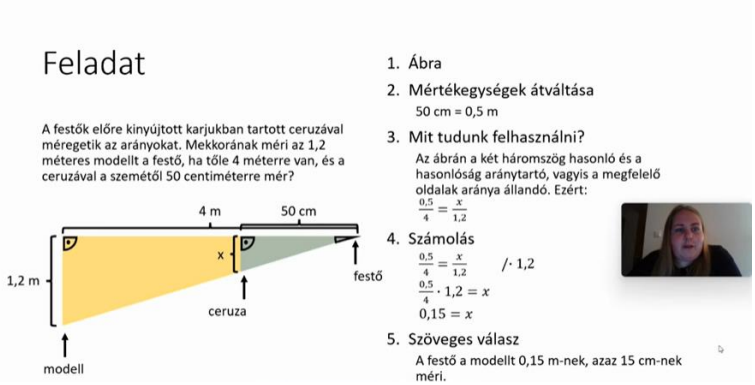
8. ábra: Részletek a hetedik óra elméleti videójából

A kitűzött 4 kötelező feladat közül 3 feladatban háromszögek hasonlóságáról kellett dönteni megfelelő indoklással, 1-ben pedig a megfelelő adatok ismeretében kellett meghatározni a képháromszög oldalainak hosszúságait. A kitűzött extra feladatok egyikében a koordinátarendszerben adott háromszög pontjain kellett végrehajtani a megfelelő transzformációkat és megjelölni a hasonló alakzatokat, a másik feladatban pedig a megfelelő adatok ismeretében kellett megállapítani a képháromszög oldalhosszait, illetve háromszögek hasonlóságát kellett igazolni.

Ahogy korábban említettem, ebből a témakörből kötelező szóbeli felelet volt. A felelet során a diákoknak 15 kártyából kellett 3-mat húzniuk, melyeken két-két háromszög más-más adatai voltak megadva, a tanulóknak pedig el kellett dönteniük, hogy hasonlóak-e a háromszögek, válaszukat indokolniuk is kellett.

Nyolcadik óra

A nyolcadik órán a háromszögek hasonlóságának alapeseteivel kapcsolatos alkalmazási feladatokkal foglalkoztunk. Vezetőtanárom javaslatára készítettem egy videót a tanulóknak, melyen bemutattam, hogy egy ilyen szöveges alkalmazási feladatot hogyan érdemes megoldani.



9. ábra: Részlet a nyolcadik óra elméleti videójából

A 7 kötelező, a 2 extra és a 2 nehéz megoldandó feladat összeállításában főként az NKP-ra támaszkodtam.

Tanulságok

A fenti témakörökben a legnagyobb kihívás az volt, hogy rengeteg szemléltetésre volt szükség, melyek elkészítéséhez a GeoGebrát használtam. Akármilyen felhasználóbarát a felület, bizony sok idő és energia volt az ábrák elkészítése, de úgy gondolom, hogy megérte a befektetett energiát, szép és pontos ábrákat tudtam készíteni a segítségével.

Az MCP módszerrel kapcsolatos tanulságokból kettőt szeretnék kiemelni. Elsősorban azt, hogy ez egy forradalmi módszer, a saját csoportomban kiválóan működött, de rengeteg tervezést, előre látást, alapos átgondolást, előkészítést és tömérdek javítási teendőt eredményez. Másodsorban kihívást jelent (főleg kezdő tanárként) úgy összeállítani egy elméleti videót, hogy abban éppen elegendő információ hangozzon el úgy, hogy önálló feladatmegoldással dolgozhassák fel a tanulók a tananyagot. De még ennél is nehezebb a megoldandó feladatok összeállítása mind nehézségben, mind sorrendiségben. Ez a feladat alapos hozzáértést és felkészülést igényel.

Vezetőtanáromtól rendszeres visszajelzést kaptam a gyakorlat során, de kíváncsi voltam, hogy a tanulók hogyan élték meg az időszakot, amikor tőlem és velem együtt tanultak. A 15

óra végén egy anonim kérdőív kitöltésére kértem a diákokat, melyben a pozitív és negatív élményeiket is leírhatták. A következő kérdésekre kellett válaszolniuk:

- Emelj ki valami pozitív dolgot az elmúlt 15 matek órával kapcsolatban, ha eszedbe jut ilyen!
- Emelj ki valami negatív dolgot az elmúlt 15 matek órával kapcsolatban, ha eszedbe jut ilyen!
- Egy 5-ös skálán mennyire volt hasznos számodra az elmúlt 15 óra?
- Egy 5-ös skálán általában hogy érezted magad az óráimon?
- Egy 5-ös skálán hányasra értékeled a saját munkádat az elmúlt 15 órán?
- Egy 5-ös skálán hányasra értékeled az én munkámat az elmúlt 15 órán?
- Szerinted melyik szó jellemezné a legjobban az elmúlt 15 matek órát?

A kérdőívet 12 tanuló töltötte ki a 8. c osztály 3-mas csoportjából. Sokféle visszajelzés érkezett, és ez volt az első dolog, aminek örültem, hiszen a diákok merték őszintén leírni véleményüket. Úgy gondolom, az írásos visszajelzések az érdekesebbek, így ezek közül emelek ki néhányat.

A pozitív visszajelzések egybecsengenek az MCP és/vagy saját céljaimmal, a tanulók kiemelték az érthető magyarázatokat, egymásra épülő ismereteket, a sok javítási lehetőséget, a gyors visszajelzést megoldott feladataikkal kapcsolatban, illetve a számomra talán legfontosabb dolgot, a stresszmentes, barátságos légkört, amelyben bátran lehetett kérdezni.

Kaptam negatív, de építő jellegű kritikát is. A tanulók is észrevették, hogy az óráimat túltervezem, ezáltal úgy érezték, hogy gyors a tempó és túl sok a feladat. Kaptam egy olyan visszajelzést is, amely a nem megfelelő felkészültségemre vonatkozott. Ezen elgondolkodtam, és tudván, hogy óráimat az MCP módszer milyenségéből fakadóan alaposan megterveztem és átgondoltam, arra jutottam, hogy talán személyiségemből és kezdő tanárságomból fakadóan tapasztalhatta valamelyik diák, hogy nem vagyok felkészült. Minden egyes kérdésre jól megfontolt, alapos választ igyekeztem adni, ami rövid átgondolást igényelt. Igyekszem, ebben fejlődni.

Kiütköztek olyan problémák is azonban, amelytől a pedagógus teljes joggal tart, ha MCP módszerrel tanít. Egy visszajelzés szerint „kevés volt az emberi kontakt, valamint az elején

a videók nem jól működtek.” A visszajelzés írójának igazat adok abban, hogy másféle kapcsolatok alakulnak ki az MCP módszert alkalmazó tanórákon, nincs klasszikus tanári előadás, illetve osztálymunka. Ahogy én látom, az órákon igyekeztem teljes mértékben támogatni diákjaimat, a padsorok között jártam, aki szeretett volna, megtalált kérdéseivel. Nagyon tetszett az is, hogy általában volt egy alapzaj, hiszen akik összefogtak beszélgettek a feladatokról, segítették egymást, sőt, arra is volt példa, hogy vitába keveredtek egy nehezebb feladat megoldása kapcsán. Ha ebből az irányból közelítem a kérdést, sokkal több emberi kontakt alakulhat ki egy MCP órán, mint egy hagyományos tanórán. A technikai problémák viszont sajnos véleményem szerint a digitális módszerek és tevékenységek velejárói, a legjobb, amit tehetünk, hogy igyekszünk hamar megoldani őket, és leszűrjük a hibákból fakadó tanulságokat.

Izgalmas élmény volt megtapasztalni az MCP módszer működését a Radnóti Miklós Gyakorlóiskola elhivatott és szakmailag kiemelkedő tanárának és tehetséges gyerekeinek segítségével. De vajon gyakorlóiskolákon kívül is működne? Hogyan? Véleményem szerint, ha lennének olyan iskolák, akik hajlandóak kipróbálni a módszert, mindenképpen összefogásra és együttműködésre lenne szükség az MCP bevezetéséhez. Egy ilyen iskolában a gyerekeket egészen kis kortól fokozatosan kéne hozzászoktatni a módszerhez és az önállósághoz. A tanárok pedig segíthetnék egymást anyagaik és tapasztalataik megosztásával. Ezzel egy olyan oktatási formát alakíthatnának ki, amely közel stresszmentes, és kifejezetten hatékony. Túl utópisztikus elképzelés ez?

Minden általam készített tananyagot az elméleti videókkal és az összeválogatott feladatokkal együtt, a diákok által kitöltött értékelő űrlap eredményeit táblázatos formában, továbbá a vezetőtanárommal készített interjún íródott jegyzetet is feltöltöttem egy Google Drive mappába, melynek linkje az irodalomjegyzékben megtalálható.

Az általam Modern Classroom Project módszerre tanított témakörök matematikája különböző oktatási szinteken

Ebben a fejezetben arról írok, hogy milyen matematikai háttér áll a ***középpontos hasonlóság***, a ***hasonlóság*** és a ***háromszögek hasonlóságainak alapesetei*** témakörök mögött általános iskola felső tagozatos, középiskolai és egyetemi szinten.

A középpontos hasonlóság matematikája a hatályos tantervekben, illetve egyetemi felépítésben

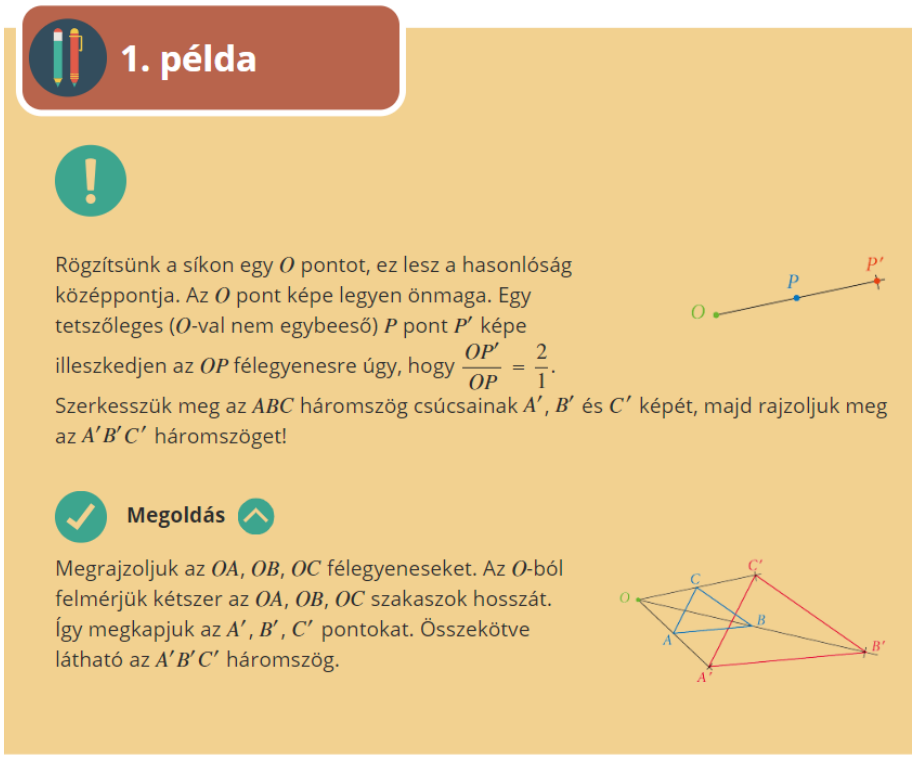
Tanulmányoztam a 2020-as és a 2012-es Nemzeti Alaptantervekhez készült kerettantervek célkitűzéseit alap óraszámú felső tagozaton és középiskolában a középpontos hasonlóság témakörben. Megvizsgáltam, hogy a 2012-es illetve a 2020-as NAT-hoz igazodó tankönyvek hogyan tárgyalják általános iskolai és középiskolai szinten a középpontos hasonlóságot.

Továbbá a Covid járvány miatt fellépő online oktatás hatására Verhóczki László tanár úr 2021-ben elkészítette a „Bevezetés a geometriába" című matematikatanári szakos hallgatóknak szóló előadásjegyzetet, mely alapján felidéztem az egyetemi ismeretanyagokat a témakörben. A tanár úr által összeállított jegyzet és az MCP módszerben készítendő elméleti videók között felfedezhető a párhuzam, hiszen mindkettő az önálló tanulást támogatja, mankót nyújt a diákoknak, akik akkor is megismerhetik általuk az elsajátítandó tananyagot, ha nem tudnak részt venni az órák egy részén. Sőt, a tanár úr az előadásairól videót is készített, amit szükség esetén a hallgatók később visszanézhettek. Bár nekem volt szerencsém a „Bevezetés a geometriába" című kurzust személyesen hallgatni, hiszen ez egy első féléves tantárgy, de alkalmam volt a tanár úr előadásait más kurzusokon a járvány miatt online is hallgatni. Ezeken az előadásokon hasonlóképpen valósult meg a lényegi pontok kiemelése, a megértés segítése és a példák, illetve ábrák elemzése, mint egy MCP elméleti videóban, csak míg az MCP-ben maximum 10 percben kell összefoglalnia a tanárnak az elmélet lényegi pontjait, hogy a diákok figyelmét a lehető legjobban fenntartsa, addig egyetemi szinten a rendelkezésre álló időtartam lényegesen több. Tapasztalataim alapján a lassító tényezők, mint a hallgatói visszajelzések, kérdések, illetve a táblára írás csökkenésével vagy eltűnésével az előadások tempója lényegesen felgyorsult a jelenléti oktatáshoz képest, úgy éreztem több ismeretanyagot kellett elsajátítanunk, viszont volt időnk egy-egy ábra alaposabb elemzésére, bővebb magyarázatokra.

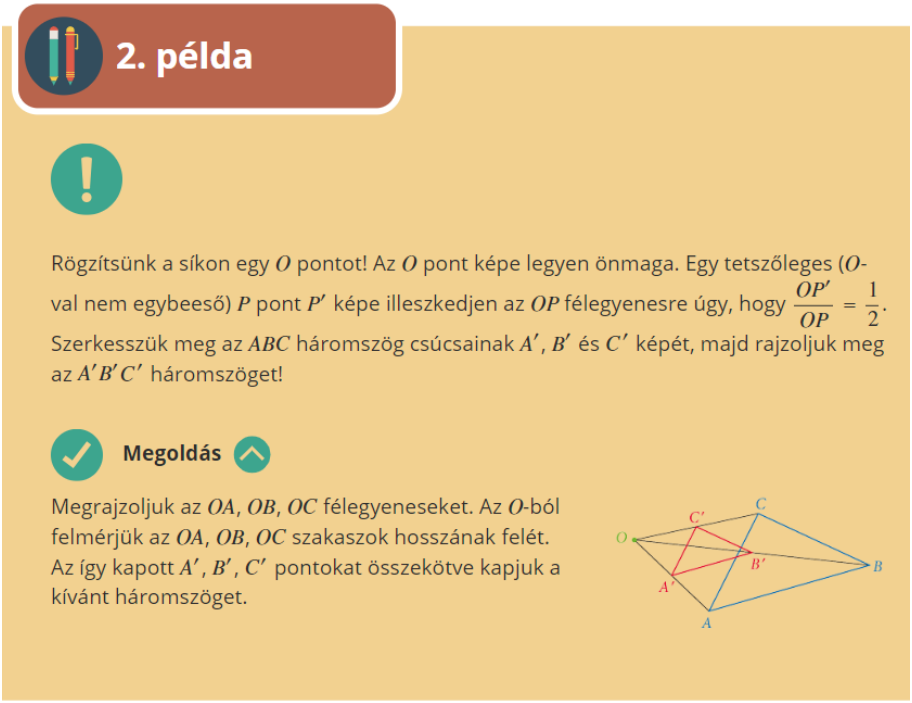
Általános iskola

A 2020-as NAT-hoz igazodó kerettanterv célkitűzése szerint 5-6. évfolyamon a „Transzformációk, szerkesztések” témakör végére a tanulók felismerik „a kicsinyítést és a nagyítást hétköznapi helyzetekben” (Matematika általános iskolás kerettanterv, 2020, 17. o.). E cél a 7-8. évfolyamon is szerepel ugyanebben a témakörben, itt viszont a fogalmak között is megjelenik a kicsinyítés és a nagyítás. (Matematika általános iskolás kerettanterv, 2020) A 2012-es NAT-hoz igazodó kerettantervben ezzel szemben csak 7-8. évfolyamon esik szó a középpontos kicsinyítésről és nagyításról. (Matematika általános iskolás kerettanterv, 2012)

A 8. osztályos 2020-as NAT-hoz igazodó tankönyvben a középpontos hasonlóság kiegészítő tananyag (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika-8-nat2020/lecke_02_005). Egy-egy példán keresztül mutatja be a középpontos nagyítást, illetve a középpontos kicsinyítést.



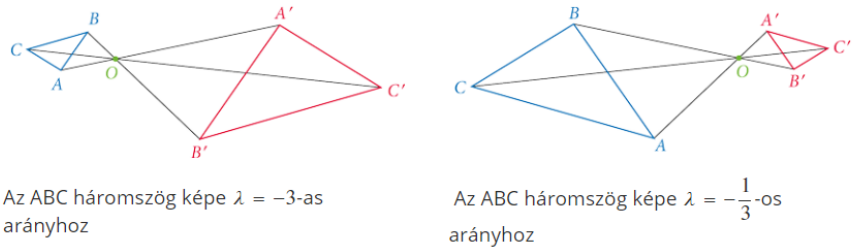
10. ábra: Középpontos hasonlóság - 1. tankönyvi példa (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika-8-nat2020/lecke_02_005)



11. ábra: Középpontos hasonlóság - 2. tankönyvi példa (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika-8-nat2020/lecke_02_005)

A tankönyvben az is olvasható a példák után, hogy a kétszeres nagyításra, illetve az $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítésre láthattunk példát, az azonban sajnos nem került leírásra egyik esetben sem, hogy a transzformáció középpontja mindkét példában az O pont volt.

A tankönyv a negatív arányú transzformációval sem hagyja magára a tanulókat, ezekre is mutat egy-egy példát $|\lambda| > 1$, illetve $|\lambda| < 1$ esetekben.



12. ábra: Tankönyvi illusztráció a negatív arányú középpontos hasonlósághoz (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika-8-nat2020/lecke_02_005)

Különösen tanulságosnak tartom, hogy a speciális arányszámokról is esik szó, tehát, hogy $\lambda = 1$ esetén helybenhagyásról, $\lambda = -1$ esetén középpontos tükrözésről van szó, illetve amennyiben $\lambda = 0$, a transzformáció nem hasonlóság.

Az arányszámok alapos ismertetése után mondja ki a tankönyv, hogy a "középpontos nagyítást és kicsinyítést összefoglalóan középpontos hasonlósági transzformációnak nevezzük".

Amíg a 2020-as NAT-hoz igazodó tankönyvben a középpontos hasonlóság csupán kiegészítő anyag, a korábbi, 2012-es NAT-hoz igazodó tankönyven (https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_8/lecke_02_005) ugyanez kötelező tananyag, de ezen kívül a példákon és az ismeretanyagon nem változtattak.

Középiskola

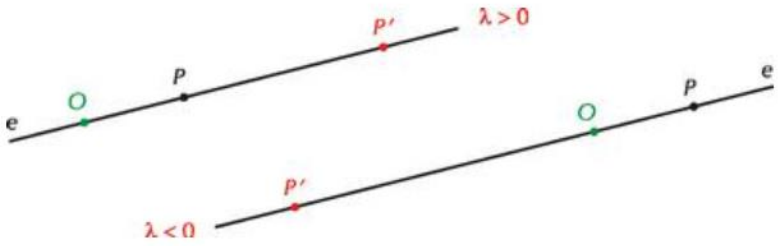
A 2020-as NAT-hoz igazodó kerettanterv célkitűzése szerint 9-10. évfolyamon a „Transzformációk, szerkesztések" témakör végére a diák "ismeri és alkalmazza a középpontos hasonlósági transzformációt" (Matematika középiskolás kerettanterv, 2020, 16. o.). A 2012-es NAT-hoz igazodó kerettantervben szintén ezeken az évfolyamokon jelenik meg a középpontos hasonlóság. (Matematika középiskolás kerettanterv, 2012)

A 10. osztályos 2020-as NAT-hoz igazodó tankönyv (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_nat2020_b/lecke_04_038) szintén két ráhangoló példa után a következőképpen határozza meg a középpontos hasonlóság fogalmát:

"Adott egy O pont és egy λ $(\lambda \neq 0)$ valós szám. A sík egy tetszőleges P pontjához a következő módon rendeljük a képét:

- ha $P = O$, akkor a P pont képe önmaga;
- ha $P \neq O$, akkor a P pont képe legyen az OP egyenesnek az a P' pontja, amelyre $OP' = |\lambda| \cdot OP$, azaz az OP' szakasz hossza $|\lambda|$-szorosa az OP szakasz hosszának.

Ha λ pozitív, akkor a P' pont az OP félegyenesen van, azaz az O ponttól azonos irányban van P és P', ha pedig λ negatív, akkor P és P' pontok az O ponttól ellentétes irányban vannak. (Azaz az O pont „elválasztja" P -t és P'-t.)"

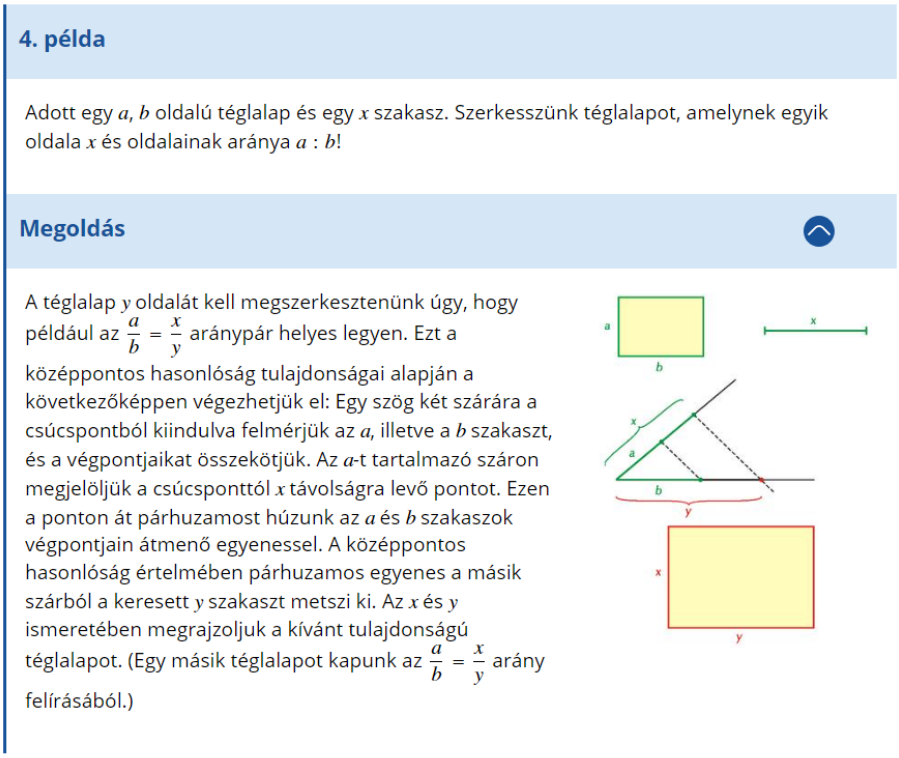


13. ábra: Tankönyvi illusztráció a definíció megértéséhez (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_nat2020_b/lecke_04_038)

Megfogalmazásra kerül továbbá egy állítás (bizonyítás nélkül):

“Középpontos hasonlóságnál minden szakasz képe az eredeti szakasznak $|\lambda|$-szorosa.”

A tankönyvben egy példán keresztül a negyedik arányos szerkesztése is megjelenik.



4. példa

Adott egy a, b oldalú téglalap és egy x szakasz. Szerkesszünk téglalapot, amelynek egyik oldala x és oldalainak aránya $a : b$!

Megoldás

A téglalap y oldalát kell megszerkesztenünk úgy, hogy például az $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ aránypár helyes legyen. Ezt a középpontos hasonlóság tulajdonságai alapján a következőképpen végezhetjük el: Egy szög két szárára a csúcspontból kiindulva felmérjük a, illetve a b szakaszt, és a végpontjaikat összekötjük. Az a-t tartalmazó száron megjelöljük a csúcsponttól x távolságra levő pontot. Ezen a ponton át párhuzamost húzunk az a és b szakaszok végpontjain átmenő egyenessel. A középpontos hasonlóság értelmében párhuzamos egyenes a másik szárból a keresett y szakaszt metszi ki. Az x és y ismeretében megrajzoljuk a kívánt tulajdonságú téglalapot. (Egy másik téglalapot kapunk az $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ arány felírásából.)

14. ábra: Tankönyvi példa a negyedik arányos szerkesztéséről (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_nat2020_b/lecke_04_038)

A 2020-as NAT alapján összeállított tankönyvben a középpontos nagyítás és kicsinyítés, továbbá a középpontos hasonlóság egy leckében jelennek meg rövid bevezetéssel, szemléltető ábrákkal, több példával és interaktív, azonnali visszajelzést adó feladatokkal. Azonban a korábbi, 2012-es NAT-hoz igazodó tankönyvben a középpontos nagyítás és kicsinyítés (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_2_nat2020/lecke_09_067), majd a közép-

pontos hasonlóság (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_2_nat2020/lecke_09_068) két külön lecke. A középpontos nagyítás és kicsinyítés leckében hosszas bevezetéssel, és gyakorlati példákkal találkozhatunk, a középpontos hasonlóság leckében pedig inkább elméleti leírások láthatók. Alapvető felépítésbeli különbség a 2020-as tankönyvhöz képest az, hogy a lecke a hasonlóság arányát először pozitív számként definiálja, majd csak később magyarázza el, hogy mi van, ha az arány negatív. Arra nem tér ki, hogy mi történik, ha az arány 0.

Osztatlan tanárképzés

Az egyetemi tételek és definíciók dolgozatban szereplő számozása az eredeti, jegyzetben szereplő számozás. A számozásból is látható, hogy a dolgozatomban nem az egyetemi, hanem a közoktatásban használatot elméleti sorrendet követtem. A tanár úr az egyetemi tananyag felépítésében először absztrakt módon fogalmazza meg a hasonlóság fogalmát[3], majd utána adja meg a konstruktív definíciót, míg a közoktatásban ez fordítva történi, hogy a diákok számára könnyebben érthetővé váljon az ismeretanyag.

Az egyetemi matematikában a következőképpen definiáltuk a középpontos hasonlóságot:

"**2. 8. Definíció.** Legyen adott a térben egy O pont és egy λ ($\lambda \neq 0$) valós szám. Az O centrummal és λ előjeles aránnyal meghatározott középpontos hasonlóságon (vagy más szóval centrális hasonlóságon) azt a $\kappa: X \to X$ leképezést értjük, ahol $\kappa(O) = O$ és egy tetszőleges P ($P \neq O$) pont $P' = \kappa(P)$ képét az alábbi feltételek határozzák meg:

(1) Ha $\lambda > 0$, akkor P' rajta van az $[O, P\rangle$ félegyenesen. Amennyiben $\lambda < 0$, akkor P' az $\langle \mathrm{O}, \mathrm{P} \rangle$ egyenesnek a másik O kezdőpontú félegyenesén van.

(2) Az O, P' pontok távolságára fennáll a $d(O, P') = |\lambda| \cdot d(O, P)$ összefüggés." (Verhóczki, 2021., 35. o.)

„**2. 9. Állítás.** Legyen adott egy $\kappa : X \to X$ középpontos hasonlóság, melynek centruma az O pont és előjeles aránya λ. Tekintsük a térnek az O pontra történő $\tau : X \to X$ tükrözését.

[3] „2.4. Definíció. Egy $\eta: X \to X$ bijektív leképezést hasonlósági transzformációnak (vagy más szóval hasonlóságnak) nevezünk, ha van olyan λ pozitív valós szám, hogy tetszőleges A, B pontok esetén fennáll a $d(\eta(A), \eta(B)) = \lambda \cdot d(A, B)$ összefüggés.
Amennyiben a η leképezés egy hasonlóság, akkor a λ számot az η arányának mondjuk." (Verhóczki, 2021., 33. o.)

Ez esetben a $\kappa \circ \tau = \tau \circ \kappa$ szorzatleképezés azt a centrális hasonlóságot adja, amelynek középpontja O és előjeles aránya $-\lambda$.” (Verhóczki, 2021., 35. o.)

„**2. 10. Tétel.** Egy O középponttal és egy λ ($\lambda \neq 0$) előjeles aránnyal meghatározott $\kappa: X \to X$ középpontos hasonlóságra igazak az alábbi kijelentések:

(1) A κ leképezés egy hasonlósági transzformáció az $|\lambda|$ aránnyal.

(2) A κ bármely egyenest azzal párhuzamos egyenesbe vagy önmagába, szakaszt szakaszba képez.

(3) A κ leképezés tetszőleges síkot azzal párhuzamos síkba vagy önmagába képez.

(4) A κ egy félegyenest azzal egyező irányú félegyenesbe képez, ha fennáll $\lambda > 0$. Ha a λ értéke negatív, akkor κ egy félegyenest azzal ellentétes irányú félegyenesbe visz.” (Verhóczki, 2021., 36. o.)

Az egyetemi tananyagban szereplő tételek és állítások nagy részét be is bizonyítjuk. Ezekben a bizonyításokban a bonyolult matematikai nyelvezeten és az összefüggések, illetve a korábbi ismeretek felhasználásán kívül nehézséget jelent a megértéshez szükséges magas absztrakciós szint, ezért középiskolában, ha szerepelnek is hasonló tételek és állítások, jórészt csak elfogadjuk őket, eszközök szűkében bizonyítások nem szerepelnek.

A hasonlóság és a háromszögek hasonlóságának matematikája a hatályos tantervekben, illetve egyetemi felépítésben

A hasonlóság és a háromszögek hasonlóságának témakörében is átnéztem a korábbi és a jelenlegi NAT-hoz igazodó kerettanterveket, a korábbi és a jelenlegi NAT-ra épülő tankönyveket, illetve Verhóczki tanár úr jegyzetét, a következőkben ezekről írok.

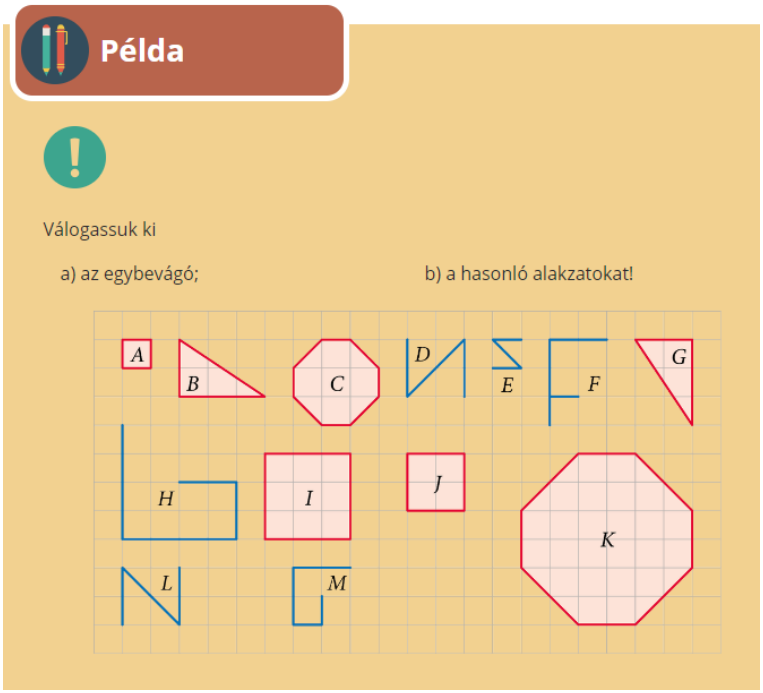
Általános iskola

A középpontos hasonlósággal kapcsolatos előzőleg leírt 2020-as NAT-hoz igazodó kerettantervi (Matematika általános iskolás kerettanterv, 2020) célkitűzések tekinthetők érvényesnek a hasonlósággal kapcsolatban is. A háromszögek hasonlóságának ismeretével kapcsolatban nincsenek megfogalmazott célitűzések a 2020-as NAT-ban. A 2012-es NAT célkitűzései (Matematika általános iskolás kerettanterv, 2012) a témakörben hasonlóak a 2020-aséhoz, a 2012-es NAT-hoz igazodó tankönyv (https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_8/lecke_02_007) azonban jóval bővebb ismeretanyagot közöl (amit később ki is fejtek)

sőt, a hasonlóságra vonatkozó leckét is másképp helyezi el a geometria témakörön belül. Míg az újabb tankönyvben (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika-8-nat2020/lecke_02_004) a hasonlóság a középpontos hasonlóság előtt kerül említésre, addig a régebbi tankönyv először a középpontos hasonlóságot, majd ezt követően a hasonlóságot tárgyalja.

A 8. osztályos 2020-as NAT-hoz igazodó tankönyvben a hasonlóság megjelenik, de nem, mint transzformációk egymásutánja, hanem inkább ismeretterjesztő tananyagként, amiben a tanulók tapasztalataira és megérzéseire alapoz a tankönyv. Definíciók nem kerülnek kimondásra, a hasonlóság aránya sincs megmagyarázva, de többször is szerepel a tananyagban (modellautók, alaprajzok méretaránya). Az általános iskolások nagy része nincs azon az absztrakciós szinten, hogy megértse a hasonlóságot, vagy akár a háromszögek egybevágóságának alapeseteit, ezáltal a háromszögek hasonlósági és egybevágósági esetei közötti analógiát is nehezebben értik meg.

A bevezető után egy olyan példa következik, ami számomra elég nagy ugrásnak tűnik ahhoz képest, hogy előzőleg csak érzékeltetni próbálta a tankönyv a hasonlóság fogalmát.



15. ábra: Tankönyvi példa (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika-8-nat2020/lecke_02_004)

Ezzel szemben a korábbi, 2012-es NAT-hoz igazodó tankönyv számos információval ellátja a tanulókat mind a hasonlósággal, mind a háromszögek hasonlóságával kapcsolatban.

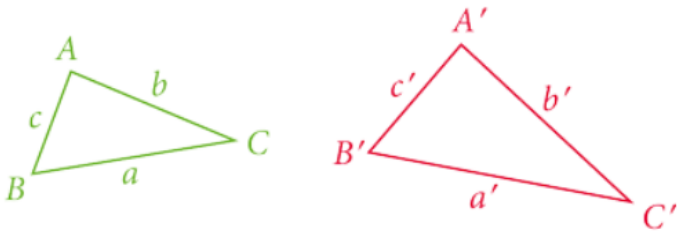
Definiálja a hasonlóságot, mint „egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció” egymásutánja, illetve szót ejt a hasonlóság arányáról is, ami a „középpontos hasonlóságban szereplő arányszám abszolút értéke lesz”. (NKP – NAT 2012) Említésre kerülnek a hasonlóság tulajdonságai, hogy mikor lesz egy transzformáció hasonlósági transzformáció, illetve, hogy mikor mondunk két alakzatot hasonlónak.

A 2012-es NAT-hoz igazodó tankönyv a hasonlóság leckén belül tárgyalja a háromszögek hasonlóságát is, mondván, hogy „két alakzat hasonlóságának megmutatása ilyen módon nehézkes és hosszadalmas. Megkönnyítik azonban a munkánkat a háromszögekre vonatkozó állítások, amelyeket most bizonyítás nélkül elfogadunk.” (NKP – NAT 2012)

A tankönyvben mind a 4 hasonlósági alapeset szövegesen leírva, illetve ábrával és jelölésekkel is szerepel, én magam is ezeket használtam fel tanítási gyakorlat során a háromszögek hasonlósági alapeseteinek ismertetéséhez.

1. „Ha két háromszögben a megfelelő oldalhosszak aránya egyenlő, akkor a két háromszög hasonló.

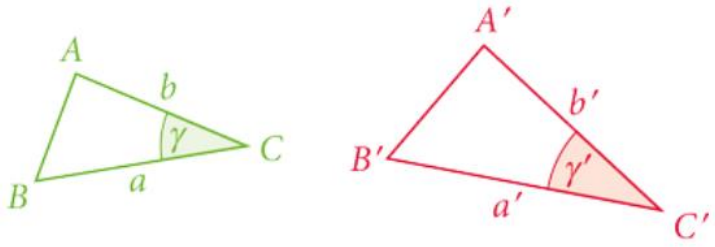
   Ha $a : a' = b : b' = c : c'$, akkor $ADC \triangle\sim A'B'C' \triangle$.” (NKP – NAT 2012)



16. ábra: Tankönyvi illusztráció az 1. hasonlósági alapesethez (https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_8/lecke_02_007)

2. „Ha két háromszögben két-két megfelelő oldalhossz aránya egyenlő, és az ezek által közrefogott szögek is egyenlők, akkor a két háromszög hasonló.

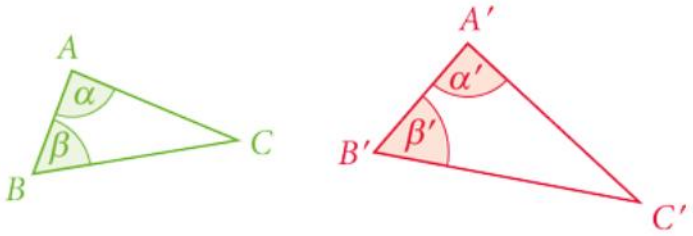
   Ha $a : a' = b : b'$ és $\gamma = \gamma'$, akkor $ADC \triangle\sim A'B'C' \triangle$.” (NKP – NAT 2012)



17. ábra: Tankönyvi illusztráció a 2. hasonlósági alapesethez (https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_8/lecke_02_007)

3. „Ha két háromszögben két-két szög egyenlő, akkor a két háromszög hasonló.

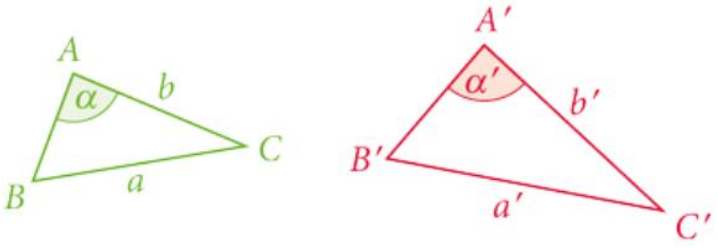
   Ha $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, akkor $ADC \triangle\sim A'B'C' \triangle$.” (NKP – NAT 2012)



18. ábra: Tankönyvi illusztráció a 3. hasonlósági alapesethez (https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_8/lecke_02_007)

4. „Ha két háromszögben két-két megfelelő oldalhossz aránya egyenlő, és e két-két oldal közül a hosszabbal szemközti szögek is egyenlők, akkor a két háromszög hasonló.

   Ha $a: a' = b: b'$ $a > b$, és $\alpha = \alpha'$, akkor $ADC \triangle\sim A'B'C' \triangle$.” (NKP – NAT 2012)



19. ábra: Tankönyvi illusztráció a 4. hasonlósági alapesethez (https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_8/lecke_02_007)

Megjegyzem, hogy a tankönyvben a hasonlósági alapesetek jelölésekkel való leírásába valószínűleg egyszerű elírási hiba csúszott a tankönyvben. Minden alapesetben a következményként megfogalmazott $\mathrm{ADC} \triangle\sim \mathrm{A'B'C'} \triangle$ helyett a helyes következmény az, hogy $\mathrm{ABC} \triangle\sim \mathrm{A'B'C'} \triangle$.

Bevallom őszintén, hogy tanítási gyakorlatom során nem jutottam el a felfedezésig, de szakdolgozatom írása közben ráeszméltem, hogy a háromszögek hasonlóságának 3. alapesetében kifejezetten nehéz az analógia megértése az egybevágósági alapesetekhez képest. A többi alapesetnél elegendő csupán az „oldalhosszak egyenlők" kifejezések közé beszúrni az „aránya" szót, ebben az esetben, azonban eltűnik az, hogy „1-1 oldal hossza egyenlő", hiszen értelme sincs azt mondani, hogy „1-1 oldal hosszának aránya egyenlő". Mégis, talán ez a legfontosabb hasonlósági alapeset, hiszen a gyakorló feladatok nagy részében ezt kell kihasználni a megoldás megtalálásához.

Más szempontból is hasznos volt számomra a dolgozat írása, hiszen konzulensemmel beszélgettünk róla, hogy a 2. hasonlósági alapeset kapcsán például érdemes lehet megvizsgálni emelt szinten, hogy hogyan vihető egymásba a két háromszög, melyben két-két oldalhossz aránya egyenlő, és az általuk közrefogott szögek nagysága egyenlő. A művelet tulajdonképpen egy eltolással és szükség esetén egy tükrözéssel megoldható, ezután már csak észre kell venni a megfelelő középpontos hasonlósági transzformációt, de a tanulók megértéséhez és matematikai szemléletéhez ez jelentősen hozzájárul.

Középiskola

A 2020-as NAT-hoz igazodó kerettanterv célkitűzése szerint 9-10. évfolyamon a „Transzformációk, szerkesztések" témakör végére a diák "ismeri és alkalmazza a … hasonlósági transzformációt és az alakzatok hasonlóságát" (Matematika középiskolás kerettanterv, 2020, 16. o.). Ezen kívül a „Fejlesztési feladatok és ismeretek" között szerepel, hogy „a hasonlóság fogalmának ismerete és alkalmazása feladatok megoldásában, tételek bizonyításában", továbbá „gyakorlati feladatok megoldása hasonlóság segítségével (például alaprajz-, térképkészítés, modellezés)." (Matematika középiskolás kerettanterv, 2020, 16. o.) A háromszögek hasonlósági alapeseteinek ismerete nem szerepel a 2020-as NAT-ban. A 2012-es NAT-hoz igazodó kerettanterv (Matematika középiskolás kerettanterv, 2012) célkitűzései a témakörben hasonlóak a 2020-aséhoz annyi eltéréssel, hogy a 2012-es kerettantervben a háromszögek hasonlóságának alapesetei is szerepelnek elsajátítandó ismeretként.

A 2020-as NAT-hoz igazodó tankönyv (https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_nat2020_b/lecke_04_040) a hasonlóságot a következőképpen definiálja: „a geometriai transzformációt hasonlósági transzformációnak nevezzük, ha aránytartó, azaz minden szakasz és képe hosszának az aránya egyenlő." (NKP – NAT 2020) A tankönyv a hasonlóságot, mint transzformációk egymásutánját emelt szintű anyagként tárgyalja.

Az általános iskolás leckével ellentétben, itt hosszasan tárgyalja a tankönyv a hasonlósággal kapcsolatos definíciókat és állításokat, jóval kevesebb szemléltetéssel.

A tankönyvi tananyagban szerepelnek a következő elemek:

- Definíció: „A hasonlósági transzformációban szereplő középpontos hasonlóság arányát a hasonlósági transzformáció arányának nevezzük.” (NKP – NAT 2020)
- A hasonlóság tulajdonságai:
  - „Egyenes képe egyenes. Egybevágósági transzformációnál is, középpontos hasonlóságnál is egyenes képe egyenes. A két transzformáció egymásutánja ezt a tulajdonságot nem változtatja meg.” (NKP – NAT 2020)
  - „A hasonlósági transzformáció szögtartó (az egybevágósági transzformáció is, a középpontos hasonlóság is az volt).” (NKP – NAT 2020)
  - „A hasonlósági transzformáció az alakzat bármely PQ szakaszának hosszát $|\lambda| \cdot PQ$ hosszúságúra változtatja. (A hasonlósági transzformáció aránytartó.)” (NKP – NAT 2020)
- Állítás: „ha egy transzformáció minden szakasznak a hosszúságát $|\lambda|$-szorosára változtatja, akkor az egy hasonlósági transzformáció.” (NKP – NAT 2020)
- Definíció: „Hasonlónak nevezünk két alakzatot, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely az egyik alakzatot a másikba viszi át.” (NKP – NAT 2020)
- Következmény: „két hasonló alakzatban a megfelelő szakaszok aránya állandó.” (NKP – NAT 2020)
- További következmények:
  - Bármely alakzat hasonló önmagához (hiszen hasonlósági transzformáció az identitás is).
  - „Ha az $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$, akkor az $A'B'C\triangle \sim ABC\triangle$.” (NKP – NAT 2020) (szimmetria)
  - „Ha az $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$ és az $A'B'C'\triangle \sim A''B''C''\triangle$, akkor az $ABC\triangle \sim A''B''C''$.” (NKP – NAT 2020) (tranzitivitás)

A leckén belül kerül tárgyalásra a háromszögek hasonlóságának 4 alapesete is:

„Két háromszög hasonló, ha

- megfelelő oldalaik aránya egyenlő,
- egy-egy szögük s az ezt közrefogó oldalaik aránya egyenlő,
- két-két szögük páronként egyenlő,
- két-két oldaluk aránya és e két-két oldal közül a nagyobbikkal szemközt levő szögük egyenlő.” (NKP – NAT 2020)

Meglepetésemre a 2012-es NAT-hoz igazodó tankönyv (https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_2/lecke_06_056) kevesebb elméletet tartalmaz az új tankönyvhöz képest, a lényegi pontok a hasonló sokszögek területének és kerületének, illetve hasonló testek felszínének és térfogatának aránya, a hasonlósági transzformáció definíciója és tulajdonságai.

Osztatlan tanárképzés

„**2. 4. Definíció.** Egy $\eta: X \to X$ bijektív leképezést hasonlósági transzformációnak (vagy más szóval hasonlóságnak) nevezünk, ha van olyan λ pozitív valós szám, hogy tetszőleges A, B pontok esetén fennáll a $d(\eta(A), \eta(B)) = \lambda \cdot d(A, B)$ összefüggés.

Amennyiben a η leképezés egy hasonlóság, akkor a λ számot az η arányának mondjuk.” (Verhóczki, 2021., 33. o.)

„**2. 12. Tétel.** Egy λ arányú η hasonlósági transzformáció mindig előáll egy ϕ egybevágóság és egy λ arányú κ középpontos hasonlóság $\phi \circ \kappa$ szorzataként.

Bizonyítás.

Legyen adva egy $\eta: X \to X$ hasonlóság, amelynek az aránya λ.

Válasszunk a térben egy O pontot. Tekintsük azt a $\hat{\kappa}$ középpontos hasonlóságot, amelynek a centruma O és az aránya $\frac{1}{\lambda}$. Ekkor az $\eta \circ \hat{\kappa}$ szorzatleképezés egy olyan hasonlósági transzformáció, amelynek az aránya 1. Eszerint a $\phi = \eta \circ \hat{\kappa}$ leképezés egy egybevágóság.

Vegyük most azt a κ középpontos hasonlóságot, amelynek szintén az O pont a centruma, de az aránya λ. Nyilvánvaló, hogy κ és $\hat{\kappa}$ inverz-leképezései egymásnak, vagyis fennáll $\hat{\kappa} \circ \kappa =$

id. Ezáltal azt kapjuk, hogy $\phi \circ \kappa = (\eta \circ \hat{\kappa}) \circ \kappa = \eta \circ (\hat{\kappa} \circ \kappa) = \eta \circ id = \eta$ teljesül. Ily módon beláttuk, hogy η előáll a ϕ egybevágóság és a κ centrális hasonlóság szorzataként, vagyis igaz $\eta = \phi \circ \kappa$." (Verhóczki, 2021., 38. o.)

„**2. 13. Tétel.** Tetszőleges η hasonlóságra teljesülnek az alábbi kijelentések.

(1) Egyenest egyenesbe, szakaszt szakaszba és síkot síkba képez, továbbá η megőrzi az egyenesek és a síkok párhuzamosságát.

(2) Bármely szöget azzal egyenlő mértékű szögbe képez.

Bizonyítás:

Vegyünk egy $\eta: X \to X$ hasonlósági transzformációt. A *2.12. Tétel* alapján van olyan ϕ egybevágóság és κ középpontos hasonlóság, hogy η megegyezik ezek $\phi \circ \kappa$ szorzatával, azaz fennáll $\eta = \phi \circ \kappa$. Az előző vizsgálataink során már beláttuk, hogy κ-ra igazak az (1), (2) kijelentések. Emellett ezek teljesülnek bármely egybevágósági transzformációra.

Ennek következtében (1) és (2) igazak az $\eta = \phi \circ \kappa$ hasonlóságra is." (Verhóczki, 2021., 39. o.)

„**2. 14. Definíció.** Legyen adva két alakzat $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$. Ezeket egymással hasonlóaknak mondjuk, ha van olyan $\eta: X \to X$ hasonlósági transzformáció, amellyel fennáll $\eta(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$." (Verhóczki, 2021., 39. o.)

„**2. 15. Állítás.** Legyenek $A_1B_1C_1 \triangle$ és $A_2B_2C_2 \triangle$ olyan háromszögek, melyekhez létezik olyan $\eta: X \to X$ hasonlósági transzformáció, hogy fennáll $\eta(A_1) = A_2, \eta(B_1) = B_2$ és $\eta(C_1) = C_2$. Ekkor a háromszögek szögeire és oldalaira teljesülnek az $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$ és $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$ összefüggések.

Bizonyítás.

Világos, hogy az η hasonlóság az első háromszöget a másodikba viszi. Mivel a hasonlóság szögtartó, a háromszögek szögei páronként egyenlőek.

Jelölje λ az η hasonlóságnak az arányát. Mivel η az $A_1B_1C_1 \triangle$ oldalait az $A_2B_2C_2 \triangle$ oldalaiba képezi, fennáll $a_2 = \lambda \cdot a_1, b_2 = \lambda \cdot b_1$ és $c_2 = \lambda \cdot c_1$. Ezekből pedig adódik, hogy teljesül $\lambda = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$." (Verhóczki, 2021., 39. o.)

„**2. 16. Tétel.** Legyen adott két háromszög $A_1B_1C_1 \triangle$ és $A_2B_2C_2 \triangle$. Létezik olyan hasonlóság, amely az A_1 pontot A_2-be, a B_1 pontot B_2-be és a C_1 pontot C_2-be viszi, amennyiben az alábbi négy feltételrendszer közül legalább az egyik teljesül:

(1) $\alpha_1 = \alpha_2$ és $\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$.

(2) $\alpha_1 = \alpha_2$ és $\beta_1 = \beta_2$.

(3) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ és $\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$.

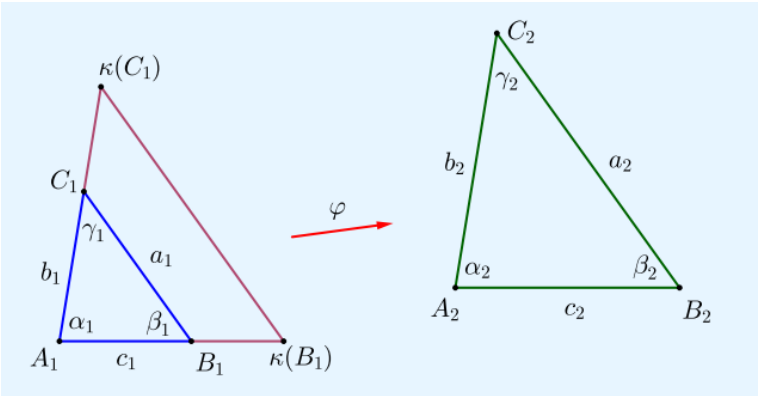
(4) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$ és $\beta_1 = \beta_2$, továbbá $b_1 \geq c_1$.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy a megadott négy feltétel közül az egyik teljesül.

Vegyük azt a κ középpontos hasonlóságot, amelynek centruma az A_1 csúcs és az aránya $\lambda = \frac{c_2}{c_1}$. Az első háromszög csúcsainak a κ szerinti képei legyenek $\hat{A}_1 = A_1, \hat{B}_1 = \kappa(B_1)$ és $\hat{C}_1 = \kappa(C_1)$. Világos, hogy az $\hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1 \triangle$ háromszög $\hat{c}_1 = \hat{A}_1\hat{B}_1$ oldalára fennáll $\hat{c}_1 = c_2$, a szögeire pedig igaz $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1, \hat{\beta}_1 = \beta_1$ és $\hat{\gamma}_1 = \gamma_1$.

Tekintsük az $\hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1 \triangle$ és $A_2B_2C_2 \triangle$ háromszögek megegyező geometriai adatait. Az *1.39.* és *1.53. Tételek* felhasználásával mind a négy esetben belátható, hogy van olyan ϕ egybevágósági transzformáció, amely az $\hat{A}_1, \hat{B}_1, \hat{C}_1$ ponthármast az A_2, B_2, C_2 ponthármasba képezi, vagyis az $\hat{A}_1\hat{B}_1\hat{C}_1 \triangle$ háromszöget az $A_2B_2C_2 \triangle$ háromszögbe viszi. Vegyük most a $\eta = \phi \circ \kappa$ szorzatleképezést. Világos, hogy ezen η hasonlósági transzformációra teljesül $\eta(A_1) = A_2, \eta(B_1) = B_2$ és $\eta(C_1) = C_2$, ami igazolja a tételt.” (Verhóczki, 2021., 40. o.)



20. ábra: illusztráció a tétel bizonyításához (Verhóczki, 2021., 40. o.)

A *2. 16. Tétel* bizonyításában felhasznált tételek alább olvashatók.

„**1. 39. Tétel.** Legyen adott két háromszög $A_1B_1C_1 \triangle$ és $A_2B_2C_2 \triangle$. Létezik olyan egybevágóság, amely az A_1 pontot A_2-be, a B_1 pontot B_2-be és a C_1 pontot C_2-be viszi, amennyiben az alábbi két feltételrendszer közül legalább az egyik teljesül:

(1) $A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$ és $\alpha_1 = \alpha_2$.

(2) $A_1B_1 = A_2B_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ és $\beta_1 = \beta_2$." (Verhóczki, 2021., 16. o.)

Továbbá az előbbi tételhez kapcsoló „**1.53. Tétel.** Legyen adott két háromszög $A_1B_1C_1 \triangle$ és $A_2B_2C_2 \triangle$. Létezik olyan egybevágóság, amely az A_1 pontot A_2-be, a B_1 pontot B_2-be és a C_1 pontot C_2-be viszi, amennyiben az alábbi két feltételrendszer közül legalább az egyik teljesül:

(3) $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ és $c_1 = c_2$.

(4) $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ és $\alpha_1 = \alpha_2$, továbbá $a_1 \geq b_1$." (Verhóczki, 2021., 23. o.)

A Bevezetés a geometriába című kurzuson Verhóczki László tanár úrral a hasonlóság alkalmazásaként bizonyítottuk a Pitagorasz-tételt, illetve további, a háromszögre vonatkozó állításokat is.

Ebben a témakörben úgy gondolom, szépen látszik az elnyújtott tanulás íve, amely tulajdonképpen csak egyetemen fut ki. A 2020-as NAT-hoz igazodó tankönyvben például általános iskolában a tanulók megismerkednek a hasonlósággal, igyekeznek megérteni azt tapasztalás és feladatok által, középiskolában már szóba kerülnek a háromszögek hasonlóságának alapesetei, melyeket csak elfogadnak, az egyetemen pedig megtanulják, hogy mi áll a háromszögek hasonlóságának alapesetei mögött, miért teljesülnek.

A fenti tételeket középiskolában szemléletből elfogadjuk, hiszen egyrészt a diákok absztrakciós szintje nem elég magas, másrészt hiányában vannak a megfelelő ismereteknek, mint például a függvénykompozíció vagy az inverz leképezés.

Összegzés

Összefoglalva szakdolgozatom fő témakörei a matematikai szorongás, a Modern Classroom Project és saját tapasztalataim, illetve az általam MCP módszerrel tanított témakör matematikájának kifejtése. Részleteztem a matematikai szorongás definícióját, komponenseit és vizsgálatának történetét, írtam a matematikai szorongás méréséről és okairól, továbbá a tanári felelősségvállalásról a szorongás csökkentésében. Kutattam a Modern Classroom Project történetével kapcsolatban, taglaltam, hogy mi is az az MCP, milyen szerepe van benne a tanárnak és megvizsgáltam Dunn kutatási eredményeit az MCP-vel kapcsolatban. Igazán érdekes pontja volt a vizsgálódásnak a 2020-as NAT átvizsgálása az MCP-vel való párhuzam keresése céljából. Leírtam, hogy a Radnóti Miklós Gyakorlóiskolában milyen gyakorlata van az MCP-nek, továbbá, hogy én mit tapasztaltam a módszerrel kapcsolatban, hogyan és mire alkalmaztam. A szakdolgozat matematikai mivoltát pedig az MCP-ben összeállított tananyag egy részének matematikai hátterének magyarázata adja.

Az utóbbi években pedagógus szüleimmel, kollégáimmal és szaktársaimmal sokszor beszélgettünk arról, hogy a gyerekek mennyit változtak. Még az én általános iskolás és középiskolás koromhoz képest is egészen mások a tanulók igényei, pedig az nem volt olyan régen. Az egyre gyakoribb és hosszabb idejű digitális impulzusok és a felgyorsult világ lecsökkentette a koncentrációs időt és az értékes tudás súlypontjait a terjedelmes lexikai tudásról a gyors és egyszerű információszerzésre helyezte át. Azonban ma is kulcsfontosságú az ismeretek alkalmazásának képessége, amelyet korszerű és rugalmas módszerekkel talán könnyebb elsajátítaniuk a tanulóknak.

A Modern Classroom Project megoldás lehet a problémára és segítségével versenyképes maradhat az oktatás az internet világában. A digitális világ egyre nagyobb térhódításában egy olyan eszközre van szükség, amely képes az oktatást digitális formába ültetni, hiszen a közelmúlt tapasztalatai (ld. pandémia) azt mutatják, hogy a jövőben egyre hangsúlyosabb lesz a digitális létforma, amihez azért érdemes alkalmazkodnia az oktatásnak is, mert a tanulók tapasztalataim szerint jól reagálnak bármilyen digitálisan is elérhető információra, tananyagra. Persze számos alternatív oktatási módszer létezik ma már a hatékony tanítás eszközeként, de az MCP kompatibilis lehet legtöbbjükkel. Ez egy olyan keretrendszer, ami képes tartós, érthető és rendszerezett tudásanyagot közvetíteni a gyerekeknek tanáraik által, akárhol is vannak és akármilyen változatosak is képességeik és munkatempójuk. Nem elhanyagolhatóak persze az elmagányosodással és a gyerekek szociális készségfejlődésének

csökkenésével kapcsolatos félelmek sem. Ez a módszer, ahogy a diákok által kitöltött kérdőívem eredményei is mutatják, elveszi a matematika felfedezéséhez és megértéséhez kapcsolódó közösségi élményt, a közös matematika „csinálás” örömét.

A Tanítsunk Magyarországért Program volt mentoraként sokszor gondoltam mentoráltjaimra, akik között bizony voltak olyanok, akik lemaradtak hosszú betegség miatt, vagy lemorzsolódtak, mert iskola helyett dolgozni kellett menniük. Negatívumai ellenére az MCP módszer talán számukra is megoldást nyújtott volna, hiszen éppen a lemaradás csökkentése és a felzárkózás lehetősége volt a fő létrehívója a módszernek.

Az iskolai és órai stressz véleményem szerint régebben is jelen volt a diákok életében, csak talán nem ilyen mértékben és nem szenteltek erre ekkora figyelmet. Naponta tapasztalom az tanulók leblokkolását egy dolgozat közben, egy feladat, vagy akár csak egy egyszerű kérdés hatására matematika órán. Persze az is igaz, hogy a matematika sokak számára rettegett tantárgy, és van, akinek már egy egyszerű óra is pánikot okoz, de nem is kell szeretnie mindenkinek a matematikát. Nagyon fontos azonban, hogy az sem kell, hogy szükségszerű legyen, hogy a diákok szorongjanak a matematikától. Tanítási gyakorlatom záró kérdőívében kapott visszajelzésekben olvasható, hogy az MCP módszerrel tartott matematika órák kellemesek voltak és félelem nélkül lehetett kérdezni. A gyerekek jól érezték magukat az órákon, ami kiemelkedő eredmény, de nekem már az is meggyőző lett volna az MCP módszerrel kapcsolatban, ha senki nem érzi magát rosszul.

Irodalom

A 2012-es NAT-hoz illeszkedő matematika kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyamára. https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/3.2.04_matemat_9-12.doc

A 2012-es NAT-hoz illeszkedő matematika kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára. https://kerettanterv.oh.gov.hu/02_melleklet_5-8/2.2.03_matemat_5-8_u.docx

A 2020-as NAT-hoz illeszkedő matematika kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyamára. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_K.docx

A 2020-as NAT-hoz illeszkedő matematika kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/kerettanterv/Matematika_F.docx

A Modern Classrom Project hivatalos honlapja: https://www.moderncLassrooms.org/approach

Ashcraft, M. H. (2002): Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. Current Directions in Psychological Science, 11. 181–185.

Ashcraft, M. H. és Faust, M. W. (1994): Mathematics anxiety and mental arithmetic performance: An exploratory investigation. Cognition and Emotion, 8. 97–125.

Bernáth László, Krisztián Ágota. (2017): A matematikai szorongás és a MAS-UK kérdőív. In: Bóna Adrien, Lénárd Katalin, Pohárnok Melinda (szerk.): Bontakozó jelentés: Tanulmányok a 60 éves Péley Bernadette köszöntésére. 393 p. Budapest: Oriold és Társai Kiadó, 2017. pp. 61-69.

Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Szeredi Éva (2016). Matematika 8. Tankönyv a 8. évfolyam számára.

Dreger, R. M., Aiken, L. R. (1957): The identification of number anxiety in a college population. Journal of Educational Psychology, 48, 6, 344-351.

Dunn, Rhiannon. (2023): The Modern Classrooms Project: Student Efficacy and Achievement". Electronic Theses and Dissertations. Paper 4166. https://dc.etsu.edu/etd/4166

Google Drive mappa, melyben az általam előállított említett tananyagok, a diákok által a gyakorlat kapcsán kitöltött értékelő űrlap eredményei, és a vezetőtanárommal készített interjún íródott jegyzetek szerepelnek. https://drive.google.com/drive/folders/1D1QEE4ds7NyDhh-OI0Thanh1yU0_15GY?usp=sharing

Gough, M. F. (1954): Matemaphobia: causes and treatments. Clearing House, 28, 290-294.

Hembree, R. (1990): The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. Journal for Research in Mathematics Education, 21, 1, 33-46.

Jakab Tamás, Kothencz Jánosné, Kozmáné Jakab Ágnes, Pintér Klára, Vincze István (2021). Sokszínű matematika tankönyv 8. osztály.

Levine, G. (1995): Closing the gender gap: Focus on mathematics anxiety. Contemporary Education, 67. 1. sz. 42–45.

Luo, X., Wang, F. és Luo, Z. (2009): Investigation and analysis of mathematics anxiety in middle school students. Journal of Mathematics Education, 2. 2. sz. 12–19.

Nemzeti Köznevelési Portál (2012) – 10. évfolyamos okostankönyv. https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_2/

Nemzeti Köznevelési Portál (2012) – 8. évfolyamos okostankönyv. https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_8/

Nemzeti Köznevelési Portál (2020) – 10. évfolyamos okostankönyv. https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_2_nat2020/

Nemzeti Köznevelési Portál (2020) – 8. évfolyamos okostankönyv. https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika-8-nat2020/

Newstead, K. (1995): Comparison of young children's mathematics anxiety across different teaching approaches. Ph.D. Dissertation, Cambridge University. Kézirat.

Nótin Ágnes, Páskuné Kiss Judit és Kurucz Győző. (2012): A matematikai szorongás személyen belüli tényezőinek vizsgálata középiskolás tanulóknál. Magyar pedagógia, 112. évf. 4. szám 221-241.

Skemp, R. R. (1975): A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat Kiadó, Budapest.

Verhóczki László. (2021): Bevezetés a geometriába. Előadásjegyzet matematikatanári szakos hallgatóknak.

Wigfield, A. és Meece, J. L. (1988): Math anxiety in elementary and secondary school students. Journal of Educational Psychology, 80. 210–216.

Wolf, R., Eisinger, J., & Ross, S. (2020): The modern classrooms project: Survey results for the 2019-20 school year. Johns Hopkins School of Education Center for Research and Reform in Education.