Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Szakdolgozat

Valós függvények és polinomok versenyfeladatokban

Témavezető:
Besenyei Ádám
Egyetemi docens

Készítette:
Miskei Ferenc István
Angol nyelv és kultúra tanára,
matematikatanár
Osztatlan tanári mesterszak

Budapest, 2021

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott Miskei Ferenc István (név)

YC62W7 (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE Angol nyelv és kultúra tanára, matematikatanár osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 20 21. 04. 27.

Miskei Ferenc

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék **4**

Bevezetés **5**

1. Függvényegyenletek **6**
1.1. Cauchy-féle függvényegyenlet 6
1.1.1. Egy feladat az Arany Dániel Matematikaversenyről 6
1.1.2. A Cauchy-féle függvényegyenlet a racionális számok halmazán 8
1.1.3. A Cauchy-féle függvényegyenlet egy bővebb számhalmazon 8
1.1.4. A Cauchy-féle függvényegyenlet a valós számok halmazán 10
1.2. Függvényegyenletek és félcsoportok 14
1.2.1. Behelyettesítésekkel megoldható függvényegyenletek 14
1.2.2. Speciális kételemű függvénycsoportok 17
1.3. A kompozícióra vonatkozó „gyökvonás” 18
1.3.1. Az identikus leképezés „gyökei” 19
1.3.2. Speciális polinomfüggvények második gyökei 22
1.3.3. Majdnem mindenütt értelmezett gyök 27

2. Értékkészlettel kapcsolatos feladatok **29**
2.1. Korlátos intervallumon értelmezett függvények 29
2.2. A teljes számegyenesen értelmezett függvények 32
2.3. Szélsőértékkel és értékkészlettel kapcsolatos feladatok 38

3. Csebisev-polinomok versenyfeladatokban **42**
3.1. A Csebisev-polinomok értelmezése, tulajdonságaik 42
3.2. Legkisebb abszolút értékű polinomok 47
3.3. Polinomok deriváltjának abszolút értéke 50

4. Tanításmódszertani kitekintés **54**
4.1. A csoport bemutatása 54
4.2. Egy lehetséges feladatsor és tanmenetrészlet 55
4.3. Megvalósulás, reflexió 59
4.3.1. Egy előre nem látott kitérő 59
4.3.2. Végeredmény 60
4.3.3. Az online oktatás hatása a matematikatanításra 61
4.3.4. Tapasztalatok, tervek a jövőre nézve 62

Irodalomjegyzék **64**

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretnék köszönetet mondani Besenyei Ádám témavezetőmnek, aki időt és erőfeszítést nem spórolva segítette dolgozatom létrejöttét, a nagy koncepcionális kérdésektől kezdve a legapróbb részletek kidolgozásáig; valamint Richlik-Horváth Katalin vezetőtanáromnak, aki remek szakmódszertani meglátásaival nagy mértékben hozzájárult szakmai fejlődésemhez.

Köszönöm szüleimnek a feltétel nélküli, maximális támogatásukat, amit ezalatt a hat év alatt nyújtottak.

Ezenkívül szeretném hálámat kifejezni barátaimnak, akik nem egy mélypontról segítettek kimászni egyetemi éveim során, és akikkel sok felejthetetlen élményt szereztünk egymásnak.

Bevezetés

„A nagy tanár olyan általános élet- és munkaszemléletet ad a diákjainak, amivel képesek egészen különböző területeken is megállni a helyüket, olyanokon is, amikről konkrétan semmit sem tanultak az iskolában.”

–Mérő László

Egy matematikatanár pályája során nagy valószínűséggel találkozni fog olyan diákokkal, akik nála sokkal tehetségesebbek a matematikában, csak még kevesebbet tudnak. Hasonlóképpen találkozni fog előbb-utóbb olyan feladatokkal, amelyeket csak nagy nehézségek árán, vagy talán egyáltalán nem tud megoldani, annak ellenére, hogy nem szerepelnek benne felsőbb matematikai fogalmak. Ezért azt gondolom, hogy egy matematikatanárnak ezen diákokkal szemben felelőssége szaktárgyi tudását néha, lehetőség szerint minél gyakrabban nehéz feladatokkal pallérozni.

Egyetemi tanulmányaim során több hallgatótársamtól hallottam, és néha én is megfogalmaztam magamban azt a kérdést, hogy miért kell ennyi matematikát tanulnunk. Véleményem szerint a szaktanárnak a tanulók előtt az adott tudományterület képviselőjeként kell állnia. Ezért tájékozottnak kell lennie a szakterületén, és ellenpéldát kell mutatnia arra a sajnálatos közhelyre, hogy „aki nem tudja, az tanítja”. Ez természetesen nem egyenlő azzal, hogy a tanár „mindent tud”, de azt jelenti, hogy szakmailag kompetensen tudja kezelni a tehetséges gyerekek tehetséggondozását és olykor igazán fogas kérdéseit.

Témaválasztásomat jórészt ez a tanárszemlélet motiválta, ezért esett a matematika versenyfeladatokra. Emellett egyetemi tanulmányaim során leginkább a valós analízist, a lineáris algebrát, illetve absztrakt algebrát kedveltem meg, előbbiből szerencsém volt demonstrátorként is kipróbálom magamat. Ezért a versenyfeladatokon belüli további szűkítésnél ezekhez a szakterületekhez kapcsolódó témákat kerestünk a témavezetőmmel.

Az első fejezetben megismerkedünk a függvényegyenletekkel, azon belül is a Cauchy-féle függvényegyenlettel, és annak megoldásaival kapcsolatos érdekességeket járunk körül egy versenyfeladat kapcsán. Ezután bizonyos speciális alakú függvényegyenletek esetére egy viszonylag általános megoldási stratégiát mutatunk, majd a fejezet lezárásaként megismerkedünk az úgynevezett kompozícióra vonatkozó gyökvonással, és megállapítjuk néhány konkrét leképezés kompozícióra vonatkozó gyökeit.

A második fejezetben értékkészlettel kapcsolatos feladatok közül csemegézünk, jórészt a Középiskolai Matematikai Lapok különböző feladatai kapcsán. Látni fogunk néhány meglepő tulajdonsággal rendelkező függvényt, például olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú, szigorúan monoton növő függvényt, amely kizárólag irracionális számokat vesz fel.

Ezután egy különös tulajdonságokkal rendelkező polinomcsaláddal ismerkedünk meg, amelynek tagjai felbukkannak a trigonometriában, valamint egyik érdekes tulajdonságuk kapcsán numerikus közelítési eljárásokban is.

Végül a tanításmódszertani kérdésekben mélyülünk el, ismertetve az egyik feldolgozott matematikai témához kapcsolódó lehetséges tanmenetrészletet és feladatsort.

1. fejezet

Függvényegyenletek

A függvényegyenletek témája nem része a középiskolai matematika tananyagnak, azonban matematikaversenyeken gyakran bukkannak fel ilyen típusú feladatok. Ebben a fejezetben olyan versenyfeladatokat járunk körül, amelyekben függvényegyenletek szerepelnek, és megvizsgáljuk, hogy a feladatok mögött milyen mélyebb matematikai háttér rejlik.

1.1. Cauchy-féle függvényegyenlet

Az első függvényegyenlet, amelyet részleteiben vizsgálunk, egészen Augustin-Louis Cauchy, XIX. századi híres francia matematikus munkásságáig nyúlik vissza. Motivációként egy 9. osztályosoknak kitűzött versenyfeladatból indulunk ki.

1.1.1. Egy feladat az Arany Dániel Matematikaversenyről

A következő feladatot az *Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyen* tűzték ki a 2018/2019-es tanévben, 9. osztályos speciális matematika tagozaton tanuló diákok döntő feladatsorában.

1.1. Feladat. Mely $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényekre igaz, hogy tetszőleges x, y egész számokra

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + y? \tag{1.1}$$

Megoldás. A megoldást az alábbi öt rövid gondolati egységben foglaljuk össze.

- Megmutatjuk, hogy f *injektív* (azaz f minden valós számot legfeljebb egyszer vesz fel).
- Az injektív tulajdonság segítségével belátjuk, hogy f *involutív* (azaz minden x egész szám esetén fennáll az $f\big(f(x)\big) = x$ azonosság).
- Az involutív tulajdonság kihasználásával bebizonyítjuk, hogy f kielégíti az úgynevezett *Cauchy-féle függvényegyenletet*: minden $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén $f(x + y) = f(x) + f(y)$ teljesül.
- Általánosságban megvizsgáljuk, mely $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ típusú függvények tesznek eleget a Cauchy-féle függvényegyenletnek.
- Végül a Cauchy-féle függvényegyenlet összes $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ típusú megoldásának ismeretében következtetünk arra, hogy az (1.1) függvényegyenletnek mely függvények a megoldásai.

1. lépés. Tegyük fel, hogy valamely $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ esetén $f(y_1) = f(y_2)$. Ekkor az (1.1) feltétel kétszeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$f(0) + y_1 = f\big(0 + f(y_1)\big) = f\big(0 + f(y_2)\big) = f(0) + y_2,$$

ahonnan $y_1 = y_2$ adódik. Azaz, ha $f(y_1) = f(y_2)$, akkor $y_1 = y_2$, tehát f injektív tulajdonságú.

2. lépés. Az (1.1) egyenletben $x = y = 0$ választással $f(f(0)) = f(0)$, így f injektivitása miatt $f(0) = 0$. Ezután az (1.1) összefüggésből $x = 0$ helyettesítéssel, majd az imént kapott $f(0) = 0$ függvényérték figyelembevételével nyerjük, hogy minden $y \in \mathbb{Z}$ esetén

$$f\big(f(y)\big) = f(0) + y = y,$$

azaz f involutív tulajdonságú.

3. lépés. Az (1.1) összefüggésben $x \rightsquigarrow f(x)$ helyettesítéssel élve, majd az involutív tulajdonságot kétszer alkalmazva

$$f\big(f(x) + f(y)\big) = f(f(x)) + y = x + y = f\big(f(x+y)\big),$$

majd ebben f injektivitását ismét felhasználva tetszőleges $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1.2}$$

4. lépés. Most az eredeti feladattól függetlenül vizsgáljuk meg, mely $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ típusú függvények megoldásai az (1.2) függvényegyenletnek. Megmutatjuk, hogy ha egy $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a Cauchy-féle függvényegyenletet, akkor $f(x) = f(1) \cdot x$ minden x egész számra.

- Egyrészt $f(0) = 0$, ugyanis

  $$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0),$$

  ahonnan mindkét oldalból $f(0)$ kivonásával $0 = f(0)$ adódik, így valóban $f(0) = f(1) \cdot 0$.

- Valamint minden n pozitív egész szám esetén $f(n) = f(1) \cdot n$, ugyanis az (1.2) feltétel n-szeri alkalmazásával

  $$f(n) = f\big(1 + (n-1)\big) = f(1) + f(n-1) = \ldots = \underbrace{f(1) + f(1) + \ldots + f(1)}_{n \text{ darab}} = f(1) \cdot n.$$

- Továbbá minden n egész szám esetén $f(n) = -f(-n)$, hiszen

  $$0 = f(0) = f\big(n + (-n)\big) = f(n) + f(-n),$$

  így, ha $n < 0$, akkor az előző pont összefüggését a $-n > 0$ argumentumra alkalmazva

  $$f(n) = -f(-n) = -\big(f(1) \cdot (-n)\big) = f(1) \cdot n.$$

Vagyis, ha az $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti a Cauchy-féle függvényegyenletet, akkor minden x egész számra $f(x) = f(1) \cdot x$, és ezek a függvények valóban megfelelők, hiszen

$$f(x+y) = f(1) \cdot (x+y) = f(1) \cdot x + f(1) \cdot y = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

Tehát az (1.2) függvényegyenletet kielégítő $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvények pontosan az alábbi alakúak:

$$f(x) = f(1) \cdot x \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

5. lépés. Korábban beláttuk, hogy az (1.1) függvényegyenlet megoldásai mind involúciók, így az előbbi alakú függvények közül csak azok jöhetnek szóba, amelyek involúciók. Az $a = f(1)$ jelölés bevezetésével

$$x = f\big(f(x)\big) = f(ax) = a^2 x,$$

ahonnan $a^2 = 1$, vagyis $a \in \{-1, 1\}$. Így végül a két lehetséges megoldás

$$f_1(x) = x, \quad \text{valamint} \quad f_2(x) = -x.$$

Ezek kielégítik az (1.1) függvényegyenletet, hiszen f_1 visszahelyettesítésével $x + y = x + y$, valamint f_2 esetében $-(x-y) = -x + y$ adódik, melyek igazak minden $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén. □

1.1.2. A Cauchy-féle függvényegyenlet a racionális számok halmazán

Az 1.1. feladat megoldása közben valójában a következő állítást igazoltuk:

1.2. Állítás. *Egy $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ típusú függvényre akkor és csak akkor teljesül a Cauchy-féle függvényegyenlet, azaz*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{Z}), \tag{1.3}$$

ha $f(x) = f(1) \cdot x$ minden x egész szám esetén.

A következőkben megvizsgáljuk, hogy különböző értelmezési tartományok esetén milyen megoldásai lehetnek a Cauchy-féle függvényegyenletnek. Természetesen az értelmezési tartománynak zártnak kell lennie az összeadás műveletére nézve, hogy egyáltalán a függvényegyenlet bal oldala értelmes legyen. Az egész számok halmazán értelmezett megoldások megkeresése után a következő természetes kérdés, hogy vajon a racionális számok halmazán értelmezett függvények körében milyen megoldásai vannak a Cauchy-féle függvényegyenletnek.

1.3. Állítás. *Azon $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ függvények, amelyekre a Cauchy-féle függvényegyenlet fennáll, éppen az $f(x) = ax$ alakú lineáris függvények (ahol $a = f(1)$).*

Bizonyítás. Legyenek $p \in \mathbb{Z}$ és $q \in \mathbb{N}^+$. Ekkor az 1.2. állítás, valamint az (1.3) feltétel q-szori alkalmazásával

$$ap = f(p) = f\Big(q \cdot \frac{p}{q}\Big) = f\Big(\frac{p}{q}\Big) + f\Big((q-1)\frac{p}{q}\Big) = \ldots = \underbrace{f\Big(\frac{p}{q}\Big) + f\Big(\frac{p}{q}\Big) + \ldots + f\Big(\frac{p}{q}\Big)}_{q \text{ darab}} = qf\Big(\frac{p}{q}\Big)$$

adódik, ahonnan az egyenlet mindkét oldalát a $q \neq 0$ számmal osztva az

$$f\Big(\frac{p}{q}\Big) = a \cdot \frac{p}{q} \quad (p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^+)$$

egyenlőséget nyerjük. Tehát

$$f(x) = ax \quad (x \in \mathbb{Q}).$$

Az 1.1. feladat megoldásának 4. lépésében elvégzett számolás itt is igazolja, hogy ezek mind valóban megoldásai a Cauchy-féle függvényegyenletnek. □

1.1.3. A Cauchy-féle függvényegyenlet egy bővebb számhalmazon

Felmerülhet a kérdés, hogy az 1.3. állítás megfelelője vajon igaz-e akkor, ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú, azaz: ha f-re teljesül a Cauchy-féle függvényegyenlet, és az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, akkor következik-e, hogy minden x valós számra $f(x) = f(1) \cdot x$?

A válasz nemleges, azonban mielőtt ezt belátnánk, előbb megmutatjuk, hogy egy már némileg bővebb számhalmazon sem igaz, hogy csak ilyen alakú megoldás létezhet.

Tekintsük a

$$H = \{r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\} \tag{1.4}$$

halmazt.

1.4. Állítás. *Az (1.4) egyenlőséggel definiált halmazban minden elem egyértelműen írható fel $r + s\sqrt{2}$ alakban, ahol $r, s \in \mathbb{Q}$. Tehát valahányszor fennáll az*

$$r_1 + s_1\sqrt{2} = r_2 + s_2\sqrt{2} \quad (r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q})$$

egyenlőség, akkor az is igaz, hogy $r_1 = r_2$ és $s_1 = s_2$.

Bizonyítás. Legyen adott $r_1, r_2, s_1, s_2 \in \mathbb{Q}$. Ekkor az

$$r_1 + s_1\sqrt{2} = r_2 + s_2\sqrt{2}$$

egyenlőség ekvivalens azzal, hogy

$$r_1 - r_2 = (s_2 - s_1)\sqrt{2}.$$

Az egyenlet bal oldalán racionális szám áll, a jobb oldal pedig pontosan akkor racionális, ha $s_2 = s_1$. Ha pedig $s_2 = s_1$, akkor mindkét oldalon 0 szerepel, amiből $r_1 = r_2$ is következik. □

1.5. *Megjegyzés.* Világos, hogy H vektortér a $\mathbb{Q}$ test felett a szokásos műveletekre nézve, és az iménti állításból következik, hogy ennek egy bázisát alkotják az $\{1, \sqrt{2}\}$ halmaz elemei. Ez a szemlélet nagyon hasznos lesz a későbbi konstrukciók megértésében.

1.6. Példa. Legyen az $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvény úgy definiálva, hogy $f(r + s\sqrt{2}) = r$ tetszőleges $r, s \in \mathbb{Q}$ esetén. Ez a függvény jóldefiniált az 1.4. állítás alapján. Ekkor erre az f-re teljesül a Cauchy-féle függvényegyenlet, ugyanis minden

$$x = r_1 + s_1\sqrt{2} \in H \quad \text{és} \quad y = r_2 + s_2\sqrt{2} \in H$$

esetén

$$x + y = (r_1 + r_2) + (s_1 + s_2)\sqrt{2},$$

ezért

$$f(x + y) = f\big((r_1 + r_2) + (s_1 + s_2)\sqrt{2}\big) = r_1 + r_2 = f(x) + f(y). \tag{1.5}$$

Azonban f nem $x \mapsto ax$ alakú függvény, mert $f(1) = 1$, ugyanakkor $f(\sqrt{2}) = 0 \neq \sqrt{2}$.

Vajon hogyan nézhet ki az előbbi példában értelmezett függvény grafikonja?

1.7. Állítás. *Az 1.6. példában definiált f függvény grafikonja sűrű $\mathbb{R}^2$-ben, azaz tetszőleges nem elfajuló körlapba belemetsz a síkon.*

Bizonyítás. Az f függvény definíciójából tudjuk, hogy $f(r) = r$, valamint $f(s\sqrt{2}) = 0$ bármely r, s racionális számokra. Ezt azt jelenti, hogy az (r, r) és az $(s\sqrt{2}, 0)$ alakú koordinátákkal rendelkező pontok illeszkednek f grafikonjára, vagyis szemléletesen az f grafikonja sűrű az $y = x$ és az $y = 0$ egyenletű egyeneseken. Továbbá, ha az $\mathbf{u} = \big(u_1, f(u_1)\big)$ és $\mathbf{v} = \big(v_1, f(v_1)\big)$ helyvektorú pontok rajta vannak f grafikonján, akkor az (1.5) feltételt felhasználva

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \big(u_1, f(u_1)\big) + \big(v_1, f(v_1)\big) = \big(u_1 + v_1, f(u_1) + f(v_1)\big) = \big(u_1 + v_1, f(u_1 + v_1)\big),$$

így az $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ helyvektorú pont is illeszkedik f grafikonjára.

Legyen most $B = \big((x, y), \delta\big)$ az (x, y) középpontú, $\delta > 0$ sugarú körlap a síkon. Megmutatjuk, hogy léteznek olyan r, s racionális számok, amelyekre a grafikon $r + s\sqrt{2}$ abszcisszához tartozó pontja a B körlapban van:

$$\big(r + s\sqrt{2}, f(r + s\sqrt{2})\big) = (r + s\sqrt{2}, r) \in B,$$

azaz

$$\big|(x, y) - (r + s\sqrt{2}, r)\big| < \delta.$$

Mivel az $(1, 1)$ és a $(0, \sqrt{2})$ vektorok együtt bázist alkotnak $\mathbb{R}^2$-ben, így léteznek olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre fennáll, hogy

$$\lambda(1, 1) + \mu(\sqrt{2}, 0) = (x, y)$$

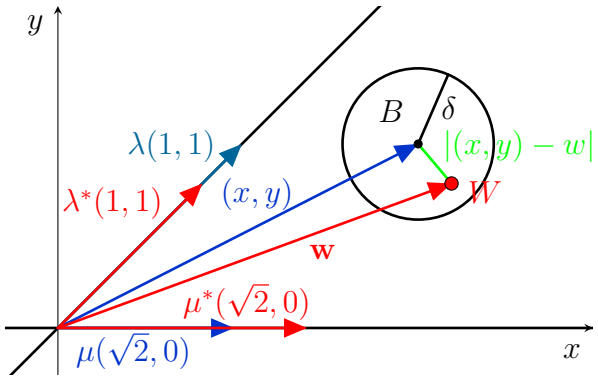
(konkrétan $\lambda = y, \mu = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$). Ekkor, ha λ^* és μ^* rendre λ-hoz és μ-höz $\frac{\delta}{2\sqrt{2}}$-nél közelebbi racionális számok, akkor

$$\mathbf{w} := \lambda^*(1,1) + \mu^*(\sqrt{2},0)$$

helyvektorú W pont az f grafikonjának egy pontja. A $\mathbf{w} \in \mathrm{graph}(f)$ helyvektorú W pont távolsága B kör középpontjától a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}|(x,y)-\mathbf{w}| &= \big|(x,y)-\big(\lambda^*(1,1)+\mu^*(\sqrt{2},0)\big)\big| = \big|\big(\lambda-\lambda^*\big)(1,1)+\big(\mu-\mu^*\big)(\sqrt{2},0)\big| \leqq \\ &\leqq \big|\big(\lambda-\lambda^*\big)(1,1)+\big(\mu-\mu^*\big)(\sqrt{2},0)\big| \leqq \big(|\lambda-\lambda^*|+|\mu-\mu^*|\big)\sqrt{2} < \\ &< \Big(\frac{\delta}{2\sqrt{2}}+\frac{\delta}{2\sqrt{2}}\Big)\sqrt{2} = \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta,\end{aligned}$$

vagyis $W \in B$ (lásd az 1.1. ábrát).



1.1. ábra. A W pont távolsága az (x,y) ponttól

Tehát a grafikon $\mathbf{w} = (\lambda^* + \mu^*\sqrt{2}, \lambda^*)$ helyvektorú W pontja benne van a B körlapban. □

1.1.4. A Cauchy-féle függvényegyenlet a valós számok halmazán

Láttuk, hogy a $H = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmazon értelmezett függvények körében nemcsak $f(x) = ax$ alakú megoldása van a Cauchy-féle függvényegyenletnek. Ez természetesen még nem feltétlen jelenti azt, hogy az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények körében is lennének $f(x) = ax$ alakútól különböző megoldások, hiszen nem biztos, hogy az 1.6. példában definiált függvény kiterjeszthető a valós számok halmazára úgy, hogy továbbra is eleget tegyen a Cauchy-féle függvényegyenletnek. Ám az 1.6. példa ötlete az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények esetében is működik. Ahogyan ott a H halmazt egy $\mathbb{Q}$ test feletti vektortérként tekintjük, úgy itt a valós számok halmazát tekintjük egy $\mathbb{Q}$ test feletti vektortérként. Ekkor, ha az f függvényt egy $\mathbb{Q}$ test feletti bázis segítségével megfelelően választjuk, úgy elérhető, hogy f eleget tegyen a Cauchy-féle függvényegyenletnek, de f nem $f(x) = ax$ alakú.

Ehhez először felidézünk néhány lineáris algebrai, valamint halmazelméleti fogalmat és tételt, amelyekre támaszkodni fogunk.

1.8. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett, $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in V$ vektorok, valamint $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ skalárok. Ekkor a $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skalárokkal vett lineáris kombinációján a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{v_k} = \lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_n \mathbf{v_n} \in V$$

vektort értjük. Fontos megjegyzés, hogy itt csak véges sok vektort adunk össze.

1.9. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Ekkor egy $\mathcal{V} \subset V$ vektorrendszerre azt mondjuk, hogy

- *lineárisan független*, ha a $\mathbf{0} \in V$ vektor csak úgy áll elő $\mathcal{V}$ elemeiből lineáris kombinációként, hogy a lineáris kombinációban szereplő minden skalár a $0 \in \mathbb{K}$,
- *generátorrendszer*, ha V minden eleme előáll $\mathcal{V}$ elemeiből lineáris kombinációként, és
- *bázis*, ha lineárisan független és generátorrendszer.

Belátható, hogy ha $\mathcal{F} \subset V$ lineárisan független vektorrendszer és $\mathcal{G} \subset V$ generátorrendszer, akkor $|\mathcal{F}| \leqq |\mathcal{G}|$, ahol az abszolút érték a halmaz számosságát jelöli. Ebből következik, hogy ha $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset V$ bázisok, akkor $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$. Az is igaz továbbá, hogy $\mathcal{B} \subset V$ pontosan akkor bázis, ha a V vektortér minden eleme egyértelműen áll elő a $\mathcal{B}$ elemeiből lineáris kombinációként. (A bizonyítások megtalálhatók például az [1] tankönyvben.)

1.10. Definíció. A V vektortér egy $\mathbb{K}$ feletti bázisának számosságát a V vektortér $\mathbb{K}$ test feletti *dimenziójának* nevezzük. Ez az iménti észrevétel alapján jól definiált, a V vektortérre és a $\mathbb{K}$ testre együttesen jellemző mennyiség, melyet szokás $\dim_{\mathbb{K}}(V)$-vel vagy egyszerűbben $\dim V$-vel jelölni, ha az nem okoz félreértést.

1.11. *Megjegyzés.* Egy vektortér dimenziója tetszőleges számosság lehet. Fontos megjegyezni, hogy végtelen dimenziós vektortér esetében is csak akkor mondjuk egy $\mathcal{B} \subset V$ vektorrendszerre, hogy generátorrendszer (speciális esetben bázis), ha V minden eleme előáll $\mathcal{B}$ elemeiből lineáris kombinációként, amely definíció szerint egy véges összeg. Így, ha $\mathcal{B}$ bázisa a $\mathbb{K}$ test feletti V vektortérnek, úgy minden $x \in V$ felírható

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} x_b b \quad (x_b \in \mathbb{K})$$

alakban, melyben csak véges sok összeadandó nem nulla (így értelmes az összeg, annak ellenére, hogy $\mathcal{B}$ tetszőleges számosságú). Ez a felírás azért hasznos, mert jól követi az elemek összeadását:

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} x_b b \quad \text{és} \quad y = \sum_{b \in \mathcal{B}} y_b b$$

esetén

$$x + y = \sum_{b \in \mathcal{B}} (x_b + y_b) b. \tag{1.6}$$

A kiválasztási axiómából bebizonyítható, hogy minden vektortérnek létezik bázisa. Pontosabban minden független rendszer kiegészíthető bázissá, és minden generátorrendszerből kiválasztható bázis. A bizonyítás nem konstruktív, csak létezést igazol. Speciálisan a valós számok halmazának mint a $\mathbb{Q}$ számtest feletti vektortérnek is létezik bázisa. Ez azt jelenti, hogy létezik a valós számoknak olyan $\mathcal{B}$ részhalmaza, amelyből minden valós szám egyértelműen előáll racionális együtthatós lineáris kombinációként. Az ilyen bázisokat szokás *Hamel-bázisoknak* hívni (lásd például a [4] egyetemi jegyzetet). A Hamel-bázisok segítségével konstruálható olyan f függvény, amelyre igaz a Cauchy-féle függvényegyenlet, de nem $f(x) = ax$ alakú.

1.12. Állítás. *A Cauchy-féle függvényegyenletnek létezik az $f(x) = ax$ alakúaktól különböző megoldása az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények körében.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}$ vektortér $\mathbb{Q}$ test feletti (egyik) bázisa. Ekkor mivel $\mathcal{B}$ bázis, minden $x \in \mathbb{R}$ egyértelműen felírható az alábbi alakban:

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} x_b b,$$

ahol az x_b számok racionális koordináták. Legyen $b_0 \in \mathcal{B}$ rögzített, és tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = f\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} x_b b\right) \coloneqq x_{b_0}.$$

Az így definiált f függvényre az (1.6) összefüggés alapján rögtön adódik, hogy f kielégíti a Cauchy-féle függvényegyenletet, ugyanis

$$f(x+y) = f\left(\sum_{b\in\mathcal{B}} \big(x_b + y_b\big) b\right) = x_{b_0} + y_{b_0} = f(x) + f(y).$$

Már csak az kell, hogy f nem $f(x) = ax$ alakú. Ez azonban világos, hiszen f értékkészlete kizárólag racionális számokból áll, és $f \not\equiv 0$, ugyanis $f(b_0) = 1$. □

A következőkben megvizsgáljuk, milyen elégséges feltételeket lehet adni, amelyek mellett a Cauchy-féle függvényegyenletnek már kizárólag az $f(x) = ax$ alakú megoldásai léteznek.

1.13. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kielégíti a Cauchy-féle függvényegyenletet, azaz minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1.7}$$

Ekkor a következők ekvivalensek:

(1) $f(x) = ax$ $(x \in \mathbb{R})$, *ahol* $a = f(1)$,

(2) f *mindenütt differenciálható,*

(3) f *az* $x = 0$ *pontban differenciálható,*

(4) f *az* $x = 0$ *pontban folytonos,*

(5) f *mindenütt folytonos,*

(6) f *minden nemelfajuló, korlátos, zárt intervallumon Riemann-integrálható (azaz lokálisan integrálható* $\mathbb{R}$*-en),*

(7) f *minden kompakt (azaz korlátos és zárt) intervallumon korlátos,*

(8) *létezik olyan nemelfajuló, korlátos, zárt intervallum, melyen* f *korlátos,*

(9) f *monoton* $\mathbb{R}$*-en.*

Bizonyítás. Világos, hogy ha (1) igaz az f függvényre, azaz $f(x) = ax$ minden x valós számra, akkor az összes többi feltétel is igaz az f függvényre.

A következő implikációk definíció szerint igazak: (2) $\Longrightarrow$ (3), (6) $\Longrightarrow$ (7) $\Longrightarrow$ (8). Továbbá ismert tételek garantálják a következőket: (3) $\Longrightarrow$ (4), (5) $\Longrightarrow$ (6) (lásd például a [6] tankönyvet). Ezenkívül (9) $\Longrightarrow$ (7) nyilvánvaló, hiszen, ha f monoton az $[a, b]$ intervallumon, akkor $k = \min\{f(a), f(b)\}$ és $K = \max\{f(a), f(b)\}$ megfelelő korlátok.

Így elegendő a (4) $\Longrightarrow$ (5) és a (8) $\Longrightarrow$ (1) implikációkat belátni, mert ekkor az alábbi következtetés-rendszer áll fenn:

$$(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (5) \Longrightarrow (6) \Longrightarrow (7) \Longrightarrow (8) \Longrightarrow (1),$$

$$(1) \Longrightarrow (9) \Longrightarrow (7) \Longrightarrow (8) \Longrightarrow (1).$$

Belátjuk, hogy a (4) $\implies$ (5) következtetés fennáll, azaz, ha f folytonos az $x = 0$ pontban, akkor folytonos mindenütt. Legyen $x \in \mathbb{R}$, ekkor a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján elegendő, hogy minden $x_n \to x$ számsorozatra $f(x_n) \to f(x)$. Ha $x_n \to x$, akkor $x_n - x \to 0$, így a 0 pontbeli folytonosság alapján, az (1.7) feltétel kihasználásával:

$$f(x_n) = f\big((x_n - x) + x\big) = f(x_n - x) + f(x) \to f(0) + f(x) = f(x) \quad (n \to +\infty).$$

Tehát a (4) $\implies$ (5) implikáció igaz.

Most megmutatjuk, hogy ha létezik olyan $[c, d]$ nemüres kompakt intervallum, melyen f korlátos, valamint f teljesíti a Cauchy-féle függvényegyenletet, akkor $f(x) = ax$. A [6] tankönyv 9.94. jelzésű feladatának útmutatása alapján tekintsük a $g(x) = f(x) - ax$ függvényt. Ekkor minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$g(x + y) = f(x + y) - a(x + y) = \big(f(x) - ax\big) + \big(f(y) - ay\big) = g(x) + g(y),$$

tehát a g függvény is kielégíti a Cauchy-féle függvényegyenletet. Továbbá, ha r racionális, akkor az 1.3. tétel alapján $f(r) = ar$, így az (1.7) feltételből és a g függvény definíciójából

$$g(x+r) = f(x+r) - a(x+r) = \big(f(x) + f(r)\big) - (ax + ar) = \big(f(x) - ax\big) + \big(f(r) - ar\big) = g(x),$$

ezért a g függvénynek minden nem nulla racionális szám periódusa. Ha az f függvény korlátos a $[c, d]$ intervallumon, akkor a g függvény is, ugyanis, ha $c \leqq x \leqq d$ és $|f(x)| \leqq K$, akkor

$$|g(x)| = |f(x) - ax| \leqq |f(x)| + |ax| \leqq K + |a| \max\{|c|, |d|\}.$$

Ebből azonban az adódik, hogy g korlátos $\mathbb{R}$-en. Valóban, mivel g függvénynek minden nem nulla racionális szám periódusa, így van olyan p periódusa, amelyre $0 < p < d - c$. Emiatt bármely $x \in \mathbb{R}$ számhoz létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$, amelyre $c \leqq x + kp \leqq d$, és ezt a feltételt felhasználva azt nyerjük, hogy

$$|g(x)| = \big|g(x + kp)\big| \leqq K + |a| \max\{|c|, |d|\} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

tehát g korlátos. Így viszont $g \equiv 0$, ugyanis, ha valamely ξ helyen $g(\xi) \neq 0$ lenne, akkor felhasználva, hogy

$$f(n\xi) = f(\xi + \xi + \ldots + \xi) = f(\xi) + f(\xi) + \ldots + f(\xi) = nf(\xi) \quad (n \in \mathbb{N}^+),$$

a

$$\xi_n := g(n\xi) = f(n\xi) - an\xi = n\big(f(\xi) - a\xi\big) = ng(\xi)$$

számsorozat nem volna korlátos, ami viszont ellentmondana g korlátosságának. □

1.14. Példa. A korábban említett 1.1. feladat megoldása során láttuk, hogy ha egy $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvény involutív és kielégíti a Cauchy-féle függvényegyenletet akkor csak $f(x) = x$ vagy $f(x) = -x$ lehet. Vajon ez teljesül-e az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények körében? A válasz ebben az esetben nemleges. Egy lehetséges konstrukció a következő.

Vegyük az $\{1\}$ halmazt, amely a $\mathbb{Q}$ test felett egy független rendszer. Minden független rendszer kiegészíthető bázissá, így $\{1\}$ is. Ennek megfelelően terjesszük ki az $\{1\}$ halmazt egy $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ Hamel-bázissá. Ekkor $\mathcal{B} \cap \mathbb{Q} = \{1\}$, ugyanis, ha a $\mathcal{B}$ halmaznak lenne legalább két racionális eleme, akkor nem lenne lineárisan független rendszer $\mathbb{Q}$ felett. Ekkor f legyen az alábbi módon definiálva: ha

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}} x_b b = x_1 \cdot 1 + \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \{1\}} x_b b,$$

akkor legyen

$$f(x) = f\left(x_1 \cdot 1 + \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} x_b b\right) := x_1 - \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} x_b b.$$

Ez a függvény eleget tesz a Cauchy-féle függvényegyenletnek, hiszen

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\left(\left(x_1 \cdot 1 + \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} x_b b\right) + \left(y_1 \cdot 1 + \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} y_b b\right)\right) = \\ &= f\left((x_1+y_1)\cdot 1 + \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} (x_b+y_b)b\right) = x_1 + y_1 - \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} (x_b+y_b)b = \\ &= \left(x_1 - \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} x_b b\right) + \left(y_1 - \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} y_b b\right) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Ezenkívül az f függvény involutív is, ugyanis felhasználva f definícióját

$$\begin{aligned} f\big(f(x)\big) &= f\left(x_1 - \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} x_b b\right) = f\left(x_1 + \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} (-x_b)b\right) = \\ &= x_1 - \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} (-x_b)b = x_1 + \sum_{b\in\mathcal{B}\setminus\{1\}} x_b b = x. \end{aligned}$$

Tehát a fenti f kielégíti a Cauchy-féle függvényegyenletet, involutív, de egyrészt $f(1) = 1$, másrészt $f(b) = -b$ minden $b \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$ esetén. Így sem $f(x) = x$, sem $f(x) = -x$ nem teljesül minden x valós számra.

1.2. Függvényegyenletek és félcsoportok

Függvényegyenletek vizsgálatakor szinte mindig szükséges különféle behelyettesítéseket végezni, amelyekből próbálunk a keresendő függvény bizonyos tulajdonságaira következtetni. A behelyettesítendő kifejezések lehetnek különböző bonyolultságúak, illetve követhetnek többféle mintázatot, attól függően, hogy milyen jellegű azonosságokat szeretnénk belátni a keresett függvényről. Ebben a szakaszban egy lehetséges módszert mutatunk be, amellyel néhány behelyettesítés után egy lineáris egyenletrendszer adódik a keresett függvényre, amelyből viszonylag könnyen megkaphatjuk azt.

1.2.1. Behelyettesítésekkel megoldható függvényegyenletek

A következő függvényegyenlet a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban (továbbiakban KöMaL) jelent meg B. 3487. jelzéssel, 2002 márciusában.

1.15. Feladat. Határozzuk meg mindazokat a pozitív valós számok halmazán értelmezett függvényeket, amelyek az értelmezési tartományukban mindenütt eleget tesznek az

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 6 \tag{1.8}$$

összefüggésnek.

Megoldás. Kézenfekvő ötlet, hogy az (1.8) egyenletben x helyére az $\frac{1}{x}$ kifejezést helyettesítsük. Így azt kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3\frac{1}{x} + 6 \quad (x > 0). \tag{1.9}$$

Az (1.8) és az (1.9) egy két egyenletből álló egyenletrendszert határoznak meg az $f(x)$, illetve $f\left(\frac{1}{x}\right)$ kifejezésekre. A második egyenlet kétszereséből az első egyenletet kivonva, majd 3-mal osztva azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{3}{x}+6\right) - (3x+6)\right) = \frac{2}{x} - x + 2 \quad (x > 0).$$

Ez valóban megoldása az (1.8) függvényegyenletnek, ugyanis visszahelyettesítve az

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x} - x + 2 + 2\left(2x - \frac{1}{x} + 2\right) = \frac{2}{x} - x + 2 + 4x - \frac{2}{x} + 4 = 3x + 6$$

egyenlőség adódik minden pozitív x esetén. □

A megoldás egyik kulcsfontosságú lépése, hogy a behelyettesítés után az f különböző argumentumainak száma nem növekedett, és így két algebrai egyenletet nyertünk két ismeretlenre ($f(x)$-re és $f\left(\frac{1}{x}\right)$-re), amelyet meg tudtunk oldani. Másképpen fogalmazva, az $\left\{x, \frac{1}{x}\right\}$ halmazból nem vezetett ki a kompozíció művelete.

Az általános tanulságok megfogalmazása előtt tekintsünk még két feladatot. Az első a [11] példatárban szereplő 1150. feladat.

1.16. Feladat. Mely $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ függvény elégíti ki az

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1. \tag{1.10}$$

függvényegyenletet?

Megoldás. Helyettesítsünk úgy, hogy az első argumentum helyére x kerüljön. Ezt úgy érhetjük el, hogy az x helyére az $x \mapsto \frac{x-1}{x}$ függvény kompozícióra vonatkozó (formális) inverzét, ami az $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Ekkor:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - x - \frac{1}{1-x} + 1 = 2 - x - \frac{1}{1-x}. \tag{1.11}$$

Továbbá mivel $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$, így az (1.11) egyenletben x helyére ismét az $\frac{1}{1-x}$ kifejezést írva

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2 - \frac{1}{1-x} - \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x} + 1. \tag{1.12}$$

Ezáltal az (1.10), az (1.11) és az (1.12) egyenletek együtt egy három egyenletből álló egyenletrendszert alkotnak az

$$f(x), \quad f\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \text{és az} \quad f\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

ismeretlenekre. Ennek az egyenletrendszernek az $f(x)$ ismeretlenre vonatkozó megoldása

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x} - x + 1\right) + \left(2 - x - \frac{1}{1-x}\right) - \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x} + 1\right)\right) = 1 - x,$$

ugyanis az első két egyenletet összeadva a bal oldalon $2f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ szerepel, így az összegből a harmadik egyenletet kivonva a bal oldalon pontosan $2f(x)$ marad.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $f(x) = 1 - x$ függvény valóban megoldása az (1.10) függvényegyenletnek. □

Egy hasonló ötletet igénylő feladat a következő, amely szintén a KöMaL-ban jelent meg, 2013 októberében, B. 4567. jelzéssel (kitűzője Kovács Béla, Szatmárnémeti).

1.17. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti az

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2-2x \tag{1.13}$$

összefüggést.

Megoldás. Helyettesítsük az (1.16) összefüggésben x helyére az $\frac{x-1}{x}$, valamint az $\frac{1}{1-x}$ kifejezéseket. Így az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{x}, \tag{1.14}$$

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{2x}{x-1}. \tag{1.15}$$

Az (1.13), az (1.14) és az (1.15) egyenletekből $f(x)$ kifejezhető az előző feladathoz hasonló módon:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{2x}{x-1}-(2-2x)\right)=\frac{x^3-x^2+2x-1}{x(x-1)},$$

amelyről az (1.13) egyenletbe visszahelyettesítve elemi (de némileg hosszadalmas) számolással ellenőrizhető, hogy valóban megoldás. □

Egy általános megoldási módszer. A fent ismertetett feladatok megoldási módszere hasonló. Különböző behelyettesítésekkel újabb és újabb egyenleteket nyerünk, amíg ki nem alakul egy olyan egyenletrendszer, amelyben az ismeretlen $f\big(g_j(x)\big)$ alakú kifejezések száma megegyezik az egyenletek számával. Ezután, ha ez az egyenletrendszer megoldható az $f(x)$ ismeretlenre, az így kapott megoldás éppen a kiindulási függvényegyenlet megoldását biztosítja. A továbbiakban ennek a módszernek az elméleti hátterét mutatjuk be.

Legyen adott egy $H\subset\mathbb{R}$ halmaz, $n\in\mathbb{N}^+$, $a_1,\dots,a_n,g_1,\dots,g_n,b\colon H\to\mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel továbbá, hogy a $g_1,\dots,g_n$ függvényekre fennáll, hogy minden $i,j\in\{1,\dots,n\}$ esetén $g_i\circ g_j=g_k$ valamely $k\in\{1,\dots,n\}$ indexre, valamint $g_1=\mathrm{id}$, vagyis a $g_1,\dots,g_n$ függvények egy egységelemes, véges *félcsoportot* alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Tekintsük ekkor az

$$a_1(x)f\big(g_1(x)\big)+a_2(x)f\big(g_2(x)\big)+\ldots+a_n(x)f\big(g_n(x)\big)=b(x)\quad(x\in H) \tag{1.16}$$

függvényegyenletet, amelyben az $f\colon H\to\mathbb{R}$ függvényt keressük. Megjegyezzük, hogy az a_j függvények némelyike lehet az azonosan 0 függvény, így esetleg az $a_j(x)f\big(g_j(x)\big)$ tag meg sem jelenik az (1.16) egyenlet bal oldalán.

Az (1.16) egy általános megoldási módszere a következő. Először is végezzük el az (1.16) egyenletben az $x\rightsquigarrow g_i(x)$ helyettesítést minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén. Így nyerünk n darab egyenletet az $f\big(g_j(x)\big)$ ismeretlen kifejezésekre. Ezen egyenletrendszer $f(x)=f\big(g_1(x)\big)$ változóra vonatkozó megoldása adja az (1.16) összes megoldását.

Persze mivel az a_j függvények némelyike lehet az azonosan 0 függvény, ezért előfordulhat, hogy a kiindulási egyenletben nem látszik az összes g_j argumentum, így a helyettesítést többször is végre kell hajtani. Erre egy példa az 1.16. feladat. A félcsoport végessége garantálja, hogy ez a módszer véges sok lépésben eredményre vezet, azonban a gyakorlatban, egy matematikaversenyen tipikusan $n\geqq 4$ esetben már igencsak nehézkesnek bizonyulhat kézzel végigszámolni a megoldást. A félcsoport végességét továbbá csak ahhoz használtuk fel, hogy az eljárás véges sok lépésben biztosan véget érjen; valójában az sem probléma, ha ez nem teljesül, amíg a kapott egyenletekből kiválasztható egy $f(x)$ változóra megoldható egyenletrendszer. Most az $n=2$ esetet vizsgáljuk meg közelebbről. Az itt megismert módszerekhez hasonlóan tárgyalható az $n=3$ eset is.

1.2.2. Speciális kételemű függvénycsoportok

1.18. Feladat. Melyek azok az $\ell(x) = ax+b$ alakú függvények, amelyekre a $G = \{\mathrm{id}, \ell\}$ halmaz egy kételemű csoportot alkot a függvénykompozíció műveletére nézve?

Megoldás. A G pontosan akkor kételemű csoport a függvénykompozíció műveletére nézve, ha $\ell \circ \ell = \mathrm{id}$ és $\ell \neq \mathrm{id}$. Ekkor az iménti feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$a(ax+b)+b = a^2x + ab + b = x \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{1.17}$$

és $a = 1$, $b = 0$ nem áll fenn egyszerre. Az (1.17) összefüggés pontosan akkor teljesül, ha $a = 1$ és $b = 0$; vagy $a = -1$ és $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ezek közül az első éppen az $\ell = \mathrm{id}$ esetnek felel meg, tehát az összes megoldás az $a = -1$ és $b \in \mathbb{R}$ esethez tartozik. Vagyis pontosan az $\ell(x) = b-x$ alakú függvények esetén alkot $G = \{\mathrm{id}, \ell\}$ kételemű csoportot a függvénykompozíció műveletére. □

1.19. Feladat. Melyek azok az r lineáris törtfüggvények, amelyekre a $G = \{\mathrm{id}, r\}$ halmaz egy kételemű csoport a függvénykompozíció műveletére?

Megoldás. A G pontosan akkor kételemű csoport a függvénykompozíció műveletére, amikor $r \circ r = \mathrm{id}$ és $r \neq \mathrm{id}$. Tegyük fel, hogy $r(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ekkor az iménti feltétel ekvivalens azzal, hogy

$$r\big(r(x)\big) = \frac{a\frac{ax+b}{cx+d}+b}{c\frac{ax+b}{cx+d}+d} = \frac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)} = \frac{(a^2+bc)x+(ab+bd)}{(ac+cd)x+(bc+d^2)} = x \quad (x \in D_{r\circ r}), \tag{1.18}$$

valamint $a = c$, $b = d = 0$ nem áll fenn egyszerre. Az (1.18) összefüggés pontosan akkor teljesül, ha

$$(a^2+bc)x+(ab+bd) = \big((ac+cd)x+(bc+d^2)\big)x \quad (x \in D_{r\circ r}).$$

Ezt az egyenletet rendezve a

$$0 = (ac+cd)x^2 + (d^2-a^2)x - (ab+bd) \quad (x \in D_{r\circ r}). \tag{1.19}$$

egyenlethez jutunk. Ez pontosan akkor áll fenn minden x esetén, ha az egyenlet jobb oldalán szereplő polinomban mind az x^2 és az x együtthatója, mind a konstans tag is 0, azaz

$$\begin{aligned} ac+cd &= 0,\\ d^2-a^2 &= 0,\\ ab+bd &= 0. \end{aligned}$$

Szorzattá alakítva

$$\begin{aligned} c(a+d) &= 0,\\ (d-a)(d+a) &= 0,\\ b(a+d) &= 0. \end{aligned}$$

Utóbbi egyenletrendszer azzal ekvivalens, hogy

$$\{c = 0 \vee a = -d\} \wedge \{d = -a \vee d = a\} \wedge \{b = 0 \vee d = -a\},$$

ami egyenértékű az alábbi egyszerűbb feltétellel:

$$\{d = -a\} \vee \{b = c = 0 \wedge d = a\}.$$

Ezt összevetve azzal, hogy $r \neq \mathrm{id}$, a $\{b = c = 0 \wedge d = a\}$ eset nem lehetséges. Vagyis az $r(x) = \frac{ax+b}{cx-a} = \frac{x+\beta}{\gamma x-1}$ alakú lineáris törtfüggvények esetén alkot G kételemű csoportot. □

Most tekintsünk egy olyan feladatot, amelyre az eddigiekben ismertetett megoldási módszer közvetlenül nem alkalmazható. Ez egy egyszerű ötletet biztosít a módszer továbbfejlesztésére.

A következő feladat a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen tűzték ki 1992-ben 11. osztályosok számára (lásd a [8] forrást).

1.20. Feladat. Határozzuk meg az $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1,1,2\}\to\mathbb{R}$ függvényt, ha

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x, \tag{1.20}$$

majd ábrázoljuk a függvényt grafikusan.

Megoldás. A korábbiakban ismertetett módszerről nem látszik, hogy megfelelően kevés lépésben működne. Ugyanis az első lépésben az x helyére az $\frac{x+1}{x-2}$ valamint az $\frac{x-2}{x+1}$ kifejezéseket helyettesítve az új argumentumok $\frac{2x-1}{-x+5}$, $\frac{-x+5}{2x-1}$, $\frac{x+4}{-2x+1}$ és $\frac{-2x+1}{x+4}$. A következő lépés után pedig még több új argumentum keletkezne.

Azonban feltűnhet, hogy az (1.20) egyenletben szereplő két argumentum egymás reciproka. Így az $y=\frac{x+1}{x-2}$ helyettesítéssel élve az (1.20) egyenlet az

$$f(y)+2f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{2y+1}{y-1} \tag{1.21}$$

alakot ölti, amely az 1.15. feladathoz hasonlóan oldható meg. Az $y\rightsquigarrow\frac{1}{y}$ helyettesítéssel az

$$2f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{y+2}{-y+1} \tag{1.22}$$

egyenlet adódik. Végül az (1.21) és az (1.22) egyenletekből álló lineáris algebrai egyenletrendszert kell megoldanunk az $f(y)$ ismeretlenre. Az (1.22) kétszereséből az (1.21) egyenletet kivonva azt kapjuk, hogy

$$3f(y)=2\frac{y+2}{-y+1}-\frac{2y+1}{y-1}=\frac{4y+5}{-y+1},$$

ahonnan a megoldás (a változó átnevezésével)

$$f(x)=\frac{4x+5}{-3x+3}\quad(x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1,2\}).$$

A megoldás helyessége ebben az esetben is némi számolás árán könnyen ellenőrizhető, a függvény grafikus ábrázolásától itt eltekintünk. □

1.21. *Megjegyzés.* Az iménti feladat általánosításaként könnyen felismerhető, hogy amennyiben egy függvényegyenletben az f argumentumai nem $\left\{x,\frac{ax+b}{cx-a}\right\}$, hanem $\left\{\varphi(x),\frac{a\varphi(x)+b}{c\varphi(x)-a}\right\}$ alakúak valamely $\varphi(x)$ invertálható függvényre, úgy az $x\rightsquigarrow\varphi^{-1}(x)$ helyettesítéssel a feladat visszavezethető egy, a már ismertetett módszerrel megoldható függvényegyenletre.

1.3. A kompozícióra vonatkozó „gyökvonás”

Ebben a szakaszban a gyökvonás szónak egy kevésbé használt értelmezését adjuk a függvénykompozíció műveletére vonatkozóan, amelyet az angol nyelvű irodalomban használt „functional root” kifejezés nyomán „kompozícióra vonatkozó gyöknek” fogunk nevezni. Megkeressük néhány speciális függvényosztály kompozícióra vonatkozó gyökeit, majd általános megoldást adunk majdnem mindenütt értelmezett, kompozícióra vonatkozó k-adik gyök megadására bármely k pozitív egész szám esetén.

1.3.1. Az identikus leképezés „gyökei”

Motivációként tekintsük az alábbi OKTV feladatot az 1975/1976-os tanévből, amelyet a szakosított matematika tantervű osztályok diákjai számára tűztek ki.

1.22. Feladat. Legyen f olyan, minden valós számon értelmezett, mindenütt folytonos függvény, amelyre tetszőleges x szám mellett igaz az, hogy $f(f(f(x))) = x$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = x$.

Megoldás. A megoldás a következő négy, rövid gondolati egységből áll:

- Belátjuk, hogy f injektív.
- Bebizonyítjuk, hogy ha egy függvény folytonos egy intervallumon, valamint injektív, akkor szükségképpen szigorúan monoton.
- Megmutatjuk, hogy f nem lehet szigorúan monoton csökkenő.
- Végül igazoljuk, hogy minden valós x esetén $f(x) > x$ és $f(x) < x$ is ellentmondásra vezet, ezért $f(x) = x$.

1. lépés. Tegyük fel, hogy valamely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén $f(x_1) = f(x_2)$. Ekkor mindkét oldalon f kétszeri alkalmazásával $x_1 = x_2$ adódik. Tehát f injektív.

2. lépés. Esetszétválasztással meggondolható, hogy amennyiben f nem szigorúan monoton, úgy léteznek $x_1 < x_2 < x_3$ valós számok, amelyekre

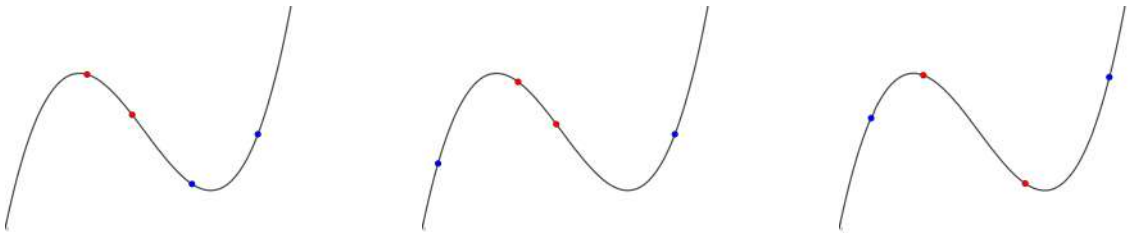
$$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3) \quad \text{vagy} \quad f(x_1) > f(x_2) < f(x_3). \tag{1.23}$$

Valóban, tegyük fel indirekt módon, hogy f nem szigorúan monoton, azaz nem szigorúan monoton növő és nem is szigorúan monoton csökkenő. Ekkor definíció szerint léteznek olyan $y_1 < y_2$, valamint $z_1 < z_2$ számok, amelyekre $f(y_1) \geqq f(y_2)$ és $f(z_1) \leqq f(z_2)$. Az f függvény injektivitását felhasználva mind a négy függvényérték különböző.

A helyzet átfogalmazható az alábbi módon: Vegyünk két piros és két kék négyzetet, ezek felelnek meg a négy helynek. A sorrendben elsőként következő piros négyzetbe, amely az y_1 helynek felel meg, nagyobb számot írunk, mint a másodikba (mert $f(y_1) > f(y_2)$), valamint a sorrendben előbb következő kék négyzetbe, amely a z_1 helynek felel meg, kisebb számot írunk, mint a másodikba (hiszen $f(z_1) < f(z_2)$). Az állításunk ekkor egyenértékű azzal, hogy ebből a négy számból álló számnégyesből kiválasztható az (1.23) feltételnek megfelelő, nem monoton számhármas.

Válasszuk ki az első számot. Ha ez a legnagyobb szám a négy közül, akkor nem lehet kék négyzetben, hiszen a kék négyzetek közül a másodikban van nagyobb szám. Ekkor, ha ehhez az első számhoz a kék négyzetekbe írt számokat választjuk, akkor biztosan egy nem monoton számhármast kaptunk. Hasonló módon, ha az első szám a legkisebb, akkor nem lehet piros négyzetben, így a másik két piros négyzetben lévő számmal együtt egy nem monoton számhármast alkot. Végül, ha az első négyzetben álló szám se nem a legnagyobb, se nem a legkisebb akkor hozzávéve a legnagyobb és a legkisebb számot ismét egy nem monoton számhármashoz jutunk. Tehát mindenképp kiválasztható az (1.23) feltételnek megfelelő $x_1 < x_2 < x_3$ számhármas.

Ekkor a Bolzano–Darboux-tétel alapján f felvesz minden értéket az $f(x_1)$ és $f(x_2)$ között; valamint az $f(x_2)$ és $f(x_3)$ között is. A függvényértékekből ily módon adódó intervallumok egyik esetben sem diszjunktak, így lenne olyan szám, amelyet f legalább kétszer felvesz, és ez ellentmondana f injektivitásának. Tehát az f függvény szükségképpen szigorúan monoton (növő vagy csökkenő) a teljes számegyenesen.



(a) első eset (b) második eset (c) harmadik eset

1.2. ábra. Az $x_1 < x_2 < x_3$ helyek kiválasztása a három különböző esetben

3. lépés. Az f függvény nem lehet szigorúan monoton csökkenő. Legyen $x_1 < x_2$, és tegyük fel indirekt módon, hogy f szigorúan monoton csökkenő. Ekkor f egymás után háromszori alkalmazásával adódnak a következő egyenlőtlenségek:

$$f(x_1) > f(x_2), \quad f\big(f(x_1)\big) < f\big(f(x_2)\big), \quad \text{és} \quad f(f(f(x_1))) > f(f(f(x_2))).$$

Ez utóbbi az $f(f(f(x))) = x$ összefüggés alapján egyenértékű azzal, hogy $x_1 > x_2$, ami ellentmond a kiindulási $x_1 < x_2$ feltételnek.

4. lépés. Végül, ha $f(x) < x$ valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor ismét az f háromszori alkalmazásával, az f szigorú monoton növekedését felhasználva a következő egyenlőtlenségek adódnak:

$$f\big(f(x)\big) < f(x), \quad f(f(f(x))) = x < f\big(f(x)\big), \quad \text{majd} \quad f(x) < x,$$

ami ellentmondás. Ha pedig $f(x) > x$ lenne valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor az előzőhöz hasonlóan az f szigorúan monoton növekvő függvény háromszori alkalmazásával az $f(x) > x$ egyenlőtlenség adódna. Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, tehát minden valós x esetén $f(x) = x$ lehetséges csak. □

1.23. *Megjegyzés.* Ha a feladatban nem követeljük meg az f folytonosságát, úgy már nemcsak az identikus leképezés jön szóba. Tekintsük azt a függvényt, amelyre $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, valamint $f(2) = 0$, és $f(x) = x$ egyébként. Világos, hogy erre $f \circ f \circ f = \mathrm{id}$, azonban $f \neq \mathrm{id}$.

Továbbá, ha a feladatban f nem háromszor van önmagával komponálva, hanem $(2k+1)$-szer ($k \in \mathbb{N}^+$), a bizonyítás minden lépése ugyanígy érvényben marad. Valóban, minden ellentmondáshoz csak azt használtuk ki, hogy a relációs jelek páratlan sokszor fordulnak meg.

Felmerülhet a kérdés, hogy vajon páros sokszor vett kompozíció esetén mi a helyzet. Tekintsük a következő kérdést.

1.24. Kérdés. Mely $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények elégítik ki az

$$f\big(f(x)\big) = x \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.24}$$

függvényegyenletet?

Válasz. Ezt a kérdést részben tárgyaltuk az 1.1. példában, ahonnan tudjuk, hogy folytonos megoldások például az $f(x) = x$ és az $f(x) = -x$, továbbá, ha a folytonosságot nem tételezzük fel, úgy léteznek patologikus megoldások is (lásd az 1.14. feladatot).

Ha f involutív, akkor az $y = f(x)$ egyenletnek tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén az x ismeretlenre nézve megoldása az $x = f(y)$, vagyis f szürjektív a valós számok halmazára nézve. Továbbá, ha f involutív, akkor injektív is, ugyanis, ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor az is fennáll, hogy

$$x_1 = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = x_2.$$

Tehát, ha f involutív, folytonos megoldása az (1.24) függvényegyenletnek, akkor invertálható, és f^{-1} is mindenütt értelmezett. Így pontosan akkor teljesül $f\big(f(x)\big) = x$, ha $f(x) = f^{-1}(x)$ igaz minden x valós számra.

Elemi függvénytanból ismert tény, hogy f és f^{-1} grafikonjai a Descartes-féle koordinátasíkon egymás tengelyes tükörképei az $y = x$ egyenesre vonatkozóan. Így $f = f^{-1}$ azt jelenti, hogy f grafikonja tengelyesen szimmetrikus az $y = x$ egyenesre. Ilyen függvény persze végtelen sok van. Az alábbi néhány egyszerűbb függvényosztály elemei eleget tesznek ennek a kritériumnak:

- $f(x) = x$,
- $f(x) = a - x \quad (a \in \mathbb{R})$,
- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$,
- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x-b} + b, & \text{ha } x \neq b, \\ b, & \text{ha } x = b, \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R})$,
- $f(x) = \sqrt[3]{a - x^3} \quad (a \in \mathbb{R})$,
- $f(x) = \left(a - x^{\frac{1}{2n+1}}\right)^{2n+1} \quad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+)$.

□

1.25. *Megjegyzés.* Könnyen ellenőrizhető, hogy ha f kielégíti az (1.24) függvényegyenletet, akkor f megoldása az $f^{[4]}(x) \coloneqq f(f(f(f(x)))) = x$ függvényegyenletnek is, és megoldása általában az $f^{[2k]}(x) \coloneqq \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{2k \text{ darab}}(x) = x$ függvényegyenletnek is, ahol k tetszőleges pozitív egész szám.

Az 1.22. OKTV feladatra és az 1.24. kérdésre adott megoldások egyesítése a következő állítás, amelyet a fentiekben már be is láttunk.

1.26. Állítás. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor az*

$$f^{[n]}(x) \coloneqq \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ darab}}(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényegyenletnek pontosan akkor van az $f(x) = x$ függvénytől különböző $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos megoldása, ha n páros szám, és ekkor végtelen sok megoldása van.

Az iméntiekben vizsgált függvényegyenletek motiválják az alábbi definíciót.

1.27. Definíció. Tegyük fel, hogy egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazon teljesül az $f^{[k]}(x) = g(x)$ függvényegyenlet valamely $k \in \mathbb{N}^+$ számra. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény a g függvénynek *kompozícióra vonatkozó k-adik gyöke*. A fogalom nehezen volna egyértelműsíthető, így tipikusan az összes ilyen tulajdonsággal rendelkező f függvényt a g kompozícióra vonatkozó k-adik gyökének nevezzük.

Az 1.26. állítás azt mondja tehát, hogy a valós számok halmazán értelmezett identikus leképezésnek páros n esetén végtelen sok kompozícióra vonatkozó n-edik gyöke van, míg páratlan n esetén a kompozícióra vonatkozó n-edik gyöke egyértelmű.

1.3.2. Speciális polinomfüggvények második gyökei

Az eddigiekben az identikus leképezés kompozícióra vonatkozó gyökeivel foglalkoztunk. Most az 1.26. állítás eredményét megkíséreljük némileg általánosítani.

1.28. Kérdés. Van-e az

$$f\big(f(x)\big) = -x \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.25}$$

függvényegyenletnek (folytonos) megoldása?

Válasz. Tegyük fel, hogy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldása az (1.25) függvényegyenletnek. Ekkor f *bijektív* (kölcsönösen egyértelmű), ugyanis egyrészt az $f(x) = y$ egyenletnek tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén az x ismeretlenre nézve megoldása az $x = f(-y)$, tehát f szürjektív az $\mathbb{R}$ halmazra nézve. Másrészt pedig, ha valamely x_1, x_2 esetén $f(x_1) = f(x_2)$, akkor

$$-x_1 = f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big) = -x_2,$$

ahonnan $x_1 = x_2$ adódik, így f injektív függvény.

Az 1.22. feladat megoldásából a 2. lépés eredményét felhasználva tudjuk, hogy ha f folytonos és injektív, akkor szigorú monoton a teljes számegyenesen. Továbbá világos, hogy ha f szigorúan monoton, akkor $f \circ f$ szigorúan monoton nő, tehát $f \circ f$ nem lehet az $x \mapsto -x$ függvény. Így, ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kielégíti az (1.25) függvényegyenletet, akkor nem lehet folytonos.

Ha az f függvényt nem feltétlenül a folytonos függvények körében keressük, úgy létezik az (1.25) függvényegyenletnek megoldása. Világos, hogy ha az f függvényt a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvények körében keresnénk, akkor az $f(z) = iz$ egy (folytonos) megoldása lenne az (1.25) függvényegyenletnek. Az $x \mapsto ix \mapsto -x$ leképezés-kompozíció felfogható úgy, hogy minden x elkerül egy „köztes állapotba" (tiszta képzetes szám), ahonnan utána a saját ellentettjébe kerül, valamint minden „köztes állapottal" is ugyanez történik. Az előbbiek analogonja a következő okoskodás. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén szükséges, hogy a $b = f(a)$ számra $f(b) = f\big(f(a)\big) = -a$ teljesüljön. Továbbá ahhoz, hogy $f\big(f(b)\big) = -b$ is teljesüljön, az kell, hogy $f\big(f(b)\big) = f(-a) = -b$ álljon fenn. Bontsuk fel tehát a pozitív valós számok $(0, +\infty)$ halmazát A és B halmazok uniójára úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$, és ezek között legyen adott egy $\varphi\colon A \to B$ egy bijekció. A fenti okoskodást követve az f függvényt definiáljuk a következőképpen:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{ha } x \in A, \\ -\varphi^{-1}(x), & \text{ha } x \in B, \\ -\varphi(-x), & \text{ha } x \in -A, \\ \varphi^{-1}(-x), & \text{ha } x \in -B, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

ahol $x \in -H$ azt jelenti, hogy $-x \in H$. Erre az f függvényre minden valós x szám esetén $f\big(f(x)\big) = -x$, ugyanis:

$$f\big(f(x)\big) = \begin{cases} -\varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = -x, & \text{ha } x \in A, \\ -\varphi\Big(-\big(-\varphi^{-1}(x)\big)\Big) = -\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = -x, & \text{ha } x \in B, \\ \varphi^{-1}\Big(-\big(-\varphi(-x)\big)\Big) = \varphi^{-1}\big(\varphi(-x)\big) = -x, & \text{ha } x \in -A, \\ \varphi\big(\varphi^{-1}(-x)\big) = -x, & \text{ha } x \in -B, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Itt például az $x \in B$ eset úgy adódik, hogy ha $x \in B$, akkor $f(x) = -\varphi^{-1}(x)$. Ezért az $x \in B$ esetén $f(x) \in -A$, és így az f függvény másodszori alkalmazásakor a harmadik esetet kell figyelembe venni, amikor f argumentuma a $-A$ halmazban van. Összegezve, ha $x \in B$, akkor

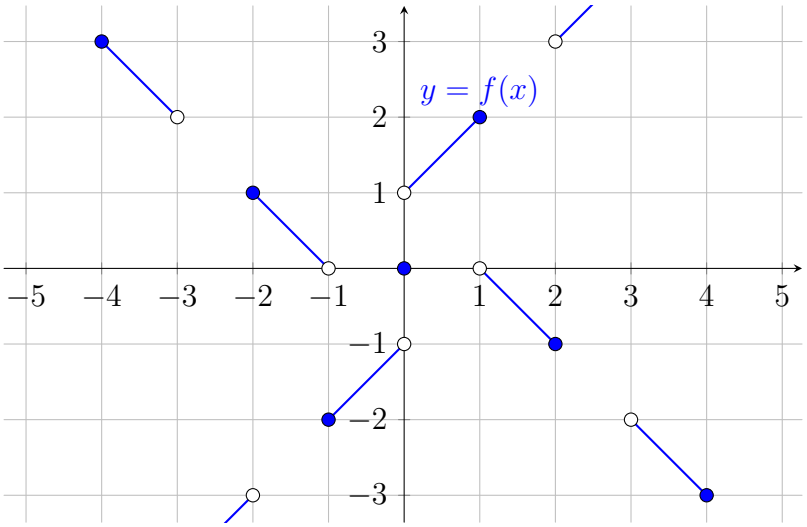
$$f\big(f(x)\big) = \big((x \mapsto -\varphi(-x)) \circ (x \mapsto -\varphi^{-1}(x))\big)(x) = -x.$$

Tehát a nem folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények között létezik megoldása az (1.22) függvényegyenletnek. □

1.29. Példa. Az iménti, kissé absztrakt konstrukciót most egy konkrét példában mutatjuk be. Legyenek $A = \bigcup_{k=0}^{+\infty}(2k, 2k+1]$ és $B = \bigcup_{k=0}^{+\infty}(2k+1, 2k+2]$, valamint $\varphi(x) = x + 1$. Ezen választásokkal $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = (0, +\infty)$, valamint $\varphi\colon A \to B$ bijekció, $\varphi^{-1}(x) = x - 1$. Ekkor a fenti konstrukció eredménye az

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) = x + 1, & \text{ha } x \in A, \\ -\varphi^{-1}(x) = -x + 1, & \text{ha } x \in B, \\ -\varphi(-x) = x - 1, & \text{ha } -x \in A, \\ \varphi^{-1}(-x) = -x - 1, & \text{ha } -x \in B, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \tag{1.26}$$

függvény, melynek grafikonja az 1.3. ábrán látható.



1.3. ábra. az (1.26) egyenlettel definiált függvény grafikonja

Természetesen a pozitív számok halmazát végtelen sok különböző módon bonthatjuk két halmaz diszjunkt uniójára, és tetszőleges ilyen felbontáshoz végtelen sok megfelelő φ leképezés választható.

A továbbiakban az $f\big(f(x)\big) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ alakú függvényegyenleteket még általánosabban vizsgáljuk különböző g függvények esetén. Látni fogunk olyan esetet, amelyben az f megoldásfüggvény expliciten megadható, de bonyolultsága nagyban változhat viszonylag hasonló alakú g függvények esetén; valamint látunk olyan példát is, ahol ilyen f megoldásfüggvény egyáltalán nem létezik. Végül – ennek látszólag ellentmondóan – megadunk egy módszert olyan f megkeresésére, amely egy tetszőlegesen „kicsi” halmazon kívül mindenütt kielégíti az $f\big(f(x)\big) = g(x)$ függvényegyenletet.

Néhány $g(x)$ választás esetén például rögtön látható legalább egy megoldás, például tetszőleges $g(x) = |x|^\alpha \quad (\alpha > 0)$ hatványfüggvény esetén egy lehetséges megoldás az $f(x) = |x|^{\sqrt{\alpha}}$. Ezenkívül persze, ha g egyből $f \circ f$ alakban van megadva, például $g(x) = \sin(\sin x)$, akkor is nyilvánvaló egy megoldás.

A [11] feladatgyűjtemény 1185. feladata nyomán vizsgáljuk meg a $g(x) = x^2 - 2$ esetet.

1.30. Feladat. Van-e olyan, minden valós x számra értelmezett f függvény, mely minden valós x esetén kielégíti az

$$f\big(f(x)\big) = x^2 - 2 \tag{1.27}$$

függvényegyenletet?

Megoldás. Nincsen. Tegyük fel indirekt módon, hogy létezik az (1.27) függvényegyenletet kielégítő f függvény. Készítsük el ekkor az f függvény gráfját, vagyis azt a $G = (V, E)$ gráfot, ahol a csúcsok halmaza legyen $V = \mathbb{R}$, az élek halmaza pedig legyen az $E = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Az, hogy a G gráfban valamely $k \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$\big(x, f(x), f\big(f(x)\big), \dots, f^{[2k-1]}(x)\big)$$

csúcsok sorozata egy $2k$ hosszú kört határoz meg, egyenértékű azzal, hogy

$$\big(x, f\big(f(x)\big), \dots, f^{[2k-2]}(x)\big) \quad \text{és} \quad \big(f(x), f(f(f(x))), \dots, f^{[2k-1]}(x)\big)$$

csúcsok sorozatai két, egyenként k hosszúságú kört határoznak meg az $f \circ f$ függvény G' gráfjában. Valóban, egyrészt világos, hogy minden $2k$ hosszúságú kör a G gráfban szétesik az előbbi módon 2 darab G' gráfbeli k hosszúságú körre. Ez a szétesés meghatároz egy párosítást a G' gráf k hosszúságú körei között, ugyanis, ha

$$C_1 = (u, f\big(f(u)\big), \dots, f^{[2k-2]}(u))$$

egy k hosszúságú kör a G' gráfban, akkor $f^{[2k]}(u) = u$, ami miatt

$$C_2 = (f(u), f(f(f(u))), \dots, f^{[2k-1]}(u))$$

is egy k hosszúságú kör a G' gráfban. Ez a párosítás egyrészt szimmetrikus, hiszen C_2 párja

$$\big(f\big(f(u)\big), f(f(f(f(u)))), \dots, f^{[2k]}(u) = u\big) = C_1,$$

továbbá nyilván létezik minden k hosszúságú körhöz egy másik k hosszúságú kör ily módon. Így a G' gráfban az összes k esetén a k hosszú körök páros sokan (vagy végtelen sokan) vannak, és minden ilyen pár megfeleltethető egy G gráfbeli $2k$ hosszúságú körnek. Most vizsgáljuk meg a $g(x) = x^2 - 2$ függvény gráfját. Ebben az egyetlen 2 hosszúságú kör a $\big(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\big)$, hiszen a 2 hosszúságú körök az

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ x = y^2 - 2 \end{cases}$$

egyenletrendszer olyan megoldáspárjaiból adódnak, ahol $y \neq x$. Az első egyenletből az y ismeretlent a második egyenletbe helyettesítve az $x = (x^2-2)^2-2$ egyenlet adódik. Ennek rendezett alakja a

$$0 = x^4 - 4x^2 - x + 2$$

negyedfokú polinomegyenlet. Itt a jobb oldali polinom szorzattá alakítható, felhasználva, hogy az $x = x^2 - 2$ megoldásai gyökei ennek a polinomnak, ezért osztója az $x^2 - x - 2$ polinom:

$$0 = x^4-4x^2-x+2 = (x^2-x-2)(x^2+x-1) = (x-2)(x+1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Így a fenti egyenletrendszer megoldáspárjai

$$\left\{(2,2), (-1,-1), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\},$$

melyek alapján a $g(x) = x^2 - 2$ függvény gráfjában egyetlen 2 hosszú kör van. Tehát g nem lehet egyenlő $f \circ f$ kompozícióval egyetlen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén sem. □

Az (1.27) függvényegyenletnek van azonban megoldása egy szűkebb halmazon.

1.31. Állítás. *Az $f\big(f(x)\big) = x^2 - 2$ függvényegyenletnek létezik képlettel megadható megoldása egy alkalmas intervallumra megszorítva.*

Bizonyítás. Tekintsük az $f(x) = 2\cos\big(\sqrt{2}\arccos\frac{x}{2}\big)$ függvény önmagával vett kompozícióját a $\big[2\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}, 2\big]$ intervallumon:

$$f\big(f(x)\big) = 2\cos\left(\sqrt{2}\arccos\frac{2\cos\big(\sqrt{2}\arccos\frac{x}{2}\big)}{2}\right) = 2\cos\left(\sqrt{2}\arccos\cos\left(\sqrt{2}\arccos\frac{x}{2}\right)\right),$$

ahonnan az $\arccos(\cos\theta) = \theta$ (ha $0 \leqq \theta \leqq \pi$) összefüggést a $\theta = \sqrt{2}\arccos\frac{x}{2}$ mennyiségre alkalmazva:

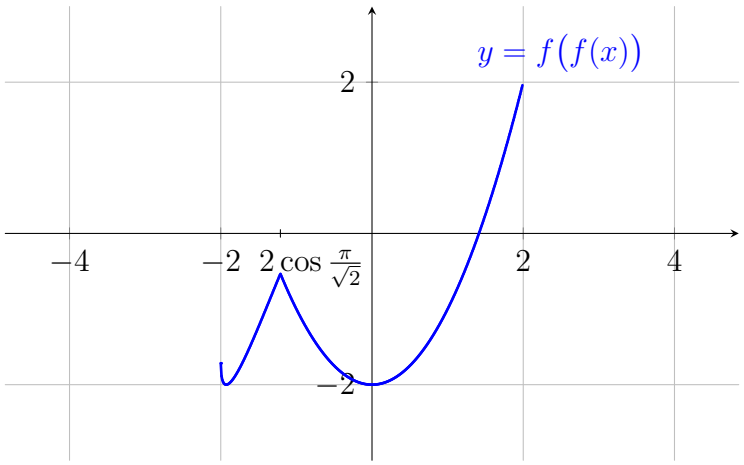
$$f\big(f(x)\big) = 2\cos\left(\sqrt{2}\sqrt{2}\arccos\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(2\arccos\frac{x}{2}\right).$$

Innen, felhasználva a $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ azonosságot a $\varphi = \arccos\frac{x}{2}$ mennyiségre, végül a $\cos\arccos(\psi) = \psi$ (ha $-1 \leqq \psi \leqq 1$) azonosságot a $\psi = \frac{x}{2}$ mennyiségre:

$$f\big(f(x)\big) = 2\left(2\cos^2\left(\arccos\frac{x}{2}\right) - 1\right) = 2\left(2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1\right) = x^2 - 2 \quad \left(x \in \left[2\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}, 2\right]\right).$$

Ellenőrizhető, hogy a cos és arccos függvények helyett cosh és arcosh függvényeket használva a $[2, +\infty)$ intervallumon kapunk egy megoldást. □

Érdekes módon az $f \circ f$ függvény nemcsak a $\big[2\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}, 2\big]$ intervallumon, de a bővebb $[-2, 2]$ intervallumon is értelmezve van, azonban a két intervallum különbségén nem egyenlő az $x^2 - 2$ polinomfüggvénnyel.



1.4. ábra. Az $f \circ f\colon x \mapsto 2\cos\left(\sqrt{2}\arccos\frac{2\cos(\sqrt{2}\arccos\frac{x}{2})}{2}\right)$ függvény grafikonja

Vegyük észre, hogy az előbbi bizonyításban fontos szerepe volt annak, hogy a jobb oldalon szereplő $g(x) = 2x^2 - 1 = 2P\big(\frac{x}{2}\big)$ azon P polinomra, amelyre $\cos 2\theta = P(\cos\theta)$. Ennek általánosításaként az alábbi állítás fogalmazható meg.

1.32. Állítás. *Ha $g(x) = kP\big(\frac{x}{k}\big)$ valamely $k \in \mathbb{N}^+$ számra, ahol fennáll $\cos k\theta = P(\cos\theta)$, akkor az $f\big(f(x)\big) = g(x)$ függvényegyenletnek megoldása az*

$$f(x) = k\cos\left(\sqrt{k}\arccos\frac{x}{k}\right)$$

függvény a $\left[k\cos\frac{\pi}{\sqrt{k}},k\right]$ *intervallumon, továbbá az*

$$f(x)=k\cosh\Big(\sqrt{k}\operatorname{arcosh}\frac{x}{k}\Big)$$

függvény a $[k,+\infty)$ *intervallumon.*

Az állítás igazolása a korábbiakhoz hasonló számolás. Ilyen tulajdonsággal rendelkező polinomok léteznek minden k esetén, és ezeket szokás *elsőfajú Csebisev-polinomoknak* hívni. Velük bővebben fogunk foglalkozni a harmadik fejezetben.

Az 1.30. feladat megoldásának egy fontos mozzanata, hogy a $\cos 2\theta$ felírható a $\cos\theta$ egy alkalmas másodfokú polinomjaként. Ezzel a tulajdonsággal a koszinusz és a koszinusz hiperbolikusz függvényeken kívül még az exponenciális függvények is rendelkeznek. Ha a $h(x)=ae^x+b$ választással kiszámítjuk a $h(2x)$ függvényt $h(x)$ másodfokú polinomjaként, akkor az előbbiekhez hasonló „megoldóképletet" nyerhetünk valamilyen speciális alakú g függvény esetén az $f\circ f=g$ függvényegyenletre.

A $h(x)=ae^x+b$ függvény megválasztásával

$$h^2(x)=(ae^x+b)^2=a^2e^{2x}+2abe^x+b^2,$$

melybe az $e^x=\frac{h(x)-b}{a}$ és az $e^{2x}=\frac{h(2x)-b}{a}$ mennyiségeket helyettesítve

$$h^2(x)=a^2\frac{h(2x)-b}{a}+2ab\frac{h(x)-b}{a}+b^2=ah(2x)+2bh(x)-ab-b^2,$$

ahonnan

$$h(2x)=\frac{1}{a}h^2(x)-\frac{2b}{a}h(x)+b+\frac{b^2}{a}:=P\big(h(x)\big),$$

ha $P(t)=\frac{1}{a}t^2-\frac{2b}{a}t+\frac{b^2}{a}+b$. Ekkor az

$$f(x):=2h\Big(\sqrt{2}h^{-1}\frac{x}{2}\Big)=2\Big(ae^{\sqrt{2}\ln\frac{\frac{x}{2}-b}{a}}+b\Big)=2\bigg(a\bigg(\frac{x-2b}{2a}\bigg)^{\sqrt{2}}+b\bigg)=$$
$$=(2a)^{1-\sqrt{2}}\big(x-2b\big)^{\sqrt{2}}+2b$$

függvény megoldása az $f\big(f(x)\big)=2P\big(\frac{x}{2}\big)$ függvényegyenletnek egy alkalmas intervallumon, ugyanis

$$f\big(f(x)\big)=(2a)^{1-\sqrt{2}}\Big((2a)^{1-\sqrt{2}}\big(x-2b\big)^{\sqrt{2}}+2b-2b\Big)^{\sqrt{2}}+2b=$$
$$=(2a)^{1-\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})\sqrt{2}}(x-2b)^{\sqrt{2}\sqrt{2}}+2b=\frac{1}{2a}(x-2b)^2+2b=$$
$$=\frac{1}{2a}x^2-\frac{2b}{a}x+\frac{2b^2}{a}+2b=2\bigg(\frac{1}{a}\Big(\frac{x}{2}\Big)^2-\frac{2b}{a}\Big(\frac{x}{2}\Big)+b+\frac{b^2}{a}\bigg)=2P\Big(\frac{x}{2}\Big),$$

ha $x\in[2b,+\infty)$ és $a>0$. Így tehát a következő állítást nyerjük.

1.33. Állítás. *Legyenek adottak* $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ *paraméterek. Ekkor az*

$$f\big(f(x)\big)=\frac{1}{2a}x^2-\frac{2b}{a}x+\frac{2b^2}{a}+2b$$

függvényegyenletnek megoldása az

$$f(x)=(2a)^{1-\sqrt{2}}\big(x-2b\big)^{\sqrt{2}}+2b$$

függvény a $[2b,+\infty)$ *intervallumon.*

1.34. *Megjegyzés.* Speciálisan, ha $a = \frac{1}{2}$ és $b = \frac{\alpha}{2}$, akkor az

$$f(x) = (x-\alpha)^{\sqrt{2}} + \alpha$$

függvény megoldása az

$$f\big(f(x)\big) = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \alpha$$

függvényegyenletnek az $[\alpha, +\infty)$ intervallumon.

1.35. Példa. Keressünk megoldást az $f\big(f(x)\big) = x^2 - 4x + 6$ függvényegyenletre.

Megoldás. A jobb oldali másodfokú polinomfüggvény éppen az 1.33. állításban szereplő alakú $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ paraméterek esetén. Ezért aztán az $f(x) = (x-2)^{\sqrt{2}} + 2$ függvény megoldás a $[2, +\infty)$ intervallumon. Valóban

$$f\big(f(x)\big) = \big((x-2)^{\sqrt{2}} + 2 - 2\big)^{\sqrt{2}} + 2 = (x-2)^2 + 2 = x^2 - 4x + 6 \quad (x \geqq 2).$$

□

Az eredmény elméleti szépsége abban rejlik, hogy egy kétparaméteres családnyi g másodfokú polinomfüggvény esetére ad gyakorlatilag megoldóképletet az $f \circ f = g$ függvényegyenlet (egyik) megoldására. Így, ha elsőre kellemetlennek is tűnhet egy általánosabb jobb oldalról megállapítani, hogy van-e olyan $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ paraméter, amelyekre a jobb oldali polinomfüggvény éppen a kívánt alakú, a helyzet nem reménytelen.

A [10] cikk eredménye az alábbi tétel, amely általános választ ad a jóval általánosabb $f^{[k]}(x) = g(x)$ függvényegyenlet megoldásainak létezésére, ha g egy tetszőleges másodfokú polinom.

1.36. Tétel. *Legyen g az alábbi valós együtthatós polinom*

$$g(x) = ax^2 + (b+1)x + c,$$

ahol $a \neq 0$, és vezessük be a $\Delta(g) = b^2 - 4ac$ mennyiséget. Ekkor, ha $\Delta(g) > 1$, akkor a g függvénynek a kompozícióra vonatkozóan semmilyen rendű gyöke nincsen, ha pedig $\Delta(g) \leqq 1$, akkor a g függvénynek létezik minden k esetén kompozícióra vonatkozó k-adik gyöke.

1.3.3. Majdnem mindenütt értelmezett gyök

Végül ismertetünk egy eredményt, amely általános megoldás létezését igazolja az

$$f\big(f(x)\big) = g(x) \quad (x \in [a,b]) \tag{1.28}$$

függvényegyenletnek, ahol $[a,b]$ egy tetszőleges intervallum. A konstrukció gondolatmenetében hasonló az (1.25) függvényegyenlet megoldásához.

Konstrukció. Legyen adott egy $[a,b]$ intervallum, valamint $c = b - a + 1$. Ekkor az $[a,b]$ és az $[a+c, b+c] = [b+1, 2b-a+1]$ intervallumok nyilván diszjunktak. Definiáljuk az f függvényt a következőképpen:

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} x + c, & \text{ha } x \in [a,b], \\ g(x-c), & \text{ha } x \in [a+c, b+c]. \end{cases}$$

Erre az f függvényre

$$f\big(f(x)\big) = \begin{cases} g\big((x+c)-c\big) = g(x), & \text{ha } x \in [a,b], \\ \text{nem feltétlenül értelmes}, & \text{ha } x \in [a+c, b+c], \end{cases}$$

tehát f megoldása az (1.28) függvényegyenletnek. A gondolatmenet k darab intervallumra felírt általánosítása megoldja az $f^{[k]}(x) = g(x)$ függvényegyenletet is tetszőleges $[a,b]$ intervallumon.

□

A fenti módszer tovább általánosítható olyan f függvény létezésének igazolására, amely kielégíti az (1.28) függvényegyenletet *majdnem mindenütt* (azaz tetszőlegesen kicsi összhosszúságú halmazon kívül mindenütt). A fenti szereposztásban az $[a+c, b+c]$ halmaz volt az, ahol nem törődtünk azzal, hogy az $f\big(f(x)\big) = g(x)$ egyenlőség teljesül-e, vagy sem. Ennek a szerepét most töltse be egy *nullmértékű* (0 összhosszúságú) halmaz, amelyet jelöljünk C-vel. Az $[a, b] \to [a+c, b+c]$ eltolást most helyettesítsük egy $h\colon \mathbb{R}\setminus C \to C$ bijektív leképezéssel. Ahhoz, hogy ilyen létezzen, szükséges, hogy a C halmaz kontinuum számosságú legyen. Egy megfelelő C halmaz lehet például a *Cantor-halmaz*. Ekkor definiáljuk az f függvényt az alábbi módon:

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} h(x), & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus C, \\ g\big(h^{-1}(x)\big), & \text{ha } x \in C, \end{cases}.$$

Ekkor

$$f\big(f(x)\big) = \begin{cases} g(h^{-1}(h(x))) = g(x), & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus C, \\ \text{nem feltétlenül értelmes}, & \text{ha } x \in C, \end{cases}$$

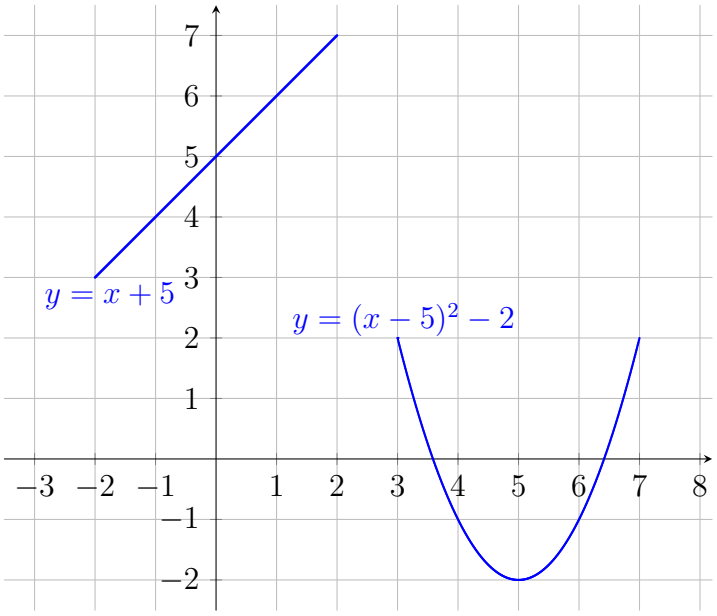
tehát az f függvény megoldása az (1.28) függvényegyenletnek az $\mathbb{R}\setminus C$ halmazon.

1.37. Példa.

Megoldjuk az $f\big(f(x)\big) = x^2 - 2$ függvényegyenletet az eltolásos módszerrel a $[-2, 2]$ intervallumon. Ekkor $c = 2 - (-2) + 1 = 5$, valamint $g(x) = x^2 - 2$, tehát az

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{ha } x \in [-2, 2], \\ (x-5)^2 - 2, & \text{ha } x \in [3, 7] \end{cases}$$

függvény, melynek grafikonja az 1.5. ábrán látható, egy megoldás a $[-2, 2]$ intervallumon.



1.5. ábra. A fenti f függvény grafikonja.

2. fejezet

Értékkészlettel kapcsolatos feladatok

Ebben a fejezetben a központi fogalmunk az értékkészlet, célunk néhány értékkészlettel kapcsolatos probléma körüljárása. Az első két szakaszban azt vizsgáljuk, hogy egy függvény az értékkészletének elemeit hányszor veheti fel folytonos, illetve nem folytonos esetben. A harmadik szakaszban néhány nehezebb értékkészlettel kapcsolatos középiskolai feladatból csemegézünk.

2.1. Korlátos intervallumon értelmezett függvények

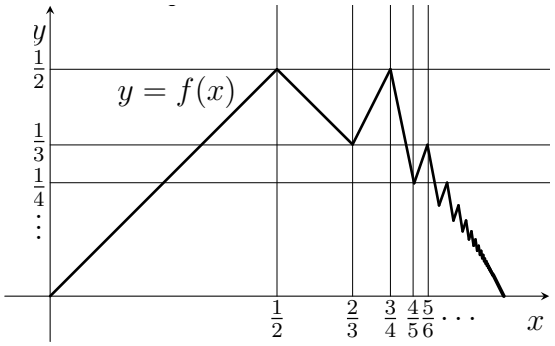
Tekintsük először az alábbi, 1996. novemberben kitűzött N. 88. jelzésű KöMaL feladatot.

2.1. Feladat. Van-e olyan folytonos $[0,1] \to \mathbb{R}$ függvény, amely minden értékét véges, mégpedig páros sokszor veszi fel?

2.2. *Megjegyzés.* Vigyázzunk! A „minden értékét" kifejezés a függvény értékkészletének összes elemére utal. Ezzel könnyen összetéveszthető a „minden értéket" kifejezés, amely az összes valós számra vonatkozik. Későbbiekben ez utóbbi kérdést is megvizsgáljuk.

A feladatra a KöMaL által közölt, hivatalos megoldás alapján adunk egy konstrukciót. A közölt megoldás általánosabban fogalmaz, de mivel a feladat csak létezést kérdez, így elegendő egyetlen példa létezését megmutatni.

Megoldás. Legyen $f(0) = f(1) = 0$, $f(0{,}5) = 0{,}5$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ szám esetén $f\big(1 - \frac{1}{2n+1}\big) = \frac{1}{n+2}$, $f\big(1 - \frac{1}{2n+2}\big) = \frac{1}{n+1}$, és a köztes intervallumokon lineáris (a 2.1. ábrán látható módon).



2.1. ábra. A 2.1. feladatot megoldó egyik függvény grafikonja

Ekkor f folytonossága a definíciója alapján világos az $[1,0)$ halmazon, elegendő azt megmutatni, hogy f az $x = 1$ pontban balról folytonos. A konstrukció második feléből látható, hogy

ha $x > \frac{2n+1}{2n+2}$ valamely $n \geqq 1$ esetén, akkor

$$0 \leqq f(x) \leqq f\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

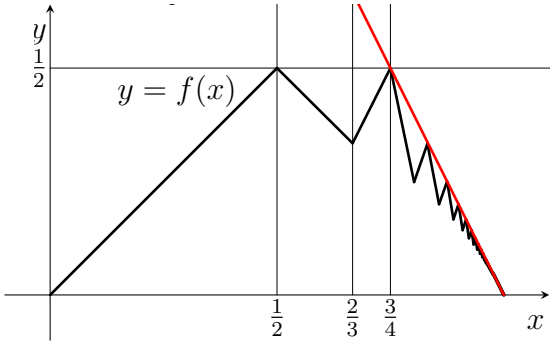
Sőt, általában is az $[0,1]$ intervallumon az f függvényt felülről becsüli az összes olyan konkáv g függvény, amelynek a grafikonján a $\left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{n+1}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ pontok elhelyezkednek. Speciálisan az a g függvény is, amely megoldása a

$$g\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right) = \frac{1}{x+1} \quad (x > -1) \tag{2.1}$$

függvényegyenletnek. A (2.1) függvényegyenletben x helyére a g argumentumának formális inverzét, azaz a $\frac{-2x+1}{2x-2}$ kifejezést írva $g(x) = -2x+2$ adódik. Így tehát azt kaptuk, hogy

$$0 \leqq f(x) \leqq -2x+2 \quad \big(x \in [0,1]\big), \tag{2.2}$$

ahogy a 2.2 ábrán is látható.



2.2. ábra

Tehát f balról folytonos az $x = 1$ pontban. Könnyű ellenőrizni, hogy f minden értékét páros sokszor veszi fel. Az $y = 0$ értéket az $x = 0$ és az $x = 1$ helyeken, az $y = \frac{1}{2}$ értéket az $x = \frac{1}{2}$ és az $x = \frac{3}{4}$ helyen, valamint minden további értéket pontosan négyszer vesz fel. □

2.3. *Megjegyzés.* Ha a 2.1. feladatban páros szó helyett páratlan szerepelne, úgy nyilvánvalóan helyes megoldás lenne az $f(x) = x$ függvény.

A 2.1. feladat motiválja a következő kérdéseket:

1. Létezik-e olyan $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely minden értékét pontosan n-szer veszi fel, ahol n rögzített páros szám?

2. Általában mely $n \in \mathbb{N}^+$ számokra létezik olyan $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely minden értékét pontosan n-szer vesz fel?

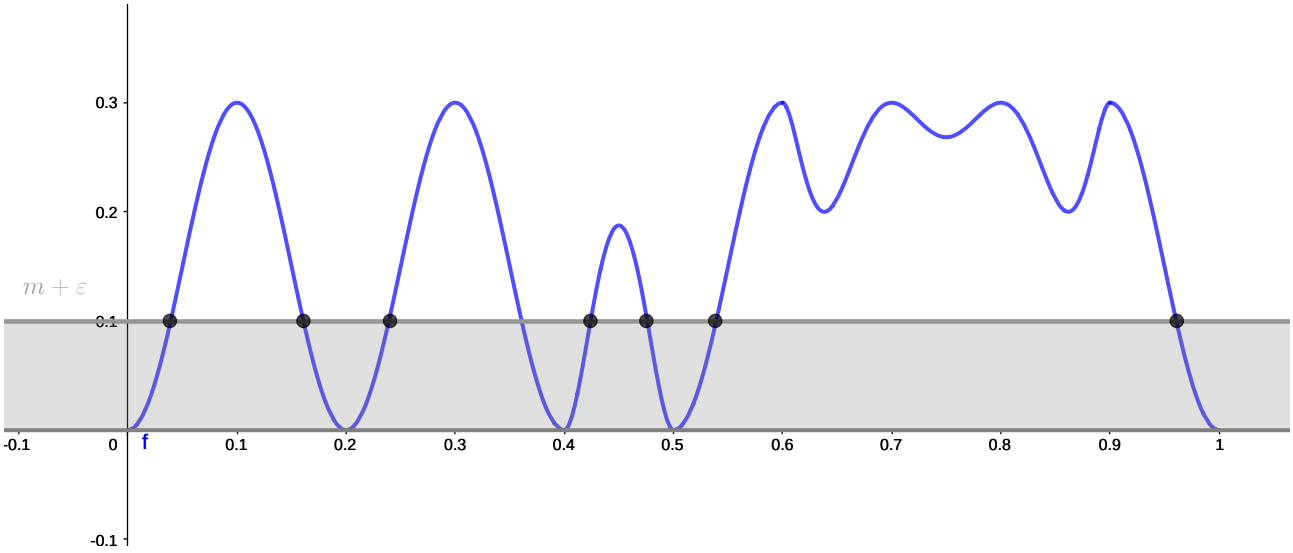
3. Mi a helyzet akkor, ha az előző kérdésben nem követeljük meg a folytonosságot?

Az első két kérdésre együttes válasz adható:

2.4. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény minden értékét pontosan n-szer veszi fel, ahol n pozitív egész szám. Ekkor $n = 1$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény minden értékét pontosan n-szer veszi fel, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Ennek egyszerű következménye, hogy az f bármely nem elfajuló intervallumon nem konstans. Weierstraß tétele alapján az f függvény felveszi a minimum, illetve maximum értékeit, és a feltétel értelmében ezeket is pontosan n-szer. Jelölje m és M az f minimumát, illetve maximumát, valamint legyenek f szélsőértékhelyei $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$. Ha x_k és x_{k+1} ellentétes típusú szélsőértékhelyek (az egyik maximumhely, a másik minimumhely), akkor a Bolzano–Darboux-tétel miatt az f függvény a teljes értekkészletét felveszi az $[x_k, x_{k+1}]$ intervallumon. Amennyiben azonban x_k és x_{k+1} azonos típusú (például minimumhely), akkor a Weierstraß-tételt az $[x_k, x_{k+1}]$ intervallumra alkalmazva van az f függvénynek egy y lokális maximumhelye az (x_k, x_{k+1}) intervallumban, és ekkor a Bolzano–Darboux-tételt az $[x_k, y]$ valamint az $[y, x_{k+1}]$ intervallumokra alkalmazva f az $\big[m, f(y)\big)$ halmaz minden elemét legalább kétszer felveszi az $[x_k, x_{k+1}]$ intervallumon.

Jelölje s az olyan k indexek számát, amelyekre x_k és x_{k+1} eltérő típusú szélsőértékhely ($s \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$). Ekkor a skatulyaelv miatt a minimum-minimum vagy a maximum-maximum típusú intervallumok közül valamelyikből legalább $\left\lceil \frac{2n-1-s}{2} \right\rceil$ darab van. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy abból, amelynek mindkét végpontja minimumhely. Ekkor megfelelően kicsi $\varepsilon > 0$ mellett az $m + \varepsilon$ érték az összes minimum-minimum típusú intervallumon legalább kétszer felvétetik, valamint a minimum-maximum típusú intervallumokon legalább egyszer. A 2.3. ábra $n = 5$, $x_k = \frac{k}{10}$, $m = 0$ és $\varepsilon = \frac{1}{10}$ mellett szemlélteti ezt egy példafüggvényen.



2.3. ábra

Tehát az $m+\varepsilon$ érték összesen legalább $s+2\left\lceil \frac{2n-1-s}{2} \right\rceil$-szer, másrészt a feltétel miatt pontosan n-szer vétetik fel, így az

$$s + 2\left\lceil \frac{2n-1-s}{2} \right\rceil \leqq n$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az egyenlőtlenség bal oldalát biztosan nem növeljük a felső egész rész elhagyásával, tehát az

$$s + 2\frac{2n-1-s}{2} \leqq n$$

egyenlőtlenség is fennáll, amely ekvivalens azzal, hogy $n \leqq 1$. Az $n = 1$ eset persze meg tud valósulni, például az $f(x) = x$ folytonos függvény a $[0,1]$ intervallumon minden értékét pontosan egyszer veszi fel. □

Most rátérünk arra a kérdésre, hogy van-e olyan $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény, amely nemcsak „minden értékét”, hanem „minden értéket” pontosan n-szer vesz fel. Ha f folytonos a $[0,1]$ intervallumon, akkor Weierstaß tétele miatt korlátos is, tehát nem lehet az értékkészlete a teljes számegyenes. Amennyiben a folytonosság feltételétől eltekintünk, az alábbi állítás mondható.

2.5. Állítás. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén létezik olyan $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény, amely minden valós értéket pontosan n-szer vesz fel.*

Bizonyítás. Ismeretes, hogy a $\operatorname{ctg}(\pi x)$ függvény bijektív leképezés a $(0,1)$ intervallumból a valós számok halmazába. Emiatt, ha $u\colon [0,1] \to (0,1)$ bijekció, akkor $g(x) = \operatorname{ctg}\big(\pi u(x)\big)$ megfelelő példa az $n = 1$ esetre. Egy ilyen u bijekció konstrukciója lehet a következő. Legyenek $k_j = 2^{-j}$ és $h_j = 1 - 3^{-j}$, ha $j \in \mathbb{N}$, továbbá

$$u(x) \coloneqq \begin{cases} k_{j+1}, & \text{ha } x = k_j, \\ h_{j+1}, & \text{ha } x = h_j, \\ x & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ellenőrizendő, hogy $u\colon [0,1] \to (0,1)$ jóldefiniált. Valóban, $2^{-r} = 1 - 3^{-s}$ pontosan akkor teljesül, ha $3^s = 2^r(3^s - 1)$, ahonnan a számelmélet alaptétele alapján $r = 0$, de ekkor $1 = 3^s - 1$, és emiatt $s \notin \mathbb{N}$. Továbbá u láthatóan bijekció, így az $n = 1$ esetet megoldottuk.

Az $n > 1$ esetek megoldásához konstruálunk egy $v\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ bijekciót:

$$v(x) \coloneqq \begin{cases} \operatorname{ctg}(\pi h_{j+1}), & \text{ha } x = h_j, \\ \operatorname{ctg}(\pi x) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor az

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} v\big(nx - k\big), & \text{ha } x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), k \in \{0, 1, \dots, n-2\}, \\ u\big(nx - (n-1)\big), & \text{ha } x \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

függvény pontosan egyszer veszi fel az összes valós értéket a $\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ intervallumok mindegyikén. □

2.6. *Megjegyzés.* Így persze az itt konstruált f függvény „minden értékét” pontosan n-szer veszi fel a $[0,1]$ intervallumon, tehát az utolsó kérdést is megválaszoltuk.

2.2. A teljes számegyenesen értelmezett függvények

Most az előző szakaszban tárgyalt kérdéseket a $[0,1]$ intervallum helyett a teljes számegyenesen értelmezett függvények körében vizsgáljuk.

2.7. Feladat. Van-e olyan folytonos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely minden értékét véges, mégpedig páros sokszor veszi fel?

Megoldás. Kézenfekvő ötlet lehet megpróbálni a 2.1. feladat megoldásában szereplő függvényt alkalmasan kiterjeszteni az $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ halmazra is. Valóban, jelölje a szóban forgó függvényt g, és definiáljuk a következő függvényt:

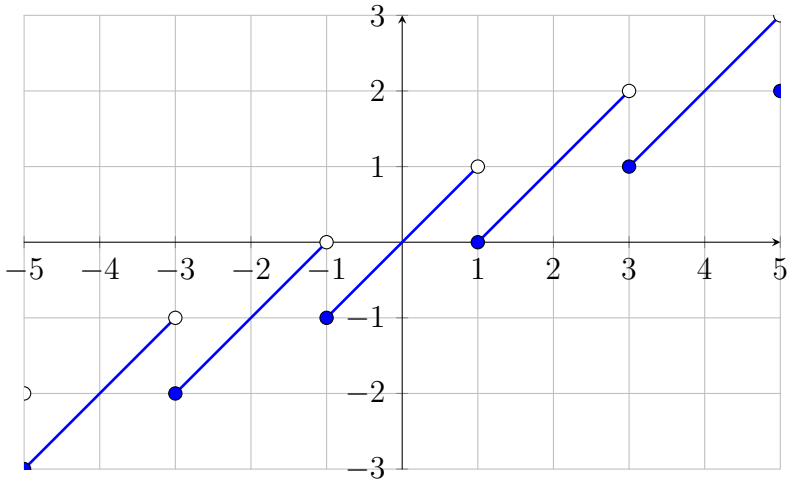
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } x \in [0,1] \\ x, & \text{ha } x < 0 \\ 1 - x, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Ekkor f értékkészlete a $(-\infty, 1]$ intervallum. Világos, hogy f minden negatív y értéket pontosan két helyen vesz fel, az $x = y$ és az $x = 1 - y$ helyeken, továbbá a nemnegatív értékeit a 2.1. feladat értelmében pontosan páros sok helyen, valahol a $[0,1]$ intervallumban. □

A következő természetesen adódó kérdést 1981-ben az OKTV 1. kategória 1. fordulójában tűzték ki.

2.8. Feladat. Adjunk meg olyan f függvényt, amely minden valós számra értelmezve van, és minden valós értéket pontosan kétszer vesz fel.

Megoldás. A hivatalos megoldás által közölt $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] + \{x\}$ függvény egy meglehetősen egyszerű konstrukció, amelyet könnyű lesz általánosítani is. Itt $[\alpha]$, valamint $\{\alpha\}$ rendre az α valós szám egészrészét, illetve törtrészét jelölik.



2.4. ábra. Az $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] + \{x\}$ függvény grafikonja.

Belátjuk, hogy ez az f függvény tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ értéket az $x_1 = 2[y] + \{y\}$, valamint az $x_2 = x_1 + 1$ helyeken veszi fel. Vizsgáljuk most az

$$f(x_1) = \left[\frac{2[y] + \{y\}}{2}\right] + \{2[y] + \{y\}\}$$

mennyiséget. Mivel a törtrész-függvénynek minden nem nulla egész szám periódusa, így a $2[y]$ is, ezért a második tagra $\{2[y] + \{y\}\} = \{\{y\}\} = \{y\}$. Emiatt elegendő belátni, hogy az első tag megegyezik az $[y]$ mennyiséggel. Ismeretes, hogy $0 \leqq \{y\} < 1$, ami miatt

$$[y] = \frac{2[y] + 0}{2} \leqq \frac{2[y] + \{y\}}{2} < \frac{2[y] + 1}{2} = [y] + \frac{1}{2} \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Tehát a $\dfrac{2[y] + \{y\}}{2}$ mennyiség az $[y]$ és az $[y] + 1$ egész számok közé esik, ahonnan a

$$\left[\frac{2[y] + \{y\}}{2}\right] = [y] \quad (y \in \mathbb{R})$$

összefüggés adódik. Így végül

$$f(x_1) = \left[\frac{2[y] + \{y\}}{2}\right] + \{2[y] + \{y\}\} = [y] + \{y\} = y \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Az iméntihez hasonló módon ellenőrizhető, hogy $f(x_2) = f(x_1 + 1) = y$ egyenlőség is teljesül. Valóban

$$f(x_2) = \left[\frac{2[y] + \{y\} + 1}{2}\right] + \{2[y] + \{y\} + 1\},$$

ahol a második tag az előzőhöz hasonló meggondolás alapján éppen $\{y\}$. Tehát bizonyítandó, hogy az első tag éppen $[y]$, amely az alábbi egyenlőtlenséggel ekvivalens:

$$[y] \leqq \frac{2[y]+\{y\}+1}{2} = [y] + \frac{\{y\}+1}{2} < [y]+1,$$

amely szintén adódik abból, hogy $0 \leqq \{y\} < 1$.

Most tegyük fel, hogy $f(x) = y$, és lássuk be, hogy máshol nem vétetik fel ez az érték, csak a fent megadott x_1, x_2 helyeken. Legyen tehát

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \{x\} = y = [y] + \{y\},$$

amit átrendezve az

$$\left[\frac{x}{2}\right] - [y] = \{y\} - \{x\}$$

egyenlőség adódik. A bal oldalon egy egész szám áll, a jobb oldal pedig szigorúan -1 és 1 közé esik, vagyis mindkét oldal szükségképpen 0. Innen pedig az $\left[\frac{x}{2}\right] = [y]$ és az $\{x\} = \{y\}$ egyenlőségek adódnak, ahonnan egyrészt $2[y] \leqq x < 2[y]+2$, másrészt $x = y + j$ valamely $j \in \mathbb{Z}$ számra. Ezeket összevetve világos, hogy legfeljebb kettő megoldás jöhet szóba. □

Az előző feladat egy természetes általánosítása a következő.

2.9. Feladat. Adjunk meg olyan f függvényt, amely minden valós számra értelmezve van, és minden valós értéket pontosan n-szer vesz fel (ahol $n \in \mathbb{N}^+$).

Megoldás. Az $n = 2$ esetet az imént oldottuk meg. Egy kézenfekvő általánosítás lehet tetszőleges n esetén az $f(x) = \left[\frac{x}{n}\right] + \{x\}$. Ez a függvény minden $y \in \mathbb{R}$ valós számot pontosan n-szer vesz fel, méghozzá az $x_j = n[y] + \{y\} + j \quad (j \in \{0, 1, \ldots, n-1\})$ helyeken. Világos, hogy ezek a helyek definíció szerint különbözők, továbbá az előző feladatban megfogalmazottakhoz hasonló okokból

$$f(x_j) = \left[\frac{n[y]+\{y\}+j}{n}\right] + \{n[y]+\{y\}+j\} = \left[[y] + \frac{\{y\}+j}{n}\right] + \{y\},$$

ahol arra van szükség, hogy az első tag megegyezzen az $[y]$ mennyiséggel. Mivel $0 \leqq \{y\} < 1$ és $0 \leqq j \leqq n-1$, ezért

$$[y] \leqq [y] + \frac{\{y\}+j}{n} < [y] + \frac{1+(n-1)}{n} = [y]+1,$$

és így

$$f(x_j) = \left[\frac{n[y]+\{y\}+j}{n}\right] + \{n[y]+\{y\}+j\} = [y]+\{y\} = y.$$

Az, hogy az $f(x) = y$ más x helyeken nem áll fenn, az előző feladat megoldásához teljesen hasonlóan belátható, 2 helyett mindenhol n-et írva. □

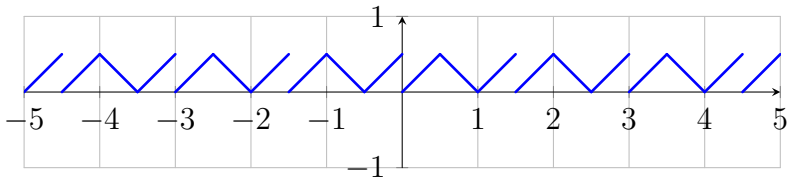
Most vizsgáljuk meg, mi a helyzet akkor, ha az előző feladatban megköveteljük f folytonosságát. Ekkor érdemes külön tekinteni a páratlan és a páros n esetét.

2.10. Feladat. Létezik-e olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely minden valós értéket pontosan $n = 2k+1$-szer vesz fel ($k \in \mathbb{N}$)?

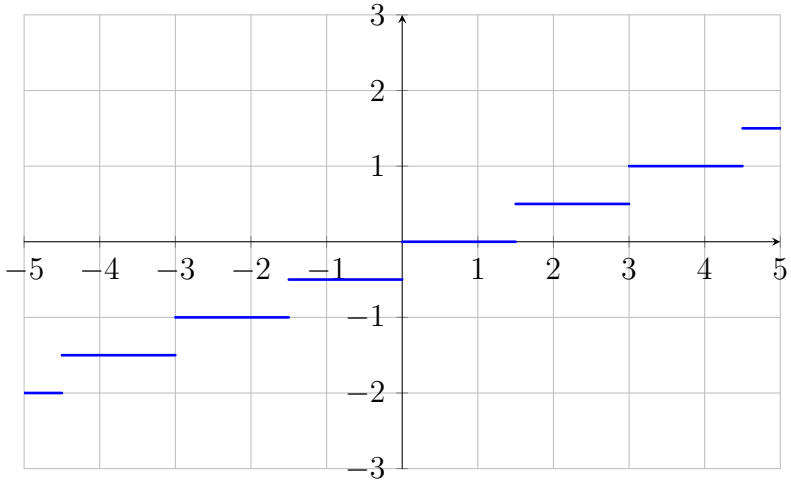
Megoldás. Az $n = 1$ esetre egy triviális megoldás például az $f(x) = x$. Ezenkívül az előző feladatban megadott függvények némi módosításával nyerünk folytonos megoldásokat abban az esetben, ha n páratlan. Az ötlet, hogy egy megoldás előállítható úgy, mint egy periodikus, fűrészfogszerű függvény, amely bizonyos periódusonként megszakad, valamint egy megfelelő lépcsős függvény összege. Első lépésként a 2.5. és a 2.6. ábrákon szereplő segédfüggvényeket fogjuk leírni képlettel. Legyen először is

$$\langle x \rangle := \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}) = \min\{|x - n| \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

vagyis az x szám távolsága a hozzá legközelebb eső egész szám(ok)tól. Ekkor a $z\colon x \mapsto \left\langle \frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle$ függvény minden 0 és $\frac{1}{2}$ közötti értéket pontosan n-szer, valamint az $y = 0$ és $y = \frac{1}{2}$ értékeket $(n-1)$-szer veszi fel a $[0, \frac{n}{2})$ intervallumon. Továbbá a $w\colon x \to \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n}x\right]$ függvény éppen azokon a helyeken ugrik felfelé 0,5-et, ahol a z függvénynek szakadási pontjai vannak.



2.5. ábra. A z függvény grafikonja $n = 3$ esetén.



2.6. ábra. A w függvény grafikonja $n = 3$ esetén.

Tehát az

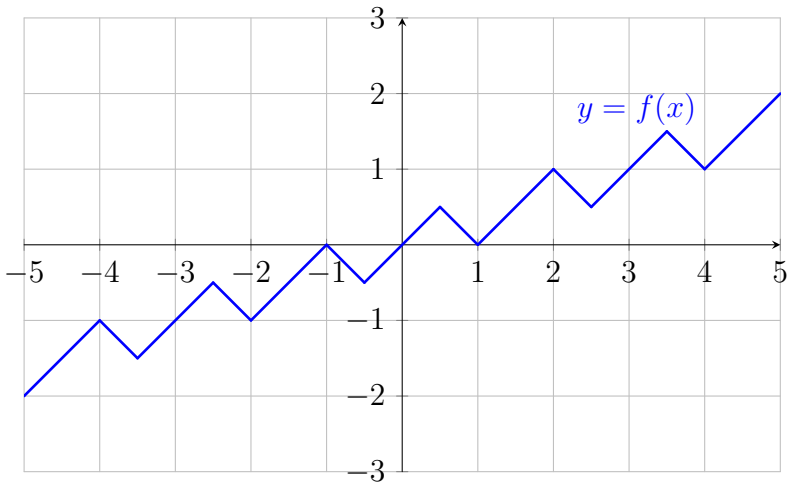
$$f(x) = \left\langle \frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n}x\right]$$

függvény megfelelő.

Az f függvény folytonossága világos ott, ahol $\left[\frac{2}{n}x\right]$ folytonos, vagyis ahol $\frac{2}{n}x \notin \mathbb{Z}$. Tehát elegendő az $x = j\frac{n}{2}$ alakú helyeket vizsgálni, ahol j tetszőleges egész. Az ilyen x helyeken

$$f\left(\frac{nj}{2}\right) = \left\langle \frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}\frac{nj}{2}\right\}\right\rangle + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n}\frac{nj}{2}\right] = \left\langle \frac{n}{2}\{j\}\right\rangle + \frac{1}{2}[j] = \left\langle \frac{n}{2}0\right\rangle + \frac{1}{2}j = \frac{j}{2}.$$

Vizsgáljuk először f jobb oldali folytonosságát az $x = \frac{nj}{2}$ alakú helyeken. Ennek a feltétele, hogy f jobbról vett határértéke megegyezik a helyettesítési értékével az $x = \frac{nj}{2}$ helyen. Ha $x \to \frac{nj}{2}+$,



2.7. ábra. Az f függvény grafikonja $n = 3$ esetén.

akkor $\frac{2}{n}x \to j+$, és így $\left\{\frac{2}{n}x\right\} \to 0$, valamint $\left[\frac{2}{n}x\right] \to j$. Ekkor a $t \mapsto \langle t\rangle$ függvény $t = 0$ helyen fennálló (jobbról) folytonossága miatt

$$\lim_{x\to\frac{nj}{2}+} f(x) = \lim_{x\to\frac{nj}{2}+}\left(\left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n}x\right]\right) = \langle 0\rangle + \frac{1}{2}j = f\left(\frac{nj}{2}\right).$$

Tehát f jobbról folytonos ezeken a helyeken. Most, az iméntihez hasonlóan, vizsgáljuk meg f bal oldali folytonosságát is az $x = \frac{nj}{2}$ helyeken. Mivel $x \to \frac{nj}{2}-$, ezért $\frac{2}{n}x \to j-$, és így $\left\{\frac{2}{n}x\right\} \to 1$ és $\left[\frac{2x}{k}\right] \to j-1$. Emiatt, valamint a $t \mapsto \langle t\rangle$ leképezés $t = \frac{n}{2}$ pontbeli (balról) folytonossága miatt az f függvény bal oldali határértéke:

$$\lim_{x\to\frac{nj}{2}-} f(x) = \lim_{x\to\frac{nj}{2}-}\left(\left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n}x\right]\right) = \left\langle\frac{n}{2}\right\rangle + \frac{1}{2}(j-1).$$

Ez pontosan akkor egyezik meg az $f(x) = \frac{j}{2}$ függvényértékkel, amennyiben $\left\langle\frac{n}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}$, vagyis, ha n páratlan egész szám. Tehát a fent definiált f függvény pontosan akkor folytonos mindenütt, ha n páratlan egész szám.

Végül belátandó, hogy az $f(x) = y$ egyenletnek minden $y \in \mathbb{R}$ érték esetén legfeljebb n darab megoldása van. Ez az ábráról persze világos, az algebrai leírása némileg körülményesebb. Tekintsük először azt az esetet, amikor $y = \frac{l}{2}$ valamely $l \in \mathbb{Z}$ számra, vagyis y egy egész számú többszöröse az $\frac{1}{2}$ számnak. Ekkor

$$f(x) = \left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n}x\right] = y = \frac{l}{2}$$

egyenértékű azzal, hogy

$$2\left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle + \left[\frac{2}{n}x\right] = l.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha minden tag egész szám. Mivel tudjuk, hogy az egyenlet bal oldalán szereplő $2\left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle$ tag legalább 0, és legfeljebb 1 értéket vehet fel, ezért csak az alábbi két eset lehetséges:

$$\left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle = 0 \quad \text{és} \quad \left[\frac{2}{n}x\right] = l,$$

vagy

$$\left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \left[\frac{2}{n}x\right] = l-1.$$

Az első esetben $\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}$ egész szám, ami csak a $\{0,1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]-1\}$ helyeken, azaz összesen $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$ különböző helyen fordulhat elő. A második esetben $\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}$ egy egész számnál $\frac{1}{2}$-del több, ami hasonló módon csak az $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots,\left[\frac{n}{2}\right]-\frac{1}{2}\right\}$, vagyis legfeljebb $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil=\frac{n+1}{2}$ különböző helyen fordulhat elő. Vagyis f legfeljebb $\frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2}=n$ különböző helyen veszi fel az y értéket.

Ha viszont $2y\notin\mathbb{Z}$, azaz az y érték nem egész számú többszöröse a 0,5 számnak, akkor

$$f(x)=\left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle+\frac{1}{2}\left[\frac{2}{n}x\right]=y=\frac{1}{2}([2y]+\{2y\})$$

alábbi ekvivalens átrendezésében

$$2\left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle-\{2y\}=[2y]-\left[\frac{2}{n}x\right] \tag{2.3}$$

a bal oldalon szereplő érték szigorúan a -1 és 1 értékek között van, mert a kisebbítendő nemnegatív és legfeljebb 1, míg a kivonandó eleme a $(0,1)$ intervallumnak. Továbbá a jobb oldalon szereplő kifejezés értéke egész, hiszen két egész szám különbsége. Így a (2.3) egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha

$$2\left\langle\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{n}x\right\}\right\rangle=\{2y\},\ \text{és} \tag{2.4}$$

$$\left[\frac{2}{n}x\right]=[2y]. \tag{2.5}$$

Itt a (2.5) egyenlőség alapján $\frac{2}{n}x\in\big[[2y],[2y]+1\big)$, és egy 1 hosszúságú, balról zárt, jobbról nyílt intervallumon az $x\mapsto\left\langle\frac{n}{2}x\right\rangle$ függvény minden $(0,1)$ intervallumbeli értéket legfeljebb $2\frac{n}{2}=n$-szer vesz fel.

Így végül arra jutottunk, hogy az f függvény minden valós értéket pontosan n-szer vesz fel, tehát megoldása a 2.10. feladatnak

□

Abban az esetben, ha n páros, nem létezik olyan $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, amely minden valós számot pontosan n-szer vesz fel. Ennek bizonyításához tekintsük először a következő lemmát.

2.11. Lemma. *Tetszőleges $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek legfeljebb megszámlálható sok szigorú lokális szélsőértékhelye van.*

Bizonyítás. Tekintsük a szigorú lokális maximumhelyek esetét. A minimumhelyek esete hasonlóan igazolható, valamint, ha megszámlálhatóan sok szigorú lokális maximumhely és megszámlálhatóan sok szigorú lokális minimumhely van, akkor ezek összesen megszámlálhatóan sok szigorú lokális szélsőértékhelyet jelentenek. Legyen f szigorú lokális maximumhelyeinek halmaza M. Megadunk ekkor egy $M\to\mathbb{Q}^2$ injektív leképezést. Ez elegendő a lemma igazolásához, hiszen ekkor definíció szerint $|M|\leqq|\mathbb{Q}^2|$, valamint ismert tény, hogy $|\mathbb{Q}^2|=|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|$, ahol $|H|$ a H halmaz számosságát jelöli.

Ha $x\in M$, azaz x szigorú lokális maximumhely, az definíció szerint azt jelenti, hogy létezik olyan $\delta>0$ valós szám, hogy az $(x-\delta,x+\delta)$ intervallumban az x helyhez tartozik a legnagyobb függvényérték. Mivel bármely két különböző valós szám között található racionális szám, így léteznek olyan $r_x,s_x\in\mathbb{Q}$ számok, amelyekre $x-\delta<r_x<x<s_x<x+\delta$. Ekkor persze az $[r_x,s_x]$ intervallumban is az x helyhez tartozik a legnagyobb függvényérték. Minden $x\in M$ szélsőértékhez válasszunk ilyen r_x,s_x számokat, majd definiáljuk a $\varphi\colon M\to\mathbb{Q}^2$ leképezést úgy, hogy $\varphi(x)=(r_x,s_x)$. Ekkor, ha $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=(r,s)$, akkor az $[r,s]$ intervallumban x_1 és x_2 egyszerre szigorú lokális maximumhely, ami csak úgy lehet, ha $x_1=x_2$. Tehát φ egy injektív leképezés az M halmazból a racionális számpárok halmazába. □

2.12. *Megjegyzés.* A lemma egy egyszerű következménye, hogy a szigorú lokális szélsőértékek is megszámlálható sokan vannak. Valóban, minden szigorú lokális szélsőértékhez pontosan egy szigorú lokális szélsőérték tartozik, így létezik injektív leképezés a szélsőértékek halmazából a szélsőértékhelyek halmazába.

2.13. Tétel. *Legyen k rögzített pozitív egész szám. Ekkor nem létezik olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely minden valós értéket pontosan $2k$-szor vesz fel.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik ilyen f függvény. A 2.12. megjegyzés miatt létezik olyan c szám, amely nem lokális szélsőértéke az f függvénynek. Az f minden értéket pontosan $2k$-szor vesz fel, így a c értéket is. Tekintsük azokat az $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2k}$ helyeket, ahol $f(x_i) = c$. Ekkor a közbülső intervallumokon $f(x) - c$ állandó előjelű, és mivel x_i nem szélsőértékhelyek, ezért a szomszédos intervallumokon $f - c$ előjele ellentétes. Mivel az $f - c$ függvény előjelváltásainak száma $2k$, ezért az $[x_1, x_{2k}]$ intervallumon kívül vagy mindenütt $f(x) < c$, vagy mindenütt $f(x) > c$. A Weierstraß-tétel következményeként f korlátos az $[x_1, x_{2k}]$ intervallumon, és emiatt f felülről vagy alulról korlátos. Mindkét esetben ellentmondásra jutunk, hiszen ekkor lenne olyan érték, amelyet f egyszer sem vesz fel. □

2.3. Szélsőértékkel és értékkészlettel kapcsolatos feladatok

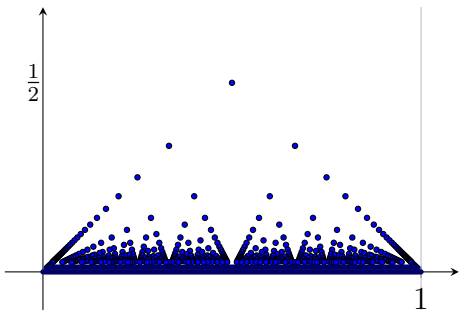
A 2.13. tétel állítása kapcsán felmerülhet a kérdés, hogy vajon milyen halmazok lehetnek, illetve nem lehetnek függvények szélsőértékhelyeinek halmazai.

2.14. Feladat. Létezik-e olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek minden racionális pont szigorú lokális szélsőértékhelye? Létezik-e olyan, amelynek minden irracionális pont szigorú lokális szélsőértékhelye?

Megoldás. Mivel az irracionális számok halmaza nem megszámlálható, így a 2.12. megjegyzés alapján a második kérdésre nem a válasz.

Az első kérdésre egy megfelelő példa a magyar nyelvű szakirodalomban gyakran *Riemann-függvényként* emlegetett függvény (ami az elnevezésével ellentétben Karl Thomaetől származik):

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x = \dfrac{p}{q}, \text{ ahol } p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1 \text{ és } q > 0, \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$



2.8. ábra. A Thomae / Riemann-függvény grafikonja a $[0, 1]$ intervallumon.

Belátjuk, hogy az imént definiált függvénynek minden $\frac{p}{q}$ racionális pontban szigorú lokális maximuma van. Egyrészt az 1 szám periódusa az f függvénynek, hiszen x pontosan akkor

racionális, amikor $x+1$, továbbá a p és q egész számok pontosan akkor relatív prímek, amikor a $p+q$ és p relatív prímek, és ezért

$$f\Big(\frac{p}{q}+1\Big)=f\Big(\frac{p+q}{q}\Big)=\frac{1}{q}=f\Big(\frac{p}{q}\Big).$$

Emiatt elegendő az f függvényt a $[0,1)$ intervallumon vizsgálni.

Legyen $r=\frac{p}{q}\in[0,1)$, ahol p,q egészek, relatív prímek és $q>0$. Azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan $\delta>0$, hogy valahányszor $0<|x-r|<\delta$, annyiszor $f(x)<f(r)=\frac{1}{q}$. Az f függvény grafikonjának pontjai közül véges sok esik a $[0,1)\times[0,\frac{1}{q})$ téglalapon kívül, hiszen $f(x)\geqq\frac{1}{q}$ csak úgy állhat fenn egy $x=\frac{a}{b}\in[0,1)$ szám esetén, ha a,b olyan relatív prím egészek, amelyekre $0<b\leqq q$ és $0<a<b$. Legyenek $\{(x_1,f(x_1)),\dots,(x_n,f(x_n))\}$ azok a pontok, amelyek kívül esnek a $[0,1)\times[0,\frac{1}{q})$ téglalapon. Ekkor $\delta=\frac{1}{2}\min\{|r-x_j|\;\big|\;j=1,2,\dots,n\}$ esetén, ha $0<|x-r|<\delta$, akkor $0\leqq f(x)<\frac{1}{q}=f(r)$, tehát minden $r\in\mathbb{Q}\cap[0,1)$ szigorú lokális maximumhely. □

A következő, értékkészlettel kapcsolatos feladatot a Középiskolai Matematikai Lapok 1980. áprilisi számában tűzték ki, P. 333. jelzéssel.

2.15. Feladat. Van-e olyan, szigorúan monoton növő $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ típusú függvény, amelynek az értékkészlete csak irracionális számokból áll?

Megoldás. Legyen $x>0$ végtelen tizedestört alakja $n{,}a_1a_2a_3\dots$, mégpedig olyan, amelyben tetszőlegesen nagy j index előfordul, amelyre $a_j\neq0$. Elemi analízisből ismeretes, hogy ilyen létezik mindegyik x pozitív számhoz.

Legyen

$$f(x)=n{,}a_10a_200a_3000\dots a_k\underbrace{00\dots0}_{k\text{ darab}}a_{k+1}\dots\quad(x>0).$$

Ekkor az f függvény szigorú monoton nő a pozitív félegyenesen. Ugyanis, ha $x_1<x_2$, melyek egyértelművé tett tizedestört alakja $x_1=n{,}a_1a_2a_3\dots$ és $x_2=m{,}b_1b_2b_3\dots$, akkor $n<m$ vagy van olyan j, amelyre $a_j<b_j$. Mindkét esetben világos, hogy $f(x_1)<f(x_2)$, tehát az f függvény szigorúan monoton nő a számegyenes pozitív felén. Másrészt $f(x)$ irracionális minden $x>0$ esetén, ugyanis $f(x)$ definíció szerint egy végtelen nem szakaszos tizedes tört, tehát irracionális.

Már csak a nempozitív számok halmazára kell kiterjesztenünk az f függvényt. Ha csak azt kötnénk ki, hogy $f(-x)=-f(x)$ legyen minden $x>0$ esetén, akkor felmerülhetne az a probléma, hogy $f(0)$ nem választható olyan irracionális értéknek, amelyre f szigorú monotonitása az egész számegyenesen fennállna. Ezért legyen végül $f(-x):=-f(x)-2$, ha $x>0$, továbbá $f(0)=-\sqrt{2}$. Ezzel nyilvánvalóan mindkét probléma megoldódik. □

A következő nehéz, monotonitással kapcsolatos feladat a KöMaL 2000. januári számából származik, jelzése A. 228.

2.16. Feladat. Igaz-e, hogy ha az $f,g\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ szigorúan monoton nővő függvények és értékkészletük a teljes $\mathbb{Q}$, akkor az $f+g$ függvény értékkészlete is a teljes $\mathbb{Q}$?

Először megmutatjuk, hogy az előző feladatban $\mathbb{Q}$ helyett $\mathbb{R}$-et írva az állítás igaz.

Bizonyítás. A feltételek szerint

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty,\quad\text{valamint}\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty.$$

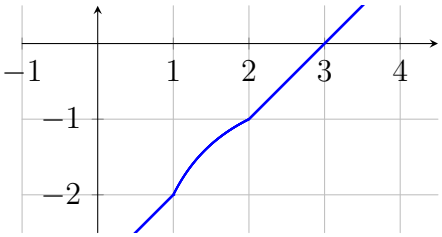
Emiatt

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty\quad\text{és}\quad\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=-\infty.\tag{2.6}$$

Továbbá ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény szürjektív és szigorú monoton, akkor folytonos is. Emiatt $f, g, f+g$ mind folytonosak, és mivel $f+g$ folytonos, a (2.6) határértékeket figyelembe véve a Bolzano–Darboux-tétel alapján szürjektív. □

A 2.16. feladat megoldása. (A hivatalos honlapon közölt egyik megoldásvázlat alapján) nem igaz. Megadhatók olyan $f, g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ szigorúan monoton növő bijekciók, amelyekre $f+g$ nem veszi fel a 0 számot. Egyrészt legyen $f(x) = x$, amely nyilván eleget tesz a feltételeknek, továbbá legyen

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ x - 3 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



2.9. ábra. A g függvény grafikonja

Mivel

$$-\frac{2}{1} = 1 - 3 \quad \text{és} \quad -\frac{2}{2} = 1 - 2,$$

ezért a g szigorú monotonitásához elegendő, ha a $(-\infty, 1]$, az $[1, 2]$ és a $[2, +\infty)$ intervallumokon külön-külön szigorúan monoton növő, ami teljesül. Továbbá g minden racionális számot felvesz, ugyanis, ha $r \in \mathbb{Q} \cap [-2, -1]$, akkor a $g(x) = r$ egyenletnek megoldása az $x = \frac{-2}{r} \in [1, 2]$, ha pedig $r \in \mathbb{Q} \setminus [-2, -1]$, akkor a $g(x) = r$ egyenletnek megoldása $x = r + 3$. Tehát a g függvény is szigorúan monoton, $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ típusú bijekció.

Már csak az kell, hogy az $f + g$ függvény nem veszi fel a 0 értéket. Valóban, az $f + g$ függvénynek nincsen nullhelye az $[1, 2]$ intervallumban, hiszen itt $f(x) + g(x) = x - \frac{2}{x}$, és ennek nincsen racionális nullhelye. Továbbá nincsen nullhelye másutt sem, hiszen ha $x \notin [1, 2]$, akkor $f(x) + g(x) = 2x - 3$, és ennek nincsen racionális nullhelye az $[1, 2]$ intervallumon kívül. □

Szakaszunk utolsó, szintén igen nehéz feladata a 2017. márciusi KöMaL 163. oldalán található, A. 692. jelzéssel.

2.17. Feladat. Léteznek-e olyan $f, g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ bijektív függvények, amelyekre az $f \circ g$ függvény szigorúan monoton nő, a $g \circ f$ függvény pedig szigorúan monoton csökken?

2.18. *Megjegyzés.* Megadhatók olyan $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektív függvények is, amelyekre az $f \circ g$ függvény szigorúan monoton nő, a $g \circ f$ függvény pedig szigorúan monoton csökken. Ennek a konstrukciónak az alkalmas megszorítása megoldása lesz a 2.17. feladatnak is.

Bizonyítás. Ez a konstrukció az 1.29. példában szereplő függvényre, valamint az azt megelőző feladat ötletére alapoz, továbbá a racionális számok halmazára történő megszorítással az előbbi feladatra is egy megoldást ad.

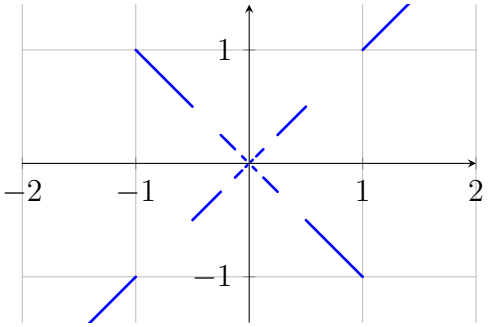
Célunk, hogy $f\big(g(x)\big) = 2x$, valamint $g\big(f(x)\big) = -2x$ álljon fenn minden x valós számra. Némi próbálgatás után felfedezhető, hogy ehhez célszerű lehet a pozitív számok halmazát az alábbi módon felosztani:

$$A = \ldots \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \cup [1, 2) \cup [4, 8) \ldots = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2^{2k}, 2^{2k+1})$$

és $B = (0, +\infty) \setminus A$. Ekkor legyen a g függvény definíciója

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \in A, \\ -x, & \text{ha } |x| \in B, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

valamint $f(x) = 2g(x)$ (lásd a 2.10. ábrán).



2.10. ábra. A fenti g függvény grafikonja

A g függvény értelmezéséből világos, hogy külön-külön bijektív az $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in A\} \cup \{0\}$, valamint az $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in B\}$ halmazokon, így bijektív az uniójukon, a teljes számegyesen. Ezenkívül $f = 2g$, így az f függvény is nyilvánvalóan bijektív.

Világos továbbá, hogy a $g \circ g$ függvény az A, a $-A$ halmaz elemeit és a 0 számot lépésenként helyben hagyja, valamint a többi valós számot kétszer egymás után megszorozza (-1)-gyel, így $g \circ g = \mathrm{id}$. Továbbá $g(2x) = -2g(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, hiszen $|x| \in A$ egyenértékű azzal, hogy $|2x| \in B$, éppen ezért érdemes az A halmazt így definiálni. Ezeket felhasználva

$$f\big(f(x)\big) = 2g\big(2g(x)\big) = -4g\big(g(x)\big) = -4x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Továbbá

$$f\big(g(x)\big) = 2g\big(g(x)\big) = 2x \quad \text{és} \quad g\big(f(x)\big) = \frac{1}{2} f\big(f(x)\big) = \frac{1}{2}(-4x) = -2x.$$

□

2.19. *Megjegyzés.* Olyan $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos bijektív függvények azonban nincsenek, amelyekre az $f\big(g(x)\big)$ függvény szigorúan monoton nő, a $g\big(f(x)\big)$ függvény pedig szigorúan monoton csökken.

Bizonyítás. Korábban már láttuk, hogy ha egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény folytonos és injektív, akkor szigorú monoton is. Ezt kihasználva az f és g függvények is szigorú monoton függvények. Ekkor azonban az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvények monotonitása megegyezik. Valóban, két szigorúan monoton növő, vagy két szigorúan monoton csökkenő függvény kompozíciója szigorúan monoton növő függvény; valamint egy szigorúan monoton növő és egy szigorúan monoton csökkenő függvény kompozíciója (bármilyen sorrendben) szigorúan monoton csökkenő függvény. □

3. fejezet

Csebisev-polinomok versenyfeladatokban

Ebben a fejezetben a már korábban említett Csebisev-polinomokról lesz szó. A Csebisev-polinomok rendelkeznek számos különleges tulajdonsággal, melyek közül néhányról itt szót ejtünk; középiskolai szinten megjelennek a trigonometria témakörében, de felsőbb matematikai alkalmazásuk is van, jórészt a numerikus analízis területén.

3.1. A Csebisev-polinomok értelmezése, tulajdonságaik

Motivációiként tekintsük a Középiskolai Matematikai Lapok (KöMaL) 2005 decemberében kitűzött, B. 3868. jelzésű feladatát.

3.1. Feladat. Ismeretes, hogy $\cos 2x$ előáll $\cos x$ polinomjaként:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Előállítható-e $\sin 2x$ a $\sin x$ polinomjaként?

Megoldás. Nem. Két különböző megoldást adunk.

- **I. Megoldás.** Tegyük fel, hogy egy p polinomra $\sin 2x = p(\sin x)$ fennáll minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Helyettesítsük az x helyére a $\frac{\pi}{2} - x$ mennyiséget. Ekkor az ismert $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ azonosság alapján

  $$p(\cos x) = p\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \sin(\pi - 2x) = \sin 2x.$$

  A bal oldalon álló $p(\cos x)$ páros függvény, hiszen a belső függvény páros. Továbbá a jobb oldalon álló $\sin 2x$ páratlan. Így tehát $p(\cos x) = \sin 2x$ az azonosan nulla függvény, ami azonban ellentmondás. □

- **II. Megoldás.** Az iménti megoldásban sehol sem használtuk ki, hogy p polinom lenne. Valójában nemcsak polinomfüggvény, de semmilyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény sem létezik, amelyre minden x valós szám esetén $\sin 2x = f(\sin x)$ fennáll. Valóban, könnyedén találunk olyan különböző helyeket, ahol a $\sin x$ értéke ugyanaz, de a $\sin 2x$ értéke eltér. Helyettesítsük az $f(\sin x) = \sin 2x$ azonosságba $x = \frac{\pi}{6}$, valamint az $x = \frac{5\pi}{6}$ értékeket. Ekkor egyrészt

  $$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

  másrészt

  $$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

  tehát $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ volna egyszerre, ami lehetetlen.

□

3.2. Kérdés. Egy természetesen adódó kérdés, hogy vajon mely $n \in \mathbb{N}^+$ számok esetén létezik olyan f_n függvény, amelyre $\sin nx = f_n(\sin x)$. Az imént láttuk, hogy $n = 2$ esetben nincsen megfelelő f_2, ugyanakkor világos, hogy $\sin(1 \cdot x) = \sin x$ esetén $f_1 = \mathrm{id}$ például megfelelő, továbbá belátható, hogy $\sin 3x = -4\sin^3 x + 3\sin x$. Erre az általánosabb kérdésre később válaszolunk.

A következő feladat a KöMaL 1999. decemberi számában szerepelt, B. 3327. jelzéssel.

3.3. Feladat. Adjunk meg egy egész együtthatós polinomot, amelynek a $\cos 18^\circ$ zérushelye!

Megoldás. Ismeretes, hogy minden valós x, y szám esetén

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Helyettesítsünk az előbbi azonosságba $y = 2x$ értéket. Ekkor az ismert

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1, \\ \sin 2x &= 2\sin x \cos x, \\ \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x \end{aligned}$$

trigonometrikus azonosságokat felhasználva a

$$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin^2 x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

egyenlőség adódik. A következő számoláshoz még szükségünk lesz a $\sin 3x$ mennyiség alábbi felírására:

$$\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x.$$

Végül

$$\cos 5x = \cos(2x + 3x) = \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x,$$

melybe a korábbi azonosságokat behelyettesítve, majd rendezve azt kapjuk, hogy

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.$$

Ebbe az egyenletbe végül $x = 18^\circ$ értéket helyettesítve a

$$0 = \cos 90^\circ = \cos(5 \cdot 18^\circ) = 16\cos^5 18^\circ - 20\cos^3 18^\circ + 5\cos 18^\circ$$

egyenlőséghez jutunk. Így tehát a $p(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ polinomnak gyöke a $\cos 18^\circ$. □

Az előző feladat megoldásának kulcsa az volt, hogy $\cos 5x$ kifejezhető $\cos x$ valamilyen (egész együtthatós) polinomjaként. Ez sokkal általánosabban is igaz.

3.4. Állítás. *Minden n nemnegatív egész számhoz létezik egy és csak egy olyan T_n polinom, amelyre* $\cos nx = T_n(\cos x)$ *fennáll mindenütt.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\cos(0 \cdot x) = 1$, ezért $T_0(x) = 1$, valamint $T_1(x) = x$ megfelelő, így az $n \in \{0, 1\}$ esetekben a létezés igazolt. Továbbá a

$$\cos\big((n+1)x\big) = \cos(nx + x) = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x,$$

valamint a

$$\cos\big((n-1)x\big) = \cos(nx - x) = \cos nx \cos x + \sin nx \sin x$$

egyenleteket összeadva

$$\cos\big((n+1)x\big) + \cos\big((n-1)x\big) = 2\cos nx \cos x,$$

adódik. Legyen ekkor $n \geqq 1$, és erre az n-re tegyük fel, hogy léteznek a megfelelő T_n és T_{n-1} polinomok, amelyekre mindenütt

$$T_n(\cos x) = \cos nx \quad \text{és} \quad T_{n-1}(\cos x) = \cos\big((n-1)x\big).$$

Ebből az következik, hogy

$$\cos\big((n+1)x\big) = 2\cos x \cos nx - \cos\big((n-1)x\big) = 2\cos x T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x),$$

ami azt jelenti, hogy a $T_{n+1}(x) \coloneqq 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ rekurzióval definiált polinomok megfelelnek.

Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ szám és f, g polinomok esetén

$$f\big(\cos(x)\big) = \cos nx = g\big(\cos(x)\big)$$

mindenütt, tehát $f\big(\cos(x)\big) - g\big(\cos(x)\big) = 0$ mindenütt. Mivel a $\cos x$ végtelen sok különböző értéket vesz fel, ezért az $f - g$ polinomnak végtelen sok gyöke van, ami azt jelenti, hogy $f - g$ a nulla polinom, tehát $f = g$. □

3.5. Definíció. A $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, valamint $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ rekurzióval definiált polinomot n-edik *Csebisev-polinomnak* nevezzük.

Az első néhány Csebisev polinom:

- $T_0(x) = 1$,
- $T_1(x) = x$,
- $T_2(x) = 2x^2 - 1$,
- $T_3(x) = 4x^3 - 3x$,
- $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$,
- $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$,
- $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$.

3.6. Állítás. *A Csebisev-polinomokra fennáll az alábbi néhány tulajdonság:*

1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ *minden* $x \in [-1, 1]$ *számra,*
2. *a* T_n *polinom foka* n*, főegyütthatója* 2^{n-1} *minden* $n \in \mathbb{N}^+$ *esetén,*
3. *a páros indexű Csebisev-polinomok csak páros, míg a páratlan indexű Csebisev-polinomok csak páratlan fokú monomokból állnak,*
4. *minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén* $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

Bizonyítás. Az állítás pontjain rendre haladva:

1. A $T_n(\cos t) = \cos nt$ egyenlőtlenségből $t = \arccos x$ helyettesítéssel a

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (x \in [-1, 1])$$

összefüggés adódik, hiszen ha $x \in [-1, 1]$, akkor $\cos(\arccos x) = x$. Más x értékek esetén $\arccos x$ nem értelmes mint valós függvény.

2. Az állítás egyrészt világos a T_0 és T_1 polinomokra, másrészt nagyobb n értékekre a

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

rekurzióból rögtön látható, hogy T_n főegyütthatója kétszerese a T_{n-1} polinom főegyütthatójának, valamint T_n foka eggyel több, mint a T_{n-1} polinom foka.

3. A rekurzív képletből az is könnyedén látható, hogy a páros indexű Csebisev-polinomok csak páros, míg a páratlan indexű Csebisev-polinomok csak páratlan fokú monomokból állnak. Valóban, egyrészt az állítás igaz az első néhány Csebisev-polinomra, másrészt ha $n \geqq 2$, akkor a $2xT_{n-1}$ minden monomjának foka rendre eggyel több a T_{n-1} polinomban szereplő monomok fokánál, valamint n és $n-2$ paritása megegyezik, tehát T_{n-2} monomjainak fokai szintén megfelelő paritásúak.

4. Az előző pontból triviálisan következik, hogy ha n páros szám, akkor $T_n(-x) = T_n(x)$, illetve ha n páratlan szám, akkor $T_n(-x) = -T_n(x)$. Így tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.

□

A 3.2. kérdésre a T_n polinomok segítségével adhatunk általános választ.

Válasz. Ha $n = 2k$ pozitív páros szám, akkor nincsen megfelelő függvény. Indirekt módon tegyük fel ugyanis, hogy $f_n(\sin x) = \sin nx$ mindenütt, majd ebbe az egyenlőségbe helyettesítsük be az $x_{1,2} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6k}$ értékeket. Itt egyrészt $\sin x_1 = \sin x_2$, hiszen $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ minden α értékre, másrészt ezen a $\sin x_1 = \sin x_2$ helyen az

$$f_n(\sin x_1) = \sin(nx_1) = \sin\left(2k\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6k}\right)\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2}$$

és az

$$f_n(\sin x_2) = \sin(nx_2) = \sin\left(2k\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6k}\right)\right) = \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = (-1)^{k+1} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

egyenlőség is igaz lenne egyszerre, ami lehetetlen. Másrészt, ha $n = 2k + 1$ páratlan szám, úgy $f_n = (-1)^k T_n$ megfelel, ugyanis

$$T_n(\sin x) = T_n\Big(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\Big) = \cos\left(nx - n\frac{\pi}{2}\right) = \cos nx \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \sin nx \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right),$$

ahol $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$, valamint $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$, és így

$$T_n(\sin x) = (-1)^k \sin(nx),$$

ami a kívánt egyenlőséggel ekvivalens. □

3.7. Tétel. *Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az n-edik Csebisev-polinom gyökei mind a $[-1, 1]$ intervallumba esnek, méghozzá a 0 számra szimmetrikusan, azaz $T_n(x) = 0$ pontosan akkor áll fenn valamely x valós számra, ha $T_n(-x) = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x \in [-1,1]$. Ekkor figyelembe véve, hogy az arkusz-koszinusz függvény értékkészlete a $[0,\pi]$ intervallum, $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha

$$n \arccos x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \{0,1,\dots,n-1\}),$$

tehát ha

$$x_k = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \quad (k \in \{0,1,\dots,n-1\}).$$

Ezek mind különböző helyek, hiszen itt $0 < \frac{2k+1}{2n} < 1$, és így a cos lehetséges argumentumai mind a $[0,\pi]$ intervallumba esnek, ahol a koszinusz függvény injektív. A szimmetria is teljesül, ugyanis a $\cos x = -\cos(\pi - x)$ azonosság felhasználásával

$$\begin{aligned} x_k &= \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) = -\cos\left(\pi - \frac{2k+1}{2n}\pi\right) = -\cos\left(\frac{2n-2k-1}{2n}\pi\right) = \\ &= -\cos\left(\frac{2(n-k-1)+1}{2n}\pi\right) = -x_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Több gyöke T_n-nek nem lehet, hiszen klasszikus algebrából ismert tény, hogy egy n-edfokú polinomnak legfeljebb n darab valós gyöke van. □

Most vizsgáljuk meg a T_n polinomok szélsőértékhelyeit.

3.8. Tétel. *Minden $n > 1$ egész szám esetén a T_n polinomfüggvény összes lokális szélsőértékhelye szigorú, valamint ezek mind a $(-1,1)$ intervallumba esnek.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $x \in (-1,1)$. Belátjuk, hogy a T_n polinomfüggvénynek itt van $(n-1)$ darab szigorú lokális szélsőértékhelye, majd felhasználjuk, hogy több nem lehet másutt sem.

Ha $|x| < 1$, akkor $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Ez akárhányszor differenciálható függvények kompozíciója a $(-1,1)$ nyílt intervallumon (valójában polinomfüggvény), így keressük meg a deriváltjának nullhelyeit:

$$T_n'(x) = -\sin(n \arccos x)\frac{-n}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n \sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

és mivel $n > 0$, így $T_n'(x) = 0$ egyenértékű azzal, hogy

$$\sin(n \arccos x) = 0. \tag{3.1}$$

Ha $-1 < x < 1$, akkor $0 < \arccos x < \pi$, és így (3.1) pontosan akkor áll fenn, ha $n > 1$ és

$$n \arccos x = k\pi \quad k \in \{1,\dots,n-1\},$$

és emiatt a derivált nullhelyei $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, ahol $k \in \{1,\dots,n-1\}$.

Végül vizsgáljuk meg a $T_n''(x)$ függvény értékeit ezeken a helyeken:

$$T_n''(x) = \frac{nx \sin(n \arccos x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n^2 \cos(n \arccos x)}{1-x^2} = \frac{xT_n'(x) - n^2 T_n(x)}{1-x^2},$$

amelybe behelyettesítve az $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ értékeket, és felhasználva, hogy $T_n'(x_k) = 0$,

$$T_n''(x_k) = \frac{0 - n^2 T_n(x_k)}{1-x_k^2} = -\frac{n^2}{1-x_k^2} T_n(x_k),$$

amelyre

$$T_n(x_k) = \cos\left(n \arccos\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0.$$

Tehát az $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ helyeken $T_n'(x_k) = 0$, és $T_n''(x_k) \neq 0$, vagyis ezek mind szigorú lokális szélsőértékhelyek a $(-1, 1)$ intevallumban. Így megvan mind, hiszen egy nem konstans, n-edfokú polinomfüggvénynek legfeljebb $n-1$ darab szélsőértékhelye lehet. □

3.9. *Megjegyzés.* A bizonyítás közben azt is beláttuk, hogy a T_n polinomfüggvény lokális szélsőértékhelyei az $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ helyek, ahol $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, továbbá, hogy az itteni függvényértékek $T_n(x_k) = (-1)^k$. Ez utóbbi észrevételt, hogy $|T_n(x)| \leqq 1$, ha $|x| < 1$, továbbá az előbbi x_k helyeken egyenlőség áll fenn, a későbbiekben még kihasználjuk.

3.2. Legkisebb abszolút értékű polinomok

A numerikus alkalmazásokhoz szorosabban kapcsolódó tulajdonsága a Csebisev-polinomoknak, hogy megfelelő számszorosaik valamilyen értelemben „a lehető legközelebb" vannak a nullához a $[-1, 1]$ intervallumon.

Tekintsük a KöMaL 2003 októberében kitűzött, B. 3668. jelzésű feladatát!

3.10. Feladat. Milyen a és b valós számokra igaz, hogy minden $x \in [0, 1]$ esetén

$$|x^2 - ax - b| \leqq \frac{1}{8}? \tag{3.2}$$

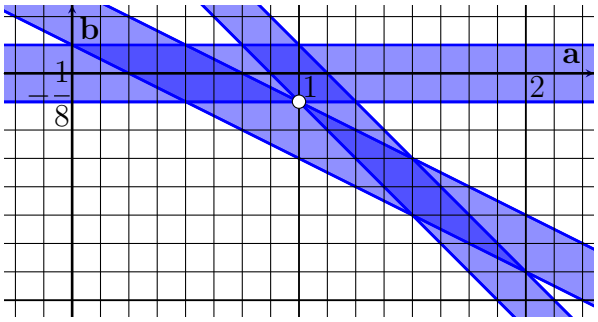
Megoldás. Helyettesítsünk $x = 0$, $x = 1$ valamint $x = \frac{1}{2}$ értékeket a (3.2) egyenlőtlenségbe. Ekkor az a és b paraméterekre az alábbi egyenlőtlenségek adódnak:

$$-\frac{1}{8} \leqq b \leqq \frac{1}{8} \tag{3.3}$$

$$-\frac{1}{8} \leqq 1 - a - b \leqq \frac{1}{8} \tag{3.4}$$

$$-\frac{1}{8} \leqq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}a - b \leqq \frac{1}{8}. \tag{3.5}$$

Ezen három feltételt az a, b síkon ábrázolva három, párhuzamos egyenespárok által határolt sávot kapunk, amelyek közös metszete az $\left\{\left(1, -\frac{1}{8}\right)\right\}$ egyelemű halmaz (lásd a 3.1. ábrát).



3.1. ábra. A (3.3)–(3.5) egyenletrendszerek megoldáshalmazai

Tehát ha az $x^2 - ax - b$ polinom teljesíti a (3.2) feltételt, akkor szükségképpen $a = 1$ és $b = -\frac{1}{8}$.

Megfordítva belátható, hogy az $x^2 - x + \frac{1}{8}$ polinom valóban meg is felel a feltételnek. Valóban,

$$-\frac{1}{8} \leqq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8} = x^2 - x + \frac{1}{8} \leqq \max_{x \in [0,1]} \left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right\} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad (x \in [0, 1]),$$

tehát az egyetlen lehetséges számpár, az $a = 1$, $b = -\frac{1}{8}$ megfelel. □

Az előző feladatban a $[0,1]$ intervallumot a $[-1,1]$ intervallumra, valamint az $\frac{1}{8}$ konstanst $\frac{1}{2}$-re kicserélve is oldjuk meg:

3.11. Feladat. Mely $f(x)=x^2+ax+b$ másodfokú polinomokra teljesül az $|f(x)|\leqq\frac{1}{2}$ egyenlőtlenség minden $x\in[-1,1]$ szám esetén?

Megoldás. A feladat az iménti, behelyettesítéssel történő okoskodással is megoldható, ezért itt most két másikat közlünk. Egyrészt a feladat visszavezethető az előzőre, ha észrevesszük, hogy f pontosan akkor megoldása ennek a feladatnak, ha a $[0,1]$ intervallumra transzformált, 1 főegyütthatójú $\frac{1}{4}f(2x-1)$ polinom megoldása az előbbi feladatnak. Ez alapján ennek a feladatnak az egyetlen megoldása

$$4\Big(\frac{x+1}{2}\Big)^2-\Big(\frac{x+1}{2}\Big)+\frac{1}{8}=x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}T_2(x).$$

Másrészt a feladat megoldható az a paraméter előjele szerinti esetszétválasztással is. A feladatban megkövetelt feltétel egyenértékű azzal, hogy f értékkészletére $R_f\subset\big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big]$. Amennyiben $a>0$, úgy az $f(x)=\big(x+\frac{a}{2}\big)^2-\frac{a^2}{4}+b$ függvény a teljes $[0,1]$ intervallumon szigorúan monoton növekszik. Ez azt jelenti, hogy az értékkészletének részhalmaza az $[f(0),f(1)]=[b,1+a+b]$ intervallum, amelynek a hossza $1+a>1$. Így $a>0$ esetben biztosan sérül az $R_f\subset\big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big]$ feltétel. Amennyiben azonban $a<0$, úgy az f függvény a teljes $[-1,0]$ intervallumon szigorú monoton csökken. Emiatt az $[f(0),f(-1)]=[b,1-a+b]$ egységnél hosszabb intervallum részhalmaza az R_f halmaznak, ami ugyanezt a problémát veti fel. Tehát csakis az $a=0$ esetek jöhetnek szóba. Ekkor azonban $f(x)=x^2+b$ értékkészlete éppen $[b,1+b]$, amely pontosan akkor részhalmaza a $\big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big]$ intervallumnak, ha $b=-\frac{1}{2}$. Tehát az egyetlen megoldása a módosított feladatnak az $f(x)=x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}T_2(x)$. □

Azt láttuk tehát, hogy az $\frac{1}{2}T_2$ Csebisev-polinom azzal a különleges tulajdonsággal rendelkezik, hogy a $[-1,1]$ intervallumon az 1 főegyütthatójú másodfokú polinomok közül az ő nullától való abszolút eltérése a legkisebb. Világos, hogy ha a főegyütthatóra tett kikötést elhagyjuk, akkor tetszőlegesen kicsi abszolút eltérésű polinom adható. Továbbá a feladatok közötti átvezetés szemlélteti azt is, hogy egy f polinom pontosan akkor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal a $[-1,1]$ intervallumon, amikor a $\frac{4}{(b-a)^2}f\big(\frac{b-a}{2}x+\frac{a+b}{2}\big)$ polinom az $[a,b]$ intervallumon. Ily módon az összes hasonló jellegű kérdés megválaszolható a Csebisev-polinomok alkalmazásával. A továbbiakban látni fogjuk, hogy ez a tulajdonság nemcsak $n=2$-re teljesül: minden $n\in\mathbb{N}^+$ esetén a $[-1,1]$ intervallumon a 0-tól legkisebb abszolút eltéréssel rendelkező normált (1 főegyütthatójú) polinom éppen a T_n Csebisev-polinom konstansszorosa. Ehhez azonban először vezessük be a következő fogalmat.

3.12. Definíció. Legyen adott egy $I\subset\mathbb{R}$ kompakt (azaz korlátos és zárt) intervallum, valamint egy ezen értelmezett $f\colon I\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor az f függvény *maximum normáján* az

$$\|f\|_{\max}:=\max_{x\in I}\{|f(x)|\}$$

mennyiséget értjük.

3.13. *Megjegyzés.* Az iménti definíció mindig értelmes, ugyanis, ha az f függvény folytonos az I kompakt intervallumon, úgy belátható, hogy az $|f|$ függvény is folytonos, valamint a Weierstraß-tétel értelmében $|f|$ felveszi a maximumát az I intervallumon.

Ezen fogalom bevezetésével a 3.10. feladat átfogalmazható úgy, hogy melyek azok a másodfokú, 1 főegyütthatójú $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ polinomfüggvények, amelyekre $\|f\|_{\max}\leqq\frac{1}{8}$. A válasz pedig az, hogy pontosan egy ilyen van, ez éppen az $f(x)=x^2-x+\frac{1}{8}$ polinomfüggvény, és

erre az $\|f\|_{\max} = \frac{1}{8}$ áll fenn. Vagyis kisebb maximum normájú megfelelő polinomfüggvény egyáltalán nincsen. A következőkben ezt a kérdést fogjuk megvizsgálni részletesebben, azonban szimmetria-megfontolásból a $[0,1]$ intervallum helyett a $[-1,1]$ intervallumot fogjuk tekinteni. A korábbiak értelmében a megfelelő transzformációval a két kérdés visszavezethető egymásra, sőt, általános $[a,b]$ intervallumra fogalmazva is megkapjuk a választ.

3.14. Kérdés. Melyek azok az n-edfokú, 1 főegyütthatójú polinomfüggvények, amelyekre a $[-1,1]$ intervallumon vett maximum norma minimális?

3.15. Állítás. *Tegyük fel, hogy f egy 1 főegyütthatójú, legfeljebb n-edfokú polinom, ahol n pozitív egész szám. Ekkor*

$$\|f\|_{\max} = \max_{x\in[-1,1]}\{|f(x)|\} \geqq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $f = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$, ahol T_n az n-edik Csebisev-polinom.

Bizonyítás. Először is belátjuk, hogy elegendő kizárólag a pontosan n-edfokú polinomfüggvényekkel foglalkozni. Valóban, ha M_n jelöli az n-edfokú polinomok halmazán előforduló maximum normák infimumát, úgy belátható, hogy $M_n \leqq M_{n-1}$, hiszen ha a g polinom foka $n-1$, akkor az $xg(x)$ foka n, továbbá

$$M_n \leqq \|xg(x)\|_{\max} = \max_{|x|\leqq 1}\{|xg(x)|\} \leqq \max_{|x|\leqq 1}\{|x||g(x)|\} \leqq \max_{|x|\leqq 1}\{|g(x)|\} = \|g\|_{\max}. \tag{3.6}$$

Mivel a (3.6) egyenlőtlenség minden $(n-1)$-edfokú g polinomra fennáll, ezért

$$M_n \leqq \inf_{\deg(g)=n-1}\{\|g\|_{\max}\} = M_{n-1}.$$

Másrészt legyen f egy n-edfokú, 1 főegyütthatójú polinomfüggvény, és indirekt módon tegyük fel, hogy $\|f\|_{\max} < \frac{1}{2^{n-1}}$. Jelölje most $\hat{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$ a *normált n-edik Csebisev-polinomot.* A 3.9. megjegyzés alapján tudjuk, hogy a $\hat{T}_n$ függvény szélsőértékei $\pm\frac{1}{2^{n-1}}$. Azt is tudjuk továbbá, hogy $T_n(1) = 1$ és $T_n(-1) = (-1)^n$, ami miatt $\hat{T}_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}}$ és $\hat{T}_n(-1) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$. Mindezeket felhasználva azt kapjuk, hogy az

$$x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (0 \leqq 2k \leqq n)$$

helyeken

$$\hat{T}_n(x) - f(x) = \frac{1}{2^{n-1}} - f(x) > \frac{1}{2^{n-1}} - \|f\|_{\max} > \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}} > 0,$$

valamint hasonló módon az

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) \quad (0 < 2k+1 \leqq n)$$

helyeken

$$\hat{T}_n(x) - f(x) = -\frac{1}{2^{n-1}} - f(x) \leqq -\frac{1}{2^{n-1}} + \|f\|_{\max} < 0.$$

Ekkor a Bolzano–Darboux-tételt alkalmazva az

$$I_k = \left[\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right), \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right] \quad (k \in \{0,1,\dots n-1\})$$

n darab intervallumra, az adódik, hogy a $\hat{T}_n - f$ polinomnak legalább n darab gyöke van, mindegyik I_k intervallum belsejében legalább egy. A $\hat{T}_n - f$ polinom foka $n-1$, ugyanis $\hat{T}_n$ és f főegyütthatója is 1, így a $\hat{T}_n - f$ polinomban x^n együtthatója 0, továbbá nem is konstans, hiszen a $\hat{T}_n - f$ függvény vesz fel pozitív, illetve negatív értékeket is. Ez azonban ellentmondás, ugyanis egy legfeljebb $(n-1)$-edfokú nem konstans polinomnak legfeljebb $n-1$ darab gyöke lehet. □

3.3. Polinomok deriváltjának abszolút értéke

A következő feladat a KöMaL 1987. áprilisi számában jelent meg F. 2635. jelzéssel.

3.16. Feladat. Tudjuk, hogy a, b, c, d olyan valós számok, amelyekre

$$|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leqq 1 \tag{3.7}$$

minden x-re, amelyre $|x| \leqq 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$|3ax^2 + 2bx + c| \leqq 9 \tag{3.8}$$

minden 1-nél kisebb abszolút értékű x esetén!

Vegyük észre, hogy ha az első egyenlőtlenség $|f(x)| \leqq 1$, akkor a második egyenlőtlenség éppen $|f'(x)| \leqq 9$. A harmadfokú eset helyett először próbáljuk meghatározni, hogy mi a helyzet, ha f foka 1, illetve 2.

A Bolzano–Darboux-tétel értelmében ha f folytonos a $[-1, 1]$ intervallumon, akkor f minden $f(-1)$ és $f(1)$ közti értéket felvesz. Ha $|a| > 1$, akkor az $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ elsőfokú polinomfüggvény folytonos a $[-1, 1]$ intervallumon. Ezért az R_f intervallum hossza legalább

$$|f(1) - f(-1)| = |2a| > 2,$$

ami miatt $R_f \subset [-1, 1]$ nem teljesülhet. Tehát ha minden $|x| \leqq 1$ esetén $|ax + b| \leqq 1$, akkor $|a| = |(ax + b)'| \leqq 1$. A következőkben a másodfokú esetet tekintjük.

3.17. Állítás. *Tegyük fel, hogy a, b, c olyan valós számok, hogy minden $x \in [-1, 1]$ esetén*

$$|ax^2 + bx + c| \leqq 1. \tag{3.9}$$

Ekkor

$$|2ax + b| \leqq 4. \tag{3.10}$$

Bizonyítás. Ha $a = 0$, akkor az előző állítás alapján $|b| = |2ax + b| \leqq 1$, ami a bizonyítandó állításnál erősebb. Most tegyük fel, hogy $a \neq 0$. A korábbiakhoz hasonlóan az $f'\colon x \mapsto 2ax + b$ polinomfüggvény szélsőértékei a $[-1, 1]$ intervallum végpontjaiban vannak, így f' értékkészletére

$$R_{f'} = \big[f'(-1), f'(1)\big] = [-2a + b, 2a + b], \quad (\text{ha } a > 0),$$

$$R_{f'} = \big[f'(1), f'(-1)\big] = [2a + b, -2a + b], \quad (\text{ha } a < 0).$$

Így $R_{f'}$ pontosan akkor részhalmaza a $[-4, 4]$ intervallumnak, ha

$$-4 \leqq -2a + b, \quad \text{és} \quad 2a + b \leqq 4, \quad (\text{ha } a > 0), \tag{3.11}$$

$$-4 \leqq 2a + b, \quad \text{és} \quad -2a + b \leqq 4, \quad (\text{ha } a < 0). \tag{3.12}$$

Mindez, az $a = 0$ esetén bizonyított $|b| \leqq 4$ összefüggéssel kiegészítve, pontosan akkor igaz, ha $|2a + b| \leqq 4$ és $|-2a + b| \leqq 4$. Tehát a (3.10) egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha az (a, b) pont a

$$\{(2, 0), (0, 4), (-2, 0), (0, -4)\}$$

ponthalmaz által kifeszített rombuszba esik az a, b síkon (lásd a 3.2. ábrán szürkével).

A (3.9) egyenlőtlenségbe $x = 0$, valamint $x = \pm 1$ értékeket helyettesítve az alábbi három egyenlőtlenség-rendszerhez jutunk:

$$-1 \leqq c \leqq 1, \tag{3.13}$$

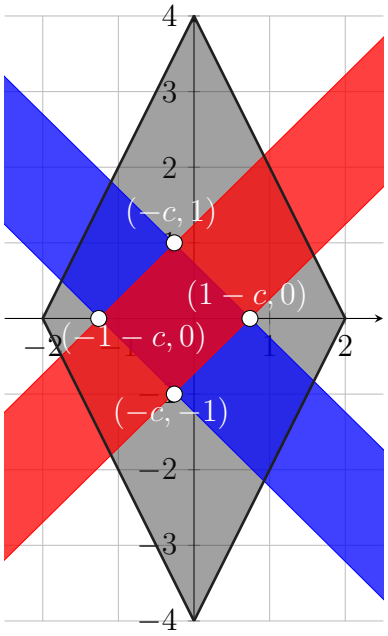
$$-1 \leqq a + b + c \leqq 1, \tag{3.14}$$

$$-1 \leqq a - b + c \leqq 1. \tag{3.15}$$

Vizsgáljuk meg a második és a harmadik egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát az a, b síkon különböző $c \in [-1, 1]$ paraméterek esetén. A második egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza a $b = 1 - a - c$ és a $b = -1 - a - c$ egyenesek által határolt sáv, míg a harmadik egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza a $b = -1 + a + c$ és a $b = 1 + a + c$ egyenesek által határolt sáv. Tehát a második és a harmadik egyenlőtlenség-rendszer együttes megoldáshalmaza a

$$\{(1 - c, 0), (-c, 1), (-1 - c, 0), (-c, -1)\} \tag{3.16}$$

négy pont által kifeszített négyzet (lásd a 3.2. ábrát).



3.2. ábra. A (3.11)–(3.12) egyenlőtlenségek együttes megoldáshalmaza (szürkével), valamint a (3.16) pontok által kifeszített négyzet az a, b síkon

Ez a négyzet az összes $c \in [-1, 1]$ esetén részhalmaza a $\{(2, 0), (0, 4), (-2, 0), (0, -4)\}$ pontok által kifeszített rombusznak, és éppen ezt kellett belátni. □

Most visszatérünk az eredeti 3.16. feladat megoldására. A megoldáshoz hasonló módszer alkalmazható, mint a másodfokú esetben, csak 1 helyett 2 szabad paraméterrel dolgozva. Ehelyett itt álljon egy tisztán algebrai jellegű érvelés.

A 3.16. feladat megoldása. A közölt hivatalos megoldás mintájára először helyettesítsünk a (3.7) egyenlőtlenségbe $x = \pm 1$, illetve $x = \pm\frac{1}{2}$ számokat. Ekkor az a, b, c, d paraméterekre az alábbi négy egyenlőtlenség-rendszert nyerjük:

$$-1 \leqq a + b + c + d \leqq 1, \tag{3.17}$$

$$-1 \leqq -a + b - c + d \leqq 1, \tag{3.18}$$

$$-1 \leqq \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + d \leqq 1, \text{ és} \tag{3.19}$$

$$-1 \leqq -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c + d \leqq 1. \tag{3.20}$$

Az $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ polinomfüggvénynek három helyen lehet szélsőértéke a $[-1, 1]$ intervallumban. Ezek az $x = \pm 1$ helyek, valamint az $x = \frac{-b}{3a}$ hely, utóbbi csak akkor, ha

$$-1 \leqq \frac{-b}{3a} \leqq 1. \tag{3.21}$$

Az állítás belátásához arra van szükségünk, hogy a (3.17)–(3.20) feltételekből következzen

$$-9 \leqq 3a + 2b + c \leqq 9, \tag{3.22}$$
$$-9 \leqq 3a - 2b + c \leqq 9, \tag{3.23}$$

továbbá a (3.17)–(3.21) egyenlőtlenségekből a (3.22)–(3.23) egyenlőtlenségeken kívül még a

$$-9 \leqq f'\Big(\frac{-b}{3a}\Big) = c - \frac{b^2}{3a} \leqq 9 \tag{3.24}$$

egyenlőtlenség is következzen. A $3a \pm 2b + c + d$ kifejezéseket előállítjuk az alábbi A, B, C, D mennyiségek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + d, \\ B &= -a + b - c + d, \\ C &= \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + d, \\ D &= -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}c + d. \end{aligned}$$

Ehhez kellenek olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyekre

$$3a + 2b + c + d = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D.$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül az összes a, b, c, d paraméterértékre, ha az a, b, c, d együtthatói mindkét oldalon azonosak, azaz

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha - \beta + \frac{1}{8}\gamma - \frac{1}{8}\delta, \\ 2 &= \alpha + \beta + \frac{1}{4}\gamma + \frac{1}{4}\delta, \\ 1 &= \alpha - \beta + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\delta, \\ 0 &= \alpha + \beta + \gamma + \delta. \end{aligned}$$

Ennek az egyenletrendszernek az egyetlen megoldása az $\alpha = \frac{19}{6}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -4$, $\delta = \frac{4}{3}$. A negatív együtthatók nem jelentenek gondot, hiszen a (3.17)–(3.20) egyenlőtlenségek szélei éppen egymás (-1)-szeresei. Mindezek alapján

$$-9 = -\frac{19}{6} - \frac{1}{2} - 4 - \frac{4}{3} \leqq \frac{19A}{6} - \frac{B}{2} - 4C + \frac{4D}{3} = 3a + 2b + c \leqq \frac{19}{6} + \frac{1}{2} + 4 + \frac{4}{3} = 9,$$

ami éppen a (3.22) egyenlőtlenség.

Az előzőhöz hasonlóan, egyenletrendszer segítségével megkapható, hogy

$$3a - 2b + c = \frac{A}{2} - \frac{19B}{6} - \frac{4C}{3} + 4D,$$

amiből következik, hogy

$$-9 \leqq \frac{A}{2} - \frac{19B}{6} - \frac{4C}{3} + 4D = 3a - 2b + c \leqq 9.$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy ha $\frac{-b}{3a} \in [-1,1]$, akkor $c - \frac{b^2}{3a} \in [-9,9]$. Felhasználva a háromszög egyenlőtlenséget, valamint azt, hogy $\left|\frac{b}{3a}\right| \leqq 1$,

$$\left|c - \frac{b^2}{3a}\right| \leqq |c| + |b|\left|\frac{b}{3a}\right| \leqq |b| + |c| = \max\{|b+c|, |b-c|\}.$$

Felírva a $b \pm c$ mennyiségeket A, B, C, D lineáris kombinációjaként:

$$b + c = \frac{A}{2} + \frac{5B}{6} + \frac{2C}{3} - 2D, \text{ és}$$
$$b - c = \frac{5A}{6} + \frac{B}{2} - 2C + \frac{2D}{3}.$$

Ezeket kihasználva, végül

$$\left|c - \frac{b^2}{3a}\right| \leqq \max\{|b+c|, |b-c|\} \leqq \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + 2 = 4,$$

ami erősebb a bizonyítandó állításnál. □

3.18. Kérdés. Felmerülhet a kérdés, hogy vajon kisebb korlát adható-e az 1 főegyütthatójú, $[-1,1]$ intervallumon értelmezett polinomfüggvények körében a $\|f'\|_{\max}/\|f\|_{\max}$ mennyiségre. Létezik-e olyan polinom, amelyre egyenlőség áll fenn, valamint általánosságban mi a kapcsolat f foka és a megfelelő korlát között?

Válasz. Világos, hogy $n = 2$ esetén a $k = 4$ korlát csökkentése az a, b síkon a megfelelő rombusz méreteit csökkentené hosszarányosan, és ekkor a $|c| \approx 1$ esetek környékén a $b \approx 0$ és az $|a| \approx 2$ esetekhez tartozó polinomok kívül fognak esni a megengedett tartományon. Ebből adódhat az ötlet, hogy vizsgáljuk meg a $c = \pm 1$ paraméterértékekhez tartozó azon polinomokat, amelyekre az a, b értékek a megengedett rombusz határára esnek. Ekkor az $a = \pm 2$, $b = 0$ és a $c = \mp 1$ paraméterértékeket kapjuk, amelyekhez az $f_{1,2}(x) = \pm 2x^2 \mp 1 = \pm\frac{1}{2}T_2$ polinomok tartoznak. Ezekre valóban éles a határ, ugyanis $\| \pm T_2\|_{\max} = 1$, valamint $\| \pm T_2'\|_{\max} = \| \pm 4x\|_{\max} = 4$.

A harmadfokú esetben is belátható, hogy egyenlőség pontosan az $f = \pm\frac{1}{4}T_3$ polinomok esetén áll fenn.

□

A harmadik kérdésre a következő, Markov-tétel néven híressé vált tétel ad általános választ.

3.19. Tétel. *(Markov-tétel) Legyen adott P valós együtthatójú, n-edfokú polinomfüggvény, amelyre $|P(x)| \leqq 1$ a $[-1,1]$ intervallumon. Ekkor $|P'(x)| \leqq n^2$ a $[-1,1]$ intervallumon, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $P = \pm T_n$, ahol T_n az n-edik Csebisev-polinomot jelöli.*

3.20. *Megjegyzés.* Bizonyítás helyett csak annyit látunk be, hogy a $|P'(x)|$ mennyiségre vonatkozó korlát kisebb nem lehet, ha $x \in [-1,1]$ tetszőleges. Legyen $t_n = T_n'(1)$, ha $n \in \mathbb{N}$. A Csebisev-polinomokat definiáló $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ rekurziót felhasználva $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, valamint

$$t_n = T_n'(1) = \Big(2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\Big)'(1) = 2T_{n-1}(1) + 2T_{n-1}'(1) - T_{n-2}'(1) =$$
$$= 2t_{n-1} - t_{n-2} + 2$$

rekurzió adódik. Számolással ellenőrizhető, hogy $t_n = n^2$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, és ezért a $|P'(x)|$ mennyiségre nem adható alacsonyabb korlát, mint n^2. A tétel bizonyítása megtalálható például a [9] forrásban.

4. fejezet

Tanításmódszertani kitekintés

Az összefüggő egyéni iskolai gyakorlatom alatt lehetőségem nyílt az addigra már elkészült 1.2. szakasz megtanítására egy tizenegyedik osztályos, a matematika és fizika tantárgyakat egyaránt emelt óraszámban tanuló csoportban. Ebben a fejezetben bemutatom a tanított csoportot, a rövid tanmenetrészletet, amely alapján a témakört tanítottam, végül megosztom a tanításhoz kapcsolódó gondolataimat, tapasztalataimat.

4.1. A csoport bemutatása

Az összefüggő egyéni iskolai gyakorlatomat egy budapesti hatosztályos gimnáziumban végeztem, Richlik-Horváth Katalin mestertanár mentorálásában. A tanév elején – kihasználva a jelenléti tanítás előnyeit – igyekeztem annyi óra matematikát tanítani, amennyire csak lehetőségem adódott, így volt alkalmam ezt a csoportot is alaposabban megismerni. Az 1.2. szakasz megtanítására ellenben már csak az online oktatásban, márciustól volt lehetőségem.

A csoport létszáma tizenkilenc fő, akik majdnem mindannyian a kilencedik évfolyamtól kezdve heti négy órában tanulják a matematikát, illetve kettő órában a fizikát a tanárnőtől, a tantárgyi kapcsolódásokat maximálisan szem előtt tartva a két tantárgy között. Ezenkívül a diákok körében népszerűek a különféle matematika- és fizikaversenyek, amelyeken rendszeresen jó eredményeket érnek el a saját kategóriáikban. Matematikából a csoporton belüli elismertség és státusz záloga a matematika és fizika tantárgyakban nyújtott teljesítmény, így a diákok motiváltak a tanulásra. Az ide járó diákok nagy arányban tervezik matematikával, fizikával vagy egyéb természettudományokkal foglalkozó pályákon folytatni a felsőfokú tanulmányaikat: körülbelül a csoport fele szeretne valamilyen mérnök, matematikus vagy fizikus lenni, valamint akadnak a gazdaságtudományok felé érdeklődők is.

A csoportba járnak továbbá élsportolók is, akik szintén a legjobbak közé tartoznak, és a tapasztalatok alapján a sport nemhogy visszaveti őket a tanulmányaikban, hanem tartást, stílust, munkamorált ad számukra.

Mindezek ellenére ez a csoport az országos ranglistákat tipikusan vezető iskolák diákjaihoz képest jóval kisebb óraszámokban tanul matematikát, valamint az iskola nagyobb hangsúlyt fektet a bölcsészettudományok gondozására.

Van néhány diák, akik később csatlakoztak az emelt óraszámú matematika csoporthoz. Az ő felzárkózásukra kiemelt órai, illetve órán kívüli figyelmet szentel a tanár, rendszeresen kapnak segítő jellegű külön feladatokat, valamint gyakrabban intéz hozzájuk a tanár megértést ellenőrző kérdéseket.

4.2. Egy lehetséges feladatsor és tanmenetrészlet

Ebben a szakaszban bemutatjuk az 1.2. szakasz egy lehetséges feldolgozásának alapját képező tanmenetrészletet, az ehhez készített feladatsort, valamint ezeken keresztül a tananyag megtanításának főbb mozzanatait.

A függvényegyenletek témakörének megtanításában az első fogalmi nehézség rögtön a címben rejlik. A középiskolás diákok tanulmányaik során, amikor egyenletekkel találkoznak, kizárólag valamilyen szűkebb vagy bővebb számkörben keresik az egyenletek megoldását. Ezért a legelső fontos ismeret, amelyet a függvényegyenletek bevezetésekor a tanulónak el kell sajátítania, az az absztrakció, hogy egy egyenletnek nemcsak számok, hanem akár függvények is lehetnek a megoldásai. Továbbá egy függvényegyenlet esetében az sem magától értetődő, hogy egy megsejtett megoldást hogyan tudunk ellenőrizni, vagyis hogyan kell egy függvényegyenletbe egy függvényt behelyettesíteni. Így ez a készség áll az első óra, valamint a javasolt feladatsor első két feladatának fókuszában. Ezenkívül a további feladatokhoz célszerű feleleveníteni a lineáris algebrai egyenletrendszerekkel kapcsolatos ismereteket, azok megoldási módszereit, valamint a lineáris törtfüggvények inverzének keresését, ugyanis a tanítani kívánt megoldási stratégia ezekre a készségekre támaszkodik.

A tanításhoz használt feladatsor tartalmaz elemeket a [11] feladatgyűjteményből, az 1.2. szakasz versenyfeladataiból, valamint akad közöttük néhány saját feladat is. A téma feldolgozását követően a tanítási tapasztalatok alapján a feladatsort némileg át kellett dolgozni és ki kellett egészíteni.

4.1. Feladat. Helyettesítéssel ellenőrizzük, hogy az alábbi függvények megoldásai-e az alábbi függvényegyenleteknek!

- $f(x+1)+f(2x-1)=18x-14;\quad f_1(x)=6x-7$ és $f_2(x)=7x-6$,
- $2f(x^2)-3xf(-x)=5x^2+3x-2;\quad f_1(x)=x+1$ és $f_2(x)=x-1$,
- $f(3x)=3f(x);\quad f_1(x)=x$, $f_2(x)=-2x$ és $f_3(x)=x+1$,
- $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{x}-x+1;\quad f(x)=1-x$,
- $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x;\quad f(x)=\frac{4x+5}{-3x+3}$.

A függvényegyenlet fogalmához kapcsolódóan kiemelendő, hogy hacsak a feladat mást nem mond, a függvényegyenletet a benne szereplő algebrai kifejezések legbővebb (valós) értelmezési tartományán kell megoldani. A helyettesítendő kifejezések mind legfeljebb másodfokú polinomok vagy racionális törtfüggvények. Ezeken a példákon elsajátítható a behelyettesítés ezen új koncepciója, ugyanakkor annyira nem bonyolultak, hogy a számolás komoly nehézséget okozzon a tizenegyedikes diákoknak.

4.2. Feladat. Sejtsük meg az alábbi függvényegyenletek megoldásait, majd behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy a megsejtett függvények valóban megoldások. Melyiknek van egynél több megoldása?

$$f(-x)=2x,\qquad f(3x)=5x,\qquad f(2x-6)=4x+10,$$
$$f^2(x)=x^2,\quad f(2x)=2f(x),\qquad f(x+\pi)=-f(x)$$

Itt az első kettő függvényegyenletben a heurisztikus megközelítésből kiindulva felfedeztetjük a változó helyére történő behelyettesítést mint megoldási stratégiát. Ezután ezt a módszert a harmadik függvényegyenletben tudatosan alkalmazzuk. A negyedik függvényegyenlet bevezeti

azt a gondolatot, hogy egy függvényegyenletnek több, akár végtelen sok megoldása is lehet. Megfelelő például, ha

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus H, \\ -x, & \text{ha } x \in H, \end{cases}$$

ahol H egy tetszőleges, 0 pontra szimmetrikus számhalmaz. Az ötödik-hatodik példa kapcsán megemlíthető, hogy ebben a két függvényegyenletben, ha f_1 és f_2 megoldások, akkor $f_1 + f_2$, illetve általában f_1 és f_2 függvények bármely lineáris kombinációja is megoldás. Ennek az okát ezen a ponton nem érdemes magyarázni, a linearitás ezen fogalma túl absztraktnak bizonyulhat a középiskolás diákoknak.

A következő feladat arra vezet rá, hogy a vizsgált függvényegyenletben érdemes a változó helyére más algebrai kifejezéseket helyettesíteni. A fokozatosság jegyében először csak konkrét számok, később ismeretleneket is tartalmazó kifejezések behelyettesítését igénylő függvényegyenleteket tekintünk.

4.3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az $f(2x) = 2f(x)$ függvényegyenletet, akkor

$$\begin{array}{ccc} f(0) = 0, & f(4) = 4f(1), & f(2020) = 4f(505), \\ f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{8}f\left(\frac{1}{2}\right), & f(32x) = 8f(4x), & f(2^n x) = 2^n f(x) \end{array}$$

minden $n \in \mathbb{Z}$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén. Igaz-e, hogy $f(2020) = 505f(4)$?

4.4. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljesíti az $f(x+1) = -f(x)$ függvényegyenletet, akkor f periodikus! Adjunk meg minél több ilyen függvényt!

A következő feladat megkezdése előtt érdemes röviden felidézni a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldásáról tanult ismereteket.

4.5. Feladat. Alkalmas helyettesítéssel oldjuk meg az alábbi függvényegyenleteket!

$$2f(x) + xf(-x) = 4x + 8, \tag{4.1}$$

$$f(x) + 2f(-x) = 15 - x, \tag{4.2}$$

$$2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x - 1, \tag{4.3}$$

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x + 6. \tag{4.4}$$

Ismerjük fel és fogalmazzuk meg a párhuzamot a (4.1) és a (4.3), valamint a (4.2) és a (4.4) függvényegyenletek megoldása között.

4.6. Feladat. Az előző feladatban felfedezett módszerrel oldjuk meg az

$$f(1-x) + 2f(1+x) = x + 3$$

és az

$$(x+1)f(1-x) + (x-1)f(x+1) = 2x(x^2-1)$$

függvényegyenleteket!

A következő feladat előtt rávezetésként érdemes lehet megoldani az alábbi, háromismeretlenes lineáris algebrai egyenletrendszert:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ B + C = 9 \\ A + C = 6, \end{cases}$$

ugyanis a következő feladatban az elvégzett helyettesítések után ugyanilyen struktúrájú lineáris algebrai egyenletrendszer adódik (lásd az 1.16. feladatot).

4.7. Feladat. A következő függvényegyenletben végezzük el az $x \rightsquigarrow \frac{1}{1-x}$ és az $x \rightsquigarrow \frac{x-1}{x}$ helyettesítéseket. Az így kapott egyenletrendszerből fejezzük ki az $f(x)$ ismeretlent!

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1.$$

Mi a kapcsolat az $\frac{1}{1-x}$ és az $\frac{x-1}{x}$ algebrai kifejezések között?

Ezen kapcsolat felfedezése és megfogalmazása után a következő feladatban adott algebrai kifejezésekhez keresünk megfelelő helyettesítést.

4.8. Feladat. Mit kell helyettesíteni az alábbi algebrai kifejezésekben az x helyére, hogy egyszerűsítés után az x-et kapjuk vissza?

$$\begin{array}{lll} 4x-3, & 2021-x, & ax+b, \\ \frac{-2x-4}{x}, & \frac{9}{3-x}, & \frac{ax+b}{cx+d}. \end{array}$$

Végül a következő feladat a gyakorló órákon önállóan vagy minimális tanári segítséggel megoldandó függvényegyenleteket tartalmazza. A 4.8. feladat számolásainak eredményeit érdemes kihasználni a 4.9. feladatban.

4.9. Feladat. Oldjuk meg az alábbi függvényegyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

$$f(x) - f(-x) = 4x,$$

$$2xf(x) + x^2 f(2021 - x) = x,$$

$$3f(x) - 7f\left(\frac{x-5}{2x-1}\right) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{x+2020}{2021x-1} f(x) - 3f\left(\frac{x+2020}{2021x-1}\right) = x^2,$$

$$(3-2x)f\left(\frac{-2x-4}{x}\right) - (x^2+1)f(x) = 6 - x,$$

$$2x - \frac{1}{x^2} f\left(\frac{9}{3-x}\right) + (x^2+x+1)f(x) = x^2,$$

$$2xf\left(\frac{49}{7-x}\right) - x^2 f\left(\frac{7x-49}{x}\right) = x.$$

Kitekintésként ezen a ponton megemlíthető, hogy különböző természettudományokkal foglalkozó szakemberek az általuk vizsgált törvényszerűségeket gyakran bizonyos speciális függvényegyenletek (differenciálegyenletek) formájában keresik. Sem általánosan a függvényegyenletek, sem konkrétan a differenciálegyenletek megoldására nem ismert általános megoldási módszer. Az itt ismertetett módszer kulcsa, hogy a helyettesített kifejezések (fél)csoportot alkotnak a függvénykompozíció műveletére nézve. Az eddigiek vázaként a javasolt tanmenetrészlet a 4.2. ábrán található.

Az óra száma	Az óra témája	Az óra célja, fejlesztési területei	Ismeretanyag
1.	Bevezetés, alapfogalmak	A tanuló érti, hogy a függvényegyenlet megoldása nem szám (vagy számok), hanem függvény (vagy függvények). A tanuló képes ellenőrizni, hogy egy függvény kielégít-e egy egyszerűbb függvényegyenletet, vagy sem.	Függvényegyenlet fogalma, behelyettesítés függvényegyenletbe, eredmény „megsejtése". A feladatsor első két feladata.
2.	Megoldások száma, típusa	A tanuló érti, hogy egy függvényegyenletnek lehet 0, 1, 2, vagy akár végtelen sok megoldása. A tanuló képes a függvényegyenletet kielégítő függvényekről alapvető tulajdonságokat bizonyítani behelyettesítésekkel.	Konkrét értékek, illetve algebrai kifejezések behelyettesítése függvényegyenletekbe, valamint az ezekből levonható következtetések. A feladatsor harmadik-negyedik feladata.
3.	A megoldások tulajdonságaira következtetés	A tanuló képes a függvényegyenletet kielégítő függvényekről különböző tulajdonságokat (helyettesítési értékek, periodicitás) bizonyítani behelyettesítésekkel.	
4.	Behelyettesítéses stratégia felfedezése	A tanuló képes a változó helyére történő behelyettesítésekkel egy függvényegyenletből újabbakat létrehozni. A tanuló érti a párhuzamot a lineáris algebrai egyenletrendszerek és a függvényegyenletekből álló egyeletrendszerek között.	A lineáris algebrai egyenletrendszerekről tanultak ismétlése. Alkalmas behelyettesítésekkel egy függvényegyenletből lineáris algebrai egyenletrendszer létrehozása, majd megoldása. A feladatsor ötödik-hatodik feladata.
5.	A módszer általánosítása I	A tanuló képes az előző órán tanult módszert továbbgondolni, kettő egyenlet helyett három egyenletből álló rendszerre alkalmazni.	Három egyenletből álló lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásának módszerei, ezek alkalmazása függvényegyenletekre. A feladatsor hetedik-nyolcadik feladata.
6.	A módszer általánosítása II	A tanuló érti, mi alapján érdemes kiválasztani a behelyettesítendő algebrai kifejezést. A tanuló képes adott lineáris törtfüggvény formális inverzének a megkeresésére.	
7.	Gyakorlófeladatok I	Az eddigi ismeretek és kompetenciák elmélyítése önálló fealadatmegoldáson keresztül.	Nincsen új ismeretanyag. A feladatsor kilencedik feladata.
8.	Gyakorlófeladatok II		
9.	Összefoglalás	A témakör eddigi ismereteinek rendszerezése, kulcsfeladatok felelevenítése.	Nincsen új ismeretanyag. Válogatás a feladatsor korábbi feladataiból.
10.	Számonkérés	Számonkérés módszere lehet dolgozat vagy beadandó. Itt az online oktatásra való tekintettel egy fakultatív beadandót tűztünk ki jeles érdemjegyért.	

4.1. ábra. A javasolt tanmenetrészlet

4.3. Megvalósulás, reflexió

4.3.1. Egy előre nem látott kitérő

A 4.9. feladat első függvényegyenletével kapcsolatban felmerült egy előre nem látott kitérő. Erős párhuzam húzódik ugyanis ezen függvényegyenlet és az inhomogén lineáris differenciálegyenletek között. Tekintve, hogy a tanított csoport emelt óraszámban tanul matematikát és fizikát, valamint többségük ezen tantárgyakhoz köthető szakokon szeretné folytatni egyetemi tanulmányait, ezt a párhuzamot indokoltnak találtam felfedni, valamint ennek kapcsán az inhomogén differenciálegyenletek témakörében használt terminológiát megemlíteni.

Az említett függvényegyenletben $x \rightsquigarrow -x$ helyettesítéssel az eredetivel egyenértékű függvényegyenletet kapunk, így a behelyettesítéses módszer nem vezet eredményre. Könnyen felfedezhető azonban, hogy $f_p(x) = 2x$ egy megoldása a függvényegyenletnek, valamint igaz az alábbi állítás is.

4.10. Állítás. *Egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor megoldása az*

$$f(x) - f(-x) = 4x \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.5}$$

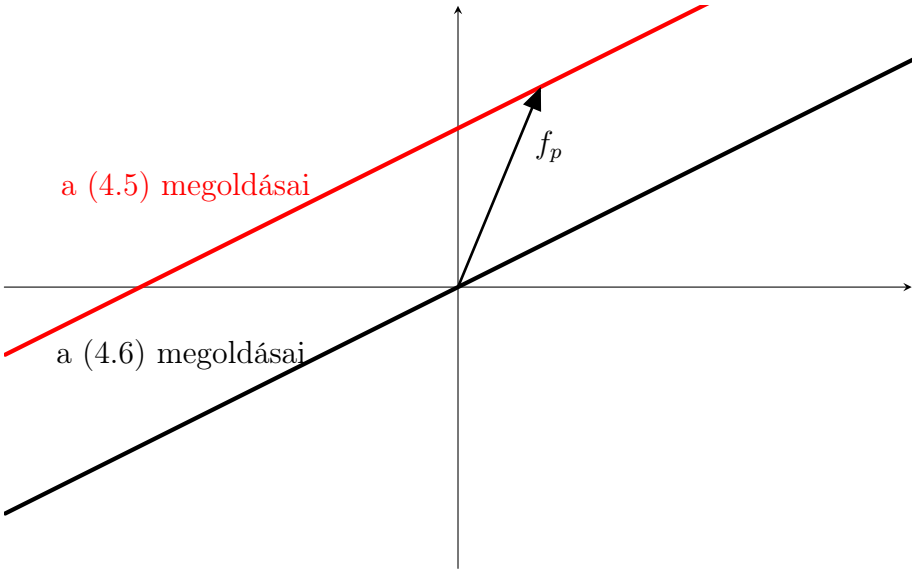
függvényegyenletnek, ha $f(x) = 2x + p(x)$, ahol $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy páros függvény, vagyis megoldása az

$$f(x) - f(-x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{4.6}$$

függvényegyenletnek.

Így az $f_p(x) = 2x$ nevezhető a (4.5) függvényegyenlet egy *partikuláris megoldásának*, a (4.6) függvényegyenlet pedig a (4.5) függvényegyenlet *homogenizált* alakjának.

Ez az elsőre nem túl intuitív szituáció szemléletesebbé tehető az alábbi analógiával. Egy origón át nem haladó egyenes összes pontjának helyvektorát, vagyis az egyenes paraméteres vektoregyenletét megkaphatjuk úgy, hogy vesszük az egyenes egy tetszőleges pontjának a helyvektorát, majd ehhez hozzáadjuk az egyenessel párhuzamos, origón áthaladó egyenes összes pontjának helyvektorát. Ez a megfeleltetés hasznosnak bizonyult a csoport számára, hiszen tanulták korábban az egyenes paraméteres vektoregyenletét, továbbá így a 4.10. állítás eszenciája szemléletessé tehető a 4.2. ábra segítségével.

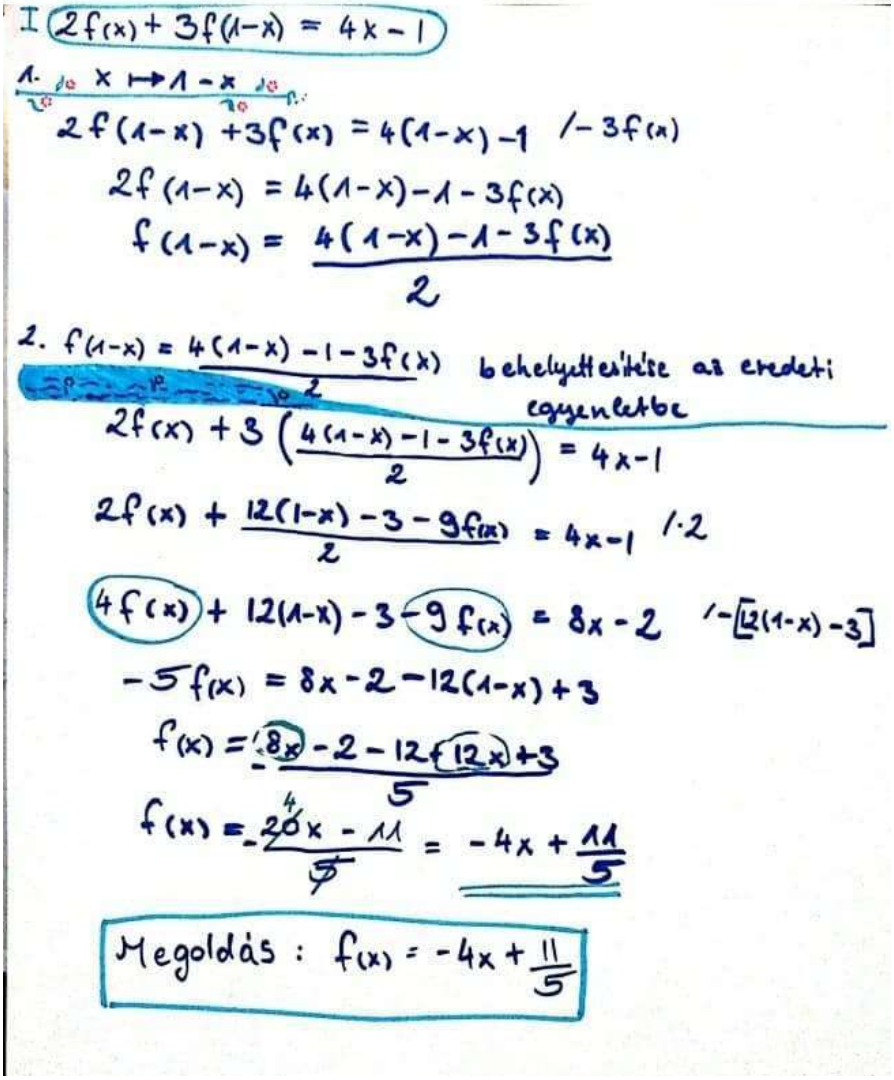


4.2. ábra. A 4.10. állítás vizualizálása

Ennek a mintegy két tanórát igénybe vevő kitérőnek pusztán annyi célja volt, hogy megalapozza azt a fogalmi hálót, valamint szemléletet, amelyre a diákok későbbi tanulmányai során az inhomogén lineáris differenciálegyenletekkel kapcsolatos ismereteik épülhetnek.

4.3.2. Végeredmény

A tanított szakaszban elsajátított ismeretek számonkérésére mentortanárommal közösen az opcionális beadandó munkát választottuk. Ennek előnye, hogy egyfajta véleménynyilvánítás a diákok részéről az is, hogy ki csinálja ezt meg, illetve ki nem, valamint a javítandó munkák számát is várhatóan csökkenti. Beadható feladatként öt darab látszatra is különböző nehézségű függvényegyenlet közül kellett a diákoknak egyet kiválasztaniuk, és azt igényesen leírva megoldaniuk. A 19 fős csoportból csak hárman nem adtak be beadható feladatot, emellett többen is döntöttek úgy, hogy gyakorlásként megoldanak három-négy példát is, és ezeket mindet beadják. Ezenkívül talán megjegyzést érdemel, hogy két tanuló LaTeX segítségével gépelt munkát adott be. A 4.3. ábrán egy kézzel írt tanulói munka látható.



4.3. ábra. Az egyik tanuló beadott munkája

4.3.3. Az online oktatás hatása a matematikatanításra

Az online oktatás beálltával szokatlan, új helyzet alakult ki mind a tanárok, mind a diákok számára a matematika órákon. Ebben a szakaszban az online oktatásnak a matematikatanári gyakorlatra vonatkozó pozitív, illetve negatív hatásai közül igyekszem felfedni néhányat a teljesség igénye nélkül. Ebben a részben kizárólag a környezetemben dolgozó pedagógusok és a saját tapasztalataimat veszem figyelembe, még akkor is, ha egyes pontokon elérhető a témával foglalkozó irodalom.

Eszközök elérhetősége: Az online oktatás egy többek által kiemelt előnye, hogy a digitális eszközök azonnal rendelkezésére állnak a tanuló számára, hiszen azok segítségével vesz részt az órán. Ennek fényében, a pedagógusnak érdemes digitális eszközökre alapuló, interaktív feladatokkal színesíteni a tanórákat a tantermi interakció hiányában. Egy kiválóan alkalmazható és könnyen elérhető forrás erre a célra például a Geomatech projekt [2], ahonnan számos minőségi oktatási segédanyag azonnal, ingyenesen elérhető, nem csak a matematika tantárgyhoz. Remekül használható, online algebrai gyakorlófelület továbbá az Interactive Maths [3], ahol a diákok lényegében ugyanolyan algebrai feladatokat tudnak gyakorolni, mint amilyeneket hagyományosan, de a tapasztalatok azt mutatják, hogy mégis szívesebben foglalkoznak matematikával, ha az valamiféle digitális felületen történhet.

Figyelem fenntartása, vizuális segédeszközök: A digitális eszközök kreatív használata különös fontosságot nyer az online térben, hiszen a tanárnak folyamatosan meg kell küzdenie a diák figyelméért ezen eszközök erős figyelemelterelő hatásával szemben. Tapasztalataim szerint minimális extra energia befektetésével érdekesebbé és élvezetesebbé tehető az online matematika óra a diákok számára digitális ábrázoló eszközök használatával: a tanulók ösztönösen jobban odafigyelnek arra, ami színes, mozog, változik. Például a geometriai összefüggések tanítása esetén a figyelmet nagyban tudja fokozni, ha mozgatással vagy animációval egyszerre ellenőrzünk sok esetet, vagy az algebrai témakörök esetén az egynemű kifejezéseket azonos színűre színezzük. Sok esetben ezt nem kell nekünk megtennünk, mert a rendelkezésünkre állnak közvetlenül használható segédanyagok. Itt is egy említésre méltó példa a Geomatech [2] projekt.

A digitális ábrázolóprogramok egy további előnye, hogy olyan minőségű és pontosságú ábrák készítésére alkalmasak, amire egy közönséges táblán kevés lehetősége van a tanárnak. Ezenkívül a munkák elmentésével bármikor folytathatjuk a megkezdett projektünket akár egy későbbi órán, valamint könnyedén megoszthatjuk azokat a diákokkal, az otthoni készülés megsegítése céljából.

Értékelés, visszajelzés: Mint a többi tantárgynál, a matematika esetében is problémát jelent, hogy az online oktatás során szinte lehetetlen valódi képet kapni a diákok tudásáról. A különböző tiltott segédeszközök és segédanyagok használata olyan jelentős, hogy a legtöbb tanár nem tartja célszerűnek a dolgozatok íratását távoktatási formában. Aki ragaszkodik ezekhez, annak nagyon szigorú intézkedéseket kell bevezetnie és tudnia betartatni a dolgozat írásának idejére, ha bármiféle képet szeretne kapni a diákok tudásáról.

A kizárólag szóbeli feleltetés is felvet néhány problémát, különösen a matematika kapcsán, ahol az anyag bizonyos részeinek ismeretét igen nehéz kizárólag szóban ellenőrizni, továbbá jóval kevesebb gondolkodási időt hagy, ami elengedhetetlen lenne a matematika megfelelő kibontakozásához.

Erre a problémára véleményem szerint a legjobb megoldás az olyan számonkérés, amihez a diák alapvetően bármilyen segédeszközt használhat, vagy akár erre szükség is van. Ezzel természetes módon elkerülhető a tiltott eszközök használata, hiszen nincsen ilyen. Alternatívaként még esetleg beadandó projektmunka értékelése jöhet szóba, habár az ilyen feladatoknál is kérdéses lehet egyes esetekben, hogy mennyire garantálható, hogy a diák valóban a saját tudására alapozva készíti el azt a produktumot. Tapasztalataim alapján minél kisebb a tétje egy adott számonkérésnek, annál kisebb az esélye, hogy a tanulók megpróbáljanak trükközni az adott értékelésen.

A formatív értékelés magas fokú hiánya mellett további nehézséget jelent, hogy az online tanórán nincsen lehetősége a tanárnak közvetlenül ellenőriznie a diákok önálló munkáját, és valós időben, személyre szabottan segítséget nyújtani azoknak, akiknek erre szüksége van. Sajnos előfordul, hogy a kikapcsolt kamerák és mikrofonok mögül csak akkor derül ki, hogy a diák nem is érti a feladatot, vagy adott esetben az egész új anyagot, amikor a tanár felszólítja, hogy prezentálja a megoldását. Innen az egyetlen kiút az lehet, ha az évek során kialakult egy olyan bizalmi kapcsolat a pedagógus és a tanulók közt, hogy a tanulók mernek azonnal kérdéseket feltenni, amikor nem értenek valamit, aktívan részt vesznek az órán és nem csak elszenvedői annak, továbbá, ha a tantárggyal kapcsolatos motivációnak sikerül felülírnia az otthon tanulás apátiáját.

4.3.4. Tapasztalatok, tervek a jövőre nézve

Gyakorlatom során több kolléga, illetve oktató is megjegyezte félig humorosan, hogy ez az évfolyam, aki ebben a nehéz helyzetben végzi a tanítási gyakorlatát, bármire fel lesz készülve. Habár természetesen sokkal nehezebb helyzetre is fel kell készülnie egy tanárnak, remélem, annyi igazságtartalma van ennek a megjegyzésnek, hogy legalább annyira felkészültek leszünk, mint a korábbi évfolyam tanárjelöltjei. Az online oktatás a számos nehéz helyzeten kívül rengeteg fontos tanulsággal is szolgált számomra, amelyeket célszerűnek látok beépíteni a további gyakorlatomba.

Az elmúlt másfél évben megtapasztalhattuk, amit évek óta hallunk a különböző tanításmódszertannal foglalkozó órákon: az információs és kommunikációs technológiában (IKT) való jártasság kompetenciája szerves részét kell képezze a modern tanár repertoárjának. A matematika tanításán belül legnagyobb mértékben szemléltetés céljából használhatók ezek az eszközök. A precíz rajzeszközök, mint például GeoGebra integrálása az iskolai gyakorlatba, nemcsak meggyorsítja az ábrák elkészítését és szebb ábrákat eredményez, hanem megvan az az előnye is, hogy ezeket a munkákat könnyedén elmenthetjük későbbi használatra. Így lényegében egyszer kell jól elkészíteni a megfelelő fájlokat, bár persze a tanári munkának része a folyamatos fejlődés, így mindig lesznek apró részletek, amelyeken lehet csiszolni, fejleszteni akár évek múltán is.

A szemléltetéssel, valamint az online oktatásban végzett gyakorlattal kapcsolatban felmerül az órán készített táblaképek elmentése is. Erre nagyon egyszerű lehetőséget ad az online oktatásban az éppen tanításra használt digitális eszköz, valamint jelenléti oktatásban a digitális táblák. Amennyiben azonban digitális tábla nem áll rendelkezésre, úgy egyszerűen le is lehet fotózni a hagyományos táblára felkerült órai munkát. Ezeket aztán megosztva a csoporttal mindenkinek több lehetősége nyílik feleleveníteni, hogy mi történt az órán, és ez által tudja pótolni vagy pontosítani az órai jegyzeteit, valamint hasznosnak bizonyulhat az órára való készüléskor is mind a diákok, mind a pedagógus számára.

A kollegiális együttműködés és a jó gyakorlatok, feladatok folyamatos megosztása a kollégákkal szintén egy olyan aspektus, ami előtérbe került az online oktatás során. Egy pályakezdő tanár rengeteg segítséget kaphat egy befogadó és támogató munkaközösségtől, ami akár jelentheti a különbséget aközött is, hogy a fiatal tanár a pályán marad-e vagy sem. Ezért a munkaközösség-szintű kollegiális együttműködés kialakítása létfontosságú feladat a szakmában, és ez így van akkor is, ha éppen nincsen rendkívüli oktatási helyzet.

Egy fontos dolog, amivel nekem személyesen kellett szembesülnöm a gyakorlatom során, az az, hogy a partneri kapcsolat és együttműködés kialakítása a diákokkal fontosabb cél, mint a tananyagban való előrehaladás. A közoktatásban kisebb részben szól a tanári hivatás a szaktárgyi tudás átadásáról, mint az emberi kapcsolatok ápolásáról, nevelésről, a diákok személyiségének és attitűdjeinek fejlesztéséről.

Végül talán a legfontosabb dolog, amit ez a rendkívüli helyzet fejlesztett mindenkiben, az az attitűd, hogy bármilyen élethelyzetben meg tudjuk találni a megfelelő megoldást a problémá-

inkra. A kollégákkal és a diákokkal maximálisan támogatjuk egymás munkáját, és miután véget ér a veszélyhelyzet, és visszatér az élet a normális kerékvágásba, erősebbek, tapasztaltabbak és empatikusabbak leszünk, mint lettünk volna. Remélem, hogy az itt megemlített tapasztalatokat és attitűdöket sikerül beépítenem a munkámba, és azon kiváló pedagógusok nyomdokaiba léphetek, akik elindítottak ezen nagyszerű hivatás rögös útján.

Irodalomjegyzék

[1] Freud Róbert: Lineáris Algebra, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2014.
https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_527_LinearisAlgebra/index.html

[2] Geomatech projekt.
http://geomatech.hu/

[3] Interactive Maths – algebrai oktató- és gyakorlófelület.
https://www.interactive-maths.com/

[4] Komjáth Péter: Halmazelmélet, Egyetemi jegyzet, Budapest 2007.
http://web.cs.elte.hu/~kope/oktatas/20tav/ma1.pdf

[5] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok archívuma.
https://www.komal.hu/lap/archivum.h.shtml

[6] Laczkovich M. – T. Sós Vera: Valós analízis 1–2., Typotex, Budapest, 2014.
https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_valos_analizis_1-2/index.html

[7] Lajkó Károly: Függvényegyenletek feladatokban, Debrecen, 2006.
http://zeus.nyf.hu/~mattan/faliujsag/lajko/Main.pdf

[8] Nemzetközi Magyar Matematikaverseny feladatai.
https://nmmv.berzsenyi.hu/versenyek

[9] N.K. Govil, R.N. Mohaparta – Markov and BernsteinType Inequalities for Polynomials, Journal of Inequalalities and Applications, 1999, Vol. 3, pp. 349–387.
https://www.emis.de/journals/HOA/JIA/Volume3_4/156027.pdf

[10] R. E. Rice; B. Schweizer; A. Sklar: When is $f(f(z)) = az^2 + bz + c$? The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 4. (April, 1980), pp. 252–263.
http://eretrandre.org/rb/files/Rice1980_101.pdf

[11] Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, Hatodik kiadás, Typotex, Budapest, 2000.