EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

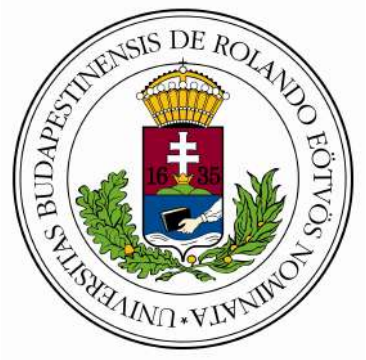
Természettudományi Kar

SZAKDOLGOZAT

Kalandozás a differenciálegyenletek világában

Témavezető:
Besenyei Ádám
Egyetemi docens

Készítette:
Nagy-Knapp Orsolya
matematikatanár – fizikatanár
osztatlan tanári mesterszak



2020

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott NAGY-KNAPP ORSOLYA (név)

YOBBQZ (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az

ELTE TTK MATEMATIKA-FIZIKA osztatlan tanári mesterszakján

írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2020. 05. 05.

Nagy-Knapp Orsolya

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Bevezetés **2**

1. Egy lehűlési modell **3**
1.1. A hűtőbe tett folyadék lehűlése . . . 3
1.2. A Newton-féle lehűlési törvény . . . 4
1.3. Az $x'(t) = k \cdot x(t)$ differenciálegyenlet megoldása . . . 5
1.4. A mérés kiértékelése . . . 7
1.5. Sherlock Holmes és a lehűlési folyamat . . . 10

2. Populációs modellek **12**
2.1. Korlátlan népességnövekedés . . . 12
2.2. Korlátozott növekedés . . . 14
2.3. A megoldás létezése és egyértelműsége . . . 19
2.4. Halászati modellek . . . 23

3. Differenciálegyenlet-rendszerek **28**
3.1. A szerelem differenciálegyenletei . . . 28
3.2. Zsákmány- és ragadozóhalak . . . 37

4. Differenciálegyenletek a középiskolában **44**
4.1. Matematika kerettanterv . . . 44
4.2. Tankönyvi feladatok . . . 45
4.3. Egy lehetséges szakköri tematikus terv . . . 50

Irodalomjegyzék **55**

Bevezetés

Környezetünkben minden pillanatban valamilyen változás történik, amit mi teljesen természetesnek veszünk. Minden nap más és más az időjárás, naponta változik bankkártyánk egyenlege, de akár a népesség száma is a Földön. Az ilyen és ehhez hasonló folyamatok modellezésében segítségünkre lehet a matematika és azon belül a differenciálegyenletek. A dolgozatban olyan matematikai modelleket mutatunk be, melyek differenciálegyenletre vezetnek. Célunk az, hogy olyan modellt alkossunk az adott jelenségről, amely viszonylag egyszerűen kezelhető, de mégis jól közelíti a valóságot, és a kapott eredmények segítségével következtetéseket vonhassunk le a folyamat időbeli viselkedéséről.

Az első fejezetben megismerkedünk a lehűlési modellel, amelynek kapcsán foglalkozunk a differenciálegyenletekre vonatkozó alapfogalmakkal. Szót ejtünk a Newton-féle lehűlési tövényről, és egy speciális alakú differenciálegyenlet megoldásáról.

A dolgozat második fejezetében a populációs modellek témakörébe nyerünk betekintést. Megvizsgáljuk a Föld népességének lehetséges alakulását kétféle modellel: a legegyszerűbb, de kevéssé reális korlátlan növekedési modellel és a némileg összetettebb korlátozott növekedés modelljével. A korlátozott növekedési modell kapcsán előkerülnek a szeparábilis differenciálegyenletek és a megoldási módszerük. A modellekből adódó megoldások viselkedésének tanulmányozása előtt kezdetiérték-feladatokra vonatkozóan néhány olyan elméleti jellegű megfontolásra és eredményre is kitérünk, amelyek hasznosak lesznek a vizsgálódásaink során. A fejezet második felében halak populációján keresztül a növekedési modellbe a halászatot is belefoglaljuk, és kétféle halászati modellt vizsgálunk. Az első esetben a relatív halászati kvótát, a másodikban pedig az abszolút halászati kvótát tárgyaljuk.

A harmadik fejezetben differenciálegyenlet-rendszerekkel foglalkozunk. Először egy képzeletbeli királylányról és négy lovagjáról szóló történet mentén a szerelem egy nagyon egyszerű modelljét járjuk körbe, majd pedig zsákmány- és ragadozóhalak egyedszámainak időbeli alakulását vizsgáljuk.

A középiskolában a differenciálegyenletek bevezető fejezetei fakultációk, valamint szakkörök keretein belül tárgyalhatók. Fontos megemlíteni, hogy a fizikaórán rögtön 9. osztályban a klasszikus mechanika alaptörvényeinek bevezetésekor differenciálegyenletekről beszélünk, még ha a tanítás során nem is nevezzük így Newton második törvényét. A dolgozat legvégén, a negyedik fejezetben egy lehetséges tematikus tervet állítunk össze a Differenciálegyenletek című témakör tanításához a dolgozatban bemutatott modellek és példák segítségével.

1. fejezet

Egy lehűlési modell

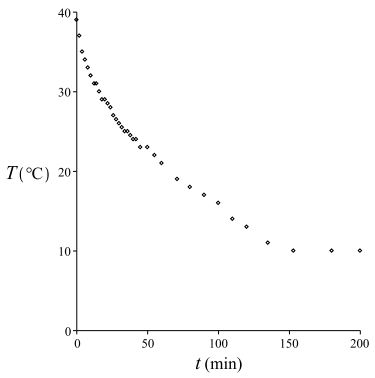
Ebben a fejezetben megismerkedünk egy olyan matematikai modellel, mely differenciálegyenletre vezet. Egy izgalmas témakört fogunk körüljárni, a lehűlési folyamattal foglalkozunk, és ennek kapcsán szó lesz a differenciálegyenletekkel kapcsolatos alapfogalmakról és speciális alakú egyenletek megoldásairól. A lehűlés modelljének felépítésében az [1] előadást követjük, az elméleti részekben pedig a [6] könyv néhány eredményére támaszkodunk.

1.1. A hűtőbe tett folyadék lehűlése

Bizonyára mindenkivel előfordult már, hogy a nagy melegben a tűző napon felejtette az innivalóját, és megkívánt egy hideg üdítőitalt, de éppen nem volt más innivalója. Ekkor a hűtőbe téve az italt meg kell várnunk, hogy megfelelő hőmérsékletűre hűljön a folyadék.

Kíváncsi lettem, hogy vajon mennyi időre van szükség ahhoz, hogy lehűljön az üdítő, ezért úgy döntöttem, hogy vízzel fogom megvizsgálni, hogyan változik a folyadék hőmérséklete. Kísérletem kezdetekor a hűtőben 10 °C-ot mértem, illetve volt egy bögre 39 °C-os vizem. Kezdetben kettő percenként mértem meg a víz és a hűtő hőmérsékletét, majd kis idő elteltével öt, végül tíz percenként írtam fel a hőmérsékleteket. A mérés során a hűtő hőmérsékletét közel állandónak, körülbelül 10 °C-osnak találtam. A víz hőmérsékletére mért adatokat az 1.1. ábrán látható koordináta-rendszerben ábrázoltam. A vízszintes tengelyen a percben mért időt, a függőleges tengelyen a °C-ban mért hőmérsékletet tüntettem fel. Néhány adatot a mérés elejéről, közepéről és végéről az 1.1. táblázatban emeltem ki.

Ha megnézzük a kapott pontokat, akkor rögtön eszünkbe juthat például valamilyen exponenciális függvény, a pontok mintha ilyen típusú függvény grafikonjára illeszkednének. A táblázatot tüzetesebben szemügyre véve láthatjuk, hogy kezdetben két perc alatt csökkent a víz hőmérséklete 1 °C-ot, míg közel másfél óra elteltével már tíz perc kellett ahhoz, hogy a folyadék hőmérséklete 1 °C-ot hűljön. Azaz minél nagyobb volt a víz és a hűtő közötti hőmérséklet-különbség, annál gyorsabban hűlt a folyadék, és minél közelebb volt a folyadék hőmérséklete a hűtő hőmérsékletéhez, annál lassabban csökkent a víz hőmérséklete. Így a grafikonunkból például azt a viszonylag egyszerű modellt állíthatjuk fel, hogy a hűlés üteme arányos a víz hőmérsékletének a környezet hőmérsékletétől vett eltérésével.



1.1. ábra. A víz hőmérséklete az idő függvényében

t[min]	T[°C]
0	39
2	37
4	35
80	17
90	16
125	13
150	12
200	10

1.1. táblázat. Mérési adatok

1.2. A Newton-féle lehűlési törvény

Ha a mérésünkkor rendelkezésünkre állt volna egy eszköz, amely minden időpillanatban megmérte volna a víz hőmérsékletét, akkor mérés útján még pontosabban meg tudtuk volna határozni a folyadék hűlésének ütemét, azaz a hőmérsékletének pillanatnyi változási sebességét. Ha adott t időpillanatban $T(t)$ jelöli a folyadék hőmérsékletét, akkor a víz hőmérsékletének t időpontbeli változási üteme a hőmérséklet nagyon kicsiny Δt idő alatti megváltozásának aránya az eltelt időhöz képest:

$$T(t) \text{ változási üteme } \approx \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t}. \tag{1.1}$$

Valójában, amikor azt mondjuk, hogy pontosítjuk a mérést az eszközünkkel, amely minden időpillanatban méri a hőmérsékleteket, akkor matematikailag az előbbi hányadosnak a határértékét képezzük oly módon, hogy az időközöket egyre csökkentjük, azaz $\Delta t \to 0$. Ekkor éppen a $T(t)$ függvény $T'(t)$ deriváltját kapjuk. Matematikailag tehát a változási ütem a derivált, de gyakorlatban általában csak véges sok mérési adat áll rendelkezésünkre, ezért az (1.1) közelítő értéket használjuk.

Térjünk most vissza az előző szakaszban felállított modellre, mely szerint a víz hűlési sebessége arányos a víz és a hűtő hőmérsékletének különbségével. Ha a hűtő állandó hőmérsékletét $T_{\text{hűtő}}$ jelöli, továbbá k egy arányossági tényező, akkor a modellt matamatikailag a következőképpen írhatjuk le:

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - T_{\text{hűtő}}). \tag{1.2}$$

Mivel ez egy hűlési folyamat, ezért szükséges, hogy az összefüggés jobb oldala negatív előjelű legyen, hiszen a $T(t)$ függvény pontosan akkor monoton csökkenő, ha a $T'(t)$ deriváltfüggvény nempozitív, azaz $T'(t) \leq 0$. Tudjuk azonban, hogy

$$T(t) \geq T_{\text{hűtő}},$$

vagyis az egyenlet jobb oldalán szereplő $(T(t) - T_{\text{hűtő}})$ függvény nemnegatív, ebből adódóan a k arányossági tényezőnek negatívnak kell lennie, tehát $k < 0$. Newton különböző fémek lehűlésének tanulmányozása során támaszkodott az (1.2) differenciálegyenlettel megfogalmazott összefüggésre, mely szerint a lehűlés üteme arányos a test és a közeg hőmérsékletének különbségével. Ezért szokás ezt Newton-féle lehűlési törvénynek nevezni.

Az (1.2) egyenlet egy úgynevezett *elsőrendű közönséges differenciálegyenlet*. A közönséges szó arra utal, hogy az egyenletben a $T\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény egyváltozós, az elsőrendű szó pedig arra, hogy az egyenletben szerepel a $T(t)$ függvény első deriváltja, de magasabb rendű deriváltja nem. Általában egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (t \in I)$$

alakban írható fel, ahol f egy adott kétváltozós függvény, és az $x\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt keressük valamely $I \subset \mathbb{R}$ (többnyire nyílt) intervallumon. Az (1.2) egyenlet esetében az f függvény az alábbi alaban írható:

$$f(t, x) = k(x - T_{\text{hűtő}}).$$

A differenciálegyenletek tehát olyan egyenletek – az algebrai egyenletekkel ellentétben –, melyek megoldásait nem valamely számhalmazon keressük, hanem a megoldások függvények. Az egyenletben az ismeretlen függvény mellett annak deriváltjai is szerepelhetnek, és az egyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált adja az egyenlet rendjét. Az egyenlet megoldásakor olyan $x(t)$ függvényeket keresünk, melyek annyiszor differenciálhatóak, mint amennyi az egyenlet rendje.

Ezek után adódik a kérdés, hogyan tudnánk az (1.2) és ahhoz hasonló alakú egyenleteket megoldani? Mielőtt azonban válaszolnánk erre a kérdésre, elevenítsük fel az integrálszámítás alaptételét, mert a későbbiekben számtalanszor fogjuk (hivatkozás nélkül) használni.

1.1. Tétel. *Ha g folytonos valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, differenciálható az I belsejében és ott $g'(x) = 0$ minden x-re, akkor a g függvény konstans az I intervallumon.*

1.2. *Megjegyzés.* A tételben lényeges feltétel, hogy a függvény intervallumon legyen értelmezve. Ha például g két diszjunkt intervallum unióján értelmezett, és mindkettő intervallumon konstans, de ezek különböző konstansok, akkor a g függvény az értelmezési tartományon nem konstans függvény. Többek között emiatt szokás általában a differenciálegyenleteket intervallumon vizsgálni.

1.3. Az $x'(t) = k \cdot x(t)$ differenciálegyenlet megoldása

Jelöljük az (1.2) összefüggésben szereplő $(T(t) - T_{\text{hűtő}})$ függvényt $x(t)$-vel, ekkor $x'(t) = T'(t)$, így az egyenlet a következő alakot ölti:

$$x'(t) = k \cdot x(t).$$

Ha feltételezzük, hogy az $x(t)$ függvény sehol sem vesz fel 0 értéket, akkor az egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk $x(t)$-vel. Így a következőképp fog kinézni az egyenletünk:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = k.$$

Észrevehetjük, hogy a bal oldalon egy összetett függvény deriváltja áll, mégpedig a $\log|x(t)|$ függvényé, hiszen megjelenik a $\log x$ deriváltjaként az $\frac{1}{x}$, valamint a belső függvény deriváltjaként

$x'(t)$. Ezek alapján az alábbi alakban írhatjuk az egyenletet:

$$(\log|x(t)|)' = k.$$

Ebből már következik, hogy

$$\log|x(t)| = kt + c,$$

ahol c tetszőleges konstans. Az $|x(t)|$ függvényt megkapjuk, ha mindkét oldalt e alapú hatványra emeljük. Így az egyenletünk a hatványozás azonosságait is figyelembe véve az alábbiak szerint alakul:

$$|x(t)| = e^{kt+c} = e^{kt} \cdot e^c = e^{kt} \cdot c_2.$$

Ha az abszolút értéket elhagyjuk, akkor

$$x(t) = \pm c_2 \cdot e^{kt},$$

vagyis az $x'(t) = k \cdot x(t)$ differenciálegyenletnek megkaptuk az

$$x(t) = c_3 \cdot e^{kt} \tag{1.3}$$

alakú megoldásait. Ezek a függvények minden $c_3 \in \mathbb{R}$ esetén megoldást szolgáltatnak, hiszen

$$(c_3 \cdot e^{kt})' = c_3 \cdot e^{kt} \cdot k = k \cdot (c_3 \cdot e^{kt}).$$

Vigyázzunk azonban, mert az előző levezetésből kizártuk azokat az $x(t)$ függvényeket, amelyek felvesznek 0 értéket. Világos, hogy $c_3 = 0$ választással megkapjuk az azonosan 0 megoldást az (1.3) összefüggésből. De vajon megkapjuk-e így az összes olyan megoldást, amely valahol felveszi a 0 értéket? A válasz: igen. Ezt fogalmazza meg a következő tétel.

1.3. Tétel. *Legyen k tetszőleges valós szám és $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. Ekkor az $x'(t) = k \cdot x(t)$ $(t \in I)$ differenciálegyenletet pontosan az $x(t) = C \cdot e^{kt}$ alakú függvények elégítik ki, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.*

Bizonyítás. Azt, hogy az $x(t) = C \cdot e^{kt}$ alakú függvények mind kielégítik a szóban forgó differenciálegyenletet, a tétel kimondása előtt igazoltuk. Másrészt csak ilyen alakú megoldások lehetnek, ugyanis vegyük észre, hogy ha $x(t)$ megoldás, akkor

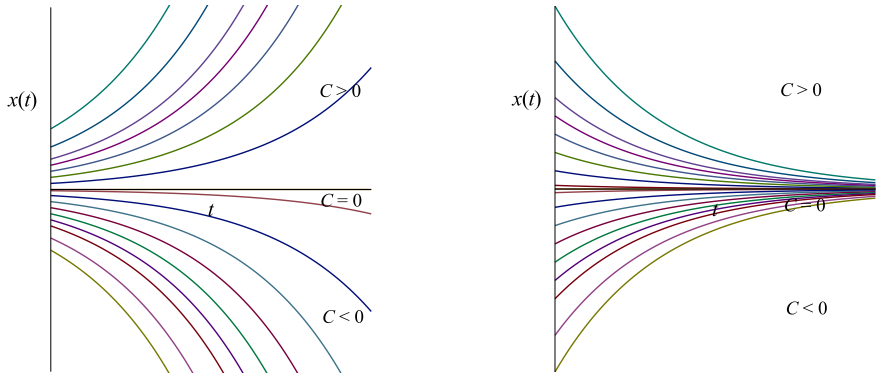
$$(x(t) \cdot e^{-kt})' = x'(t) \cdot e^{-kt} + x(t) \cdot e^{-kt} \cdot (-k) = k \cdot x(t) \cdot e^{-kt} - x(t) \cdot e^{-kt} \cdot k = 0,$$

ezért $(x(t) \cdot e^{-kt})$ konstansfüggvény, tehát $x(t) = C \cdot e^{kt}$ valamilyen C valós számmal. □

1.4. *Megjegyzés.* A tételből az is következik, hogy ha egy $x\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény kielégíti az $x' = kx$ egyenletet egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, és valamely pontban felveszi a 0 értéket, akkor x az azonosan 0 függvény, tehát minden pontban 0 értéket vesz fel.

Ha az $x(t) = C \cdot e^{kt}$ összefüggésben $t = 0$ helyettesítést hajtunk végre, akkor $x(0) = C$ adódik, tehát

$$x(t) = x(0) \cdot e^{kt} \tag{1.4}$$



(a) $k > 0$ **(b)** $k < 0$

1.2. ábra. Az $x' = kx$ differenciálegyenlet megoldásainak grafikonjai

alakban is írhatjuk a megoldásokat. Az $x(0)$ értéket szokás *kezdeti értéknek* nevezni. A differenciálegyenlethez hozzávéve a kezdeti értéket, egy *kezdetiérték-feladatot* kapunk.

Az (1.4) explicit alakból a megoldások viselkedését is könnyen leolvashatjuk. A $k = 0$ esetben konstansfüggvények a megoldások. Ha $k > 0$, akkor az $x(0)$ kezdeti érték előjelétől függően három eset lehetséges:

- ha $x(0) > 0$, akkor $x(t)$ szigorúan monoton növő, és ∞-hez tart $t \to \infty$ esetén,
- ha $x(0) = 0$, akkor $x(t)$ a konstans 0 függvény,
- ha pedig $x(0) < 0$, akkor $x(t)$ szigorúan monoton csökkenő, és $t \to \infty$ esetén $-\infty$-hez tart.

A $k < 0$ esetben éppen fordítva, $x(0) < 0$ mellett szigorúan monoton növő a megoldás, és $x(0) > 0$ mellett szigorúan monoton csökkenő. A megoldásfüggvények grafikonjait k és $x(0)$ függvényében az 1.2. ábrán láthatjuk.

1.4. A mérés kiértékelése

Az előző szakaszban igazolt 1.3. Tétel ismeretében már meg tudjuk adni a választ arra a korábbi kérdésre, hogy a

$$T'(t) = k \cdot (T(t) - T_{\text{hűtő}}) \tag{1.5}$$

alakú differenciálegyenletnek mely $T(t)$ függvények a megoldásai. Mivel az $x(t) = T(t) - T_{\text{hűtő}}$ helyettesítéssel az egyenlet $x'(t) = kx(t)$ alakúra hozható, ezért az 1.3. Tétel alapján

$$T(t) - T_{\text{hűtő}} = C \cdot e^{kt},$$

vagyis

$$T(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + T_{\text{hűtő}}.$$

Az így nyert összefüggésbe behelyettesítve a hűtő belsejének hőmérsékletét, vagyis 10 °C-ot,

$$T(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + 10$$

alakot ölti a hőmérsékletfüggvény. Már csak a C és a k paramétereket kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy a mérés kezdetekor a $t = 0$ időpillanatban a víz hőmérséklete 39 °C, azaz $T(0) = 39$. Ebből következik, hogy

$$39 = C \cdot e^{k \cdot 0} + 10 = C + 10,$$

tehát $C = 29$. A k konstans értékének meghatározásához további mérési adat vagy adatok szükségesek, az ilyeneket szokás *mellékfeltételeknek* is hívni. Ehhez a számításhoz azt vettük alapul, hogy mennyi idő alatt csökkent a hőmérséklet 10 °C-ot. A kísérlet során 18 perc alatt csökkent a víz hőmérséklete 10 °C-ot, vagyis

$$T(18) = 39 - 10 = 29.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$29 = 29 \cdot e^{k \cdot 18} + 10,$$

ahonnan

$$\frac{19}{29} = e^{k \cdot 18},$$

vagyis

$$e^k = \left(\frac{19}{29}\right)^{\frac{1}{18}}.$$

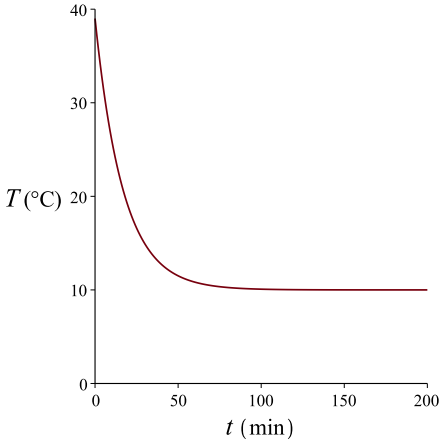
Vegyük mindkét oldal logaritmusát, így k értéke:

$$k = \ln \left(\frac{19}{29}\right)^{\frac{1}{18}}.$$

A víz hőmérsékletét megadó függvény tehát végül:

$$T(t) = 29 \cdot \left(\frac{19}{29}\right)^{\frac{t}{18}} + 10 \approx 29 \cdot 0{,}97^t + 10. \tag{1.6}$$

Az így adódott függvény grafikonját az 1.3. ábrán láthatjuk. A megkapott (1.6) explicit képlet alapján jól látható, hogy az idő előrehaladtával a víz hőmérséklete 10 °C-hoz fog tartani. Ez



1.3. ábra. A víz hőmérsékletét megadó (1.6) függvény grafikonja

összhangban van a hétköznapi tapasztalatunkkal, amely szerint a hűtőbe tett folyadék végül a hűtő hőmérsékletére, jelen esetben 10 °C-ra fog lehűlni.

A megoldás (1.6) explicit alakjából az is leolvasható, hogy a $T(t)$ függvény szigorúan monoton csökkenő. Erre azonban a $T(t)$ függvény konkrét képletének ismerete nélkül, pusztán a differenciálegyenlet segítségével is tudunk következtetni. Tekintsük ugyanis az (1.5) differenciálegyenletet. Mivel a $T(t)$ függvény folytonos (hiszen differenciálható), ezért ha egy adott t pillanatban

$$T(t) - T_{\text{hűtő}} > 0,$$

akkor ez a t egy egész környezetében is teljesül, így

$$T'(t) < 0$$

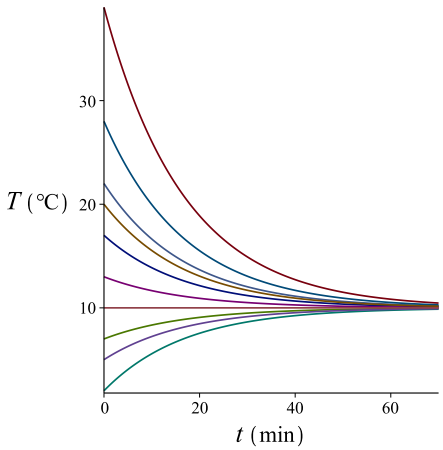
ebben az időintervallumban. Ez azt jelenti, hogy a hőmérséklet szigorúan monoton csökken egészen addig, amíg el nem éri a $T_{\text{hűtő}}$ hőmérsékletet. Hogy ez bekövetkezik-e, annak megállapításához a differenciálegyenletekre vonatkozóan mélyebb ismeretekre lenne szükség (erről a 2.3. szakaszban lesz szó), de az explicit képletből látjuk, hogy véges időn belül nem fog bekövetkezni. Ha pedig

$$T(t) - T_{\text{hűtő}} < 0,$$

valamint a k szorzótényező is negatív, akkor a deriváltfüggvény pozitív, vagyis

$$T'(t) > 0,$$

tehát a megoldás egy szigorúan monoton növő függvény. Az explicit képletből azt is látjuk, hogy mindkét esetben $T(t) \to T_{\text{hűtő}}$ midőn $t \to \infty$. Végül pedig, ha $T(0) = T_{\text{hűtő}}$, akkor $T(t)$ a konstans $T_{\text{hűtő}}$ függvény. Ezek alapján azt mondhatjuk, hogy ha a folyadék hőmérséklete magasabb, mint a környezet hőmérséklete, akkor szigorúan monoton csökkenve, ha alacsonyabb, akkor szigorúan monoton nőve tart a $T(t)$ hőmérsékletüggvény a külső környezet hőmérsékletéhez. Ha pedig a folyadék hőmérséklete a hűtő hőmérsékletével megegyezik, akkor ez így is marad minden későbbi időpillanatban. A $T(t)$ függvény eme háromféle viselkedését szemlélteti az 1.4. ábra.



1.4. ábra. Az (1.5) differenciálegyenlet megoldásainak háromféle viselkedése

1.5. Sherlock Holmes és a lehűlési folyamat

Az alábbiakban egy olyan feladatot mutatunk, amelynek segítségével felkelthetjük a tanulók érdeklődését, és ezen keresztül az órára is be tudjuk csempészni a lehűlési folyamattal kapcsolatos összefüggéseket.

1.5. Feladat. Egy éjjel Londonban szörnyű gyilkosság történt. Egy híres angol színész feleségét holtan találják otthonában. Mellette zokog a férje, kezében a gyilkos fegyverrel. A Scotland Yard kirendelt felügyelője már lezártnak tekintené az ügyet, mikor Sherlock Holmes a gyilkosság helyszínére érkezik. A felügyelő elmondja, hogy éjfélkor 28 °C volt az áldozat hőmérsélete. Holmes hajnali 1 órakor előveszi a hőmérőjét, ő 27,4 °C-nak méri az elhunyt nő, 25 °C-nak a levegő hőmérsékletét. Holmes ekkor megállapítja, hogy a halál éjfél előtt hat órával, éppen a férj színházi előadása közben történt. Ő nem lehet a gyilkos. Hogyan határozta meg Sherlock Holmes a gyilkosság idejét?

Jelölje $T(t)$ az áldozat testhőmérsékletét a t időpillanatban, ahol a t időt órában mérjük, és az éjfélt tekintjük a $t = 0$ időpontnak. Feltételezzük, hogy a szoba levegőjének hőmérséklete állandó, legyen ez $T_{\text{levegő}} = 25$ °C. Ha az áldozat testének lehűlését a Newton-féle lehűlési törvénynek megfelelően modellezzük, akkor az előző szakaszban tárgyaltak alapján

$$T(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + T_{\text{levegő}},$$

ahol a C és a k konstansok értékeit a mellékfeltételekből állapítjuk majd meg. Tudjuk, hogy $t = 0$ időpillanatban $T(0) = 28$, ennek segítségével a C értékét meg tudjuk határozni:

$$28 = C \cdot e^{k \cdot 0} + 25 = C + 25,$$

vagyis $C = 3$. Az áldozat testhőmérsékletének függvénye így a következőképp írható fel:

$$T(t) = 3 \cdot e^{k \cdot t} + 25.$$

A k konstans értékét pedig az eltelt egy óra és a testhőmérséklet csökkenése segítségével számítjuk ki. Tudjuk, hogy $T(1) = 27{,}4$, így

$$T(1) = 3e^{1 \cdot k} + 25 = 27{,}4,$$

ahonnan

$$e^k = \frac{2{,}4}{3}$$

adódik. Mindkét oldal logaritmusát véve:

$$k = \ln\left(\frac{2{,}4}{3}\right).$$

Az áldozat testhőmérséklete ezek ismeretében:

$$T(t) = 3 \cdot \left(\frac{2{,}4}{3}\right)^t + 25.$$

Most már könnyen meg tudjuk keresni azt a t időpontot, amikor még éppen 36,5 °C-os volt az áldozat hőmérséklete (feltételezzük, hogy nem volt lázas, amikor elhunyt), vagyis, hogy mikor történhetett a gyilkosság. Keresendő tehát olyan t időpillanat, amikor $T(t) = 36{,}5$ °C, azaz

$$36{,}5 = 3 \cdot \left(\frac{2{,}4}{3}\right)^t + 25.$$

Az egyenletet átrendezve a következőt kapjuk:

$$\frac{11{,}5}{3} = \left(\frac{2{,}4}{3}\right)^t,$$

ahonnan t értékét kifejezve:

$$t = \frac{\log 11{,}5 - \log 3}{\log 2{,}4 - \log 3} \approx -6{,}02.$$

Ez azt jelenti, hogy a gyilkosság nagyjából éjfél előtt 6 órával történt.

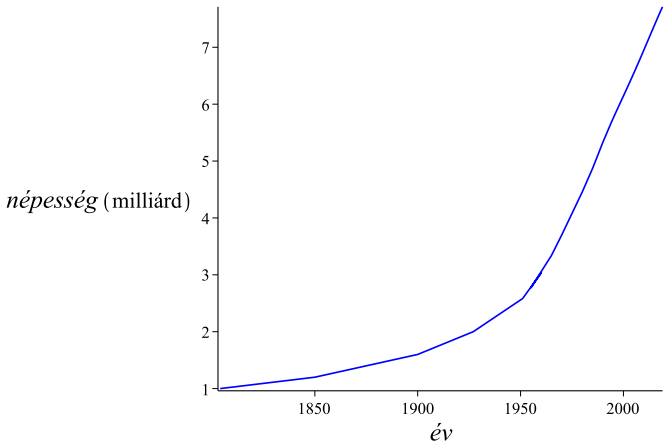
2. fejezet

Populációs modellek

Ebben a fejezetben populációs modellekkel foglalkozunk, a korlátlan és a korlátozott népességnövekedési modellt tárgyaljuk. Ezenkívül megvizsgáljuk a fenntartható halászat kérdését is, vagyis legfeljebb milyen mértékben szabad halászni a halállományt, hogy a populáció ne pusztuljon ki. A modellek kapcsán előkerülnek a szeparábilis differenciálegyenletek, és szó lesz általában kezdetiérték-feladatok megoldhatósági kérdéséről. Az elméleti részben a [4] könyvre és a [10] jegyzetre támaszkodunk, a populációs modellek kapcsán pedig a [2] előadásra.

2.1. Korlátlan népességnövekedés

Manapság a Föld népességének változásáról rengeteget lehet hallani. Hány milliárd ember él a Földön? Meddig növekedhet a népességszám? Még számtalan hasonló kérdést tehetünk fel, amelyekre megpróbálhatunk választ adni matematikai modellek segítségével. A 2.1. ábrán a Föld népességének változása látható 1804 és 2019 között (adatok forrása: [12]).



2.1. ábra. A Föld népessége 1804 és 2019 között

Ha megnézzük az ábrát, akkor emlékeztethet az exponenciális függvény grafikonjára. Ezért a népességnövekedésre vonatkozó modell megalkotásakor eszünkbe juthat az előző fejezetbeli modell, amely exponenciális függvényre vezetett.

Jelöljük $x(t)$-vel a Föld népességét adott t időpontban. Ha kicsi a népesség, akkor várhatóan kevés gyerek születik, míg nagy népesség esetén feltételezhetően sok gyerek fog a világra jönni. Ennek megfelelően egy nagyon egyszerű népességnövekedési modell az, hogy az $x(t)$ függvény növekedési üteme arányos az aktuális népességszámmal, $x(t)$-vel. Matematikailag ezt a következő módon írhatjuk le:

$$x'(t) = kx(t), \tag{2.1}$$

ahol most a növekedés miatt $k > 0$. Ezt a modellt szokás *korlátlan növekedési* modellnek is hívni, amelyet már Thomas Malthus angol közgazdász 1798-ban (differenciálegyenletek nélkül) megfogalmazott. Az előző fejezetbeli eredményeink alapján a differenciálegyenlet összes megoldását az

$$x(t) = C \cdot e^{kt}$$

alakú függvények adják, ahol C tetszőleges konstans.

2.1.1. Reális-e a modell?

A korlátlan növekedési modellben az $x(t)$ megoldások $t \to \infty$ esetén ∞-hez tartanak, tehát azt kaptuk eredményül, hogy a Föld népessége korlátlanul növekszik. Tudjuk azonban, hogy a Föld eltartóképessége véges, ezért sejthető, hogy a modell hosszú távon nem igazán reális. Mégis tegyük fel, hogy érvényes a korlátlan növekedés modellje, és végezzünk egy egyszerű gondolatkísérletet. A 2.1. ábráról leolvasva látjuk, hogy 1960 és 2000 között a Föld lakosainak száma három milliárd emberről hat milliárdnyira nőtt, tehát 40 év alatt megkétszereződött.

év	népességszám
1960	$3 \cdot 10^9$
2000	$3 \cdot 2 \cdot 10^9$
2040	$3 \cdot 2^2 \cdot 10^9$
2080	$3 \cdot 2^3 \cdot 10^9$
$\vdots$	$\vdots$
2680	$3 \cdot 2^{17} \cdot 10^9 \approx 7{,}8 \cdot 10^{14} \approx 10^{15}$

2.1. táblázat. Gondolatkísérlet a Föld népességszámára vonatkozóan

A 2.1. táblázatból látható, hogy ezt a növekedési ütemet tovább feltételezve hozzávetőlegesen 2700-ra kb. 10^{15} ember fog élni a Földön. Nézzük meg, hogy ekkora népesség esetén egy embernek mekkora területnyi hely jutna. A Föld sugarát $r \approx 6371$ km-nek véve a Föld felszíne:

$$A_{\text{Föld}} \approx 4 \cdot r^2 \cdot \pi \approx 4 \cdot 6371^2 \cdot \pi \text{ km}^2 \approx 510064471{,}9 \text{ km}^2.$$

A szárazföld felszíne a Föld felszínének 29,2%-a, így

$$A_{\text{szárazföld}} \approx 0{,}292 \cdot 510064471{,}9 \text{ km}^2 \approx 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}^2 \approx 0{,}15 \cdot 10^{15} \text{ m}^2.$$

Tehát egy emberre nagyjából 0,15 m^2 terület jutna, ami kb. egy 40 cm$\times$40 cm nagyságú négyzet területének felel meg. Jól látszik, hogy a modellt pontosítani kell, vagy ideje elképzelünk, hogy milyen lesz az életünk egy 40 cm $\times$ 40 cm nagyságú területen.

2.2. Korlátozott növekedés

Ha a korlátlan növekedési modellt finomítani szeretnénk, akkor valamilyen módon a Föld eltartóképességét is figyelembe kell vennünk. Tudjuk, hogy véges a víz- és energiakészletünk, a szárazföld területe, de még számtalan tényezőt felsorolhatnánk. Ezekből is adódik, hogy a Föld népessége nem nőhet korlátlanul. Az előző modellt nem vetjük el teljes mértékben, hiszen természetes feltételezni, hogy a népességnövekedés ütemét befolyásolja az aktuális népességszám. A Föld eltartóképességéhez közeledve azonban lassulnia kell a népességnövekedés folyamatának, és hasonlóan elfogadható feltételezés, hogy ha a népességszám jóval kisebb az eltartóképességnél, akkor gyorsabb lesz a folyamat. Ez alapján a módosított differenciálegyenlet a következőképpen fog kinézni:

$$x'(t) = kx(t)(K - x(t)), \tag{2.2}$$

ahol K-val jelöljük az eltartóképességet, vagyis azt a maximális népességszámot, amelyet a Föld még képes eltartani. Láthatjuk, hogy a (2.1) egyenlet jobb oldalát a $(K - x(t))$ tényezővel szoroztuk. Éppen ez fejezi ki azt, hogy a Föld eltartóképességéhez közeli $x(t)$ esetén $x'(t)$ kicsi lesz, vagyis lassabban fog nőni a népesség, míg ha a különbség értéke nagy, azaz a népességszám jóval kisebb az eltartóképességnél, akkor $x'(t)$ nagy lesz, tehát gyorsabb a népességnövekedés. A (2.2) egyenletet szokás *korlátozott növekedés* differenciálegyenletének hívni, vagy *logisztikus egyenletnek*, amelyet az 1840-es években a belga matematikus Pierre François Verhulst írt fel. Ez az egyenlet az úgynevezett szeparábilis vagy más néven szétválasztható változójú differenciálegyenletek családjába tartozik, ezért a következőkben a szétválasztható változójú egyenletek megoldásáról ejtünk szót.

2.2.1. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Amint azt korábban már említettük, az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek általános alakja:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (t \in I).$$

Legyen most az $f(t, x)$ függvény felírható egy csak x-től és egy csak t-től függő függvény szorzataként: $f(t, x) = g(t)h(x)$, ahol $g\colon I \to \mathbb{R}$ és $h\colon J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ekkor az

$$x'(t) = g(t)h(x(t)) \quad (t \in I)$$

differenciálegyenletet *szétválasztható változójúnak* vagy más néven *szeparábilisnak* nevezzük. Többek között a (2.1), valamint a (2.2) differenciálegyenletek szeparábilis egyenletek. A (2.1) egyenletben például $g(t) = 1$ és $h(x) = kx$, a (2.2) egyenletben $g(t) = 1$ és $h(x) = kx(K - x)$ megfelelő függvények. Szeparábilis differenciálegyenletek megoldásával kapcsolatban a következő tétel fogalmazható meg.

2.1. Tétel. *Legyen g értelmezve az I intervallumon, h értelmezve a J intervallumon, és tegyük fel, hogy g-nek létezik G primitív függvénye az I-n, továbbá h nem vesz fel 0 értéket J-n, és az $\frac{1}{h}$ függvénynek létezik H primitív függénye a J intervallumon. Ekkor egy $x\colon I_1 \to \mathbb{R}$ függvényre akkor és csak akkor teljesül, hogy $x'(t) = g(t)h(x(t))$ egy $I_1 \subset I$ intervallumon, ha valamilyen c konstanssal $H(x(t)) = G(t) + c$ az I_1-en.*

Bizonyítás. Ha $x\colon I_1 \to J$ differenciálható, akkor az

$$x'(t) = g(t)h(x(t))$$

egyenlet mindkét oldalát $h(x(t))$-vel osztva (ez megtehető, hiszen h nem veszi fel a 0 értéket)

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} = g(t),$$

ahonnan 0-ra rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{x'(t)}{h(x(t))} - g(t) = 0.$$

Mivel $\frac{x'(t)}{h(x(t))} = H'(x(t))x'(t)$, ezért az egyenlet a következő alakot ölti:

$$H'(x(t))x'(t) - G'(t) = 0.$$

Vegyük észre, hogy ez

$$(H(x(t)) - G(t))' = 0.$$

alakban is írható. Ebből következik, hogy a $H(x(t))-G(t)$ függvény konstans, $H(x(t))-G(t) = c$, amit átrendezve a tételben megfogalmazott alakhoz jutunk:

$$H(x(t)) = G(t) + c.$$

A gondolatmenet természetesen megfordítható, és ezzel kész a bizonyítás. □

2.2. *Megjegyzés.* A bizonyítás gondolatmenete egy „receptet” is ad szeparábilis egyenletek megoldásához. Írjuk az x' deriváltat $\frac{dx}{dt}$ alakban:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x).$$

A kapott egyenletet formálisan átalakítva (nem törődve azzal, hogy dx, dt csak szimbólumok):

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt.$$

Ha mindkét oldalt integráljuk, akkor

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt,$$

vagyis

$$H(x) = G(t) + c,$$

és ebből az egyenletből kell kifejeznünk az x függvényt (ez persze nem mindig lehetséges explicit módon).

2.2.2. A korlátozott növekedés differenciálegyenletének megoldása

Térjünk vissza a korlátozott népességnövekedési modellhez. A (2.2) differenciálegyenletet már meg tudjuk oldani a recept segítségével. A differenciálegyenletet formálisan átalakítva:

$$\frac{dx}{dt} = kx(K - x).$$

Az $x(t) = K$, valamint az $x(t) = 0$ triviális megoldásai az egyenletnek. Rendezzük bal oldalra az x ismeretlentől, jobb oldalra pedig a t-től, az időtől függő tagokat (de közben ne feledkezzünk meg arról, hogy az egyenlet átrendezése során a triviális megoldások elvesznek):

$$\frac{1}{x(K - x)}dx = kdt. \tag{2.3}$$

Az egyenlet bal oldalán lévő törtkifejezést tovább alakítjuk olyan módon, hogy parciális törtekre bontjuk. Így ez a következőképpen néz ki:

$$\frac{1}{x(K - x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{K - x}.$$

A nevezőkkel való szorzás után adódik, hogy

$$1 = A(K - x) + Bx,$$

vagyis

$$1 = (B - A)x + AK.$$

Mivel a bal oldalon nincs x-től függő tag, ezért szükségképp $B = A$, továbbá a két oldal konstans tagjainak is meg kell egyezniük, vagyis $AK = 1$. Ebből kapjuk, hogy $A = \frac{1}{K}$. Így az alábbi parciális törtekre való bontást nyertük:

$$\frac{1}{x(K - x)} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}\right).$$

Ekkor a (2.3) egyenlet integrálásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{K}\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K - x}\right)dx = \int kdt,$$

így az integrálás elvégzése után az

$$\frac{1}{K}\left(\log|x| - \log|K - x|\right) = kt + c_1$$

egyenlet adódik, és ebből az x függvényt kell kifejeznünk. Először a logaritmus azonosságát használjuk:

$$\log\left|\frac{x}{K - x}\right| = kKt + Kc_1.$$

Majd vegyük mindkét oldalnak e alapú hatványát:

$$\left|\frac{x}{K - x}\right| = e^{kKt + Kc_1} = e^{kKt} \cdot e^{Kc_1}.$$

A bal oldalon az abszolút értéket elhagyva:

$$\frac{x}{K-x} = \pm e^{Kc_1} \cdot e^{kKt}.$$

A $\pm e^{Kc_1}$ konstans tényezőt jelöljük c_2-vel, ekkor:

$$\frac{x}{K-x} = c_2 \cdot e^{kKt}.$$

Az egyenlet reciprokát véve, továbbá $\frac{1}{c_2}$-t c_3-nak elnevezve:

$$\frac{K-x}{x} = c_3 \cdot e^{-kKt},$$

ahonnan

$$\frac{K}{x} - 1 = c_3 \cdot e^{-kKt},$$

így végül

$$x(t) = \frac{K}{1 + c_3 \cdot e^{-kKt}}.$$

A c_3 konstans tényező helyett az $x(0)$ kezdeti értéket is becsempészhetjük a kapott képletbe, ha a $t = 0$ helyettesítést hajtjuk végre:

$$x(0) = \frac{K}{1 + c_3}.$$

Ebből

$$c_3 = \frac{K}{x(0)} - 1,$$

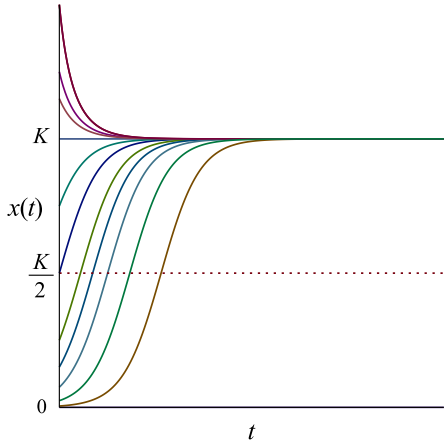
azaz a megoldás alakja a következő:

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x(0)} - 1\right) e^{-kKt}}. \tag{2.4}$$

De ne feledkezzünk meg a triviális megoldásokról sem. Ha $x(0) = K$, vagyis ha $c_3 = 0$, akkor megkapjuk az $x(t) = K$ triviális megoldást. Tehát a (2.2) differenciálegyenlet megoldásai a következők:

$$x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x(0)} - 1\right) e^{-kKt}}, \quad \text{ha } x(0) \neq 0,$$
$$x(t) = 0, \quad \text{ha } x(0) = 0.$$

Jegyezzük meg, hogy kicsit „csaltunk”, ugyanis azt az előzőekből még nem tudjuk, hogy csak az azonosan 0 megoldás létezhet az $x(0) = 0$ kezdeti feltételből, sőt az sem világos, hogy ha egy megoldás felveszi a 0 értéket, akkor szükségképpen az azonosan 0 megoldás. Erre a későbbiekben a 2.5. Tétel segítségével fogunk választ adni, egyelőre fogadjuk el, hogy csak ezek a megoldások vannak.



2.2. ábra. A korlátozott népességnövekedési modell megoldásainak grafikonjai

2.2.3. A korlátozott népességnövekedési modell vizsgálata

Vizsgáljuk most meg, hogy a korlátozott növekedési modellből nyert $x(t)$ megoldások hogyan viselkednek. A megoldásfüggvények tipikus grafikonjait (feltételezve, hogy $x(t)$ nemnegatív függvény) a 2.2. ábrán láthatjuk. Két egyensúlyi megoldás van: $x(t) = 0$, és $x(t) = K$. Ez azt jelenti, hogy ha kezdetben ennyi volt a népesség, akkor mindvégig ennyi is marad. A kezdeti értéktől függően különbözőképpen viselkednek a megoldásfüggvények. Ha $x(0)$ nagyobb, mint az eltartóképesség, azaz $x(0) > K$, akkor

$$\frac{K}{x(0)} - 1 < 0,$$

így a

$$\left(\frac{K}{x(0)} - 1\right) e^{-kKt}$$

függvény monoton növő, és $t \to \infty$ esetén 0-hoz tart. Vagyis a megoldásfüggvény K-hoz fog tartani. Ezenfelül észrevehetjük, hogy ha a népességszám kisebb az eltartóképességnél és pozitív, azaz $0 < x(0) < K$, akkor

$$\frac{K}{x(0)} - 1 > 0,$$

és ebből adódóan a

$$\left(\frac{K}{x(0)} - 1\right) e^{-kKt}$$

függvény monoton csökkenő, és $t \to \infty$ esetén 0-hoz tart. Mindebből következik, hogy az $x(t)$ megoldásfüggvény K-hoz tart $t \to \infty$ esetén.

A megoldásfüggvények konvexitását, illetve konkávitását is vizsgálhatjuk. Ehhez szükségünk van a megoldásfüggvény második deriváltjára. Mivel

$$x'(t) = kx(t)(K - x(t))$$

és x differenciálható, ezért $x'(t)$ is az. Az egyenletet tovább deriválva a következő kifejezés adódik a második deriváltra:

$$x''(t) = kx'(t)(K - x(t)) - kx(t)x'(t),$$

vagyis

$$x''(t) = kx'(t)(K - 2x(t)). \tag{2.5}$$

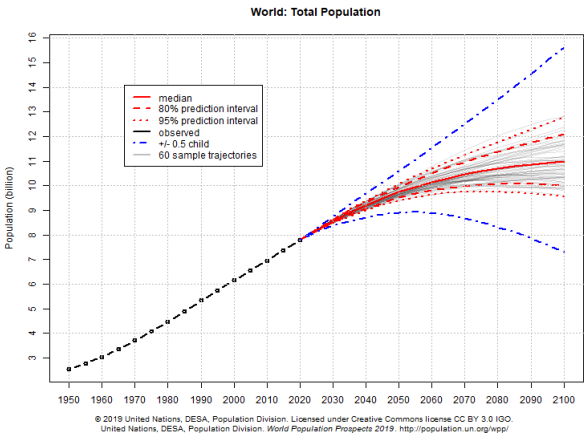
Az $x(t)$ függvény konvexitása, konkávitása szempontjából az $x''(t)$ második derivált előjele a lényeges. Láttuk, hogy $0 < x(t) < K$ esetén $x'(t) > 0$, és $x(t) > K$ esetén $x'(t) < 0$. Amennyiben $0 < x(t) < K$, akkor a (2.5) egyenlet jobb oldala abban az esetben lesz nagyobb 0-nál, ha

$$K - 2x(t) > 0, \quad \text{vagyis} \quad x(t) < \frac{K}{2}.$$

Tehát ha $0 < x(t) < K$, akkor az $x(t)$ megoldásfüggvény szigorúan konvex, amíg el nem éri a $\frac{K}{2}$ értéket. Hasonlóképpen adódik, hogy ha $\frac{K}{2} < x(t) < K$, akkor a függvény szigorúan konkáv. Ha pedig $x(t) > K$, akkor a függvény konvex. Tehát a $\frac{K}{2}$ értéket elérve $x(t)$ konvexitást vált, ez a 2.2. ábrán is jól látható. Összefoglalva: ha $x(0) > 0$, akkor a megoldások a kezdeti értéktől függetlenül a K eltartóképességhez tartanak $t \to \infty$ esetén. Ha kezdetben az eltartóképességnél kisebb volt a népességszám, akkor monoton növekedve, ha az eltartóképességnél nagyobb volt a népességszám, akkor pedig monoton csökkenve tartanak a megoldások K-hoz.

2.2.4. Reális-e a korlátozott növekedés modellje?

Felmerülhet a kérdés, hogy a korlátozott növekedés modellje mennyire tükrözi a Föld népességének várható alakulását. Természetesen semmilyen modell nem képes leírni teljes mértékben a valódi folyamatot, de egyre több tényezőt figyelembe véve, egyre pontosabb modellek adhatók. A 2.3. ábrán az ENSZ által készített előrejelzések láthatók, ezek a különböző születési és halálozási ráták értékeire adódó grafikonok. A piros szaggatott vonal jelzi azt a sávot, amelybe 80% valószínűséggel esnek a grafikonok. Jól kivehető, hogy a grafikonok nagyon hasonlítanak a korlátozott növekedési modell megoldásainak grafikonjaira.



2.3. ábra. A világ népességének lehetséges alakulása (Forrás: [13])

2.3. A megoldás létezése és egyértelműsége

Az eddigiek során olyan speciális differenciálegyenleteket vizsgáltunk, melyek összes megoldását explicit képlettel meg tudtuk adni, és egy kezdeti érték segítségével a kezdetiérték-feladatnak

egyértelmű megoldását nyertük. Általában azonban egy differenciálegyenlet megoldásait csak ritkán tudjuk megadni zárt alakban, így a hozzá tartozó kezdetiérték-feladatok megoldásaira sem várható explicit képlet. Fontos kérdés tehát, hogy létezik-e megoldása egy adott kezdetiérték-problémának, és ha igen, akkor egyértelmű-e. A következőkben kezdetiérték-feladatok megoldhatóságával, valamint a megoldások tulajdonságaival fogunk foglalkozni.

2.3.1. Kezdetiérték-feladatok megoldhatósági kérdései

A megoldás létezésével és egyértelműségével kapcsolatban a következőkben két jellegzetes példát mutatunk. Az első esetben már magának a differenciálegyenletnek sincs megoldása, így természetesen a hozzá tartozó kezdetiérték-feladatnak sincs.

2.3. *Példa.* Jelölje $D(t)$ a Dirichlet-függvényt, azaz legyen

$$D(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } t \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Ekkor az

$$x'(t) = D(t)$$

differenciálegyenletnek egyáltalán nincs megoldása, mivel nem létezik olyan differenciálható függvény, amelynek deriváltja a Dirichlet-függvény.

Előfordulhat az is, hogy a differenciálegyenlethez tartozó kezdetiérték-feladatnak végtelen sok megoldása van.

2.4. *Példa.* Tekintsük az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2\sqrt{|x(t)|} \quad (t \in \mathbb{R}) \\ x(0) &= 0. \end{aligned}$$

A differenciálegyenletnek bármely c valós szám esetén megoldásai az

$$x(t) = \begin{cases} (t-c)^2, & \text{ha } t \geq c, \\ 0, & \text{ha } t < c \end{cases}$$

alakú függvények. Ha $c \geq 0$, akkor a kezdetiérték-feladatot is kielégítik a függvények, tehát nem egyértelmű a kezdetiérték-feladat megoldása.

Az előbbi két példabeli furcsaságot a differenciálegyenlet jobb oldala „okozta”. Hamarosan megfogalmazunk egy tételt, amely elégséges feltételt ad arra vonatkozóan, hogy egy kezdetiérték-feladatnak egyértelműen létezzen megoldása. A tételt speciális alakú differenciálegyenletekre fogjuk kimondani. Vegyük észre ugyanis, hogy az eddigi összes modellünkből nyert differenciálegyenlet jobb oldala olyan, hogy az idő változó csak az ismeretlen függvényen keresztül szerepel benne, azaz

$$x'(t) = F(x(t))$$

alakú. Az ilyen típusú egyenleteket *autonóm* elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek nevezzük. Ilyen alakú volt a már említett és megoldott korlátlan növekedés (2.1) egyenlete és a korlátozott növekedés (2.2) egyenlete. Előbbi esetben

$$F(x) = kx,$$

utóbbiban

$$F(x) = kx(K - x).$$

Nem autonóm egyenlet például:

$$x'(t) = x(t) + t.$$

Autonóm differenciálegyenletekhez tartozó kezdetiérték-feladatok megoldhatóságára elégséges feltételt ad a következő tétel (lásd a [4] könyvet).

2.5. Tétel. *Legyen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor bármely $t_0 \in \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén létezik alkalmas $\delta > 0$ szám, hogy az*

$$x'(t) = F(x(t))$$
$$x(t_0) = x_0$$

kezdetiérték-problémának egyértelműen létezik $x\colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény megoldása.

Fontos hangsúlyozni, hogy a 2.5. Tétel csak lokális, a t_0 egy alkalmas környezetében értelmezett megoldás létezését állítja megfelelő feltételek esetén. Belátható azonban, hogy ez a lokális megoldás egyértelműen kiterjeszthető egy úgynevezett maximális megoldássá, amely a lehető legbővebb nyílt intervallumon van értelmezve, tehát olyan megoldása a kezdetiérték-feladatnak, hogy nincs olyan kiterjesztése, amely megoldás volna.

2.3.2. Hogyan viseledhetnek a megoldások?

Az eddigi modellekből származó differenciálegyenletek mindegyikében találkoztunk a speciális, konstans megoldásokkal. Ezeket egyensúlyi megoldásoknak vagy *egyensúlyi helyzeteknek* szokás hívni. Ezek fontos szerepet töltenek be a megoldások viselkedésének vizsgálatában. Ha az

$$x'(t) = F(x(t))$$

autonóm differenciálegyenletnek $x(t) = x^*$ egyensúlyi megoldása, akkor $F(x^*) = 0$, és fordítva. Az egyensúlyi helyzeteket tehát az F függvény zérushelyei adják. Nézzük meg most, hogyan viselkedhet egy nem egyensúlyi megoldás, feltéve, hogy a 2.5. Tétel feltételei érvényben vannak.

Ha $x(t)$ nem egyensúlyi megoldás, akkor semmilyen időpillanatban nem egyezhet meg egy egyensúlyi megoldással, hiszen ekkor az egyértelmű megoldhatósági 2.5. Tétel miatt $x(t)$ szükségképpen a szóban forgó egyensúlyi megoldás. Ekkor tehát

$$F(x(t)) > 0 \quad \text{vagy} \quad F(x(t)) < 0,$$

sőt mindvégig csak az egyik teljesülhet, különben a Bolzano-tétel miatt az $F(x(t))$ folytonos függvény felvenné a 0 értéket, és így $x(t)$ átmenne az egyensúlyi helyzeten, ami pedig nem lehetséges. Egy nem egyensúlyi megoldás tehát szigorúan monoton.

Ha egy nem egyensúlyi maximális megoldás csak $t < t_*$ esetén értelmezett, pontosabban

$$\sup\{t : x(t) \text{ értelmezett}\} = t_* \in \mathbb{R},$$

akkor $t \to t_* - 0$ esetén a monotonitás miatt van határértéke, és az szükségképpen valamelyik végtelen, különben a t_*-ban a határértéket megadva kezdeti feltételként az x kiterjeszthető lenne egy bővebb intervallumra, így nem volna maximális megoldás. Például az

$$x'(t) = x^2(t)$$
$$x(0) = 1$$

kezdetiérték-feladat

$$x(t) = \frac{1}{1-t}$$

megoldásai csak a $(-\infty, 1)$ félegyenesen vannak értelmezve, és $t \to 1 - 0$ esetén $x(t) \to \infty$.

Ha a maximális megoldás végtelen időhorizonton értelmezett, a szigorú monotonitás miatt $t \to \infty$ esetén van határértéke, véges vagy végtelen. Ha véges, akkor ez csak egy egyensúlyi helyzet lehet. Ezt fogalmazza meg a következő tétel.

2.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Legyen az $x'(t) = F(x(t))$ autonóm differenciálegyenletnek $x(t)$ megoldása olyan, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^* \in \mathbb{R}$. Ekkor x^* egyensúlyi megoldása az egyenletnek, vagyis $F(x^*) = 0$.*

Bizonyítás. Legyen $h > 0$ rögzített szám, ekkor a Lagrange-féle középértéktétel szerint

$$x(t+h) - x(t) = x'(\xi_t)h,$$

ahol $\xi_t \in (t, t+h)$. A differenciálegyenlet alapján

$$x'(\xi_t) = F(x(\xi_t)),$$

így

$$x(t+h) - x(t) = F(x(\xi_t))h.$$

Mivel $x(t+h) \to x^*$ és $x(t) \to x^*$, ha $t \to \infty$, ezért az előbbi egyenlőség bal oldala 0-hoz tart, a jobb oldalon pedig $t \to \infty$ esetén $\xi_t \to \infty$, ezért $x(\xi_t) \to x^*$, és így F folytonossága miatt a jobb oldal $F(x^*)h$-hoz tart. Ekkor tehát határátmenettel $0 = F(x^*)h$ adódik, vagyis $h > 0$ miatt $F(x^*) = 0$, amit igazolni akartunk. □

Mindezek tudatában, összefoglalva azt mondhatjuk, hogy háromféleképpen viselkedhet egy nem egyensúlyi megoldásfüggvény: véges időn belül $\pm\infty$-né válhat, vagy $t \to \infty$ esetén valamelyik ∞-hez tart, illetve előfordulhat az is, hogy $t \to \infty$ esetén egy egyensúlyi megoldáshoz tart.

Legyen most x^* egy egyensúlyi helyzet, és tegyük fel, hogy $F(x) > 0$ az x^* egy $(x^* - \delta, x^*)$ pontozott bal oldali környezetében, továbbá $F(x) < 0$ az x^* egy $(x^*, x^* + \delta)$ pontozott jobb oldali

környezetében. Ekkor bármely $x_0 \in (x^* - \delta, x^*)$ esetén az x_0-ból indított megoldás szigorúan monoton növő, és $t \to \infty$ esetén szükségképpen x^*-hoz tart. Hasonlóan $x_0 \in (x^*, x^* + \delta)$ esetén az x_0-ból induló megoldás szigorúan monoton csökkenő, és x^*-hoz tart. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az x^* egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.

Fordított egyenlőtlenségnél, ha az F függvény az x^* pontban negatívból pozitívba megy át, akkor a megoldások távolodnak x^*-tól. Ilyenkor instabil egyensúlyi helyzetről beszélünk.

Az is előfordulhat, hogy F nem vált előjelet az x^* pontban, hanem egy bal és egy jobb oldali pontozott környezetben is ugyanolyan előjelű. Ekkor beszélhetünk alulról, illetve felülről stabil vagy instabil egyensúlyi helyzetről. Ha x^* egy pontozott környezetében F pozitív, akkor x^* alulról stabil, felülről instabil, ha pedig egy pontozott környezetben F negatív, akkor x^* alulról instabil, felülről stabil. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy az x^* egyensúlyi helyzet stabilitását az F függvénynek az x^* egy pontozott környezetében az előjele határozza meg.

Az előbbi általános gondolatmenetet érdemes egy konkrét példán is szemléltetnünk. Tekintsük a korlátozott növekedés differenciálegyenletét:

$$x'(t) = kx(t)(K - x(t)).$$

Jelen esetben

$$F(x) = kx(K - x),$$

amelynek zérushelyei a 0 és a K. Ezek tehát az egyensúlyi helyzetek. A 0 egyensúlyi helyzetben az F függvény negatívból pozitív előjelűvé vált, ezért a 0 egy instabil egyensúlyi helyzet. Míg a másik, K egyensúlyi helyzetnél, a függvény pozitív előjelűről negatívvá válik, így az egy stabil egyensúlyi helyzet. Az egyensúlyi helyzeten kívüli megoldások mind szigorúan monoton függvények. Ha

$$0 < x(t) < K,$$

akkor $x(t)$ szigorúan monoton növő, és $t \to \infty$ esetén a K egyensúlyi helyzethez tart. Ha pedig

$$x(t) > K,$$

akkor az $x(t)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, és ugyancsak K-hoz tart $t \to \infty$ esetén. Bár a konkrét modellben negatív $x(t)$-nek nincs értelme, de látjuk, hogy $x(t) < 0$ esetén az $x(t)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, és szükségképpen $-\infty$-hez tart.

2.4. Halászati modellek

Ebben a szakaszban a korlátozott növekedés modelljébe az emberi tényezőt is beépítjük. Jelölje most $x(t)$ valamely tó vagy tenger egy adott halpopulációjának egyedszámát a t időpillanatban. Feltételezzük, hogy az egyedszám a korlátozott növekedés egyenletével írható le. Az emberi tényezőt jelentse most az, hogy a halakat szabályozott keretek között halászni szeretnénk. A cél az, hogy minél több halat ki lehessen fogni úgy, hogy hosszú távon ne pusztuljon ki a halpopuláció.

Modellezésünk során kétféle halászatot vizsgálunk meg. Az első esetben feltesszük, hogy a halászat üteme arányos a halpopuláció méretével, míg a második esetben a halászat üteme állandó.

2.4.1. Relatív kvóta

A relatív halászati kvóta jelentse azt, hogy a halászat üteme arányos a halpopuláció méretével. Legyen az arányossági tényező r, így a halászat üteme $rx(t)$. Mivel a halászat csökkenti az egyedszámot, így az $x'(t)$ deriváltban negatív tagként jelenik meg, ezért a következőképp fog módosulni a korlátozott növekedésre vonatkozó (2.2) differenciálegyenlet:

$$x'(t) = kx(t)(K - x(t)) - rx(t).$$

Az egyenlet jobb oldalát a következő alakra hozhatjuk:

$$F(x(t)) = x(t)(kK - r - kx(t)).$$

Vegyük észre, hogy az így kapott egyenlet a korlátozott népességnövekedés differenciálegyenletéhez nagyon hasonló alakú, csupán a K eltartóképesség helyébe $K - \frac{r}{k}$ lépett. Tehát most

$$F(x) = kx\left(K - \frac{r}{k} - x\right).$$

Az egyenletnek két egyensúlyi helyzete van: 0 és $K - \frac{r}{K}$. Ha $K - \frac{r}{K} < 0$ lenne, akkor $x > 0$ esetén $F(x) < 0$, emiatt a pozitív $x(t)$ megoldások szigorúan monoton csökkenőek, és a 0 egyensúlyi helyzethez tartanak. Ez azt jelenti, hogy $t \to \infty$ esetén kihal a populáció, amit nem szeretnénk. Szükséges tehát, hogy $K - \frac{r}{k} > 0$, azaz $r < Kk$. Ekkor a 0 egyensúlyi helyzetben az $F(x)$ függvény negatívból pozitív előjelűvé vált, ezért ez egy instabil egyensúlyi helyzet. A $K - \frac{r}{k}$ egyensúlyi helyzetnél a függvény pozitív előjelűről negatívvá válik, így az stabil egyensúlyi helyzet. Az egyensúlyi helyzeteken kívül a megoldások szigorúan monoton függvények. Ha

$$0 < x(t) < K - \frac{r}{k},$$

akkor az $x(t)$ függvény szigorúan monoton növő, és $t \to \infty$ esetén a $K - \frac{r}{k}$ egyensúlyi helyzethez tart. Ha pedig

$$x(t) > K - \frac{r}{k},$$

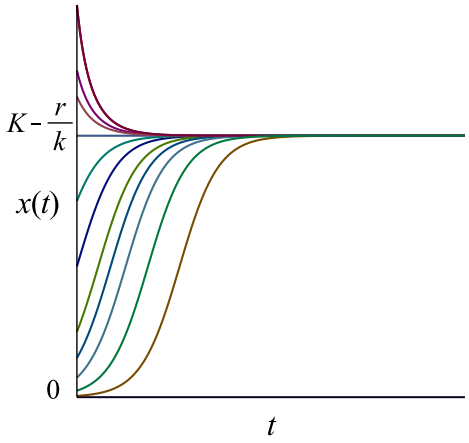
akkor az $x(t)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, és ugyancsak az előbbi egyensúlyi helyzethez tart. A 2.4. ábrán láthatjuk a megoldásfüggvények viselkedését relatív halászati kvóta mellett. Mivel $t \to \infty$ esetén a megoldások a $K - \frac{r}{k}$ értékhez tartanak, ezért elég sok idő elteltével

$$x(t) \approx K - \frac{r}{k},$$

és így a halászat üteme nagyjából

$$rx(t) \approx r\left(K - \frac{r}{k}\right).$$

Ez r függvényében egy másodfokú függvény, amelynek maximuma a $\frac{Kk}{2}$ helyen van, ahol a maximum értéke $\frac{(Kk)^2}{4}$. Ez azt jelenti, hogy $r = \frac{Kk}{2}$ a lehető legnagyobb relatív kvóta, amellyel halászhatunk úgy, hogy a halpopuláció ne pusztuljon ki. Ekkor a halászat üteme $\frac{(Kk)^2}{4}$.



2.4. ábra. Az $x(t)$ egyedszám relatív kvóta esetén

2.4.2. Abszolút kvóta

Az abszolút halászati kvóta azt jelenti, hogy a halászat üteme állandó, legyen H. Ekkor a korlátozott növekedés differenciálegyenletét a következőképp módosítjuk:

$$x'(t) = kx(t)(K - x(t)) - H.$$

Vizsgáljuk meg, hogy a H paraméter függvényében hogyan változnak az egyensúlyi helyzetek. Jelen esetben:

$$F(x) = kx(K - x) - H,$$

amelynek grafikonja egy „lefelé álló” parabola. Az F zérushelyeit a

$$kx(K - x) - H = 0$$

egyenlet gyökei adják. Ez egy másodfokú egyenlet, amelynek rendezett alakja:

$$kx^2 - Kkx + H = 0,$$

így a megoldásai az egyenletnek k, K és H függvényében a következők:

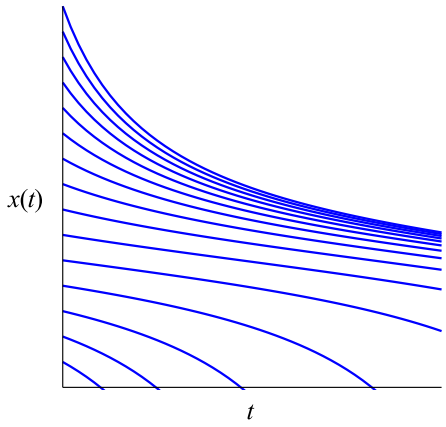
$$x_{1,2} = \frac{Kk \pm \sqrt{(Kk)^2 - 4kH}}{2k}.$$

Az egyensúlyi helyzetek száma és stabilitása a $(Kk)^2 - 4kH$ diszkrimináns előjelétől függ. Ha

$$(Kk)^2 - 4kH < 0,$$

akkor nincs egyensúlyi helyzet, és ekkor $F(x) < 0$ minden x-re (hiszen F grafikonja egy „lefelé álló” parabola), ezért a megoldások szigorúan monoton csökkenő módon $-\infty$-hez tartanak, tehát a populáció kipusztul. A $(Kk)^2 - 4kH < 0$ feltétel azzal ekvivalens, hogy

$$H > \frac{(Kk)^2}{4}.$$

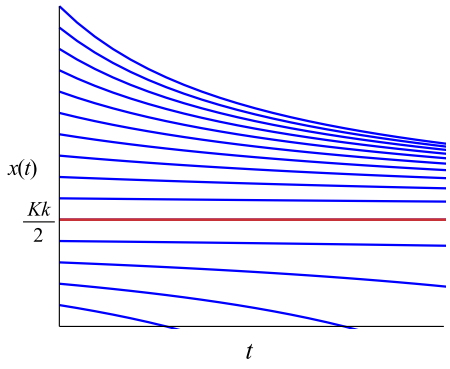


2.5. ábra. Az $x(t)$ egyedszám $H = 0{,}3(Kk)^2$ abszolút kvóta esetén

Ilyen abszolút kvóta esetén tehát kihal a populáció. Ezt szemlélteti a 2.5. ábra a $H = 0{,}3(kK)^2$ esetben. A $(Kk)^2 - 4kH$ diszkrimináns 0, ha

$$H = \frac{(Kk)^2}{4},$$

ekkor egyetlen egyensúlyi helyzet van, mégpedig $\frac{Kk}{2}$. Ettől a ponttól jobbra és balra is az F negatív (hiszen egy „lefelé álló” parabola a grafikonja), így ez egy alulról instabil egyensúlyi helyzet. Ez azt jelenti, hogy ha valamilyen hatás miatt ez alá csökken az egyedszám, akkor az egyensúlyi helyzetbe már nem tud visszatérni, és idővel kihal a populáció. Ezt illusztrálja a 2.6. ábra a $H = \frac{(Kk)^2}{4}$ esetben.



2.6. ábra. Az $x(t)$ egyedszám $H = \frac{(Kk)^2}{4}$ abszolút kvóta esetén

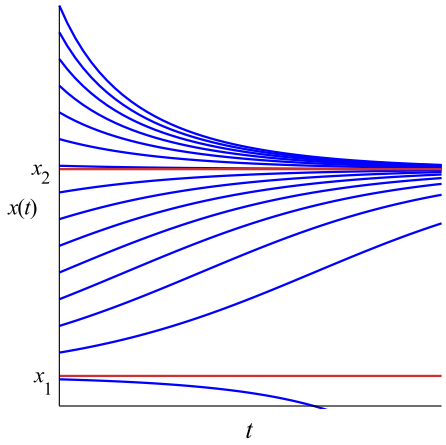
Végül a

$$H < \frac{(Kk)^2}{4}$$

esetben két egyensúlyi helyzet van:

$$x_1 = \frac{Kk - \sqrt{(Kk)^2 - 4kH}}{2k}$$
$$x_2 = \frac{Kk + \sqrt{(Kk)^2 - 4kH}}{2k}.$$

Mivel $x_1 < x_2$, ezért az x_1-ben F negatívból pozitív előjelűvé válik, vagyis x_1 egy instabil egyensúlyi helyzet. Az x_2 pontban F függvény éppen ellenkezőleg, pozitív előjelűről negatív előjelűvé válik, ezért x_2 egy stabil egyensúlyi pont. Ezt szemlélteti a 2.7. ábra $H = 0{,}1(Kk)^2$ esetén.



2.7. ábra. Az $x(t)$ egyedszám $H = 0{,}1(Kk)^2$ abszolút kvóta esetén

Összefoglalva: a maximális halászati kvóta, amely mellett még van egyensúlyi helyzet:

$$H = \frac{(Kk)^2}{4}.$$

Ekkor a halászat üteme éppen megegyezik a relatív kvóta maximális halászati ütemével. Azonban relatív kvóta esetén a maximális esetben kapott egyensúlyi helyzet stabil, abszolút kvóta esetén viszont nem, így a relatív kvóta a fenntartható halászat szempontjából célszerűbb választás lehet.

3. fejezet

Differenciálegyenlet-rendszerek

Ebben a fejezetben két olyan modellt mutatunk be, amelyek matematikailag differenciálegyenlet-rendszerekkel írhatóak le. Szó lesz a szerelem matematikájáról (a [3] előadás és a [4] könyv alapján), valamint zsákmány- és ragadozóhalak egyedszámainak alakulásáról (a [2] előadást és a [4] könyvet követve).

3.1. A szerelem differenciálegyenletei

Az alábbiakban egy meseszerű történetet ismertetünk, amellyel talán felkelthetjük a tanulók kíváncsiságát, és ezáltal a differenciálegyenlet-rendszerek legegyszerűbb kérdéseit becsempészhetjük a tanórára vagy a szakkörre.

Egyszer volt, hol nem volt, élt egyszer egy öreg király, és volt neki egy gyönyörűszép lánya. Igen ám, de a királylány amennyire szép, annyira makacs természetű. Ha valaki szereti a királylányt, akkor ő egyre kevésbé kedveli az udvarlóját, ha pedig valaki elutasító a királylánnyal szemben, akkor ő egyre jobban kedveli a lovagját. A király szeretné, ha a négy szomszédos királyságból sikerülne a tökéletes lovagot kiválasztani lányának. Az első jelölt teljesen normálisan viselkedik. Ezen azt értjük, hogy ha a lovagot szereti valaki, akkor ő egyre jobban vonzódik az illetőhöz, ha pedig valaki elutasító a lovaggal, akkor ő is egyre elutasítóbbá válik az illetővel szemben. A második udvarló a fura lovag. Ő a királylányhoz hasonlóan fura viselkedésű. A harmadik jelölt kissé hangulatfüggő. Az ő érzelmeinek változását a királylány érzelmein túl a saját érzelmei is befolyásolják: ha jó a hangulata, akkor az pozitívan hat az érzelmeinek változására, ha rossz a hangulata, akkor negatívan. Az utolsó, a negyedik lovag nagyon hangulatfüggő. A harmadik lovaghoz hasonlóan érzelmeinek változását a saját érzelmei és a királylányé egyaránt befolyásolják, de nem egyenlő mértékben, a saját érzelmei nagyobb hatással bírnak.

Hogyan tudjuk matematikailag leírni a királylány és az udvarlók viselkedését? Jelölje $x(t)$ a királylány vonzalmának mértékét egy adott lovag iránt, és nevezzük a függvényt a királylány *érzelemfüggvényének*. Ha

$$x(t) > 0,$$

akkor az adott t pillanatban a királylány szereti a lovagot. Minél nagyobb $x(t)$, annál erősebb a

lovag iránti vonzódásának mértéke. Ha $x(t)$ negatív, azaz

$$x(t) < 0,$$

akkor a királylány elutasító az udvarlóval, és minél nagyobb $|x(t)|$, annál erőteljesebb az elutasítás mértéke. Az $x(t) = 0$ esetben pedig a királylány számára közömbös az udvarló. Hasonlóan jelöljük $y(t)$-vel a lovag érzelemfüggvényét. Ekkor a királylány viselkedését úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ha $y(t) > 0$ (vagyis a lovag kedveli őt), akkor az $x(t)$ érzelemfüggvény csökken, így $x'(t) < 0$; ha pedig $y(t) < 0$ (vagyis a lovag nem kedveli őt), akkor $x(t)$ nő, így $x'(t) > 0$. A lehető legegyszerűbb modell az lehet például, hogy az $x'(t)$ függvény az $y(t)$ függvénynek valamilyen negatív számszorosa. Az egyszerűség kedvéért az arányossági tényezőt válasszuk (-1)-nek, ezáltal a királylány viselkedését az alábbi differenciálegyenlettel modellezhetjük:

$$x'(t) = -y(t).$$

3.1.1. A fura királylány és rendes udvarlója

Az első udvarló teljesen normálisan viselkedik. Ha $x(t) > 0$ (vagyis a királylány szereti az udvarlót), akkor az $y(t)$ érzelemfüggvény nő, tehát $y'(t) > 0$, ha pedig $x(t) < 0$, (vagyis a királylány nem kedveli az udvarlót), akkor $y(t)$ csökken, tehát $y'(t) < 0$. Erre egy nagyon egyszerű modell lehet például az, hogy

$$y'(t) = x(t).$$

Az első lovag és a királylány kapcsolata tehát a következő differenciálegyenlet-rendszerrel modellezhető:

$$x'(t) = -y(t) \tag{3.1}$$

$$y'(t) = x(t). \tag{3.2}$$

A fenti egyenletekre ránézve eszünkbe juthat az $x(t) = \cos t$ és az $y(t) = \sin t$ függvény. Behelyettesítve láthatjuk, hogy ezek valóban megoldásai a differenciálegyenlet-rendszernek. Vajon hogyan kereshetnénk meg az összes megoldást? Próbáljuk meg a lineáris egyenletrendszereknél szokásos módszert alkalmazni. Az egyik egyenletből fejezzük ki az egyik ismeretlen függvényt, és helyettesítsük a másikba. Az első egyenletből az y függvényt kifejezve:

$$y(t) = -x'(t).$$

Helyettesítsük ezt be a második egyenletbe, ekkor

$$-x''(t) = x(t),$$

ami 0-ra rendezett alakban:

$$x''(t) + x(t) = 0. \tag{3.3}$$

Ezáltal egy *másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén* differenciálegyenletet kaptunk. Másodrendű, mert az x függvény deriváltjai közül az előforduló legmagasabb rendű derivált

másodrendű, lineáris, hiszen az egyenlet az x, x' és x'' függvények lineáris kombinációját tartalmazza. Mivel a lineáris kombinációban szereplő együtthatók állandók (nem függnek a változótól), ezért állandó együtthatós az egyenlet. Végül homogén az egyenlet, mert a jobb oldal (vagyis az ismeretlent nem tartalmazó tag) 0-val egyenlő. Ilyen típusú egyenletek megoldásánál segítségünkre van a következő tétel (lásd a [6] könyvet).

3.1. Tétel. *Legyenek a, b tetszőleges valós számok, és tekintsük az $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0$ $(t \in I)$ differenciálegyenletet valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon. Ekkor az $x(t)$ differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete a $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ másodfokú algebrai egyenlet. A karakterisztikus egyenlet gyökei alapján a differenciálegyenlet megoldásaira nézve három eset lehetséges:*

- *ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van, λ_1 és λ_2, akkor a differenciálegyenlet összes megoldása $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ alakú,*
- *ha a karakterisztikus egyenletnek λ kétszeres valós gyöke, akkor az egyenlet összes megoldása $x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$ alakú,*
- *ha a karakterisztikus egyenlet két különböző komplex megoldása $\alpha \pm i\beta$ $(\beta \neq 0)$, akkor a differenciálegyenlet összes megoldása $x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ alakú.*

A fenti kifejezésekben c_1, c_2 tetszőleges konstansok.

A tétel segítségével már meg tudjuk adni a (3.3) differenciálegyenlet összes megoldását. A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

más szóval

$$\lambda^2 = -1,$$

tehát

$$\lambda_1 = i, \text{ valamint } \lambda_2 = -i.$$

Így a 3.1. Tétel alapján a (3.1) egyenlet összes megoldása, vagyis a királylány lehetséges érzelemfüggvényei:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok. Szükségünk van még a lovag $y(t)$ érzelemfüggvényére, ezt megkapjuk, ha visszahelyettesítjük a már ismert $x(t)$ megoldást a (3.1) egyenletbe. Mivel

$$x'(t) = -y(t),$$

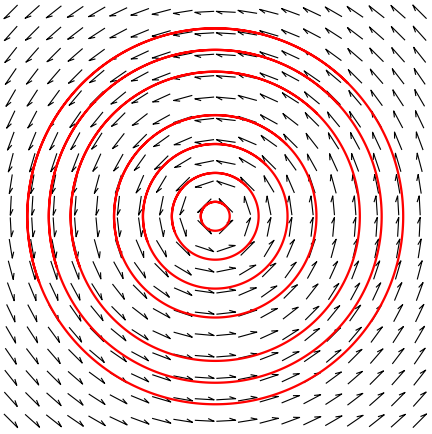
ezért

$$y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t.$$

Tehát a (3.1)–(3.2) egyenletrendszer összes megoldása:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \tag{3.4}$$

$$y(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t, \tag{3.5}$$



3.1. ábra. A (3.1)–(3.2) differenciálegyenlet-rendszer fázisképe

ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok.

Hogy a kapott képletekből szemléletes információkat tudjunk meg a királylány és a lovag érzelemfüggvényeiről, célszerű az $(x(t), y(t))$ megoldáspárt a síkon ábrázolnunk. A $t \mapsto (x(t), y(t))$ hozzárendelés a síkon egy differenciálható görbét határoz meg, ezt szokás *trajektóriának* vagy *pályának* hívni. A pálya egy adott pontjában az érintő irányvektora éppen a görbe deriváltvektora, vagyis $(x'(t), y'(t))$. Ezeket kis nyilakkal szemléltethetjük a síkon, így kapunk egy úgynevezett *iránymezőt*. Számítógép segítségével könnyen kirajzoltathatjuk az iránymezőt (legalábbis a nyilak közül véges sokat), valamint néhány trajektóriát is szemléltethetünk, ez látható a 3.1. ábrán. Az iránymező és a rendszer különféle lehetséges viselkedése szempontjából tipikus pályák megrajzolásával adódik az úgynevezett *fáziskép*. A 3.1. ábrát szemügyre véve úgy tűnhet számunkra, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldásgörbéi origó középpontú körvonalakon haladnak, beleértve azt az elfajuló esetet is, amikor a pálya maga az origó, vagyis egy nulla sugarú körvonal. Ennek igazolásához nem kell mást tennünk, mint megvizsgálni, hogy teljesül-e a megoldásfüggvényekre a következő összefüggés:

$$x^2(t) + y^2(t) = \text{állandó}.$$

Mivel az $x(t)$ és az $y(t)$ érzelemfüggvényeket a (3.4) és a (3.5) összefüggések határozzák meg, ezért

$$x^2(t) + y^2(t) = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)^2 + (c_1 \sin t - c_2 \cos t)^2.$$

A jobb oldal a négyzetre emelés után az alábbi alakot ölti:

$$c_1^2 \cos^2 t + 2c_1c_2 \cos t \sin t + c_2^2 \sin^2 t + c_1^2 \sin^2 t - 2c_1c_2 \sin t \cos t + c_2^2 \cos^2 t,$$

így a c_1^2 és c_2^2 tényezők kiemelésével azt kapjuk, hogy:

$$x^2(t) + y^2(t) = c_1^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + c_2^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = c_1^2 + c_2^2.$$

Tehát a megoldásgörbék valóban körvonalakon haladnak tetszőleges c_1, c_2 esetén.

A 3.1. ábráról, sőt magáról a (3.1)–(3.2) differenciálegyenlet-rendszerről azt is le tudjuk olvasni, hogy egy rögzített trajektória az óramutató járásával ellentétesen, tehát pozitív irányban

halad: ha az első koordinátafüggvény, vagyis $x(t)$, pozitív, akkor a második koordinátafüggvény, vagyis $y(t)$, növekszik, ha pedig az első koordinátafüggvény negatív, akkor a második koordinátafüggvény fogy. Ha a második koordinátafüggvény pozitív, akkor az első koordinátafüggvény fogy, ha pedig a második koordinátafüggvény negatív, akkor az első koordinátafüggvény nő.

Próbáljuk meg most a (3.4) és a (3.5) érzelemfüggvényeket más alakban felírni egy ügyes trigonometrikus átalakítás segítségével. Tegyük fel, hogy

$$c_1^2 + c_2^2 > 0.$$

Ekkor a lovag érzelemfüggvénye a $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ tényező kiemelése után a következő alakot ölti:

$$y(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin t - \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos t \right).$$

Vegyük észre, hogy

$$\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \right)^2 = 1,$$

tehát egyértelműen van olyan $0 \leq \delta < 2\pi$ szög, amelyre

$$\cos\delta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \quad \text{és} \quad \sin\delta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Ezek alapján az $y(t)$ függvény így írható:

$$y(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\cos\delta \sin t - \sin\delta \cos t \right).$$

A jól ismert addíciós képlet szerint $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, ezért a lovag érzelemfüggvénye végül a következő alakban is megadható:

$$y(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(t - \delta) = A \sin(t - \delta).$$

Hasonlóan alakítható át a királylány érzelemfüggvénye is:

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin t \right),$$

amely nem más, mint

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\cos\delta \cos t + \sin\delta \sin t \right).$$

Tudjuk, hogy $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, tehát a királylány érzelemfüggvénye

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(t - \delta) = A \cos(t - \delta)$$

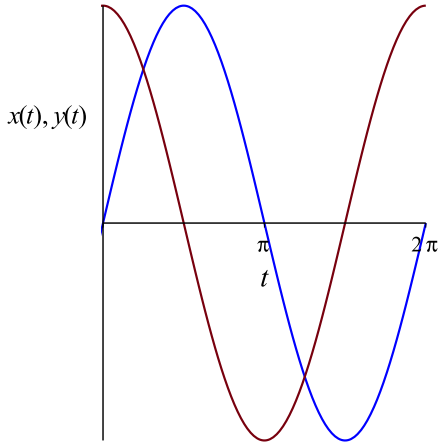
alakban is felírható.

Összefoglalva tehát:

$$x(t) = A \cos(t - \delta) \tag{3.6}$$

$$y(t) = A \sin(t - \delta). \tag{3.7}$$

Ebből ránézésre látható, hogy a $t \mapsto (x(t), y(t))$ hozzárendelés éppen egy origó középpontú A sugarú körvonalat határoz meg a síkon. Másrészt tudjuk, hogy $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$, másként fogalmazva a sin és cos függvények egymáshoz képest $\frac{\pi}{2}$-vel el vannak tolva, ezért azt mondhatjuk, hogy a lovag érzelemfüggvénye $\frac{\pi}{2}$ fáziskésésben van a királylány érzelemfüggvényéhez képest. Ezt a 3.2. ábra is jól szemlélteti, amelyen az $x(t)$ és $y(t)$ függvények grafikonjai láthatóak. Összességében erről a kapcsolatról elmondhatjuk, hogy vannak olyan időintervallumok, amelyekben a királylány és a lovag viszontszeretik egymást, különben legalább egyikük nem szereti a másikat, de az érzelmek periodikusan változnak, tehát kiszámítható a kapcsolat.



3.2. ábra. A királylány (piros) és az első lovag (kék) érzelemfüggvénye

3.1.2. A fura lovag

A második udvarló fura viselkedésű, ezért az ő érzelemfüggvényének változása úgy modellezhető, hogy negatív számszorosa a királylány érzelemfüggvényének, és az egyszerűség kedvéért az arányossági tényező legyen (-1), vagyis

$$y'(t) = -x(t).$$

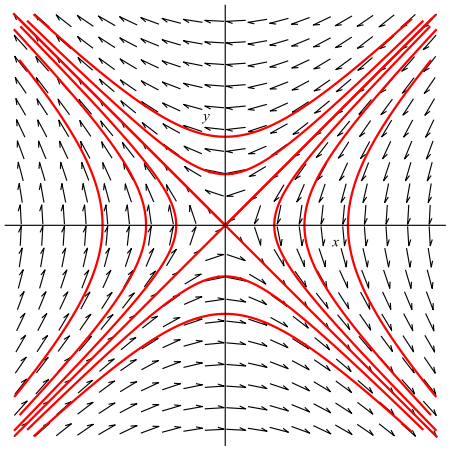
Matematikailag tehát a királylány és a második lovag érzelmi kapcsolatát a következő differenciálegyenlet-rendszerrel modellezhetjük:

$$x'(t) = -y(t) \tag{3.8}$$
$$y'(t) = -x(t). \tag{3.9}$$

Az első udvarlónál látott módszerrel meg tudjuk oldani ezt a differenciálegyenlet-rendszert is, ezt most nem részletezzük, csak a megoldásokat vizsgáljuk, melyek a következők:

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$
$$y(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{-t},$$

ahol c_1 és c_2 tetszőleges konstansok. Számítógép segítségével ábrázoltuk a (3.8) és a (3.9) egyenletekhez tartozó iránymezőt és néhány, a különféle lehetséges viselkedések szempontjából jellegzetes trajektóriát, mindezek a 3.3. ábrán láthatók. Az ábra azt sugallja, hogy a trajektóriák



3.3. ábra. A (3.8)–(3.9) rendszer fázisképe

hiperbolaágakon haladnak, mégpedig olyan hiperbolák ágain, amelyek aszimptotái az $y = x$ és az $y = -x$ egyenletű egyenesek (a trajektória a folytonossága miatt egy adott hiperbolának csak az egyik ágán haladhat). Az ilyen hiperbolák egyenlete

$$x^2 - y^2 = \text{állandó}$$

alakban írható. Ha az állandó éppen 0, akkor kapjuk a hiperbolák aszimptotáit. Belátjuk, hogy a (3.8) és a (3.9) érzelemfüggvényekre $x^2(t) - y^2(t) =$ állandó teljesül, ahol az állandó t-től független. Ehhez emeljük négyzetre és vonjuk ki egymásból a királylány és a lovag érzelemfüggvényét, ekkor a következőket kapjuk:

$$x^2(t) - y^2(t) = (c_1 e^t + c_2 e^{-t})^2 - (-c_1 e^t + c_2 e^{-t})^2.$$

A jobb oldal tovább alakítva az alábbi alakot ölti:

$$c_1^2 e^{2t} + 2c_1 c_2 + c_2^2 e^{-2t} - c_1^2 e^{2t} + 2c_1 c_2 - c_2^2 e^{-2t} = 4c_1 c_2,$$

tehát a trajektóriák valóban az $x^2 - y^2 =$ állandó egyenletű görbéken haladnak. Vizsgáljuk meg, hogy az aszimptotákon milyen irányúak a pályák. Az $y = x$ esetben

$$c_1 e^t + c_2 e^{-t} = -c_1 e^t + c_2 e^{-t},$$

ahonnan

$$2c_1 e^t = 0,$$

vagyis $c_1 = 0$, tehát

$$x(t) = c_2 e^{-t}$$
$$y(t) = c_2 e^{-t}.$$

Ha $c_2 > 0$, akkor ez a görbe az $y = x$ aszimptotának az 1. síknegyedbe eső részén halad az origó felé, ha $c_2 < 0$, akkor a 3. síknegyedbe eső felén. Az $y = -x$ esetben hasonlóan kapjuk, hogy

$$x(t) = c_1 e^t$$
$$y(t) = -c_1 e^t,$$

és ezek a görbék az $y = -x$ aszimptotának a 2. és 4. síknegyedbe eső részein az origótól távolodnak. Tehát az aszimptotákból az origó elhagyásával nyert négy félegyenes mind különböző pálya. Végül maga az origó is egy pálya, hiszen a konstans $x(t) = 0$ és $y(t) = 0$ ugyancsak megoldások. Ez egy egyensúlyi helyzet, innen „nem tud kijönni" a két érzelemfüggvény. Ekkor a lovag és a királylány végig közömbösek egymás iránt.

A 3.3. ábráról és magáról a (3.8)–(3.9) differenciálegyenlet-rendszerről is leolvasható, hogy ha $x(t)$ pozitív, akkor $y(t)$ csökken, ha $x(t)$ negatív, akkor $y(t)$ nő. Hasonlóan elmondható, hogy ha $y(t)$ pozitív, akkor $x(t)$ csökken, valamint ha $y(t)$ negatív, akkor $x(t)$ nő. Ebből következően a $t \to \infty$ esetben a hiperbolaágakon kétféle kimenetele lehet a kapcsolatnak:

- $x(t) \to \infty$ és $y(t) \to -\infty$;
- $x(t) \to -\infty$ és $y(t) \to \infty$.

Az aszimptotákon $t \to \infty$ esetén háromféle kimenetel lehetséges: az $y = x$ félegyenesen $t \to \infty$ esetén a trajektória az origóba, vagyis a közömbös állapotba tart. Az $y = -x$ esetben pedig ugyanaz történik, mint a hiperbolákon, a két érzelemfüggvény ellentétes előjelű végtelenhez tart. Mindezek alapján nem tűnik egy boldog házasság alapjának, hiszen $t \to \infty$ esetén a közömbösség az elérhető legjobb állapot.

3.1.3. A kissé hangulatfüggő lovag

A királylány harmadik udvarlója bár szokványos viselkedésű, ám az ő érzelemfüggvényének változását a saját érzelmei is befolyásolják. Modellezzük ezt úgy, hogy a lovag érzelemfüggvényének változása:

$$y'(t) = x(t) + y(t).$$

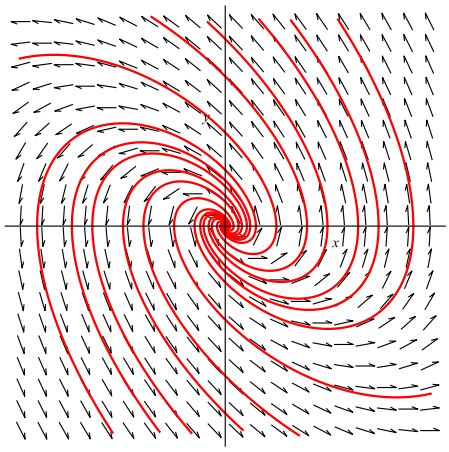
Felmerülhet a kérdés, hogy miért pont összeg formájában jelennek meg az érzelemfüggvények, miért nem írjuk más, például szorzat alakban az egyenlet jobb oldalát. Az ok az, hogy minél egyszerűbb modellt szeretnénk felírni, és jelen formában lineáris differenciálegyenlet-rendszert kapunk az érzelemfüggvények változására, melyet a rendelkezésünkre álló eszközökkel meg tudunk oldani. Tehát a következőképp néz ki a modellünk:

$$x'(t) = -y(t) \tag{3.10}$$
$$y'(t) = x(t) + y(t). \tag{3.11}$$

Az első udvarlónál leírtak alapján ezt az egyenletrendszert is egyértelműen meg tudjuk oldani. Itt arra kell figyelnünk, hogy a második egyenletben két helyen kell a behelyettesítést elvégeznünk, $y(t)$ helyére $x'(t)$-t és $y'(t)$ helyére $x''(t)$-t kell írnunk. Az egyenletrendszer megoldásai ebben az esetben:

$$x(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right) \tag{3.12}$$
$$y(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(\left(-\frac{c_1}{2} - \frac{c_2\sqrt{3}}{2} \right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \left(\frac{c_1\sqrt{3}}{2} - \frac{c_2}{2} \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \right). \tag{3.13}$$

Számítógép segítségével ábrázoltuk a (3.10) és a (3.11) egyenletekhez tartozó iránymezőt és néhány, a különféle lehetséges viselkedés szempontjából lényeges trajektóriát a 3.4. fázisképen. Egy tetszőleges trajektórián haladva megfigyelhető, hogy az origótól egyre távolabb kerülünk. Ezt a jelenséget az $e^{\frac{t}{2}}$ szorzótényező okozza, mivel a (3.12)–(3.13) függvények az $e^{\frac{t}{2}}$ szorzótényező miatt nagy abszolút értékűek, ha t értéke nagy. A függvények másik, periodikus szorzótényezőjének következtében a megoldásgörbékben megfigyelhető egy forgás. Azt lehet mondani, hogy a királylány és a lovag kapcsolatában a szeretet és ellenszenv négyféle lehetséges párosítása periodikusan változik, azonban egyre nagyobb az érzelmek intenzitása. Ez különösen akkor lehet probléma, amikor a kapcsolat a kölcsönös ellenszenv állapotában van.



3.4. ábra. A (3.10)–(3.11) rendszer fázisképe

3.1.4. A nagyon hangulatfüggő lovag

Mivel a negyedik lovagot a saját érzelmei jobban befolyásolják, mint a királylány érzelmei, így a harmadik lovaghoz képest az alábbiak szerint módosítjuk modellünket:

$$x'(t) = -y(t) \tag{3.14}$$

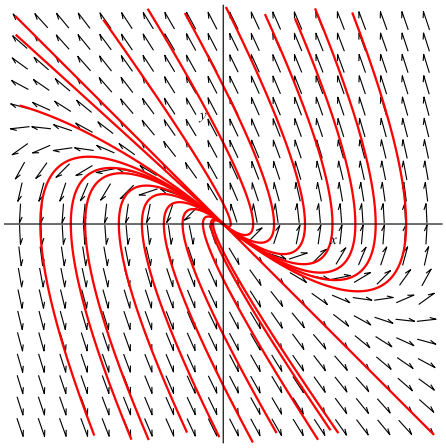
$$y'(t) = x(t) + 2y(t). \tag{3.15}$$

A korábban ismertetett módszerrel belátható, hogy ebben az esetben a megoldások

$$x(t) = e^t(c_1 + c_2 t)$$
$$y(t) = e^t(-c_1 - c_2 - c_2 t)$$

alakúak, ahol c_1, c_2 tetszőleges konstansok. A rendszer fázisképe a 3.5. ábrán látható. Erről az olvasható le, hogy ha nem az egyensúlyi helyzetet tekintjük, akkor $t \to \infty$ esetén kétféle kimenetel lehet:

- $x(t) \to -\infty$ és $y(t) \to \infty$,
- $x(t) \to \infty$ és $y(t) \to -\infty$.



3.5. ábra. A (3.14)–(3.15) rendszer fázisképe

Ez a megoldások explicit alakjából is kikövetkeztethető. Ha a c_2 szorzótényező előjele pozitív, akkor $c_1 + c_2 t \to \infty$, így $e^t \to \infty$ miatt a királylány $y(t)$ érzelemfüggvényének végtelenben vett határértéke ∞. Ebben az esetben a lovag érzelemfüggvényének határértéke $-\infty$, ugyanis $e^t \to \infty$ és $-c_1 - c_2 - c_2 t \to -\infty$. Amennyiben a c_2 tényező negatív előjelű, akkor az előző esettel ellentétes módon a királylány érzelemfüggvényének határértéke az idő előrehaladtával $-\infty$, a lovagé pedig ∞. Ez sem tűnik egy hosszútávú boldog kapcsolatnak.

Na de akkor melyik lovagot válassza férjül a király lányának? Ki-ki döntse el maga, hogy szerinte a négy jelölt közül melyik lovag a befutó...

3.2. Zsákmány- és ragadozóhalak

Umberto D'Ancona olasz biológus az 1920-as években az Adriai-tenger halállományát vizsgálta. A 3.1. táblázatban láthatóak azok az adatok, amelyeket D'Ancona megfigyelt: az 1914 és 1923 közötti években a ragadozóhalak számának százalékos aránya.

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
11,9%	21,4%	22,1%	21,2%	36,4%	27,3%	16,0%	15,9%	14,8%	10,7%

3.1. táblázat. A ragadozóhalak számának százalékos aránya (Forrás:[4])

A táblázat alapján D'Anconának feltűnt, hogy az I. világháború alatt megnőtt a cápák és ráják, azaz a ragazodóhalak százalékos aránya a tengerben. Ezzel egyidejűleg a kis zsákmányhalak aránya pedig csökkent. Sejtette, hogy mindennek a halászat világháború alatti visszaesése lehet az oka. Hiszen a háború alatt a halászat csökkenése miatt több zsákmányhal volt a tengerben, aminek következtében több táplálékhoz jutottak a ragadozóhalak. A több élelemnek köszönhetően pedig gyorsabban szaporodtak. Ez az okoskodás arra viszont nem adott választ, hogy a teljes halállomány halászatának megszűnése miért éppen a ragadozóhalak számára kedvező. Feltételezte, hogy egy matematikai modell bizonyára segíthet a probléma megértésében, ezért D'Ancona az olasz Vito Volterra matematikustól (aki egyébként pár évvel később D'Ancona lányát vette

feleségül) kért segítséget. Volterra a zsákmány- és a ragadozóhalak számának változását egy differenciálegyenlet-rendszerrel modellezte. Az alábbiakban ezt ismertetjük.

Jelöljük $x(t)$-vel a zsákmányhalak számát adott t időpillanatban, és ugyanígy legyen $y(t)$ a ragadozóhalak száma. A népességnövekedési modellhez hasonlóan azt feltételezzük, hogy a halpopuláció növekedési üteme arányos a meglévő halpopuláció méretével:

$$x'(t) = ax(t).$$

Ezenfelül célszerű azt is belefoglalnunk az egyenletbe, hogy a ragadozóhalak megeszik a zsákmányhalakat, ezáltal csökken a zsákmánypopuláció. Észszerű feltételezés, hogy a zsákmányhalak csökkenési üteme arányos a ragadozóhal-populáció méretével, de a zsákmányhal-populáció mérete is befolyásolja számukat. Minél több a ragadozó és minél több a zsákmányhal, annál több tud áldozatul esni. Ennek megfelelő modell lehet a következő:

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t).$$

A ragadozóhalak számának csökkenési üteme az előzőekhez hasonlóan függ a ragadozóhal-populáció nagyságától, hiszen az élelemért harcolnak egymással a ragadozóhalak, valamint nem szabad elfeledkeznünk arról sem, hogy a ragadozóhalak is elpusztulnak az idő múlásával. Így a populáció csökkenési üteme feltételezhetően arányos lesz a számukkal. Ezenkívül, ha van megfelelő mennyiségű zsákmányhal, akkor az a ragadozóhalak számát növeli, hiszen ha sok a táplálék, több ragadozóhal talál élelmet, míg kevesebb hal esetén kevesebb ragadozóhalnak lesz elegendő mennyiségű élelme. Tehát a populáció méretének növekedési ütemét a zsákmány- és a ragadozóhalak száma egyaránt befolyásolja. Ennek megfelelő modell a következő:

$$y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t).$$

A zsákmány- és ragadozóhalakra vonatkozó modell tehát a következőképp néz ki:

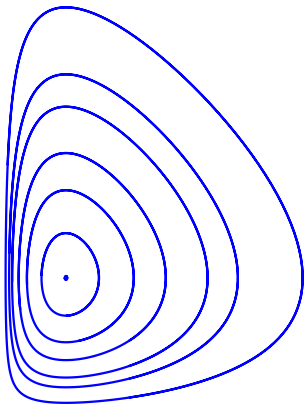
$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \tag{3.16}$$

$$y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t). \tag{3.17}$$

Ezt szokás Lotka–Volterra-modellnek hívni, amelyet Alfred Lotka kémiai reakciók modellezésére írt fel 1910-ben, Vito Volterra pedig zsákmány- és ragadozópopulációk egyedszámára 1926-ban.

Maple program segítségével rögzített $a, b, c, d > 0$ paraméterek mellett felrajzoltuk az egyenletrendszernek az első síknegyedbe eső néhány megoldásgörbéjét, ezek láthatóak a 3.6. ábrán. Jól megfigyelhető, hogy a pályák önmagukba záródó görbék. Ez természetesen egyelőre csak a szemléletre alapozott kijelentés, de valójában matematikailag is igazolható, azonban ennek részletezésétől a technikai nehézségek miatt eltekintünk (a bizonyítás megtalálható a [4] könyvben). Észrevehetjük az ábrán, hogy középen található egy pont, az egyensúlyi helyzet, más szóval a konstans megoldás. Ebben az esetben mind a zsákmány, mind pedig a ragadozóhalak száma időben állandó. Egy ilyen egyensúlyi helyzet lenne például az $x(t) = 0$ és $y(t) = 0$ megoldás, hiszen ekkor se zsákmány-, se ragadozóhal nincs. Foglalkozzunk most csak azzal az esettel, amikor mindkét populáció egyedszáma pozitív. Tegyük fel, hogy egyensúlyi helyzet esetén a zsákmányhalak száma

$$x(t) = \gamma > 0,$$



3.6. ábra. A Lotka–Volterra-modell megoldásgörbéi

a ragadozóhalaké pedig

$$y(t) = \delta > 0.$$

Helyettesítsük be ezt a két konstans függvényt a (3.16), illetve a (3.17) egyenletekbe. Azt kapjuk, hogy

$$0 = a\gamma - b\gamma\delta$$
$$0 = -c\delta + d\gamma\delta.$$

Átrendezve az egyenletrendszert, az egyensúlyi helyzetre

$$\gamma = \frac{c}{d}, \text{ valamint } \delta = \frac{a}{b}$$

adódik.

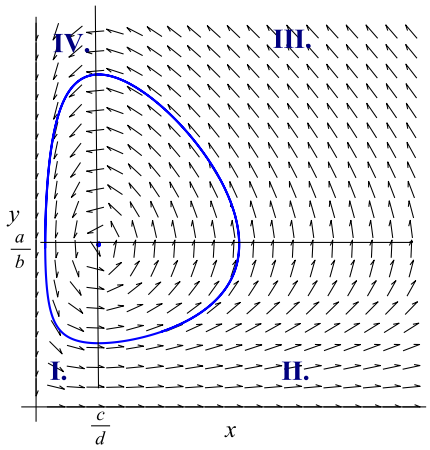
Nézzük meg most, mi történik, ha nem az egyensúlyi helyzetnek megfelelő mennyiségű zsákmány- és ragadozóhal van a tengerben. A trajektória ez esetben egy önmagába záródó görbe lesz, ezt szemlélteti a 3.7. ábra, melyen az egyensúlyi pontot is feltüntettük. Ennek segítségével az ábrán látható módon négy tartományra oszthatjuk az xy sík első negyedét. Vizsgáljuk meg, hogy az így kapott tartományokban hogyan változik a ragadozóhalak és a zsákmányhalak száma. Ha az I. tartományt tekintjük, akkor a ragadozóhalak száma (vagyis az első koordinátafüggvény) kisebb, mint $\frac{a}{b}$, a táplálék is kevés, ezért a ragadozóhalak száma (vagyis a második koordinátafüggvény) tovább csökken:

$$y'(t) < 0.$$

Kevesebb ragadozóhal esetén megnő a zsákmányhalak száma,

$$x'(t) > 0,$$

hiszen nincs elegendően sok ragadozó, ami puszítaná őket. A II. tartományban a zsákmányhalak száma meghaladja a kritikus $\frac{c}{d}$ értéket, ekkor kezd megfelelő mennyiségű táplálék rendelkezésre



3.7. ábra. A populációk egyedszámainak egy ciklusa

állni a ragadozóhalak számára, ennek köszönhetően a számuk továbbra is nő. Azonban még nincs elegendően sok ragadozóhal, ezért a zsákmányhalak száma továbbra is nő, vagyis

$$x'(t) > 0$$

és

$$y'(t) > 0.$$

A III. tartományban a ragadozóhalak száma eléri a kritikus $\frac{a}{b}$ értéket, ekkor kezd a zsákmányhalak száma csökkeni. Itt azonban még van megfelelő mennyiségű táplálék a ragadozóhalak számára, tehát a számuk továbbra is nő. Matematikailag ez azt jelenti, hogy

$$x'(t) < 0,$$

valamint

$$y'(t) > 0.$$

Amikor a IV. síknegyedben a táplálékforrás száma a kritikus $\frac{c}{d}$ érték alá csökken, akkor a ragadozóhalak száma elkezd csökkenni. Ugyanakkor a zsákmányhalak száma is csökkenni fog, amíg a ragadozóhalak többen vannak a kritikus $\frac{a}{b}$ értéknél, tehát

$$x'(t) < 0$$

és

$$y'(t) < 0.$$

Ekkor azonban a zsákmányhalak számára nézve újra kedvező a helyzet, hiszen ismét kevés ragadozóhal vadászik rájuk, így visszaérünk az I. tartományba, ahonnan a ciklus kezdődik előről.

3.2.1. A halak átlagos száma

A továbbiakban D'Ancona kérdésére keressük a választ, vagyis hogyan befolyásolja a halászat (és annak megszűnése) a zsákmány- és ragadozóhalak populációjának méretét. A 3.1. táblázatban az egy évre vonatkozó átlagos zsákmány- és ragadozóhalak százalékos arányai szerepelnek,

ezért próbáljuk meg most mi is meghatározni az átlagos egyedszámot egy ciklusra nézve. Tegyük fel, hogy a (3.16)–(3.17) rendszer T szerint periodikus és pozitív értékű megoldásai:

$$x = \varphi(t) \tag{3.18}$$

$$y = \psi(t), \tag{3.19}$$

ahol $t \in [0, T]$. Ekkor a T idő alatt a populációk összegyedszáma nem más, mint a pillanatnyi egyedszámok integrálja a $[0, T]$ intervallumon. Ebből úgy kaphatunk átlagos egyedszámot, hogy elosztjuk a T idővel. A leírtak alapján a zsákmányhalak átlagos száma:

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t)dt,$$

és ehhez hasonlóan a ragadozóhalak átlagos száma:

$$m_y = \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t)dt.$$

Helyettesítsük be a (3.16)–(3.17) egyenletrendszerbe a (3.18) és a (3.19) megoldásokat. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\psi'(t) = -c\psi(t) + d\varphi(t)\psi(t).$$

Rendezzük az egyenletet, osszuk el mindkét oldalt $\psi(t)$-vel ($\psi > 0$):

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -c + d\varphi(t).$$

Vegyük mindkét oldal integrálját 0-tól T időpillanatig, és aztán szorozzunk $\frac{1}{T}$-vel:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt = \frac{1}{T} \int_0^T (-c + d\varphi(t))dt. \tag{3.20}$$

A kapott egyenlet bal oldalán az $\ln \psi(t)$ összetett függvény deriváltja szerepel (feltételezzük, hogy $\psi > 0$), ezért ezt átírhatjuk a következő alakba:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\ln \psi(t))'dt.$$

A Newton–Leibniz-formulát használva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\ln \psi(t))'dt = \frac{1}{T}(\ln \psi(T) - \ln \psi(0)).$$

Mivel ψ periodikus T szerint, ezért $\psi(T) = \psi(0)$, tehát

$$\frac{1}{T}(\ln \psi(T) - \ln \psi(0)) = 0.$$

Emiatt a (3.20) egyenlet jobb oldala 0-val egyenlő, vagyis

$$\frac{1}{T}\int_0^T(-c+d\varphi(t))dt=0.$$

Az integrálás szabályait alkalmazva ez átírható a következő alakú egyenletté:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{c}{d}dt.$$

A jobb oldalon a konstans $\frac{c}{d}$ függvény integrálja $T\frac{c}{d}$, így végül azt kapjuk, hogy a zsákmányhalak átlagszáma:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)dt=\frac{c}{d}.$$

Ez azt jelenti, hogy a zsákmányhal-populáció átlagos egyedszáma az egyensúlyi helyzethez tartozó érték. Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy a ragadozóhalak átlagos egyedszáma:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\psi(t)dt=\frac{a}{b},$$

ami ugyancsak az egyensúlyi helyzetbeli érték. A zsákmányhalak és a ragadozóhalak átlagszámának ismeretében választ lehet adni D'Ancona kérdésére, vagyis mi történik a populációk átlagszámával, ha a teljes halpopulációt halásszuk.

3.2.2. A halászat hatása

Ha a halászatot is figyelembe vesszük, akkor ennek megfelelően módosítani kell a (3.16) és a (3.17) egyenleteket. Feltételezzük, hogy a halászat üteme arányos az adott populáció egyedszámával, valamint, hogy egyforma arányban halásszuk a két populációt. Így a korábbi modellünket a következőképpen módosítjuk:

$$x'(t)=ax(t)-bx(t)y(t)-hx(t) \tag{3.21}$$

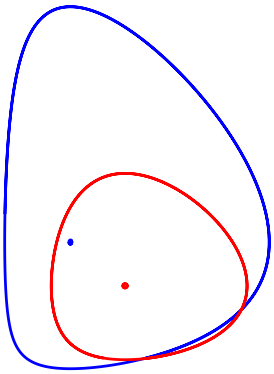
$$y'(t)=-cy(t)+dx(t)y(t)-hy(t). \tag{3.22}$$

Vizsgáljuk meg, hogyan módosítja a halászat a korábban kapott trajektóriákat. Számítógép segítségével ábrázoltuk a halászat jelenléte nélkül és a halászat jelenléte mellett a megoldásgörbéket az $a,b,c,d,h>0$ paraméterek egy tetszőlegesen választott konkrét értékére, és így kaptuk a 3.8. ábrát. A pirossal jelölt görbe mutatja, hogyan módosul a trajektória a halászat hatására. Látható, hogy a görbe és vele együtt az egyensúlyi helyzet eltolódott, azaz más lesz a zsákmány- és ragadozóhalak átlagszáma. Az vehető észre, hogy a halászat hatására az egyensúlyi helyzetben meglepő módon kevesebb a ragadozóhal és több a zsákmányhal.

Ezt a meglepő eredményt analitikusan is meg tudjuk indokolni. A (3.21) és a (3.22) egyenletek valójában a következő alakban is írhatók:

$$x'(t)=(a-h)x(t)-bx(t)y(t)$$

$$y'(t)=-(c+h)y(t)+dx(t)y(t).$$



3.8. ábra. Ciklus halászattal (kék görbe) és anélkül (piros görbe)

Ezek már a (3.17) és a (3.16) egyenletekkel megegyező alakú összefüggések, csak két konstans szorzótényezőben térnek el azoktól. Ha a halászat arányossági tényezője h, akkor a zsákmányhalak átlagszáma:

$$m_x = \frac{c+h}{d},$$

míg a ragadozóhalaké

$$m_y = \frac{a-h}{b}.$$

Tehát D'Ancona sejtései helyesek voltak, vagyis a zsákmány- és a ragadozóhalak azonos mértékű halászata esetén a zsákmányhalak száma nő, a ragadozóké pedig csökken. A halászat megszűnésével pedig a zsákmányhalak száma csökken a ragadozóhalaké pedig nő. Éppen ez volt megfigyelhető az Adriai-tengerben az I. világháború alatt, amikor a halászat intenzitása visszaesett.

4. fejezet

Differenciálegyenletek a középiskolában

Ebben a fejezetben a matematikai modellek és a differenciálegyenletek középiskolai vonatkozásaival foglalkozunk. Először megnézzük, hogy az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet (OFI) honlapján található Kerettanterv (forrás: [14]) milyen lehetőségeket nyújt az említett két témakör tárgyalására, valamint megvizsgáljuk, hogy néhány, általunk kiválasztott matematikatankönyvekben milyen feladatokat találunk a modellezéshez és a differenciálegyenletekhez kapcsolódóan.

4.1. Matematika kerettanterv

A kerettanterv matematikaoktatással kapcsolatos célkitűzései között szerepel többek között a diákok modellalkotó képességeinek fejlesztése. A dokumentumban megfogalmazott cél az, hogy a tanulók ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat. Az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet honlapján a matematika tantárgyhoz kapcsolódóan találunk normál, illetve kétféle emelt óraszámú kerettantervet. Az alaptanterv alapján 9–10. osztályban kerülnek bevezetésre a függvénytani alapfogalmak, majd 11–12. osztályban tanulnak a diákok az exponenciális függvényről és az exponenciális egyenletekről. A kerettantervben a témakörökhöz előírt fejlesztési követelmények között megtalálható az exponenciális függvényekre vezető valós problémák kérdése, mint például a népesség alakulása, a Föld eltartóképessége, a túltermelés és a túlfogyasztás.

Emelt óraszámú, valamint fakultációkra vonatkozó kerettantervek között a 11–12. évfolyamnál a *Hatvány, gyök, logaritmus* témakörön belül szintén megtalálhatók az exponenciális függvények, a radioaktivitás, továbbá az exponenciális egyenletre vezető valós problémák.

A matematikai modellezés alapszinten is tárgyalható, azonban a differenciálegyenletek bevezető fejezeteit fakultációs órákon vagy szakköri foglalkozásokon lehet a diákokkal megismertetni. Emelt óraszám esetén a kerettanterv „A” változatában helyet kap a *Folytonosság, differenciálszámítás*, valamint az *Integrálszámítás* is. A differenciálegyenletek bevezető részeit ezen témakörök ismerete után lehet tanítani.

4.2. Tankönyvi feladatok

Ha kezünkbe veszünk egy fizikatankönyvet, akkor biztosan találunk benne olyan összefüggést, mely valójában egy differenciálegyenletet rejt magában. Elég, ha a mindenki által ismert Newton-féle törvényre, a dinamika alaptörvényére gondolunk. Ugyanakkor különböző matematika-tankönyvekben és példatárakban is találkozhatunk differenciálegyenletekkel kapcsolatos modellekkel és feladatokkal.

Exponenciális függvényekre vezető modellek a középiskolai tankönyvekben

Először néhány, alap óraszámhoz készített, 11. osztályosoknak szóló tankönyvet lapoztam át. Ezek a tankönyvek természetesen nem tesznek említést differenciálegyenletekről, viszont találhatók bennük olyan feladatok, melyek valójában differenciálegyenletekkel is kapcsolatosak. Az általam megtekintett könyvekben exponenciális függvényre vezető modellezési feladatok szerepelnek, mint például: a népességnövekedés kérdése, baktériumok szaporodása, a radioaktív bomlás folyamata, de akár olyan példa is fellelhető, melyben az általunk tárgyalt Newton-féle hűlési törvényről van szó.

A Sokszínű matematika tankönyvcsalád 11. osztályosoknak szóló kötetében, a *Hatványozás, gyök, logaritmus* című fejezetben találunk egy *Gyakorlati alkalmazások* című részt. A következőkben a gyakorlati példák közül mutatunk be párat.

4.1. Feladat. ([5], 115. oldal) A kísérletekkel is alátámasztott lehűlési törvény szerint az ahhoz szükséges idő, hogy egy T_0 hőmérsékletű tárgy K hőmérsékletű környezetben T hőmérsékletre lehűljön,

$$t = k \cdot \ln\left(\frac{T_0 - K}{T - K}\right),$$

ahol k a lehűlő anyagra jellemző állandó, az időt pedig percben kapjuk. Mennyi idő alatt hűl le a 85 °C-os hőmérsékletű sült malac 70 °C hőmérsékletre, ha a lakás hőmérséklete 21 °C és $k = 12{,}5$?

Megoldásként a tankönyv azt javasolja, hogy a megadott összefüggésbe helyettesítsük az adatokat, és zsebszámológép segítségével számoljuk ki az értékeket.

A matematikai modellezés egyik klasszikus példája a radioaktív kormeghatározás. A radioaktív bomlással kapcsolatos feladattal az általam vizsgált tankönyvek mindegyikében találkoztam. A diákoknak ezen példa segítségével szemléltethetjük, hogy a különböző tudományok szoros kapcsolatban állnak egymással. A Sokszínű matematika 11. osztályosoknak szóló tankönyvében a következő formában olvashatunk a kormeghatározásról.

4.2. Feladat. ([5], 117. oldal) Adott pillanatban m_0 tömegű radioaktív anyagból t idő múlva

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$$

tömegű, bomlásra képes radioaktív anyag lesz, ahol k az anyagra jellemző állandó. A 14 tömegszámú szénizotóp radioaktív, és az élő szervezetben is megtalálható. A régészeti leletekből kimutatható ^{14}C ismeretében meghatározható a lelet kora. A ^{14}C izotóp felezési ideje 5715 év

(ennyi idő alatt csökken felére a radioaktív anyag mennyisége). Egy lelet vizsgálatánál 12 g szénből 4 g volt radioaktív. Körülbelül hány éves a lelet?

Ez némileg összetettebb feladat az előző hűléses példához képest, először meg kell határozni a k konstans értékét, és utána a bomlási törvényből még ki kell fejezni az időt.

Az alaptantervhez írodott újgenerációs tankönyveket is szemügyre vettem, hogy milyen feladatokat kínál a modellezés témaköréhez kapcsolódóan. Az OFI által készített, 11. osztályosoknak szóló matematika-tankönyvben található egy *Exponenciális folyamatok* című fejezet. A fejezet egy rövid elméleti résszel kezdődik, melyben többek között szó van arról, hogy egy mennyiség exponenciálisan változik, ha az időbeli változása leírható a

$$t \mapsto N_0 \cdot k^t$$

függvénnyel. Ezután olvashatunk az N_0 kezdeti értékről, illetve a k növekedési tényező fogalmáról. Az elméleti összefoglalást feladatok követik, melyek között szerepel a következő Newton-féle hűlési törvénnyel kapcsolatos példa.

4.3. Feladat. ([8], 171. oldal) A Newton-féle hűlési törvény értelmében egy test és a környezetének hőmérséklete közötti különbség (K) időben exponenciálisan csökken. Egy 20 °C hőmérsékletű szobában az asztalon hagyott, kezdetben 80 °C hőmérsékletű csésze kávé hűlése modellezhető a $K(t) = 60 \cdot 0{,}87^t$ függvénnyel, ahol K a kávé és a szoba hőmérséklete közötti különbség, t pedig az eltelt idő, percekben mérve. Kezdetben a hőmérséklet-különbség $80 - 20 = 60$ °C, azaz $K(0) = 60$.

- Negyedóra eltelte után hány fok lesz a hőmérséklet-különbség a kávé és a szoba hőmérséklete között?
- Negyedóra elteltével hány fok lesz a kávé hőmérséklete?
- Mennyi idő alatt csökken a felére az eredetileg 60 °C-os hőmérséklet-különbség?
- Milyen forró lehetett a kávé a mérés kezdete előtt 5 perccel?
- Hány perc alatt hűl a kávé hőmérséklete 21 °C alá?

A hűlési modellen túl a népesség változásával kapcsolatos példát is találunk a tankönyvben.

4.4. Feladat. ([8], 145. oldal) Egy város lakossága 1900-ban 20 ezer fő volt, majd 2000-ig a $t \mapsto 20 \cdot 1{,}026^t$ szabálynak megfelelően exponenciálisan növekedett (itt t az 1900 óta eltelt évek számát jelöli).

- Mennyi lett a lakosság 2000-ben?
- Hány lakosa volt ennek a városnak 1920-ban, 1940-ben, 1960-ban és 1980-ban?
- Mennyi lett volna a város lakossága 1920-ban, 1940-ben, 1960-ban és 1980-ban, ha a lakosság száma lineáris növekedéssel érte volna el az első pontban kiszámított értéket?

- Akár grafikon, akár a számológéped segítségével becsüld meg, hogy ezzel a növekedési tényezővel számolva mikor érné el a város lakossága a 400 ezer főt!

Az újgenerációs tankönyvben például a baktériumok szaporodásával kapcsolatos feladaton keresztül is megismerkedhetünk a matematikai modellezéssel.

4.5. Feladat. ([8], 145. oldal) Az osztódással szaporodó baktériumok száma – rövid alkalmazkodási periódus után, és mindaddig, amíg ezt a környezet lehetővé teszi – exponenciális növekedést mutat. Egy 1 ml-es laboratóriumi mintában a kutatók egy adott időpontban körülbelül 120 millió baktériumot számoltak, egy óra múlva 180 milliót.

- Írj fel egy olyan képletet, amely az első mérés idejétől eltelt idő függvényében megadja a baktériumok számát!
- Hány baktérium volt ebben a tenyészetben az első mérés után 3 órával, illetve fél órával?
- Hány baktérium volt ebben a tenyészetben az első mérés előtt 3 órával?

A feladat újdonsága a korábbiakhoz képest, hogy a diákoknak maguknak kell egy modellt felírni, még ha csak egy egyszerű hozzárendelésről is van szó.

Ezután az OFI által készített tankönyv a Sokszínű matematika könyvtől eltérően a felezési időt egy külön fejezetben tárgyalja. A témakörhöz kapcsolódó példák között szó van például gyógyszer szervezetből történő kiürüléséről, illetve a radioaktív bomlásról is, bár az előzőhöz képest más megközelítésben.

4.6. Feladat. ([8], 147. oldal) A 2011. március 11-i fukushimai atomerőmű-balesetben nagy mennyiségű radioaktív jód (^{131}I) és cézium (^{137}Cs) került ki a környezetbe. Ezek az izotópok stabilabb, már nem radioaktív leányelemekre bomlanak. A bomlás folyamata exponenciális. A jód felezési ideje körülbelül 8 nap, míg a céziumé 30 év.

- Számold ki, hogy hány nap, illetve hány év elteltével marad meg a kezdeti jód és cézium mennyiségének kevesebb mint 0,5%-a!
- Hány százaléka maradt meg a kezdeti jód- és céziummennyiségnek négy év elteltével?

A feladat kapcsán felmerülhetnek a radioaktív bomlás fajtái, de akár az atomerőművek működése is, mellyel fizika- és kémiaórán is találkozhatnak a diákok.

Összességében elmondható, hogy a Sokszínű matematika tankönyvcsalád 11. osztályosoknak szóló kötetében és az OFI által készített Matematika 11 könyvben is jelentős részt szentelnek az exponenciális folyamatokkal kapcsolatos feladatoknak. A tankönyvek ezen említett fejezetei segítségével kíválóan szemléltethetjük a matematikai modellezés alapjait, a matematika gyakorlati alkalmazásait, valamint a matematikának a különböző tudományterületeken betöltött szerepét.

Emelt szintű középiskolai matematika-tankönyvek

Néhány, az emelt szintű oktatáshoz íródott matematika-tankönyvet és feladatgyűjteményt átnézve arra a következésre jutottam, hogy a differenciálegyenletek témaköréről a legtöbb tankönyvben nem esik szó, azonban mindegyikben találunk differenciál- és integrálszámításról szóló

fejezetet, melyek ismerete nélkülözhetetlen a differenciálegyenletek bevezető fejezeteinek tárgyalásához.

A Sokszínű matematika tankönyvcsaládnak *Az analízis elemei* című kötete ([11]) tartalmazza a differenciál- és integrálszámítás témaköreit. A tankönyv a magasabb rendű deriváltakról szóló, kiegészítő anyagként feltüntetett szakaszában egy apró betűvel szedett bekezdésben ([11], 135. oldal) tesz említést a differenciálegyenletekről. A $\sin x$ függvény első néhány deriváltjának kiszámolása után azt a kérdést veti fel, hogy vajon melyik függvény lehet megoldása az $f''(x) + f(x) = 0$ egyenletnek. Úgy fogalmaz, hogy „a feladat különlegességét az adja, hogy egyrészt az ismeretlen egy függvény, másrészt szerepel az egyenletben annak második deriváltja. Az ilyen típusú függvényegyenleteket differenciálegyenletnek hívjuk." Ezután megjegyzi, hogy az említett differenciálegyenletnek az $f(x) = \sin x$ függvény megoldása. A szakasz végén pedig feladatként tűzi ki ([11], 137. oldal, 5. feladat), hogy az $f''(x) + f(x) = 0$ differenciálegyenletnek megoldása-e az $f(x) = \cos x$ függvény.

A következőkben az Analízis II. ([9]) című tankönyvet fogjuk szemügyre venni, mely az átlagos könyveknél magasabb szinten, a speciális matematika tantervű osztályok számára tárgyalja a matematika különböző fejezeteit, többek között egy *Differenciálegyenletekről* című rész is található a könyvben.

A témakör bevezetéseként különböző differenciálegyenletekkel kapcsolatos példáról olvashatunk, az alábbiakban mutatunk ezek közül néhányat. Kezdetnek rögtön megtaláljuk a radioaktív bomlással kapcsolatos feladatot, láthatjuk, hogy az alap tankönyvektől eltérően a megoldásfüggvényen túl a differenciálegyenlet is helyet kap a tankönyvben.

4.7. Feladat. ([9], 269. oldal) Ha valahol egy vizsgálat kezdetén m_0 tömegű rádium van, akkor t idő múlva mennyi lesz a rádium tömege? Ennek a megállapítására az ad lehetőséget, hogy tudjuk: a rádium tömegváltozásának a sebessége a t időpontban arányos a rádium t időpontbeli tömegével:

$$\frac{dm}{dt} = cm(t),$$

ahol a c arányossági tényező; $c < 0$, mert a rádium tömege fogy; $m(t)$ jelenti a rádium tömegét a t időpontban.

A tankönyv sajátossága, hogy igen részletes magyarázatot közöl a feladatok mellett. Jelen esetben a tankönyv a 2.2. Megjegyzésben ismertett „recept" alapján átrendezi az egyenlet, majd az egyenlet mindkét oldalának az integrálját veszi 0-tól t időpillanatig. Így eljutunk az általunk már jól ismert $m(t) = m_0 e^{ct}$ megoldásfüggvényhez, amelyet az alap tankönyvek is közöltek.

A korlátlan népességnövekedés modelljének differenciálegyenletét is megtaláljuk a tankönyvben egy baktériumok szaporodásával kapcsolatos feladat kapcsán.

4.8. Feladat. ([9], 270. oldal) Egy baktériumtenyészetben a baktériumok számának a növekedése egyenesen arányos a baktériumok számával. Ha a baktériumok száma 24 óra alatt $A > 0$-ról B-re növekedett, megállapítható-e, hogy hány baktérium volt az első 12 óra végén? (Egy közelítő modellt adunk, amelyben szereplő függvényről feltesszük, hogy differenciálható. Az ilyen függvények sok esetben egész értékűek lesznek, így modellünk várhatóan csak nagy számok esetén ad

jó közelítést!) Ha a t időpontban ($t \geq 0$) a baktériumok számát $x(t)$ jelöli, akkor a baktériumok számának növekedéséről kimondott törvényszerűség szerint

$$x' = kx,$$

ahol k valamilyen állandó; $k > 0$, ha $0 < A < B$, azaz a baktériumok száma növekszik.

A kezdetiérték-feladat megoldása során a tankönyv az előző példához hasonlóan jut el az $x(t) = x_0 e^{kt} = Ae^{kt}$ megoldásfüggvényhez. Majd az $x(24) = B$ kezdeti érték segítségével először meghatározza a k konstans értékét, mellyel felírható t időpillanatban a baktériumok mennyisége. Végül a $t = 12$ időpillanatban kiszámítja a számukat. Ezzel a feladattal rávilágíthatunk arra, hogy a populációk egyedszámának a változása az $x' = kx$ differenciálegyenlettel modellezhető, korlátlan növekedést feltételezve.

Érdekes megnézni, hogy a Newton-féle hűlési törvény az alap tankönyvhöz képest milyen formában jelenik meg ebben a speciális tankönyvben.

4.9. Feladat. ([9], 271. oldal) Egy lábasban 80 °C hőmérsékletű víz van. Kitesszük az erkélyre hűlni; 30 s múlva 40 °C; 60 s múlva 20 °C a víz hőmérséklete. Megállapítható-e ezekből az adatokból a külső levegő hőmérséklete?

Az előző két példánál látottak szerint itt is segít a tankönyv a modell felállításában, vagyis a differenciálegyenlet felírásában, méghozzá a következő módon:

„Ismeretes, hogy ha egy T_0 hőmérsékletű V testet egy T_1 hőmérsékletű V_1 közegbe helyezünk, akkor a V hőmérsékletének a változása arányos a $T_0 - T_1$ különbséggel. Feltesszük, hogy V_1 *sokkal nagyobb* V-nél, így V nem változtatja meg V_1 hőmérsékletét. Példánkban jelöljük $T(t)$-vel a víz hőmérsékletét a t időpontban, T_1 pedig legyen a külső hőmérséklet. A fizikai törvény alapján tudjuk, hogy

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_1),$$

ahol k arányossági tényező."

A feladat megoldásakor a tankönyvben azzal a gondolatmenettel találkozunk, hogy tekintsük először a kT_1 tagot 0-nak. Ekkor az előző példákhoz hasonlóan meg tudjuk oldani a differenciálegyenletet, és a t időpillanatban a hőmérsékletet a $T(t) = ce^{kt}$ függvénnyel tudjuk meghatározni. Itt jön a tankönyvtől az a gondolat, hogy adjunk hozzá a $T(t)$ függvényhez egy alkalmas állandót, melyről próbálkozással belátjuk, hogy ez nem más mint T_1. Így eljutunk a

$$T(t) = ce^{kt} + T_1$$

alakú megoldásfüggvényhez, azonban érezhetően ez nem egy precíz levezetés, amit a tankönyv is megjegyez.

A bevezető példákat egy elméleti összefoglaló követi, melyben a differenciálegyenletekkel kapcsolatos alapfogalmakról és elnevezésekről olvashatunk. Ezt követően elsőrendű közönséges differenciálegyenletekkel, majd pedig a szeparábilis egyenletekkel és azok megoldásaival foglalkozik a tankönyv. A dolgozatban nem említett további speciális alakú differenciálegyenletek is

előkerülnek, például a Bernoulli-féle differenciálegyenletről, valamint a Riccati-féle differenciálegyenletről ejt szót a tankönyv. A fejezet végén pedig az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek megoldásainak kérdésével találkozhatunk.

Összességében elmondható, hogy az Analízis II. című tankönyv a középiskolai kerettantervet messze meghaladó szinten tárgyalja a differenciálegyenletek témakörét, ugyanakkor „ebben a tankönyvben természetesen csak ismerkedni kezdünk a differenciálegyenletekkel", ahogy a könyvben olvasható.

4.3. Egy lehetséges szakköri tematikus terv

A következőkben egy 10 órás szakköri tematikus tervet mutatok be néhány egyszerű és a természeti folyamatok modellezésében is előforduló differenciálegyenlet lehetséges tanításáról. A szakkör ezen pár órájának célja az, hogy betekintést nyújtson a matematikai modellezés világába, illetve felkeltse a tanulók érdeklődését.

A legtöbb iskolában a differenciálszámításról 11. osztályban tanulnak a diákok, integrálszámításról pedig 12. évfolyamban hallanak. Az általunk elképzelt szakkör ezen okokból kifolyólag 12. évfolyamosoknak szól, és az említett témakörök (differenciál- és integrálszámítás) ismerete után foglalkozunk a differenciálegyenletek bevezető fejezeteivel.

A szakkörön tárgyalt témakörök kiválasztásánál a dolgozat korábbi fejezeteit vettem alapul, azon belül is az exponenciális függvényekre vezető differenciálegyenletekre koncentráltam. A dolgozat elején tárgyalt lehűlési modellel, valamint a populációs modellek közül a korlátlan és a korlátozott népességnövekedés modelljével foglalkozunk részletesebben az órák során, illetve említést teszünk a radioaktív bomlásról is. A feladatok kapcsán megismerkedünk a Maple nevű számítógépes programmal, mely segítségével függvényeket ábrázolunk és megtanuljuk, hogyan lehet differenciálegyenletek megoldásfüggvényeit számítógéppel felrajzolni a feladatok analitikus megoldása nélkül.

Minden szakköri foglalkozásnál megadtam, hogy mi az adott óra célja, továbbá azt is, hogy milyen munkaformában képzelem el a tanulás folyamatát, valamint azt, hogy milyen előzetes ismeretek szükségesek az óra megértéséhez. A tanulás során igyekeztem a tanulók digitális kompetenciájának fejlesztését is szem előtt tartani, ezért sok helyen törekedtem az információs-kommunikációs eszközök használatára.

1. óra: Tanulói kísérlet végzése: a víz hűlésének vizsgálata

Az óra célja: a víz hűlésének tanulmányozása tanulói kísérlet során.
Munkaforma: tanulói kísérlet csoportmunkában, számítógépes munka, közös megbeszélés.
Előzetes ismeretek: exponenciális függvény fogalma.

A tanórán a tanulók három fős csoportokat alkotva végezzenek kísérletet (azzal a feltételezéssel élve, hogy a szakkörön ehhez rendelkezésre áll elég eszköz). A diákok a hűtőbe tett víz hőmérsékletét mérjék meg, majd meghatározott időközönként jegyezzék fel a mért adatokat. Az egyik tanuló olvassa le a folyadékba tett hőmérőről a víz hőmérsékletét, másikuk jegyezze fel az adatokat, a harmadik diák pedig stopperóra segítségével mérje az időt.

A feljegyzett adatokat számítógéppel, az Excel program segítségével ábrázoljuk. A csoportok által készített görbéket vetítsük ki. Ezt követően közös gondolkodás útján jussunk el ahhoz a felfedezéshez, hogy a mérési pontok egy lehetséges exponenciális függvény grafikonjához hasonló görbére illeszkednek. Végül a program segítségével illesszünk függvényt a mérési pontokra.

Mindenképpen hangsúlyozzuk azt a tapasztalatot, hogy eleinte gyorsan csökken a folyadék hőmérséklete, majd a hűtő hőmérsékletéhez közeledve lassabban csökken a víz hőmérséklete.

Amennyiben a kísérlet tanórán történő elvégzése nem lehetséges, akkor természetesen a differenciálegyenletek témakörének megkezdése előtt otthoni szorgalmi feladatnak érdemes feladni a tanulóknak, hogy vizsgálják meg egy hűtőbe tett folyadék hőmérsékletének változását.

2. óra: Tanulói kísérlet kiértékelése, a víz hűlésének vizsgálata

Az óra célja: a derivált fogalmának átismétlése, modellalkotás, a Newton-féle lehűlési differenciálegyenlet felírása.
Munkaforma: közös megbeszélés.
Előzetes ismeretek: határérték, derivált, a derivált előjele és a függvény monotonitása közötti kapcsolat.

A tanóra kezdetén közösen beszéljük át a múlt órai kísérleti tapasztalatainkat. Ezt követően elevenítsük fel a derivált fogalmát a pillanatnyi sebesség segítségével, a szemléltetéshez célszerű egy *út-idő* grafikonhoz érintőt rajzolni.

Az ismétlés végeztével próbáljuk meg leírni a kísérleti tapasztaltainkat egy egyenlet segítségével. Jelöljük a megfigyelt, időben változó mennyiséget, a hőmérsékletet $T(t)$-vel. Emlékeztessük a diákokat, hogy eleinte gyorsan csökken a folyadék hőmérséklete, majd a hűtő hőmérsékletéhez közeledve lassabban csökken a víz hőmérséklete. Azaz a víz hűlési üteme, $T'(t)$, arányos a víz hőmérsékletének és a hűtő hőmérsékletének különbségével, $(T(t)-T_{\text{hűtő}})$-vel. Ezek alapján közösen írjuk fel a már korábban említett (1.2) Newton-féle lehűlési törvényt. A modell felírását követően a k arányossági tényező előjelét is megvitatjuk, mely során átismételjük a derivált előjele és a függvény monotonitása közötti kapcsolatot.

Végül nevezük meg, hogy az (1.2) egyenlet egy elsőrendű közönséges differenciálegyenlet. Ha időnk engedi, akkor beszéljünk a közönséges és elsőrendű fogalmakról.

3. óra: Az $x' = kx$ alakú differenciálegyenlet megoldása

Az óra célja: az $x' = kx$ alakú egyenlet megoldása, az 1.3. Tétel kimondása.
Munkaforma: közös gondolkodás, egyéni munka.
Előzetes ismeretek: összeg, szorzat, összetett függvény deriváltja.

A tanóra elején közösen elevenítsük fel a víz hűlési folyamatára felírt differenciálegyenletet. Célszerű didaktikailag áttérni az (1.2) jelölésről a differenciálegyenletnek $x' = kx$ alakban való felírására. Beszéljük meg, hogy ez nem befolyásolja a feladat megoldását.

Ezek után oldjuk meg a differenciálegyenletet az 1.3. fejezetben leírtak szerint. A közös gondolkodást kérdésekkel segítsünk, például: „Mit csinálunk az ismeretlenekkel egyenletek megoldásakor?” vagy „Mi az első lépés egyenletek megoldása során?” (Az ismeretlenek egy oldalra

történő rendezése).

A megoldás elősegítéséhez célszerű a következő alakban felírni az egyenletet:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{1}{x} \cdot x'(t) = k.$$

Ha további útmutatás szükséges, akkor a következő kérdést tehetjük fel: „Mely összetett függvény deriváltja áll az egyenlet bal oldalán?”. Ezt követően már könnyen el tudunk jutni az (1.3) megoldásfüggvényhez. Felmerülhet a kérdés, hogy van-e más megoldása a differenciálegyenletnek? Az 1.3. Tétel segítségével adjunk választ a kérdésre, hogy nincs.

A tétel bizonyítása a következő szakkörön történik. Szorgalmi feladatnak (némi útmutatással) feladhatjuk, hogy a diákok otthon próbálkozzanak a bizonyítással.

4. óra: Az 1.3. Tétel bizonyítása

Az óra célja: az 1.3. Tétel bizonyítása, kezdeti érték fogalmának megismerése.
Munkaforma: közös gondolkodás.
Előzetes ismeretek: szorzat deriváltja.

Közösen elevenítsük fel, hogy az $x' = kx$ alakú differenciálegyenlet megoldását az (1.3) alakú függvények adják. Próbáljuk meg rávezetni a diákokat, hogy ők bizonyítsák a tételt. Ehhez segítségül mondjuk el, hogy a tételt két lépésben célszerű bizonyítani:

1. lássuk be, hogy az (1.3) alakú függvények mind megoldások,
2. csak ezek az (1.3) alakú függvények megoldások.

A második lépéshez megadhatjuk segítségül, hogy a tanulók az $(x(t) \cdot e^{-kt})'$ szorzatfüggvény deriváltját vizsgálják.

A szakkör második felében a megoldásfüggvénybe a $t = 0$ időpontot behelyettesítve vezessük be a kezdeti érték fogalmát. Ezzel készítsük elő a következő óra célját, az (1.3) megoldások ábrázolását $k > 0$, valamint $k < 0$ esetén.

5. óra: Függvényábrázolás a Maple programmal

Az óra célja: ismerkedés a Maple programmal, az $x' = kx$ differenciálegyenlet megoldásfüggvényeinek ábrázolása a Maple program segítségével.
Munkaforma: megbeszélés, számítógépes munka (informatikaterem).

Röviden beszéljünk arról, hogy a Maple program kiváló szimbolikus (tehát képletekkel történő) számítások végzéséhez, illetve nagyon jól tudunk vele matematikai objektumokat ábrázolni. Említsük meg a diákoknak a [6] könyvet, melyben külön fejezet található a Maple programról.

Először nézzük meg a *Segítség* menüpontot, mely ugyan angol nyelvű, de kis nyelvtudással nagy hasznunkra válhat, mert rengeteg konkrét példát tartalmaz. Írjuk a *plot* (ábrázolás) parancsot a keresőbe, ezáltal rögtön kiváló példákat találunk függvényábrázolásra. Néhány példa közös kipróbálása után a diákok önállóan ábrázolják néhány konkrét függvény grafikonját megadott intervallumokon. Közben érdemes megmutatni nekik, hogyan módosítható a függvénygrafikonok színe, a tengelyek beosztása, valamint hogyan lehet elnevezni az x és y tengelyeket.

Az alapismeretek után elevenítsük fel az $x' = kx$ differenciálegyenlet megoldásfüggvényeit, majd ábrázoljuk ezeket $k > 0$ és $k < 0$ esetekben. Az ábrák készítéséhez a megoldásfüggvények explicit alakját írjuk a parancssorba, ahol rögzítsük k értékét, és a kezdeti értéket változtatassuk. Legyen feladat a tengelyek elnevezése is. Biztassuk a diákokat, hogy szabadon kísérletezzenek a programmal, állítsák be a grafikonok színeit, készítsenek feliratot az ábrára.

Az egyéni munkát követően mutassuk meg, hogy a megoldásgörbéknek létezik más felrajzolási módja is, méghozzá elegendő a differenciálegyenletet és a kezdeti értékeket megadni. Ehhez a *DEplot* parancsot használhatjuk.

A szakkör végén foglaljuk össze a megoldásfüggvények viselkedését az (1.3) fejezetben leírtakhoz hasonlóan.

6–7. óra: Sherlock Holmes-féle hűlési folyamat

Az óra célja: a Sherlock Holmes-féle kezdetérték-feladat megoldása, „recept” ismertetése, feladatmegoldás.
Munkaforma: közös gondolkodás, egyéni munka.
Előzetes ismeretek: a hűlési differenciálegyenlet megoldásfüggvénye, integrálás.

A tanórán ismertessük a dolgozatban már korábban bemutatott 1.5. Feladatot, melyet közösen oldjunk meg az 1.5. fejezetben leírtak szerint. A lehűlési modell $T(t) = Ce^{kt} + T_{\text{levegő}}$ alakú megoldásfüggvényeinek felelevenítése után, a k és C konstans értékek meghatározásánál beszéljünk a mellékfeltétel fogalmáról.

A kezdetiérték-feladat megoldását követően ismertessük a dolgozatban már említett, radioaktív bomlással kapcsolatos 4.7. Feladatot. A feladattal mutassuk meg a 2.2. Megjegyzésben szereplő „receptet”, mely segítségével speciális alakú (szeparábilis) differenciálegyenleteket meg tudunk oldani.

Kérjük meg a diákokat, hogy a következő alkalommal tartsanak egy rövid kiselőadást a radioaktív kormeghatározásról. A projekthez adjunk segítséget, többek között mutassuk meg az OFI honlapján elérhető ezzel kapcsolatos segédanyagot ([7]), valamint javasoljuk, hogy a kiselőadásban legyen szó a radioaktív bomlások fajtáiról, a régészeti leletek életkorának megállapításáról. A diákok említést tehetnek arról is, hogyan lehet hamis festményeket leleplezni, mesélhetnek Han van Meegeren (1889–1947) híres képhamisításairól.

A szakkör végén beszéljünk arról, hogy nem minden kezdetiérték-feladatnak van megoldása, nézzük meg közösen például a dolgozatban tárgyalt 2.3. Feladatot, valamint arról, hogy léteznek olyan differenciálegyenletek, melyeknek megoldását nem tudjuk explicit képlettel megadni.

Házi feladatként adjuk fel a 4.8. Feladatot a diákoknak, mely segítségével előkészítjük a populációs modellek, a népességnövekedés kérdését.

8–9. óra: Radioaktivitás és népességnövekedés

Az óra célja: a radioaktív kormeghatározás megismerése, a korlátlan népességnövekedés modelljének felírása, a modell realitásának vizsgálata.
Munkaforma: kiselőadás, közös megbeszélés, egyéni gondolkodás.

Az óra kezdetén hallgassuk meg a diákok által készített kiselőadásokat, valamint ellenőrizzük a házi feladatot.

A továbbiakban a korlátozott népességnövekedés modelljéről beszélgetünk a tanulókkal. Keressünk telefon segítségével a Föld népességszámának változását ábrázoló függvényeket, majd ezt követően a diákok próbáljanak meg felírni egy lehetséges népességnövekedési modellt. Ezt követően beszéljünk a korlátlan népességnövekedés modelljéről, írjuk fel az $x' = kx$ alakú differenciálegyenletet.

Végül a matematikai modellezés korlátairól legyen szó. Vizsgáljuk meg a tanulókkal közösen, hogy mennyire reális a korlátlan népességnövekedés modellje. A differenciálegyenlet megoldásfüggvényének explicit alakját megvizsgálva nézzük meg, hogy mit mond a modell a népességszám jövőbeni alakulásáról. A dolgozatban bemutatott 2.1. gondolatkísérletet végezzük el az órán, majd a diákoknak önálló munkára adjuk fel, hogy becsüljék meg, mekkora terület jut egy embernek a Földön 2700-ra, ha a korlátlan növekedési modellt feltételeznénk. Az óra végén modellezhetjük a diákokkal a kiszámított értéket, állítsuk őket egy 40 cm $\times$ 40 cm-es négyzetekre. Vonjuk le azt a következtetést, hogy a modellünket pontosítani kell.

10. óra: a korlátozott népességnövekedés modellje

Az óra célja: a korlátozott népességnövekedés modelljének felírása és a megoldásfüggvényeinek megbeszélése.
Munkaforma: közös megbeszélés.
Előzetes ismeretek: a derivált és a monotonitás közötti kapcsolat.

Az óra kezdetén elevenítsük fel az előző tanórát, közösen gondoljuk végig, hogy milyen tényezőket kell figyelembe vennünk (pl. véges a víz- és energiakészletünk, a szárazföld területe) a korlátlan népességnövekedési modell módosításakor, majd írjuk fel a korlátozott növekedési modell differenciálegyenletét. Tegyünk említést Pierre François Verhulst munkásságáról, aki Belgium népességét vizsgálta az 1800-as években.

Ezt követően a kapott korlátozott növekedési modell számítógéppel készített megoldásfüggvényeinek grafikonjait vizsgáljuk a 2.2.3. fejezetben leírtak szerint. Azt az észrevételt hagsúlyozzuk ki, hogy a megoldásgörbék a K eltartóképességhez tartanak. Ezek után függvényvizsgálattal, illetve a deriváltak és a függvény monotonitása közötti kapcsolat segítségével indokoljuk meg, hogy a különböző kezdeti értékek függvényében hogyan viselkednek a megoldásfüggvények.

A korlátozott népességnövekedés modellnél is beszéljük meg a diákokkal a modell realitását. Végül nézzük meg számítógépen, vagy akár telefonon az ENSZ által készített előrejelzéseket. Ha marad időnk, akkor nemcsak a Föld teljes lakosságára vonatkozó előrejelzést érdemes megnézni, hanem a különböző országok lehetséges népességszámának alakulását is megvizsgálhatjuk, köztük Magyarországét is.

Irodalomjegyzék

[1] Besenyei Ádám: Sherlock Holmes és a Coolbody-eset, KöMal Ankét, 2018.
`http://abesenyei.web.elte.hu/publications/coolbody.pdf`
(Utolsó megnyitás: 2019.08.10.)

[2] Besenyei Ádám – Csomós Petra: Tavirózsák, cápák és gyerekek – avagy népességnövekedés matematikus szemmel, Kutatók éjszakája, 2017.
`http://abesenyei.web.elte.hu/publications/tavirozsak.pdf`
(Utolsó megnyitás: 2019.08.10.)

[3] Besenyei Ádám: A királylány és a lovagok, KöMal Ankét, 2017.
`http://abesenyei.web.elte.hu/publications/kiralylany.pdf`
(Utolsó megnyitás: 2019.08.10.)

[4] Hatvani László – Pintér Lajos: Differenciálegyenletes modellek a középiskolában, Polygon, Szeged, 1997.

[5] Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Sokszínű matematika 11, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[6] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: Valós analízis 1–2., Typotex, Budapest, 2012–2013.

[7] Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet: Modell és valóság, oktatási segédanyag
`https://player.nkp.hu/play/49811/false/undefined`
(Utolsó megnyitás 2019.09.06.)

[8] Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet: Matematika 11 (újgenerációs tankönyv), 2018.
`http://tankonyvkatalogus.hu/pdf/FI-503011101_1__teljes.pdf`
(Utolsó megnyitás 2019.08.16.)

[9] Pintér Lajos: Analízis II., Typotex, Budapest, 2002.

[10] Peter J. Olver: Nonlinear Ordinary Differential Equations, online lecture notes, 2012.
`http://www-users.math.umn.edu/~olver/ln_/odq.pdf`
(Utolsó megnyitás: 2019.08.10.)

[11] Schlegl István – Trembeczki Csaba: Sokszínű matematika, Az analízis elemei, 11–12. osztály, emelt szint, Mozaik Kiadó, Szeged, 2012.

[12] A Föld népessége 1804 és 2019 között
https://www.worldometers.info/world-population/world-population-by-year/
(Utolsó megnyitás: 2019.08.10.)

[13] A világ népességének lehetséges alakulása
https://population.un.org/wpp/Graphs/Probabilistic/POP/TOT/900
(Utolsó megnyitás: 2019.08.10.)

[14] Kerettanterv a gimnázium 9–12. évfolyama számára
http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html
(Utolsó megnyitás: 2019.08.15.)