EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi Kar

Szakdolgozat

Élmények az analízis oktatásában

Experiences in Mathematical Analysis Education

Témavezető:

Dr. Varga Eszter
mesteroktató

Készítette:

Török Emese
osztatlan tanárképzés
matematikatanár – fizikatanár

2025

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **4**

2. A matematikai analízis megjelenése a történelemben **5**
2.1. A matematikai analízis fogalma 5
2.2. Ókor 5
2.3. Középkor 6
2.4. Újkor 7

3. Analízis az oktatásban **10**
3.1. Általános iskolában 11
3.1.1. Az alsó tagozaton 11
3.1.2. A felső tagozaton 12
3.2. Középiskolában 13
3.2.1. Általános tantervű középiskolában 13
3.2.2. Speciális matematika tagozaton 15
3.2.3. Az emelt matematika érettségin 16
3.3. Egyetemen 16
3.3.1. Az ELTE matematikatanár-képzésében 17
3.3.2. A Bevezető analízis 2 részletesebb tárgyalása 19

4. A matematikaoktatásban alkalmazott tanári tudásmodellek **20**

5. Differenciálás és értékelés egyetemen **23**
5.1. Kártyajátékok a felsőoktatásban 23
5.2. Értékelés analízis gyakorlaton 24
5.3. Differenciálás analízis gyakorlaton 25
5.4. IKT eszközök használata az órán – Plickers 25

6. A gyakorlatokon előforduló feladatok elemzése **28**
6.1. Matematikai logika 28
6.2. Mit jelentenek a formulák? 30
6.3. Hibakeresős feladatok 34
6.4. Fizikával kapcsolatos feladatok 37
6.5. Geometriai feladat 41
6.6. Matematikai indukció 44
6.7. Állítások logikai kapcsolata 48
6.8. Sorozatok versenyfutása 50
6.9. Határérték 53
6.10. Halmaz eleme és részhalmaza 55

6.11. +1 érdekes feladat 56

7. Hallgatói vélemények, kérdőív eredménye **58**

7.1. Az 1-12. kérdésre adott válaszok elemzése 58

7.2. A 13-14. kérdésre adott válaszok elemzése 63

7.3. A 15-22. kérdésre adott válaszok elemzése 64

8. Reflexió a gyakorlatvezetői tapasztalatokról és a tudásfejlődésről **67**

9. Összegzés **69**

1. Bevezetés

A szakdolgozatom témaválasztását alapvetően két tényező határozta meg: egyrészt szempont volt számomra, hogy a már meglévő gyakorlati tapasztalataimat felhasználjam, másrészt szerettem volna Dr. Varga Eszter témavezetésével dolgozni, mert szakmailag motiválóak voltak számomra azok a gyakorlatok, amelyeket ő tartott az egyetemi éveim alatt. Kutatási területei közé tartoznak a matematika tanítás tudásterületei, így ezt kapcsoltam össze azzal a területtel, amelyben nekem van közel egy éves tapasztalatom, az analízis gyakorlatvezetéssel. Kezdetben az egyik *Bevezető analízis 2* kurzust tartottam elsőéves matematikatanár szakos hallgatóknak, majd ezt követően az *Egyváltozós analízis 1* kurzus oktatásában vettem részt ugyanezen évfolyam számára, jelenleg pedig, 2025 tavaszán, az egyik *Egyváltozós analízis 2* gyakorlati kurzust vezetem. Mivel a dolgozatnak ősszel kezdtem neki, és már egy félév tapasztalatainak a feldolgozását is elegendőnek ítéltem, ezért az *Egyváltozós analízisen* előjött feladatokat, értékelési rendszert és más hasonló témákat a dolgozatban nem érintek.

A dolgozat szerkezetileg több egységből épül fel. Kezdetben rövid történeti áttekintést adok az analízis fejlődéséről, ezután kitérek arra, hogy az analízis hogyan jelenik meg a közoktatásban, milyen témakörökben van jelen, és az általános iskolának milyen szerepe van a későbbi sikeres analízis tanulmányainkban. Ezt követően az ELTÉ-n levő tanárképzés analízis oktatásának bemutatása következik, ahol különös hangsúlyt fektetek a *Bevezető analízis 2* kurzus részletesebb ismertetésére, hiszen ez képzi a saját gyakorlatvezetési tapasztalataim kiindulópontját.
Ezt követi a témavezetőm segítségével megismert tudásterület-modell bemutatása, amely nélkülözhetetlen a dolgozatban, hiszen ezek az elméleti keretek szükségesek a gyakorlati tapasztalatok értelmezéséhez. A differenciált oktatásának gyakorlati megvalósulására külön fejezetet szentelek, ahol egy miskolci egyetemi kutatás eredményeire támaszkodva bemutatom, hogyan lehet innovatív módszereket, például kártyajátékokat alkalmazni a felsőoktatásban. Ezen túlmenően részletesen foglalkozom a Plickers oktatási eszköz saját gyakorlatban történt alkalmazásával, amely interaktívabbá tette az oktatási folyamatot.
A dolgozat legnagyobb terjedelmű része a gyakorlatokon előforduló feladatok részletes elemzése. Itt nem pusztán a matematikai problémák megoldási módszereire fókuszálok, hanem arra is, hogy a hallgatókban mely tudásterületek fejlődtek a feladatok megoldása során, valamint saját gondolataimat és tapasztalataimat is megosztom a feladatok kapcsán.

Végül a dolgozatban elemzem a hallgatók által adott visszajelzéseket, amelyek alapján következtetéseket vonhatunk le a gyakorlatok hatékonyságáról és fejlesztési lehetőségeiről. A zárófejezetben pedig összefoglalom, hogy a gyakorlatvezetés során milyen matematikatanári tudásterületeken sikerült fejlődnöm, és milyen új készségekre tettem szert az oktatói munka során.

2. A matematikai analízis megjelenése a történelemben

2.1. A matematikai analízis fogalma

A dolgozat elején fontos tisztáznunk, hogy mit értünk matematikai analízis alatt, hiszen a későbbiekben bemutatott feladatok és elemzések mind ezen témakörhöz kapcsolódnak. Az analízis a matematika egyik jelentős részterülete, amely a végtelenül kicsi mennyiségek, vagyis az infinitezimális számítások vizsgálatára épül. Ez a terület szorosan kapcsolódik olyan alapfogalmakhoz, mint a függvény, határérték, folytonosság, differenciálhányados, integrál, sorozat és végtelen sor. Ezeken túlmenően az analízis olyan témaköröket is érint, mint a differenciálegyenlet, integrálegyenlet, függvényegyenlet, komplex függvény, funkcionálanalízis, variációszámítás, disztribúcióelmélet, potenciálelmélet, metrikus tér és mértékelmélet. Az analízis ezekkel az eszközökkel nemcsak az elméleti matematika alapvető része, hanem a gyakorlatban, természettudományokban is széles körben alkalmazható problémák megoldására.[Sán21]
Azonban a fent említett témakörök felvezetéséhez és megértéséhez elengedhetetlen, hogy egy analízissel ismerkedő tanuló a logika, a halmazelméleti alapok, illetve a valós számok témakörét alaposan megismerje. A dolgozatban később részletesen foglalkozom a *Bevezető analízis* gyakorlaton tárgyalt feladatokkal, melyek közül sok ezeket a témákat dolgozza fel. Ez nem meglepő, hiszen a tárgy neve is utal arra, hogy az a komolyabb szintű analízis felvezetésre szolgál.

2.2. Ókor

A matematikai analízis gyökerei az ókorig nyúlnak vissza, amikor a görögök és más civilizációk elkezdték vizsgálni a végtelen kicsi mennyiségeket és a határértékeket geometriai és aritmetikai eszközökkel. Az ókori görög matematika meghatározó alakjai, például Eudoxosz, Eukleidész és Arkhimédész, olyan elveket dolgoztak ki, amelyek később az analízis fejlődésének alapját képezték.
Eudoxosz nevéhez köthető az úgynevezett *„kimerítés" módszere*, mely egy olyan indirekt bizonyítási eljárás, amellyel például síkidomok területét, testek térfogatát, görbe vonalak hosszúságát vagy görbékhez húzott érintőket tudunk meghatározni. Eudoxosz például ezzel a módszerrel mutatta meg, hogy két kör területe úgy aránylik egymáshoz, mint átmérőik négyzete.
Arkhimédészhez a mai analízis alapjainak megteremtését köthetjük. Leibniz, a mai differenciál- és integrálszámítás atyja így nyilatkozott róla: „Arkhimédész munkáit tanulmányozva, nem fogod csodálni a mai matematikusok sikereit." Arkhimédész többek között elkészítette az első ismert összegzését egy végtelen sorozatnak, olyan módszerrel, amelyet ma is használunk, valamint a kimerítés módszerével és egy végtelen sorozat összegzésével kiszámította a parabola íve alatti területet, és rendkívül pontos adott közelítést a π értékére. [Món10]

Az i. e. 5. századi görög társadalmi változások, különösen a szellemi szabadság és a tudományok fejlődése, megteremtették a feltételeit a matematika tudománnyá válásának. A görög gondolkodók célja a világ, jelenségek, és saját maguk megértése volt, ami hozzájárult a természettudományok és a matematika, ezen belül pedig az analízis alapjainak lefektetéséhez. A matematikai elméletek fejlődésével egyre inkább előtérbe kerültek olyan problémák, amelyek rávilágítottak arra, – pl. Zénón paradoxonjain keresztül – hogy a végtelen kicsi és a végtelen nagy fogalma tisztázásra szorul, ami az analízis későbbi fejlődése szempontjából meghatározó jelentőségű volt.[Món10]
Zénón első két paradoxonja – melyek nagyon hasonlítanak egymásra – széles körben ismertek napjainkban is. Az első *felezési paradoxon* néven terjedt el és a lényege, hogy egy nyílvessző soha nem érheti el a céltáblát, mivel az odavezető út során először meg kell tennie az össztávolság felét, majd a fennmaradó távolság felét, ezt követően ismét a hátralévő rész felét, és így tovább a végtelenségig. Mivel ez a folyamat soha nem fejeződik be, a nyílvessző és a céltábla közötti távolság soha nem csökken nullára, vagyis a nyíl elméletileg nem érheti el célját. A másik paradoxon *Akhilleusz és a teknős* nevet kapta és a lényege, hogy a leggyorsabb görög harcos soha nem képes utolérni a nála sokkal lassabb teknőst, ha előnyt ad neki. Ahhoz, hogy Akhilleusz elérje a teknős indulási helyét, először meg kell tennie az előnyt biztosító távolságot. Ez idő alatt azonban a teknős továbbhalad, így Akhilleusznak egy újabb, immár rövidebb távot kell leküzdenie. Mire ezt is megteszi, a teknős ismét előrébb kerül. Ez a folyamat a végtelenségig ismétlődik, hiszen minden egyes szakasz megtétele után a teknős még mindig egy kis előnnyel rendelkezik. Ebből az következik, hogy Akhilleusz elvileg soha nem éri utol a teknőst, és így a megelőzése sem történhet meg. Vagyis a paradoxon szerint, ha Akhilleusz előnyt ad a teknősnek, akkor az állat nyeri a versenyt.[Ger21]
Ezen paradoxonok manapság is előkerülnek, akár iskolai környezetben, és a feloldásukat az analízisen tanult határérték fogalma adja, amely az ókorban még nem volt ismert.

2.3. Középkor

A középkor matematikája ugyan nem hozott drasztikus áttöréseket az analízis területén, mégis fontos szerepet játszott a későbbi tudományos fejlődésben. Ez az időszak nagy jelentőséggel bírt a ma használt négy alapművelet elvégzésének kialakításában. Ekkor jelent meg ugyanis Európában is, az Indiában kidolgozott tízes helyi-értékes rendszer, továbbá az arab tudósok által alkalmazott arab számok és számolási eljárások.
A középkorban a számok ábrázolása ujjak segítségével egy Benedek-rendi szerzetestől, Szent Bédától származik. A módszerét leírta *Az idő számításáról (De temporum ratione)* című munkájában. Ez a rendszer lehetővé teszi a két kézzel való számolást 9999-ig, de 100 felett már nem egyszerű. [Ist18]
Bár ezt az időszakot gyakran a „sötét középkor” néven emlegetik, a tudományok, így a matematika is, lassan, de folyamatosan fejlődtek. A 11. századtól kezdődően a városok és falvak

fejlődésével, valamint a mezőgazdasági és technikai újítások hatásával és a papír megjelenésével egyre nagyobb tér nyílt az ismeretek terjesztésére. Azonban a tudomány kibontakozását kezdetben akadályozta az egyház jelentős befolyása és a skolasztika filozófiai rendszere, amely sokáig elzárkózott az ókori tudományoktól. Emellett a latin, mint tudományos nyelv, szintén nehézséget okozott, hiszen az antik művek elérhetősége a fordítások hiánya miatt erősen korlátozott volt.[Món10]

A matematika fokozatos térhódítása az oktatási intézmények, különösen az első egyetemek megalakulásával indult meg, ahol a hét szabad művészet részeként kezdték tanítani. A 13. században már érzékelhető volt a tudományos gondolkodás megújulása, amit többek között Roger Bacon kritikái és Leonardo Pisano (Fibonacci) munkássága is elősegített. Fibonacci Euklidész és Arkhimédész eredményeit dolgozta fel és terjesztette el, ami hozzájárult az ókori matematikai tudás újbóli felfedezéséhez. Ezzel párhuzamosan egyre több klasszikus tudományos mű vált elérhetővé fordítások révén, lehetővé téve a matematikai ismeretek szélesebb körű terjedését. Bár a középkorban nem történt forradalmi változás a matematika területén, mégis fontos előkészítő szerepet játszott a későbbi fejlődésben. Az olyan fogalmak, mint a hatványozás és a számfogalom általánosítása, valós számok, valamint a logaritmus előzményeinek megjelenése, már az újkori matematikai gondolkodás irányába mutattak. A 15. század közepén a könyvnyomtatás feltalálása (Gutenberg, 1440 körül), a reneszánsz hatásai és a nagy földrajzi felfedezések mind hozzájárultak ahhoz, hogy a matematika, és ezen belül az analízis, az újkorban gyors fejlődésnek induljon. [Món10]

2.4. Újkor

A 17–18. században a tudományok és a matematika fejlődése szorosan összefüggött a korszak társadalmi és gazdasági változásaival, valamint a filozófiai gondolkodás új irányzataival. A reneszánsz statikus világképét felváltotta a dinamikusabb barokk, és ezzel párhuzamosan kibontakozott a racionalizmus, melynek követői nem a tapasztalatból való megismerést vették alapul, hanem az általános elméleteket és ezekkel magyarázták a jelenségeket. A racionalisták filozófiája szerint a megismeréshez az út a gondolkodáson keresztül vezet. Ebben az időszakban a matematikai felfedezések gyakran filozófiai háttérrel is rendelkeztek, hiszen olyan tudósok, mint Descartes, Pascal, Newton és Leibniz, egyszerre voltak filozófusok és matematikusok. Ekkoriban nem csak a matematikusok tettek új felfedezéseket, hanem létrejöttek az első tudományos akadémiák, például 1662-ben a legrégebbi angol Royal Society és 1666-ban a párizsi akadémia, amelyek állami támogatással működtek és lehetőséget biztosítottak a kutatások előmozdítására.[Món10]

A korszakban megjelentek az első tudományos folyóiratok is, amelyek segítették az ismeretek gyorsabb terjedését. Ilyen volt az 1665-től kiadott *Philosophical Transactions* Londonban, a párizsi *Journal des Savants*, valamint Leibniz 1682-ben indított *Acta Eruditorum* című folyóirata. Ezek a kiadványok hozzájárultak ahhoz, hogy a matematikai eredmények széle-

sebb körben ismertek legyenek, és a tudósok közötti kapcsolattartás hatékonyabbá váljon. [Món10]

A 17. század matematikai forradalmát az jellemezte, hogy az addigi statikus megközelítés helyett a mozgás és változás került a középpontba. Ennek eredményeként alakult ki a változó mennyiségek matematikája, amely az analízis későbbi fejlődésének alapjául szolgált. A differenciál- és integrálszámítás kialakulása volt a 17. század talán legnagyobb felfedezése, amely nemcsak matematikai elméletként volt fontos, hanem a mechanika, csillagászat és fizika fejlődéséhez is nélkülözhetetlen eszközt jelentett, olyannyira, hogy ezen tudományágak szükségletei miatt jelent meg. A tudományos igények, valamint a természeti jelenségek pontosabb leírásának szükségessége vezetett el az új matematikai fogalmak és módszerek létrejöttéhez.A 17. század végén jelent meg a végtelen kicsiny mennyiségek fogalma, amely a matematika egyik legjelentősebb fejlődési szakaszát hozta el. Az analízis ekkor vált az egész matematika meghatározó elemévé, hiszen a változó, és végtelen kicsiny mennyiségek vizsgálata került a középpontba. Az új analízis elemei már korábban is jelen voltak a matematikában, ám ebben a korszakban fogalmazták meg azokat olyan módon, hogy az addig különálló problémák egységes elméletté álljanak össze. Ennek egyik eredménye volt a határozott integrál fogalmának kialakulása, amely lehetővé tette bármely síkidom területének és test térfogatának általános meghatározását. Ez a módszertani áttörés forradalmasította a matematikát és hozzájárult az analízis önálló területté válásához. [Món10]

Az ekkor születő differenciál- és integrálszámítás alapvetően két kiemelkedő tudós, Isaac Newton és Gottfried Wilhelm Leibniz munkájához köthető. Bár mindketten egymástól függetlenül dolgozták ki az analízis módszereit, felfedezésük elsőbbsége körül hosszú ideig tartó vita bontakozott ki, amely különösen az angol matematikában okozott komoly feszültségeket. A differenciál- és integrálszámítás történetének vizsgálata során azonban világosan látható, hogy ez a tudományág nem egyetlen (vagy két) személy érdeme, hanem több korábbi matematikus munkásságának eredménye. A teljesség igénye nélkül megemlítek pár tudóst, akik hozzájárultak a kalkulus fejlődéséhez. Gregory of Saint Vincent, belga matematikus, Cavalieri módszereitől függetlenül, egyidejűleg dolgozta ki az oszthatatlanok elvén alapuló terület- és térfogatszámítást; Paul Guldin, svájci matematikus Papposz munkásságát felhasználva dolgozta ki a forgástestek térfogatának meghatározására szolgáló tételt; Andreas Tacquet szintén jelentős eredményeket ért el az infinitezimális számítás területén, hasonlóan Torricellihez. További kiemelkedő matematikusok közé tartozik William Neil, Heinrich van Heuraet és Christopher Wren, akik a görbék ívhosszának meghatározásában értek el fontos eredményeket. Florimond De Beaune hívta fel a figyelmet az érintőfeladatok megfordításának jelentőségére, ezzel hozzájárulva a differenciálegyenletek fejlődéséhez; valamint Christiaan Huygens is szintén kulcsszerepet játszott az érintő- és szélsőérték-feladatok megoldásában. [Már86]

Newton a fluxióelméletét (a mai differenciálszámítás elődjét) 1665 körül kezdte használni fizikai és csillagászati kutatásaiban, de sokáig nem publikálta, mivel nem tartotta logikailag

teljesen megalapozottnak. Newton a matematikai apparátusát fizikai folyamatok modellezésére használta, amelyben az időbeli változásokat „fluenseknek” nevezte el, és a „fluxió” volt a differenciálhányados megfelelője. [Már86]

Leibniz eltérő megközelítésből érkezett az analízishez, filozófiai és kombinatorikai érdeklődése mellett kezdett el vele foglalkozni. Párizsban, Huygens hatására mélyült el az analízisben, és igyekezett egy egységes jelölési rendszert kialakítani. Munkájáról először az 1684-ben megjelent *Acta Eruditorumban* számolt be, ahol egy új módszerként mutatta be eredményeit a maximumok, minimumok és érintők meghatározására. Leibniz számítási módszereit azonban sokan nehezen értették meg, köztük a Bernoulli testvérek is.
Leibniz számára nehézséget jelentett, hogy nem rendelkezett határérték-definícióval, így sokszor analógiákra és hasonlatokra hagyatkozott. A mozgás elemzésében például a mozgás útját egy vonallal ábrázolta, a sebességet pedig egy ehhez képest végtelen kicsiny szakasszal, a gyorsulást pedig kétszeresen végtelen kicsiny vonallal.
Newton és Leibniz is végül megállapította, hogy a differenciálszámítás és annak inverz művelete felhasználható a határozott integrál kiszámítására, éppen ezért ezt a tételt ma Newton–Leibniz-tételként ismerjük.
Azonban a közöttük fellángolt prioritási vita teljesen értelmetlen volt, amelyet főként követőik gerjesztettek. Az angol matematikusok ennek hatására és Newton iránti elfogultságuk miatt sokáig nem vették át Leibniz jelölésrendszerét, amely akadályozta a matematika fejlődését Angliában. [Már86]

A 18. század során az analízis klasszikus keretei között kialakultak olyan új részterületek, amelyek fokozatosan önálló tudományterületté fejlődtek. Ide sorolható a differenciálegyenletek elmélete, az analízis geometriai alkalmazásai, a sorelmélet és a variációszámítás.
Az analízis teljes kibontakozása hosszú folyamat volt, amely közel 200 évet vett igénybe. Bár Newton és Leibniz lefektették az analízis alapjait, a tudományágban még hosszú ideig nem volt teljesen világosan megfogalmazott fogalmi és logikai rendszer. A matematikailag precíz formájának kialakulására egészen a 19. század második feléig várni kellett, azonban már a 18. század folyamán is voltak olyan kiemelkedő matematikusok, akik jelentősen hozzájárultak az analízis fejlődéséhez és megalapozták a későbbi eredményeket. Brook Taylor, a Bernoulli család tagjai, L’Hospital, Euler és D’Alembert mind olyan tudósok voltak, akik Newton és Leibniz után új szintre emelték az analízist. Őket követve Lagrange, Fourier, Laplace, valamint a 19. századba átnyúló korszak matematikusai, mint Dirichlet, Bolzano és Cauchy. [Món10]

3. Analízis az oktatásban

A matematikai analízis történeti fejlődése is jól mutatja, hogy az analízis a matematika egyik legnehezebb területe. Maga a tudományos közösség is sokáig bizonytalan volt bizonyos fogalmak pontos meghatározásában, és a fejlődés során számos elméleti zsákutca vagy hiányosság is megfigyelhető volt. Ezt az analízis tanításakor sem szabad elfelejtenünk.
Mindezek fényében érthető, hogy az analízis elsősorban a felsőoktatásban kap hangsúlyt. Ugyanakkor komoly pedagógiai kérdés, hogy miként lehet a tudományos szintű ismereteket a középiskolai oktatásba átültetni – milyen mélységben, milyen módszerekkel, és milyen célközönség számára. A mai napig megoszlanak a vélemények arról, hogy milyen arányban szükséges az elméleti háttér bemutatása, illetve mennyire érdemes a gyakorlati alkalmazásokra helyezni a hangsúlyt. Emellett kérdésként merül fel az is, hogy a középiskolai fizikatanítás milyen mértékben támaszkodik az analízis ismereteire, és mennyire indokolt ezek integrálása a matematikaórák keretén belül – akár modern informatikai eszközök segítségével is. [Sán21]

Az analízis oktatásának kérdésköre már a 19. századtól kezdve foglalkoztatta a magyar matematikai közélet szereplőit. Teljesség igénye nélkül érdemes megemlíteni néhány kiemelkedő személyiséget, akik jelentős hatással voltak az analízis tanításának alakulására, és aktívan részt vettek az ezzel kapcsolatos szakmai vitákban is. Közéjük tartozik Bolyai Farkas és Beke Manó. Utóbbi kezdeményezésére jött létre 1906-ban a *Magyar Matematikai Reformbizottság*, amelynek elnöki tisztét ő töltötte be, titkára pedig Mikola Sándor akadémikus, fizikatanár volt. A bizottság tagjai között szerepelt Rátz László is, a Fasori Evangélikus Gimnázium legendás hírű matematikatanára.
Az analízis középiskolai tanításának kérdése a későbbiekben is élénk szakmai diskurzus tárgyát képezte. Ezt jól példázza Alexits György írása is, amely a *Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok* 1943-as évfolyamának 5. számában jelent meg *„Tanítsuk-e az analízist a középiskolában?”* címmel. A korszak legjobb középiskolai matematika tankönyveinek szerzője Veress Pál volt, ezek az 1940-es években kerültek használatba. A tankönyvsorozatot Barra György részletesen elemezte *A mennyiségtan tanítása* című, 1943-ban megjelent szakmódszertani művében. [Sán21]
Bár az analízis oktatásának „helyes” módja kapcsán a mai napig megoszlanak a vélemények, azt szeretném bemutatni, hogy napjainkban milyen formában van jelen az analízis a magyar oktatásban.

A következőkben az Oktatási hivatal oldalán található 2020-as kerettantervek alapján mutatom be, hogy az egyes korosztályok számára milyen formában kerül elő az analízis a matematikaóra keretein belül. Hiszen kiemelten fontos, hogy a tanároknak egészen alsó tagozattól kezdődően meg kell alapozniuk a diákok későbbi egyetemi analízis tanulását. [Okt20]

3.1. Általános iskolában

3.1.1. Az alsó tagozaton

Az általános iskola alsó tagozatában természetesen az analízis formális eszköztára még nem jelenik meg, azonban számos alapvető matematikai készség fejlődik ki ekkor és rengeteg fogalom alapozza meg a később – gimnáziumban, ill. egyetemen – előkerülő analízis megértését.
Ebben az életkorban a matematikai gondolkodás kialakulásának egyik fontos eleme az **összefüggések, kapcsolatok, szabályszerűségek** felismerése és megértése. Ekkor kell képesek legyenek a gyerekek arra, hogy adott elemeket elrendezzenek választott és megadott szempont szerint is, illetve sorba rendezett elemek közé elhelyezzenek további elemeket a felismert szempont szerint. A tanulók ekkor találkoznak először különböző **számsorozatokkal**, ahol például meg kell határozzák a következő elemet egy adott szabály szerint. A legegyszerűbb esetekben ezek a szabályok lehetnek olyanok, mint minden lépésben ugyanannyi hozzáadása vagy kivonása, amelyek gyakorlatilag számtani sorozatok, de előfordulhatnak olyan mintázatok is, amelyek mértani sorozatok, tehát egy adott számmal történő szorzást vagy osztást használnak. Bár ezek a fogalmak természetesen ekkor még nem jelennek meg elméleti formában, a gyermekek elkezdenek olyan struktúrákat felismerni, amelyek később az analízis témaköreihez kapcsolódnak, a fenti példa esetében a sorozatokhoz és akár a határérték fogalmához.

A függvények tanulása sem formális módon történik alsó tagozatban, de már egyfajta intuitív megértés kialakulása veszi kezdetét. A tanulók számos olyan feladattal találkoznak, amelyek során **bemenet-kimenet kapcsolatokkal** dolgoznak. Ezek tipikusan olyan példák, ahol egy számhoz egy másik számot kell rendelni egy előre meghatározott szabály alapján, pl. minden szám kétszeresét vagy a számhoz három hozzáadásával kapott értéket. Ezek az egyszerű feladatok az első lépéseket jelentik a függvények világába, amelyek később általánosabb formában jelennek meg a középiskolai matematikaoktatás során. A függvényekhez kapcsolódik az is, hogy az alsó tagozatos diákok megismerkednek egyszerű **grafikonokkal és táblázatokkal**. Ezek az adatok rendszerezését segítik elő, és lehetővé teszik számukra, hogy megértsék a **változások alapvető formáit**. Egy grafikon vagy diagram elemzése során a gyermekek megtanulják a **növekvő és csökkenő tendenciákat**, ami az első lépcső a későbbi függvényvizsgálat során a monoton függvények témaköréhez. Az alsós diákok számos olyan feladattal találkoznak, ahol a hosszúság, tömeg, idő vagy egyéb mennyiségek változását kell megfigyelniük, a változások vizsgálata pedig szorosan köthető az analízishez. Kaphatnak a diákok például olyan feladatot, hogy kövessék nyomon, hogy egy növény milyen ütemben növekszik, vagy hogy milyen gyorsan futnak a kert egyik végéből a másikba. Az ilyen típusú megfigyelések előkészítik a későbbi analízisbeli fogalmak, például a változás sebességének és a függvények növekedésének megértését.

Ezeken túl a diákok már ebben a korban találkoznak az **arányosság és a törtek** alapfo-

galmaival is, hiszen a matematika órák fokozatosan építik fel ezeket az ismereteket. A törtek bevezetése kezdetben vizuális módon történik, például egy kör – egy pizza vagy egy torta – felosztásával egyenlő részekre. A gyermekek megtanulják, hogy az egész egyes részeinek neve fél, negyed vagy harmad lehet, és ezeket az egyszerű fogalmakat és a hozzájuk tartozó vizuális élményeket később az arányosság és a törtek témakörénél hasznosíthatják.

Az alsó tagozatos matematika tehát természetesen nem tartalmaz explicit analízist, de számos előkészítő elemet foglal magában, amely a későbbi fejlődést támogatja.

3.1.2. A felső tagozaton

Vannak olyan diákok, akik az általános iskolai tanulmányaikat 4. vagy 6. osztályosként fejezik be és ekkor mennek gimnáziumba. Ezek a tanulók nem mind ugyanazt, és főleg nem ugyanakkora intenzitással tanulják, mint velük egyidős társaik. Kifejezetten nagy különbség lehet két 7-8. osztályos tanuló tananyagában, ha egyikük speciális matematika tagozatra jár. Ezt egy későbbi fejezetben tárgyalom. Tehát nem minden 5-8. osztályos tanulja pontosan ugyanazt, de az analízissel való ismerkedés hasonló témaköröknél jön elő, csak más-más szinteken.

A felső tagozaton sem jelennek meg természetesen még az analízis formális eszközei, azonban számos olyan fogalom alakul ki és gondolkodásmód fejlődik tovább, amely előkészíti a középiskolai, ill. egyetemi matematika ezen területét.
Ebben az időben már ismerkednek a diákok a **matematikai logika alapjaival**, a "minden" és a "van olyan" kifejezésekkel. Egyszerű stratégiai és logikai játékokat ismerhetnek meg a tanulók, amelyek természetesen nem csupán az analízishez kapcsolódnak, hanem más matematikai témakörhöz is.

A függvények ekkor már tudatosan és strukturáltan jelennek meg a tanításban. A **függvény fogalmának előkészítésére** felső tagozatban összesen megközelítőleg 22 óra van szánva, és olyan fogalmak kerülnek elő, mint **megfeleltetés, egyenes és fordított arányosság, koordináta-rendszer, pont koordinátái, ill. grafikon**. Ebben az időszakban a konkrét megfeleltetések szabályának megadása segíti a gyerekeket abban, hogy megértsék, hogyan lehet egy adott halmaz elemeihez egyértelműen más elemeket rendelni, ami a függvényfogalom előzetes kialakítását támogatja. Az értéktáblázatok adatainak grafikus ábrázolása és az egyszerű grafikonok jellemzése – például a **növekedés és csökkenés, a szélsőértékek és a tengelyekkel való metszéspontok vizsgálata** – szintén hozzájárul a függvények és azok tulajdonságainak megértéséhez. A felső tagozatos tananyagban az **egyenes és a fordított arányosság** felismerése konkrét helyzetekben, valamint az egyenes arányosság grafikonjának felismerése és megalkotása kiemelt szerepet kap, ezek az összefüggések már jól láthatóan közvetlen kapcsolatban állnak a későbbi analízisbeli vizsgálatokkal, például a lineáris függvények és azok tulajdonságainak elemzésével.

A felső tagozatos matematikaoktatásban a **sorozatokkal** való foglalkozás hasonlóan van jelen, mint alsó tagozatban, itt viszont nem kap nagy óraszámban szerepet. A diákok külön-

böző típusú sorozatokat hoznak létre számokból, jelekből és alakzatokból, amely segíti őket abban, hogy felismerjék az ismétlődő mintázatokat és rendszereket a matematikai struktúrákban. A **szabálykövetés** megjelenik nemcsak a számolási feladatokban, hanem ritmusos és vizuális tevékenységekben is. Az egyik fontos fejlesztendő készség a sorozatok adott szabály szerinti folytatása, amely lehetővé teszi, hogy a diákok megtanulják, hogyan alkalmazzanak általános szabályokat egy adott struktúrában, akár számsorozatok, akár geometriai alakzatok esetében. Emellett az is kiemelt cél, hogy a tanulók adott sorozatokhoz kapcsolódó szabályokat ne csak alkalmazni tudják, hanem felismerjék és meg is fogalmazzák azokat.

A felső tagozatos matematikaoktatásban a **törtek és tizedes törtek értelmezése**, ábrázolása és velük végzett műveletek 5-6. osztályban jelenik meg. Ezek az alapok elengedhetetlenek a későbbi analízisbeli tanulmányokhoz. A tanulók megtanulják a törtrészek vizuális ábrázolását és ezekhez tartozó törtszámok meghatározását, valamint elsajátítják a törtek egyszerűsítését, bővítését és összehasonlítását. Fontos, hogy felismerjék az egyenértékű törtek különböző alakjait, és tisztában legyenek a tizedes törtek helyi értékes rendszerével. Az alapműveletek végrehajtása a törtek és tizedes törtek körében nemcsak írásban, hanem konkrét vizuális ábrázolások segítségével is történik, ami elősegíti a műveleti szabályok mélyebb megértését. Ezeken kívül a gyakorlati problémákban előforduló mennyiségek **becslése** is előtérbe kerül, ami az analízis, ill. a kalkulus egy kifejezetten fontos eleme.

Mindezek a témák szorosan kapcsolódnak a felsőbb évfolyamokban megjelenő analízisbeli fogalmakhoz. A felső tagozatos matematika tehát még nem foglalkozik közvetlenül az analízis eszközeivel, mint a differenciál- vagy integrálszámítás, azonban olyan alapvető matematikai gondolkodási folyamatokat fejleszt, amelyek szükségesek a középiskolai és egyetemi szintű analízis megértéséhez.

3.2. Középiskolában

3.2.1. Általános tantervű középiskolában

A matematikai logika leckéjében előforduló ismeretek és készségek alapvető fontosságúak a későbbi analízis tanulmányozásához és a matematikai érvelés magasabb szintű megértéséhez. Középiskolában a diákok fokozatosan ismerkednek meg a matematikai bizonyítás fogalmával, valamint a logikai műveletek és állítások értelmezésével. Az első lépés az állítások **logikai értékének** megállapítása, vagyis annak eldöntése, hogy egy adott kijelentés igaz vagy hamis. Ehhez kapcsolódóan pedig meg kell tanulniuk, hogyan lehet egy állítást helyesen tagadni.
A diákok megismerkednek a matematikai logika alapvető operátoraival, mint például a „nem”, az „és”, a megengedő „vagy” és a kizáró „vagy”. Ezeket nemcsak matematikai problémákban, hanem a mindennapi gondolkodásban és más tantárgyakban is használhatják.
Fontos szerepet kap a kvantorok használata is, így a „minden” és a „van olyan” típusú állítások megértése és logikai értékének megállapítása, valamint tagadásának megállapítása.

Kiemelt jelentőségű a „ha..., akkor...” és az „akkor és csak akkor” típusú állítások helyes értelmezése. Ezek a logikai struktúrák elengedhetetlenek a matematikai, akár analízis tárgykörében előforduló bizonyítások során, és a diákoknak meg kell érteniük ezek használatát.

A gimnáziumi matematikaoktatás során a **függvény fogalma** fokozatosan kerül bevezetésre, először hétköznapi hozzárendelésekkel, majd egyre absztraktabb matematikai formában. A tanulók kezdetben megfigyelik a különböző hozzárendelések tulajdonságait, például azt, hogy egy adott bemenő értékhez legfeljebb egy kimenő érték tartozhat (egyértelmű hozzárendelés), illetve hogy a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű lehet-e. A diákok elsajátítják a matematikai függvényértékek meghatározását és táblázatba rendezését, amelynek segítségével később grafikusan is ábrázolhatják a függvényeket. A **grafikonok elemzése** révén pedig megállapíthatóvá válik a függvény **értelmezési tartománya, értékkészlete, szélsőértékei, zérushelyei, valamint növekedése és fogyása** is.
A függvények egyik legfontosabb alkalmazási területe a valós problémák modellezése. A diákok különböző függvényeket használnak gyakorlati helyzetek jellemzésére és problémák megoldására.
Megismerhetnek fontos elemi függvényeket, mint a **lineáris, másodfokú, négyzetgyök- és fordított arányosságot leíró függvények**, valamint ezek tulajdonságait és grafikonjait. Ezekhez kapcsolódóan az egyszerű **függvénytranszformációs** lépések végrehajtása is része ennek a témakörnek.

A diákok megtanulják a lineáris függvények hozzárendelési utasításának meghatározását grafikon alapján, valamint az $f(x) = c$ alapján az x meghatározását, akár gyakorlati példák során. Fontos továbbá a kölcsönösen egyértelmű függvények megfordítása és az így kapott új függvény ábrázolása.

9-10. osztályban a diákok megismerik a **hatványalap, hatványkitevő, normálalak, négyzetgyök** fogalmát, majd pedig 11-12. osztályos matematikaoktatás során az ***n*-edik gyök** fogalmával és annak alkalmazásával. Ehhez kapcsolódóan elsajátítják a hatványozás műveletét pozitív alap és racionális kitevő esetén, valamint alkalmazni tudják a **hatványozás azonosságait**.
A hatványozás szemléletes értelmezése az irracionális kitevők esetében is előkerül, amely előkészíti az **exponenciális függvények** megértését. A diákok ezeket a függvényeket hagyományos módon és számítógépes eszközökkel is ábrázolják, valamint megismerkednek a függvények tulajdonságaival. Ezen túlmenően foglalkoznak még az exponenciális folyamatok vizsgálatával a természetben és a társadalomban. Ezzel kapcsolatos problémákat oldanak meg, többek között egyenlet segítségével.
A **logaritmus** fogalmának bevezetése során a diákok megtanulják az áttérést különböző alapú logaritmusok között, valamint a számológép használatát a logaritmus értékének meghatározásához.

11-12. osztályban kerülnek újra elő a sorozatok, különösen a **számtani és mértani sorozatok** vizsgálata révén. A tanulók megtanulják a számsorozatokat különböző módokon

megadni, pl. képlettel vagy rekurzív módon. A számtani és mértani sorozatok tanulmányozása során megértik azok szabályait, és képesek lesznek folytatni őket. A számtani és mértani sorozatok esetében a diákok megtanulják meghatározni az n-edik tagot és az első n tag összegét.
A sorozatok alkalmazása különféle területeken is megjelenik, például gazdasági, pénzügyi, természettudományi és társadalomtudományi problémák megoldásában. A diákok megismerkednek ezen különböző területeken fellelhető problémákkal és az ezekhez kapcsolódó számításokkal. Megtanulják az **egyszerű és kamatos kamat**, valamint a **gyűjtőjáradék és törlesztőrészlet** számítását is. A megtakarítási, befektetési és hitelfelvételi lehetőségekkel kapcsolatos számítások révén a diákok képesek lesznek megérteni a pénzügyi döntések kockázatait és hosszú távú következményeit.

Összességében a gimnáziumi matematika célja, hogy a tanulók megalapozzák azokat az ismereteket és gondolkodási készségeket, amelyek elengedhetetlenek az analízishez. A függvényekkel, sorozatokkal és pénzügyi matematikával kapcsolatos témák segítségével a diákok olyan alapvető összefüggéseket és fogalmakat sajátítanak el, amelyek a felsőoktatásban tovább mélyíthetők, és amelyek nélkülözhetetlenek a természettudományos és műszaki területek matematikai alapjaihoz.

3.2.2. Speciális matematika tagozaton

A speciális matematika tagozatról azért tartom fontosnak, hogy említést tegyek, mert én is egy ilyen tagozatra jártam a Szent István Gimnáziumban. A gimnáziumi évek alatt nem tudtam, hogy mennyiben más az, amit mi tanulunk ahhoz képest, amit más velem egyidős diákok vesznek a középiskolában. Egyetemen konstatáltam, hogy hatalmas előnnyel indultam a hallgatótársaimhoz képest, mert számomra a kvantorok használata, vagy az ϵ-nal és δ-val való felírása a kicsiny mennyiségeknek nem volt újdonság. Előnyös volt, hogy egy precíz bizonyítás, vagy a matematikai tételek megfogalmazása már megszokott volt. Ezért kifejezetten hálás vagyok, hogy a középiskolai évek így megalapozták az egyetemi matematika tanulmányaimat.

A speciális matematika tagozaton az analízis oktatása jóval részletesebb és mélyebb, mint a normál gimnáziumi tantervben. A diákok már középiskolában megismerkednek a **függvények határértékének és folytonosságának** fogalmával, amely az analízis egyik alapvető témája. A tananyag részét képezi a **teljes függvényvizsgálat**, amely során a függvények **szélsőértékeit, monotonitását, konvexitását** és egyéb jellemzőit elemzik. A **sorozatok** témakörben foglalkoznak **végtelen sorozatokkal**, azok **tulajdonságaival, konvergenciájával és határértékével**. A **differenciálszámítás** bevezetése is megjelenik speciális matematika tagozaton, mely során a tanulók elsajátítják a **derivált fogalmát**, és alkalmazzák a különböző **deriválási szabályokat** is. Ezt követően az **integrálszámítás** is megjelenik a tananyagban, a diákok megismerik a **határozatlan és határozott integrál** fogalmát, valamint az **integrálási szabályokat és módszereket**, beleértve a **parciális törtekre bontást és a helyettesítéses**

integrálást.

A mi iskolánkban a matematika tanáraink szem előtt tartották az osztályunk igényeit, így az a témakör volt hangsúlyosabb, amit jobban szeretett az osztály. Ilyen volt az analízis is. Valószínűleg ez is szerepet játszott abban, hogy egyetemen szívesen vettem részt az analízis kurzusokon és örömmel vállaltam később a gyakorlatvezetést is.

3.2.3. Az emelt matematika érettségin

Kifejezetten érdekes tapasztalat volt számomra, hogy az Oktatási Hivatal honlapján nem található konkrét információ a matematika fakultációk tartalmára vonatkozóan. Ennek oka, hogy a fakultációk tananyaga nincs központilag szabályozva: a tematika összeállítása teljes mértékben az adott gimnáziumi szaktanár hatáskörébe tartozik. Így az ő felelőssége, hogy tisztában legyen az emelt szintű érettségi követelményrendszerével, és ennek alapján készítse fel a diákokat a vizsgára.
A következőkben röviden összefoglalom, hogy az analízis milyen mértékben és milyen formában képezi részét az emelt szintű matematika érettségi követelményrendszerének.[Hiv21]

Az emelt szintű matematika érettségi követelményrendszere a középszintű ismeretanyagon túl számos analízishez kapcsolódó témakört is tartalmaz. A tanulóknak ismerniük kell az alapvető függvénytani fogalmakat (például: összeg-, különbség-, szorzat-, hányados- és inverz-függvény, összetett függvény), valamint tudniuk kell alkalmazni a függvénytranszformációkat. Elvárás függvények jellemzése különféle szempontok szerint (pl.: periodicitás, paritás, konvexitás, korlátosság), valamint azok grafikus ábrázolása is.
A sorozatok témakörében követelmény a korlátosság, monotonitás, konvergencia fogalmának ismerete, valamint a konvergens sorozatokkal kapcsolatos egyszerű határérték-számítások alkalmazása. A tanulóknak tudniuk kell a számtani és mértani sorozatok általános tagjára és összegére vonatkozó összefüggéseket is, beleértve a végtelen mértani sor összegét.
A diákoknak ismerniük kell a határérték, valamint a folytonosság szemléletes fogalmát.
A differenciálszámítás területén elvárás a deriválási szabályok alkalmazása, az összetett függvény deriválása egyszerű esetekben, valamint szélsőérték-feladatok megoldása és függvényvizsgálat (monotonitás, konvexitás) polinomfüggvények esetében.
Az integrálszámítás körében követelmény a határozott integrál és annak szemléletes fogalmának ismerete, a Newton–Leibniz-tétel alkalmazása, valamint egyszerűbb területszámítások elvégzése polinom- és trigonometrikus függvények esetén.

3.3. Egyetemen

Magyarországon szinte minden olyan egyetemen oktatnak analízist, ahol matematikai, természettudományos, informatikai vagy műszaki képzés folyik. A differenciál- és integrálszámítás alapvető része a képzéseknek ezeken a területeken. Éppen ezért, mivel a dolgozatomnak nem célja, nem mutatom be az egyetemi analízis kurzusokat, ugyanis találkozhatunk analízis kur-

zussal Magyarország szinte összes egyetemén, többek között az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen, a Budapesti Corvinus Egyetem, vagy vidéken a Szegedi Tudományegyetemen, a Debreceni Egyetemen, és ezekben az intézményekben is különböző formában van jelen tömérdek karon és szakon.
Számomra az ELTE matematikatanár-képzésében releváns az analízis tanítás, tehát erről számolok be részletesen.

3.3.1. Az ELTE matematikatanár-képzésében

Az ELTE matematikatanár-képzésében az analízis oktatása fokozatosan épül fel, lehetőséget biztosítva a hallgatóknak arra, hogy az alapfogalmak elsajátításától kezdve egyre mélyebb matematikai összefüggéseket értsenek meg. A 2022 után felvettekre az a rendszer vonatkozik, hogy az első négy félévben az analízis oktatása a *Bevezető analízis 1 és 2*, valamint az *Egyváltozós analízis 1 és 2* tárgyakon keresztül történik, majd a hetedik félévben még egy *Az analízis további fejezetei* című tárgyat kell teljesíteniük a hallgatóknak. A kilencedik félévben pedig egy *Szemelvények az analízisből* nevezetű kötelezően választható tárgy keretein belül foglalkozhatnak tovább az analízissel a diákok. [Eöt22]

A *Bevezető analízis 1* célja, hogy a hallgatók azon alapokat felidézzék, ill. elsajátítsák, amelyeket középiskolában tanultak és elengedhetetlenek az egyetemi analízis tanulmányaikhoz. A kurzus során a hallgatók logikai alapfogalmakat, bizonyítási módszereket ismernek meg, valamint a nevezetes közepek közti egyenlőtlenségeket, a halmazokat és halmazműveleteket. Emellett a függvények és azok grafikonjainak ábrázolása, valós függvények globális tulajdonságai, és a monotonitás is központi szerepet kap.

A *Bevezető analízis 2* tantárgy keretében a hallgatók a valós számokkal és korlátos számhalmazokkal ismerkednek meg, beleértve az alsó és felső határ fogalmát. Foglalkoznak számsorozatok határértékével, valamint megkülönböztetik a konvergens és divergens sorozatokat. Megértik a végtelenhez tartó sorozatok fogalmát, valamint a határérték kiszámításának és műveleteinek alapelveit. Tárgyalásra kerülnek a határértékkel kapcsolatos egyenlőtlenségek, a monoton sorozatok és a részsorozatok, valamint a Bolzano–Weierstrass-tétel és a Cauchy-kritérium. A tananyag részét képezik a végtelen sorok, a mértani sor, valamint a tizedes törtek és a hatványozás fogalma is.

Az *Egyváltozós analízis 1* tantárgy célja a függvények folytatosságának és határértékének mélyebb megértése. A hallgatók megismerkednek az átviteli elvekkel, a folytatossággal és határértékkel, valamint a határérték és egyenlőtlenségek témakörével. Külön figyelmet kapnak a korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények, valamint a legfontosabb függvényosztályok, mint például a polinom-, exponenciális-, hatvány-, logaritmus- és trigonometrikus függvények, valamint ezek inverzei. A tantárgy második része a differenciálhányados fogalmára és szemléletes jelentésére épül. A hallgatók megismerik a differenciálási szabályokat, az elemi függvények deriváltjait és a magasabb rendű differenciálhányadosokat. Szerepet kap még a lokális tulajdonságok és a derivált kapcsolata, valamint a középértéktételek.

Az **Egyváltozós analízis 2** témakörei közé tartozik a konvex függvények és a differenciálható függvények vizsgálata. A hallgatók megismerkednek a szélsőérték-feladatok megoldásának módszereivel, valamint a differenciálszámítás alkalmazásával valós problémák esetén. A tananyag részét képezi a Taylor-polinom és az L'Hospital-szabály, a primitív függvény fogalma és keresési módszerei és a racionális törtfüggvények primitív függvényeinek keresése. A kurzus második része a Riemann-integrál fogalmát tárgyalja, kitérve az integrálhatóság feltételeire és az integrál elemi tulajdonságaira. A tanulók megismerhetik a Newton–Leibniz formulát és alkalmazásait, ill, hogy az integrálás gyakorlati problémák, például terület- és térfogatszámítás megoldására is felhasználható. A tantárgy fontos részét képezik a végtelen sorok és a konvergenciakritériumok, beleértve az összehasonlító kritériumot, a gyök-, és hányadoskritériumot és a Leibniz-szabályt. A hallgatók megismerkednek az abszolút konvergencia fogalmával és a sorok átrendezhetőségével is.

A középiskolai tanárképzésben a hallgatók mélyebb ismereteket szereznek a többváltozós analízis terén. **Az analízis további fejezetei** kurzus keretében a hallgatók megismerkednek a szaporodási és bomlási folyamatok differenciálegyenleteivel, valamint a differenciálszámítás szemléltetésének lehetőségeivel digitális eszközök segítségével. Foglalkoznak az improprius integrál fogalmával és az integrálkritériummal végtelen sorok esetén. A kurzus részeként tárgyalásra kerülnek a hatványsorok, a Taylor-sorok és konkrét függvények előállítása Taylor-sorok összegeként. Kitekintésként az Euler-formulával is megismerkednek. Emellett a többváltozós függvények fogalma és tulajdonságai is középpontba kerülnek, beleértve a kétváltozós függvények grafikonját, szintvonalait és az alakzatok egyenleteit. A hallgatók elsajátítják a parciális deriváltak és a lokális szélsőértékek fogalmát, valamint megismerkednek a görbék hosszának kiszámításával. Kitekintésként a fraktálok világába is betekintést nyernek, mindezt digitális eszközökkel történő szemléltetéssel kiegészítve.

A **Szemelvények az analízisből** című kötelezően választható tárgy válogatott témaköröket tartalmaz egy-, és többváltozós, valamint komplex analízisből.

Az ELTE matematikatanár-képzésében az analízis tantárgyak így fokozatosan vezetik be a hallgatókat az egyre összetettebb matematikai struktúrák világába, biztosítva a szükséges elméleti alapokat és alkalmazásokat a későbbi tanári munkához.

Saját tapasztalatok

Hallgatóként azt tapasztaltam, hogy az analízis tantárgyakból a tervezett tananyag egyes részei kimaradtak az oktatás során. Mivel én még 2022 előtt kezdtem egyetemi tanulmányaimat, így nekem volt kötelező tárgyként, az *Egyváltozós analízis 2* után, *Többváltozós analízis 1 és 2* is. Különösen a *Többváltozós analízis 2*-ben az eredetileg megjelölt fogalmak és módszerek közül nem volt lehetőség egészen sok mindent részletesen tárgyalni, vagy csak érintőlegesen kerültek elő.

Gyakorlatvezetőként, 4 évvel később, még inkább szembesültem azzal, hogy kevesebb minden fért bele az előadásokba, és így természetesen a gyakorlatokba is. Az *Egyváltozós analízis*

1 kurzus során például a félév végéig el sem jutottunk a differenciálhányados és a deriválás tárgyalásához, ami jól mutatja, hogy a tananyag feldolgozása sokszor jelentős csúszásokkal haladt. Ez a tapasztalat arra enged következtetni, hogy a tananyag mennyisége és a rendelkezésre álló óraszám jelenleg sincs sajnos teljes összhangban egymással.

3.3.2. A Bevezető analízis 2 részletesebb tárgyalása

Mivel dolgozatomban a *Bevezető analízis 2* gyakorlati kurzusán szerzett tapasztalataimról számolok be, ezért ennek a tárgynak a leírását egy kicsit hosszabban is részletezem, mint a fentiekét.[Eöt22]

A *Bevezető analízis 2* tárgy célja, hogy a hallgatók mélyebb betekintést nyerjenek a valós számok alapjaiba, a sorozatok határértékének fogalmába, valamint a végtelen sorok alapismereteibe. A tantárgy elvégzése során a hallgatók olyan alapvető matematikai ismereteket sajátítanak el, amely által képessé válnak arra, hogy a határérték-számítással kapcsolatban tanultakat hatékonyan alkalmazzák a jövőben a saját tanári pályájuk során is, középiskolai feladatokban.

A négy kompetenciaterület, amelyben a hallgatók a félév során fejlődnek, a következő; tudás, képesség, attitűd, valamint autonómia és felelősség.

A hallgatók elsajátítják a szükséges ismereteket, amelyek révén megérthetik és értelmezhetik szaktárgyuk eredményeit. Törekszenek a tantárgy anyagában megjelenő fogalmak és összefüggések megértésére, valamint azok alkalmazására.

A képességkompetenciája annyiban fejlődik a hallgatóknak, hogy magabiztosan és szakszerűen tudják kifejezni magukat a matematika témakörében, akár szóban, akár írásban. Képesek felismerni és megérteni a tantárgyban szereplő fogalmak, elméletek és tények közötti összefüggéseket, valamint ezeket az ismereteket gyakorlati helyzetekben alkalmazni és érthetően közvetíteni mások felé.

A kurzus során a hallgatók hozzáállása is fejlődik, hiszen a tantárgy ösztönzi őket a folyamatos szakmai megújulásra, önálló ismeretszerzésre és további tanulmányokra. A rendszeres továbbképzés iránti nyitottság és a matematikai gondolkodás folyamatos fejlesztése elengedhetetlen ahhoz, hogy később hatékony oktatókká váljanak.

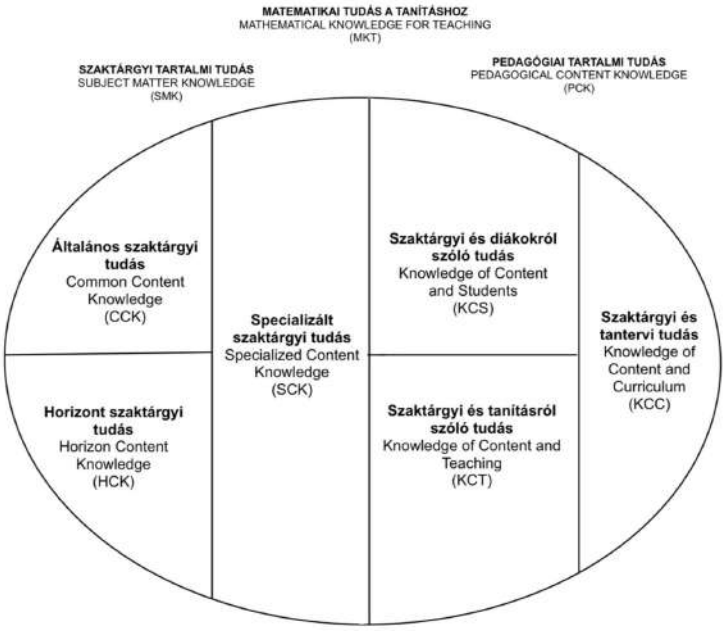
Ezen túlmenően a tárgy során hangsúlyt kap az autonómia és a felelősségvállalás is. A hallgatók elköteleződnek a precíz, igényes munka mellett, és törekednek az önálló problémamegoldásra, ugyanakkor tudják, hogy az oktatók szakmai támogatása mindig rendelkezésükre áll.

A *Bevezető analízis 2* tehát nemcsak a matematikai ismeretek elmélyítését szolgálja, hanem hozzájárul a hallgatók szakmai fejlődéséhez, gondolkodásmódjuk finomításához és a tanári pályához szükséges készségeik fejlesztéséhez is.

4. A matematikaoktatásban alkalmazott tanári tudásmodellek

A következőkben röviden kitérek a témavezetőm, dr. Varga Eszter doktori értekezésből megismert tudásmodellre, ugyanis ezek az elméleti keretek kivételesen alkalmasak a saját oktatói gyakorlatomra való reflektálásra. Célom, hogy bemutassam, miképpen nyilvánultak meg a gyakorlatban ennek a tudásmodellnek egyes összetevői, és hogyan segíti a tanulók eredményességét az, ha a pedagógus tudatosan integrálja a tartalmi és pedagógiai ismereteket.
A dolgozatban tehát nemcsak elméleti áttekintést adok, hanem konkrét órahelyzetek elemzésén keresztül is igyekszem rámutatni arra, hogy a modell által közvetített elvek hogyan valósulhatnak meg a tanítási folyamatban. [Esz23]

A matematikatanárok szakmai tudásának komplex struktúrája az elmúlt néhány évtizedben számos kutató figyelmét felkeltette, különös tekintettel arra, hogy miképpen különböztethetők meg és kapcsolódnak egymáshoz a tartalmi és pedagógiai tudás elemei. A tanári szakmai tudás modellezése nem csupán elméleti jelentőségű, hanem közvetlen gyakorlati hatással bír a tanárképzési rendszerek fejlesztésére és a tanítási gyakorlat minőségének javítására.
Shulman úttörő munkája vetette fel először a *"pedagógiai tartalmi tudás"* fogalmát, amely olyan átmenetet teremt, amely összekapcsolja a szaktárgyi ismereteket a konkrét oktatási helyzetekben alkalmazható gyakorlati készségekkel. [Shu86] [Shu87]
Ball és munkatársai által kifejlesztett *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* modell a tanári tudást hat jól elkülöníthető, de szorosan összefüggő területre bontja.[BTP08] Ezt szemlélteti a következő ábra:



1. ábra. A *matematikai tudás a tanításhoz* tudásterületei

A **szaktárgyi tartalmi tudás** keretében megkülönböztetett **általános szaktárgyi tudás** egyszerűen a matematika alapvető ismeretét jelenti - azt, amit bárki, aki matematikával foglalkozik, használ a mindennapi munkájában. A tanárnak tökéletesen kell ismernie azt, amit tanít, és könnyedén meg kell oldania az órán felmerülő feladatokat. Bár ez nyilvánvalónak tűnik, gyakran elfelejtjük, hogy enélkül a tudás nélkül egyszerűen nem lehetséges hatékonyan tanítani.

Erre a térfélre esik még a **specializált szaktárgyi tudás**, amely azt a különleges matematikai ismeretet foglalja magában, amit kifejezetten a tanításhoz fejlesztettek ki. Ez több, mint maga a matematikai tudás - arról szól, hogy hogyan lehet ezt a tudást hatékonyan átadni. Egy jó matematikatanár nemcsak ismeri a megoldásokat, hanem átlátja, hogy a diákok milyen különböző utakon juthatnak el a helyes eredményig, felismeri, ha egy szokatlan módszer mégis helyes, és pontosan tudja, milyen hibás gondolkodás rejlik egy téves válasz mögött. Fontos része ennek a tudásnak az is, hogy a tanár világosan el tudja magyarázni a matematikai szabályok mögötti "miért"-eket (például, hogy miért kell törttel osztásnál a reciprokkal szorozni). Kutatások szerint pont ez a speciális tudásformája dönti el igazán, hogy egy tanár mennyire lesz sikeres az oktatásban, sokkal inkább, mint az, hogy mennyi magas szintű elméleti matematikát tanult az egyetemen.

A harmadik ide sorolható tudásterület a **horizontális szaktárgyi tudás**. Ennek pontos jelentését és elkülönítését a többi tudásformától a mai napig sokféleképpen értelmezik, és gyakran vita tárgyát képezi a kutatók körében. Ez a tudásforma azt a háttértudást jelenti, amely segít megérteni, hogyan kapcsolódnak össze az egyes tantervi témák – akár egymás után épülnek fel (vertikálisan), akár egy időben, párhuzamosan jelennek meg (horizontálisan).

Ide tartozik az a képesség is, hogy a tanár felismerje, bizonyos tananyagrészek hogyan készítik elő a későbbi – akár a közoktatáson túlmutató – matematikai fogalmak megértését. Ez a tudás lehetővé teszi, hogy az oktató tudatosan válassza ki és rendezze a tananyagot úgy, hogy az illeszkedjen a matematika mint tudomány felépítéséhez. A cél az, hogy már a korai tanulási szakaszokban is olyan tudás alakuljon ki, amely később továbbépíthető, és ne legyen szükség későbbi korrekciókra vagy visszavonásokra.

A **pedagógiai tartalmi tudás** területén belül háromféle tudásformát különböztetünk meg. Ezek közül az egyik a **szaktárgyi és diákokról szóló tudás**. Ez a tudásforma azokat az ismereteket és képességeket foglalja magában, amelyek a matematikai tartalom és a tanulók gondolkodásának ismeretét együttesen alkalmazzák a tanítás során. A tanárnak tisztában kell lennie azzal, hogy a diákok milyen előzetes elképzelésekkel, gyakori félreértésekkel érkeznek, és ezek alapján olyan tanítási stratégiát kell kialakítania, amely segít ezek kezelésében. Fontos, hogy a tanár meg tudja ítélni, egy adott feladat a tanulók számára milyen nehézséget jelenthet, és képes legyen értelmezni a diákok nem pontos, de mégis tartalmilag értékes megfogalmazásait vagy részmegoldásait is. A megfelelő példák és szemléltetések kiválasztása is kulcsfontosságú: ezeknek egyszerre kell helyesen tükrözniük a matematikai tartalmat, és érthetőnek, motiválónak lenniük a tanulók számára.

A **szaktárgyi és tanításról szóló tudás** azt jelenti, hogy a tanár nemcsak a matematikai tartalmat ismeri, hanem azt is tudja, hogyan lehet azt eredményesen tanítani. Ez a tudás nagyon fontos a tanórák megtervezésekor.
A tanár nem pusztán a matematikai logika mentén dönti el, milyen sorrendben adja a feladatokat vagy hogyan építi fel az anyagot, hanem figyelembe veszi azt is, hogy a különböző magyarázatok, szemléltetések mennyire segítik a tanulók megértését. Megfontolja, hogy egy adott módszer használata milyen lehetőségeket nyit meg a későbbi tanítási folyamatban.
A tanórán is meg kell hoznia megannyi döntést. Pl. el kell döntenie, hogy melyik diákmegjegyzésre érdemes azonnal, az óra keretein belül reagálni, melyikre inkább később visszatérni, vagy akár teljesen figyelmen kívül hagyni.
A **szaktárgyi és tantervi tudás**, ahogy az elnevezéséből is látszik, a matematikai tartalmi ismeretek és a tantervi, valamint kimeneti követelmények összehangolásában megnyilvánuló tanári szakmai tudást jelenti.

A 6. fejezetben az *Bevezető analízis* gyakorlatokon előforduló feladatok közül egyesek elemzését a tanári tudásmodell szempontjából is elvégzem. Tehát a dolgozat egyes részeiben – ahol ezt indokoltnak látom – visszautalok a tudásmodellekre is, hogy megvizsgáljam, miként jelentek meg a fenti szempontok a konkrét feladatok feldolgozásában. Ennek az elemzésnek az oka, hogy a gyakorlatokon olyan hallgatók vettek részt, akik a jövőben matematika tanárként terveznek dolgozni. Ezért fontosnak tartja/otta a tárgy előadója, hogy a diszciplináris órán se csupán az analízis tartalmi elsajátítása legyen a cél, hanem az is, hogy a hallgatók akár pedagógiai szempontból is fejlődjenek, és jó tanárokká váljanak.
Ugyanakkor fontosnak tartom azt is megemlíteni, hogy a modell segített abban is, hogy azt is megvizsgáljam, a hallgatók visszajelzései és a a saját tapasztalataim alapján, hogy én, gyakorlatvezetőként mennyiben fejlődtem az egyes területeken. Erről a dolgozat utolsó, 8. fejezetében írok bővebben.

5. Differenciálás és értékelés egyetemen

5.1. Kártyajátékok a felsőoktatásban

Dolgozatomban kiemelt figyelmet fordítok arra, hogy hogyan lehet hatékonyan tanítani a matematikát – az analízisre különös tekintettel – az egyetemi oktatásban. A hagyományos frontális oktatás továbbra is meghatározó szerepet játszik a felsőoktatásban, de a hallgatói igények és a tanulási folyamat hatékonyságának növelése érdekében, véleményem szerint, fontos, hogy alternatív, interaktív módszereket is alkalmazzanak az egyetemi oktatók a tanítás folyamán. Egy ilyen megközelítés a játékalapú tanulás, amely a tapasztalati tanulásra és az aktív részvételre helyezi a hangsúlyt. A Miskolci Egyetem Matematikai Intézete 2018-ban kezdte fejleszteni a tanulást támogató matematikai kártyajátékokat. Erről egy cikk is született, mely segítségével röviden szemléltetem ezt az oktatási segédeszközt.[Att24]

A matematika oktatásában egyre népszerűbbé válnak a játékos módszerek, de ezek elsősorban az alap- és középfokú oktatásban ismertek, míg a felsőoktatásban még kevésbé elterjedt a használatuk. A nem digitális játékok, például a társasjátékok és kártyajátékok számos előnyt kínálnak: nemcsak a tanulási folyamatot segítik, hanem fejlesztik a hallgatók közötti kommunikációt és társas interakciókat is. Kutatások kimutatták, hogy ezek a módszerek javítják a tanulási eredményeket, növelik a motivációt és csökkentik a tanulási szorongást. Az oktatási játékok szimulációs és problémamegoldó helyzeteket teremtenek, amelyek lehetővé teszik az elméleti tudás gyakorlati alkalmazását. Az ilyen tanulási módszerek fejlesztik a hallgatók kritikus gondolkodását, döntéshozatali és problémamegoldó készségeit, miközben azonnali visszajelzést biztosítanak a fejlődésükről.
Ebben a kontextusban különösen érdekes a Miskolci Egyetem Matematikai Intézetében végzett tanulmány. Az intézet 2018-ban kezdett el kártyajátékokat fejleszteni azzal a céllal, hogy a matematikai ismeretek elsajátítását élvezetesebbé és hatékonyabbá tegye. Erről a tanulmányról készült cikk öt különböző kártyajátékot mutat be, melyeket a teljesség igénye nélkül, röviden én is ismertetek.

Az *Log Halli Galli* egy olyan játék, amely a logaritmus fogalmának és azonosságainak megértését segíti elő. Az *Ékkővadászok* társasjáték az *Aranyásók* kártyajáték alapján készült, matematikai készségfejlesztő adaptációval. A *BrainBox - Függvények* egy didaktikai játék, amely az egyváltozós valós – már középiskolában előforduló – függvénytan oktatását támogatja, kártyalapok segítségével. A *LimEszelős* játék a *Solo* lapfogyasztó mechanikáján alapul, és a valós számsorozatok határértékeinek kiszámítását gyakoroltatja. A *JETI* egy kooperatív táblás játék, amely a numerikus sorok témakörére épül, egyedi szabályrendszerrel és grafikával rendelkezik. A játék különböző matematikai és természettudományos témákhoz adaptálható, például detreminánsszámítás, mértékegységátváltások és törtekkel végzett műveletek gyakorlására is használható.

Az általam tartott analízis gyakorlaton is igyekeztem interaktív eszközökkel bevonni min-

den hallgatót az órai munkába. Ehhez nagy segítségemre volt a Plickers nevezetű játék, melyet a legmegfelelőbben "hibrid" játéknak hívhatunk, ugyanis szükség van egy online felületre hozzá, ám a tanulók kezében kártyák (QR-kódok) vannak. Ezt a játékot a 4.4. alfejezetben tárgyalom bővebben.

5.2. Értékelés analízis gyakorlaton

A *Bevezető analízis 2*, valamint az *Egyváltozós analízis 1 és 2* tárgyak előtt részletes megbeszélést folytattunk a tárgy előadójával, Dr. Keleti Tamással, valamint a másik gyakorlatvezetővel annak érdekében, hogy meghatározzuk a gyakorlatokon alkalmazott értékelési rendszert. Döntéseink során mindig igyekeztünk figyelembe venni az előző évek tapasztalatait, valamint a hallgatói igényeket.

Az értékelés egyik állandó eleme volt, hogy a hallgatók a félév során két zárthelyi dolgozatot írtak, valamint rendszeresen röpzh-kat is irattunk velünk. Ugyanakkor a röpzh-k alkalmazásának módja félévenként eltért. Egyes esetekben az volt a gyakorlat, hogy a röpzh feladatai az aktuális órára kiadott házi feladatokból kerültek ki, amennyiben a hallgatók az óra elején nem jelezték, hogy problémájuk adódott azok megoldásával. Ha legalább egy hallgató jelezte, hogy nem tudta megoldani a házi feladatot, akkor az adott feladat nem szerepelhetett a röpzh-ban. Más gyakorlatvezetők esetében kizárólag olyan feladatok kerültek a zh-ba, amelyeket előzetesen a csoport közösen megbeszélt. A későbbiekben arra a döntésre jutottunk, hogy minden gyakorlati csoportban egységes értékelési rendszert alkalmazunk, beleértve azt is, hogy egységesen határozzuk meg, hogy milyen feladatok kerülhetnek a zárthelyi dolgozatokba. Ezzel biztosítottuk, hogy a különböző csoportok között ne alakuljanak ki jelentős eltérések az értékelésben.
Ezen kívül a *Bevezető analízis 2.* kurzuson a hallgatók egymás röpdolgozatait javították. A dolgozatok megírása után először összegyűjtöttem, majd újra kiosztottam őket javításra. Ezt követően azt is értékeltem, hogy a hallgatók helyesen javították-e ki a dolgozatokat, és ezért is kaphattak pontot. Ezzel a módszerrel minimalizálni tudtuk a csalás lehetőségét.
Számunkra, gyakorlatvezetők számára ez a módszer nem jelentett könnyebbséget, mivel így is át kellett néznünk minden dolgozatot, ugyanakkor a hallgatók egy olyan készséget gyakorolhattak, amelyre később tanárként szükségük lesz.

A zárthelyi dolgozatokon kívül lehetőséget biztosítottunk további pluszpontok szerzésére is. A hallgatók nehezebb feladatok megoldásának kidolgozásával és beadásával, valamint az előadások anyagához kapcsolódó Canvas tesztek kitöltésével is növelhették pontszámukat.

Fontos szempont volt az is, hogy minden évben beépítsük a gyakorlatokba azt a feladatot, hogy minden hallgató legalább egyszer a táblánál ismertesse egy előzőleg megoldott házi feladatának lépéseit. Ennek célja az, hogy fejlesszük azt a készségüket, amelynek révén magabiztosan tudnak kiállni mások elé és érthetően átadni a megoldásaikat, hiszen tanárként ez a jövőben kiemelten fontos lesz számukra. A táblai bemutatásért külön pont is járt. Ennek

ellenére a tapasztalat azt mutatta, hogy még a kiemelkedő matematikai képességekkel rendelkező hallgatók közül is sokan nehezen vállalkoztak arra, hogy a táblánál prezentáljanak egy feladatot.

5.3. Differenciálás analízis gyakorlaton

A *Bevezető analízis 2* gyakorlatokon a differenciálás érdekében olyan rendszerben dolgoztunk, amely lehetőséget biztosított a különböző szinten lévő hallgatóknak a fejlődésre. Voltak plusz pontért beadható feladatok, amelyekkel a hallgatók otthon, vagy akár már az órán foglalkozhattak, önállóan. Az óra elején, a röpzh. után, felkerültek a táblára az aktuális órai feladatok, miközben a házi feladatok ellenőrzése zajlott, így azok a hallgatók, akiknek nem volt kérdése a házi feladatokkal kapcsolatban, haladhattak az anyaggal és nem hátráltatta őket a munkában, hogy a csoport más tagjaival egy-egy feladatnál hosszabban elidőztünk.

Amikor önálló vagy párban zajló munka folyt, körbejártam a teremben, és mindenkinek a saját szintjéhez mérten nyújtottam segítséget. Ez lehetővé tette, hogy a hallgatók személyre szabott támogatást kapjanak a nehezebb problémák megoldásában vagy a hiányosságok pótlásában.

A differenciálásra különösen nagy szükség van az egyetemi oktatásban, mert itt a tanulók közötti tudásbéli különbségek még nagyobbak lehetnek, mint a gimnáziumban. Ez annak köszönhető, hogy minden hallgató más-más középiskolából érkezik, sokszor eltérő tananyagtartalommal, módszerekkel és követelményekkel. [Edi] Vannak, akik négyes osztályzatú, középszintű érettségivel érkeznek, de vannak, akik matematika versenyeken is megfordultak és 100% körüli emelt érettségivel kezdik meg az egyetemi tanulmányaikat. Ezért az ilyen differenciált megközelítés segíti a hallgatókat abban, hogy saját tempójukban haladhassanak, és a saját szintjükhöz mérten eredményeket érjenek el.

5.4. IKT eszközök használata az órán – Plickers

A következőkben egy általam sokat használt, a közelmúltban fejlesztett IKT eszközt szeretnék bemutatni. A Plickers egy innovatív és egyszerűen használható IKT-eszköz, amelyet az oktatásban alkalmazhatnak a tanárok, hogy interaktív módon, teszt feladatok formájában kérjék számon a diákokat. Ez az eszköz azért is különleges és praktikus, mert a diákok számára nem szükséges sem okostelefon, sem tablet. [Pli]

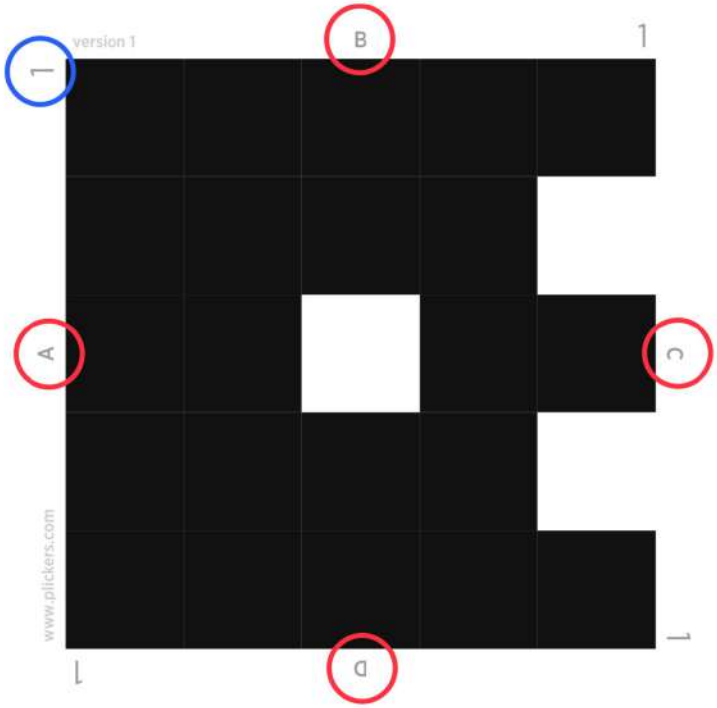
A Plickers működése papír alapú QR-kódokon alapul, amelyeket a diákok kapnak. Minden kártya egyedi, és négy különböző irányba fordítva más-más választ jelöl (A, B, C, D). A tanár online, megnyitva a Plickers oldalát teszi fel a kérdéseket, projektorral vagy okostáblán kivetítve, és a diákok a kártyáikat az általuk helyesnek vélt válasszal felfelé fordítva és feltartva válaszolnak. A tanár egy mobileszközzel vagy tablettel beolvassa a diákok kártyáit, a rendszer pedig azonnal rögzíti és kiértékeli a válaszokat. Az eredmények az alkalmazásban és a vetített képernyőn is megjelennek, ami lehetőséget ad az azonnali visszacsatolásra. Azt

nem láthatják a tanulók, hogy társaik mit válaszoltak, csak azt, hogy egy adott válaszra hányan szavaztak a csoportból. A tanár viszont látja minden diáknál, hogy mire voksolt, illetve még arra is lehetősége van, hogy a mobilján azt vezényelje, hogy mikor jelenjen meg, hogy a válasz lehetőségek közül melyik a helyes. Ez arra ad lehetőséget, hogy a tanulók a válaszaik mellett érveljenek, még mielőtt a helyes megoldásra fény derül. Így nem csak azon tanulók lesznek bátrak, akik a helyesen válaszoltak.

A Plickers használata elősegíti az órák interaktivitását, és lehetőséget nyújt a tanulók tudásának gyors felmérésére. A tanulók neveinek a tanulására is alkalmas a program, ugyanis mindenki kódja felett megjelenik a neve egy piros vagy zöld pöttyel, attól függően, hogy helyes választ adott-e az illető. Emellett a rendszer anonim válaszadást is lehetővé tesz, ami különösen előnyös a félénkebb diákok számára. A tanárok számára az eszköz használata egyszerű, mivel csupán egy mobileszközre, a Plickers applikációra, valamint a letölthető és kinyomtatható kártyákra van szükség, amelyek belaminálva, akár éveken keresztül is használhatóak. Külön kiemelendő, hogy a program tudja kezelni a latex kódot, így egy matematika példa esetében a feladatok is szép formátumban tudnak kivetítésre kerülni. Ezen kívül képet, videót és még gif-et is lehet csatolni a feladatokhoz, amivel színesebbé tehető az óra.

A Plickers-szel először Fizika tanítása gyakorlaton találkoztam, mint hallgató. A tanárunk minden gyakorlatot ezzel a játékkal indított, és az előző órán elhangzottakra kérdezett rá. Itt vált szimpatikussá a program, ugyanis annak ellenére, hogy minden héten ezzel játszottunk egyáltalán nem lett unalmas vagy monoton a gyakorlat. Kifejezetten izgalmas volt, hogy a tanár úr úgy szólított fel minket az indoklásra, hogy ő tudta, hogy helyesen válaszoltunk vagy sem. Ezt a pozitív tapasztalatot követően gondoltam, hogy én is alkalmazni fogom a Plickers-t a *Bevezető analízis* gyakorlataimon, ami a visszajelzések alapján a legtöbb hallgatónak tetszett. A fizika tanárommal ellentétben, én a rövidebb házi feladatokat kértem számon a hallgatókon. Kialakult az a rendszer, hogy szerdánként, a másfél órás gyakorlat elején röpzh-t írtak és pénteken pedig Plickers-eztünk.

A legtöbb esetben úgy tűztem ki a feladatokat, hogy egy példatári feladathoz négy válaszlehetőséget készítettem. Számomra azért is nagyon szimpatikus ez a program, mert a hallgatóknak van idejük átgondolni a válaszukat, hiszen azért nem jár több pont, hogy valaki hamarabb feltartja a QR-kódját. Illetve segített a nevek memorizálásában is. Kifejezetten pozitívnak tartom ugyanis, hogy a nevükön tudtam szólítani a tanulókat.



2. ábra. 1. plickers kártya

6. A gyakorlatokon előforduló feladatok elemzése

A következőkben, a teljesség igénye nélkül, a *Bevezető analízis 2* gyakorlatokon előkerült, számomra különböző okokból érdekes feladatokat szeretném bemutatni. A gyakorlatokon *Gémes Margit és Szentmiklóssy Zoltán Bevezető analízis II. példatárából* [Zol16] és Keleti Tamás által írt kiegészítő feladatsorokról [Tam24] voltak feladva a példák.

Szinte minden gyakorlat után készítettem egy beszámolót az előadónak, Keleti Tamásnak, és ő is írt nekem, ez most segítségemre van a tapasztalataim rendszerezésében és megosztásában. Minden bemutatott feladatnál a megoldások és a tapasztalatok mellett röviden kitérek arra, miért találtam az adott feladatot különlegesnek, miért tartottam fontosnak, hogy a dolgozatomban megemlítsem, valamint megosztom a témakörökhöz kapcsolódó releváns gondolataimat is.

A feladatokat bizonyos szempontok alapján több csoportba soroltam. Az egyes feladatok nem az órákon elhangzott kronológiai sorrendben szerepelnek, hanem az általam kialakított rendszer szerint kerülnek bemutatásra. A kategóriák a következők: „Matematikai logika”, "Mit jelentenek a formulák?", „Hibakereső feladatok”, „Fizikához kapcsolódó feladatok”, „Geometriai problémák” és „Állítások logikai kapcsolatai”.

6.1. Matematikai logika

1.18. Ha esik az eső, akkor nem találsz rám. Melyik mondat jelenti ugyanezt?

(a) Ha nem esik az eső, akkor rám találsz.

(b) Ha rám találsz, akkor nem esik az eső.

Megoldás:
(b)
Az A állítás: "Esik az eső", a B állítás pedig: "Nem találsz rám."
1. Ismeretes, hogy $A \Rightarrow B$ ekvivalens azzal, hogy $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Az $A \Rightarrow B$ a piros következtetés, a $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ bedig a (b) következtetés. Az (a) mondat nem jelentheti ugynazt, mint a piros, hiszen a piros arról a helyzetről semmit nem állít, amikor nem esik az eső. Lehet akkor rám találsz amikor nem esik az eső, de lehet, hogy nem.
2. A feladatot igazságtáblázattal is megoldhatjuk. A három táblázat a piros, (a), és (b) állításokhoz tartozik, ebben a sorrendben.

A/B	**i**	**h**
i	i	h
h	i	i

A/B	**i**	**h**
i	i	i
h	h	i

A/B	**i**	**h**
i	i	h
h	i	i

Ezek alapján is belátható, hogy a piros mondattal a (b) ekvivalens, hiszen a hozzájuk tartozó igazságtáblázat ugyanaz.

1.21. Írjuk le a következő mondat tagadását! Van olyan méz, amit nem minden medve szeret.

Megoldás: Minden medve minden mézet szereti. VAGY Minden mézet minden medve szereti.

Mivel a "minden A-ra igaz B" ($\forall A : B$) tagadása: "van olyan A, amelyre nem igaz B" ($\exists A : \neg B$). A "van olyan A, amelyre igaz B" ($\exists A : B$) tagadása: "minden A-ra nem igaz B" ($\forall A : \neg B$).

Ahhoz, hogy azt az állítást tagadjuk, hogy "van olyan méz, amit nem minden medve szeret", meg kell mutassuk, hogy egyetlen mézre sem igaz, hogy létezik olyan medve aki nem szereti. Tehát csak azzal tagadjuk az állítást, ha azt mondjuk, hogy minden medve minden mézet szeret.

Gondolatok

Az előbbi két feladat az első órák egyikén került elő, mivel szorosabban kapcsolódtak a *Bevezető analízis 1* gyakorlat anyagához. A matematikai logika a középiskolában általában kevésbé hangsúlyos téma a 9-10. évfolyamon, azonban kiemelten fontos, hogy a hallgatók – jövőbeli tanárként – magabiztosak legyenek ezen a területen. Az elmúlt évek legtöbb középszintű érettségijében szerepeltek a matematikai logika témaköréhez kapcsolódó feladatok, amelyek gyakran állítások tagadását vagy az állításokkal ekvivalens formák meghatározását kérték.

Ezen feladatok megoldása természetesen fejleszti a hallgatók *általános szaktárgyi tudását*, ugyanakkor pozitív hatással lehet a *specializált szaktárgyi tudásukra* is. Ugyanis ebbe a tudástartományba tartozik az a képesség, hogy a tanár két különböző tanulói megoldási menetről el tudja dönteni, hogy egyaránt jó-e. Így tehát annak felismerése, hogy mely mondatok jelentik ugyanazt, kifejezetten fontos lehet, ha egy tanuló máshogyan fogalmazza meg ugyanazt az állítást, mint társa.

Tapasztalatok

Az **1.18.** feladat megoldása során a hallgatók közül kezdetben sokan csak az egyik állítás igazságának bizonyítására koncentráltak, és nem gondoltak arra, hogy a válaszok között akár az „egyik sem" vagy a „mindkettő" is szerepelhet. Emiatt szükség volt arra, hogy külön hangsúlyozzuk: az ilyen típusú feladatoknál mindkét állítást külön-külön meg kell vizsgálni, és tisztázni kell, hogy az állítások pontosan ugyanazt jelentik-e, mint az eredeti. Utólag visszatekintve, ezt a pontosítást már a feladat kiadása után egyből meg kellett volna tenni, hogy elkerüljük a félreértéseket. Egyes hallgatók maguktól készítettek igazságtáblázatot, ami segítette őket a probléma megoldásában. Ugyanakkor voltak olyanok is, akiknek kevésbé ment a feladat precíz meggondolása. Időnként úgy tűnt, hogy a részletekbe menő tárgyalás

túl hosszadalmas lett, ami a csoport néhány tagjánál csökkentette az érdeklődést. Mindezek ellenére a feladat relevanciája vitathatatlan, és jelentős mértékben hozzájárult a logikai gondolkodás fejlesztéséhez.

Az **1.21.** feladat szintje alapján akár középszintű érettségi feladat is lehetne, és a második félévben szerencsére már nem okozott különösebb nehézséget a hallgatóknak. Ugyanakkor tapasztalataim szerint a diákok gyakran nehézségekbe ütköznek az egyetemi tanulmányaik során az ilyen típusú feladatokkal kapcsolatban, különösen akkor, ha a téma elsajátítása nem volt kellően alapos, és hosszabb idő telt el azóta, hogy ezzel foglalkoztak. Ez a feladat típus különösen fontos, mert megalapozza a matematikai állítások kvantorokkal való megfogalmazását, azok tagadásának helyes leírását, valamint bizonyításokban való felhasználását. Ha valakinek már egy ilyen, viszonylag egyszerű feladatban is problémái vannak, az akadályozhatja a matematikai logika magasabb szintű megértését, ami a későbbi tanulmányok során komoly hátrányt jelenthet. Éppen ezért elengedhetetlen, hogy az ilyen alapokat már korán stabilizáljuk.

6.2. Mit jelentenek a formulák?

Bevezető analízis 2 1. kiegészítő feladatsor, 4. feladat Legyen H tetszőleges halmaz. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi formulák?

(a) $(\exists x)\,(x \in H)$

(c) $(\forall x)\,(x \in H \implies x \in \mathbb{Z})$

Megoldás

(a) H-nak van legalább egy eleme.

(c) H halmaz minden eleme egész.

Bevezető analízis 2 1. kiegészítő feladatsor, 5. feladat Mi ez a halmaz?

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 5\}$

(b) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 5 \wedge (x = 3 \vee x = -4)\}$

(d) $\{x \in \mathbb{Z} : (y \in \mathbb{Z}) \wedge y < x \implies y^2 < 4\}$

Megoldás

(a) Azok az egészek, akiknek abszolút értéke kisebb háromnál.

(b) $\{\}$

(d) $\{\}$

Gondolatok

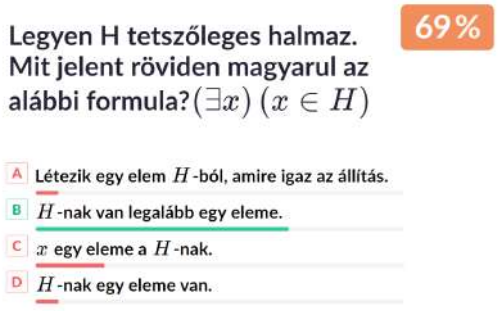
Az előbbiekben azon feladatok bemutatása volt a célom, amelyeket könnyedén tudtam a 4. fejezetben említett, Plickers program segítségével számonkérni. Ezeket a feladatokat házi feladatnak adtam fel, majd az órán a Plickers-ben 4 válaszlehetőséget adtam meg és azokból kellett kiválasztania mindenkinek a csoportból, hogy melyik a helyes.

A *Bevezető analízis 2 kiegészítő feladatsorait* Keleti Tamás készítette, kifejezetten azért, hogy a hallgatók a kvantorokat stabilan tudják használni és ne okozzon gondot nekik egy halmaz értelmezése, ha az nem szöveggel van megadva, hanem matematikai jelekkel. A *Bevezető analízisnek* kifejezetten célja, hogy olyan stabil alapot adjon, aminek a segítségével a későbbiekben egy analízis feladat értelmezése már nem okoz gondot.

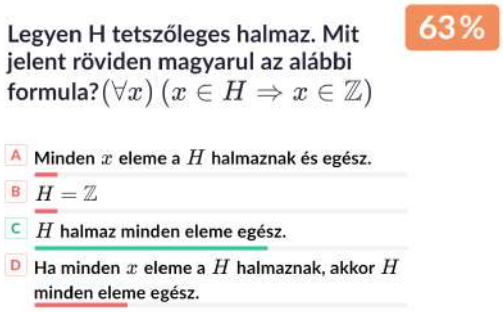
Ezen feladatok is értelemszerűen fejlesztik a hallgatók *általános szaktárgyi tudását*, azonban ez esetben is elmondható, hogy a *specializált szaktárgyi tudásukat* is. Ugyanis egy feladat gyors ellenőrzésénél elengedhetetlen, hogy a matematikai formulák olvasása folyékonyan menjen a tanároknak. A kvantorokkal ugyan nem találkoznak a diákok minden középiskolában, azonban az középszinten is elvárás, hogy egy halmazt meg tudjanak adni a gyerekek, nem csak szöveggel, hanem halmazelméleti jelekkel is. Ennek gyors, és gördülékeny ellenőrzéséhez elengedhetetlen a tanárok számára a *specializált szaktárgyi tudás*. A Plickers is ennek a területnek a fejlesztését célozta meg, ugyanis a diákok azt gyakorolhatták, hogy könnyedén el tudják dönteni, hogy melyik válasz helyes az általam megadott lehetőségek közül.

Ezen kívül azt is fontos megemlítenem, hogy én is fejlődtem ezen feladatok kapcsán a *szaktárgyi és diákokról szóló tudás* területén, ugyanis amikor a különböző válaszlehetőségeket állítottam össze, akkor fontos volt annak ismerete, hogy a diákok milyen félreértésekbe ütközhetnek a példák kapcsán. A rossz válaszokat úgy kellett meghatároznom, hogy ne legyen teljesen triviális, hogy mi a jó megoldás. Itt természetesen segített, hogy én magam is nem olyan régen találkoztam tanulóként ezekkel a feladatokkal, így tudtam, hogy mi lehet az, ami "jónak tűnő" rossz válasz.

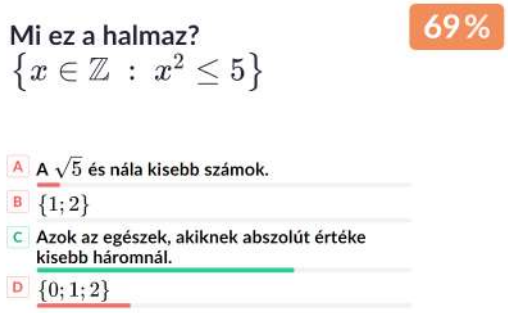
Tapasztalatok



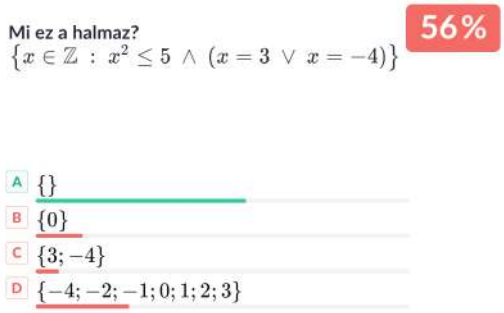
1. feladat



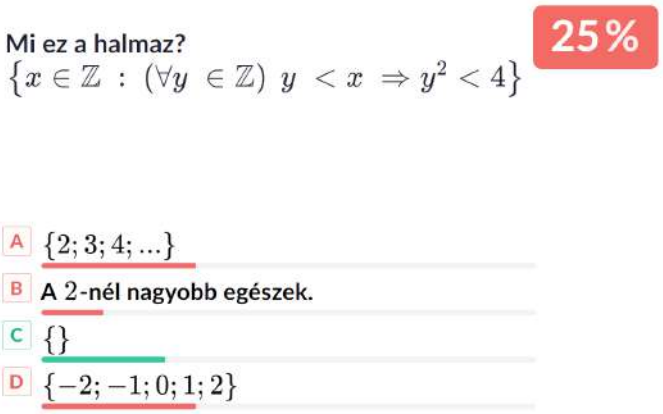
2. feladat



3. feladat



4. feladat



5. feladat

A fenti képeken látható, hogy az 5 feladat esetén milyen válasz opciókat adtam meg a hallgatóknak és az egyes kérdésekre milyen arányban érkeztek A-B-C-D válaszok a diákoktól. Látható, hogy annak ellenére, hogy otthon tudtak gondolkozni a feladatokon, korántsem lett sehol 100% -os az eredmény.

Az öt feladat eredményeinek elemzése alapján megállapítható, hogy a hallgatók számára különböző szintű nehézséget jelentettek a logikai kvantorokkal és halmazelmélettel kapcsolatos kérdések. Az első feladatban, amely azt kérdezte, mit jelent a létezik (∃) kvantorral adott állítás egy halmazra nézve, a hallgatók 69%-a adott helyes választ. Ez az eredmény azt jelzi, hogy a hallgatók nagy része képes volt felismerni a létezés kvantor jelentését, és értelmezni tudta, hogy a feladat szerint a megadott halmaznak van legalább egy eleme. Ennek ellenére az eredmény arra utal, hogy a második félév 6. óráján a fogalom értelmezése még nem volt teljes körű, hiszen a helytelen válaszok is jelentős arányban voltak jelen. Meglepő, hogy sokan az A, C vagy D lehetőségre voksoltak, ez azt jelzi, hogy a halmazelmélet alapfogalmai és a kvantorok értelmezése még nem volt mindenkinek egyértelmű. Véleményem szerint ez abból is adódhatott, hogy a hallgatók közül sokan csak közép szintű érettségivel érkeztek az egyetemre, kvantorokkal a középiskolai tanulmányaik alatt egyáltalán nem találkoztak, így nekik teljesen új, a maximum féléve megjelent fogalom.

A második feladatban a minden ($\forall$) kvantorral kapcsolatos állítás értelmezése volt a cél. Itt a helyes válaszadási arány 63% volt, ami azt mutatja, hogy a hallgatók egy része nem volt biztos abban, hogyan kell értelmezni azt, hogy egy halmaz minden eleme megfelel egy adott feltételnek. Ez arra utal, hogy a „minden" kvantor és az implikációs ($\Longrightarrow$) kapcsolat helyes értelmezése ekkor még nehézséget okozott többeknek. Itt is kifejezetten elgondolkodtatónak találom, hogy a D jelű válaszra ennyi megoldás érkezett, hiszen ebből kitűnik, hogy a hallgatók egy nagy hányadának nem okozott fennakadást, hogy a mondatnak nincs is értelme. Ilyen esetekben tanárként fontos ezt szem előtt tartani, hogy valószínűleg a mi általunk ismertetett anyag is hasonlóan érthetetlennek hangzik a diákok számára. Mindenképp érdemes a figyelmüket felhívni arra, hogy a matematikát értés nélkül lehetetlen tanulni és hangsúlyozni, hogy ha egy fogalom vagy kifejezés nem világos, akkor azt jelezzék az előadó vagy a gyakorlatvezetők felé, hogy semmiképp ne maradjanak le, főleg ilyen hamar az anyagban.

A harmadik feladat azzal a céllal készült, hogy a hallgatók gyakorolják a halmazok feltétel alapú meghatározását. A $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 5\}$ halmaz értelmezése a hallgatók 69%-ának sikerült helyesen. Ez az eredmény azt sugallja, hogy az egyszerűbb halmazmeghatározások jobban érthetőek a hallgatók számára, különösen, ha a feltételek világosan definiáltak. Ugyanakkor néhány válasz rámutatott arra, hogy az abszolút érték és a feltételek kombinált alkalmazása nem mindenki számára volt egyértelmű. Középiskolában is sokszor tapasztalható, hogy a gyerekeknek az egyenlőtlenséget, négyzetet, pláne, mindkettőt tartalmazó feladatok sokszor kihívást jelentenek. Ezért gondolom, hogy érdemes az egyenlőtlenségekkel kapcsolatos feladatokat egy számegyenesen szemléltetni, ahogyan az több iskolában is bevett gyakorlat. A halmaz definiálásnál pedig érdemes lépésenként végigvenni, hogy; "mely számok kerülhetnek a halmazba, ha tudjuk, hogy $x \in \mathbb{Z}$", majd "kik azok a számok, amelyek négyzete kisebb egyenlő 5-tel az egészek közül?" Itt érdemes lehet akár a kezdetben felírni a táblára, az első kérdés megválaszolását követően, hogy "$\cdots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$, majd pedig kihúzni azokat a számokat, amelyekre nem igaz, hogy a négyzete kisebb egyenlő 5-tel, ill. bekarikázni amire igaz és ezt követően közösen megfogalmazni, hogy hogyan lehetne összefoglalni, hogy mi a közös tulajdonságuk a bekarikázott számoknak. Azt gondolom, hogy annak ellenére, hogy házi feladat volt, többen nem foglalkoztak ezzel a feladattal, és az órán nem tudták rövid idő alatt végiggondolni a választ. Itt nem tartom annyira problémásnak, hogy többen nem a jó választ jelölték, mert az A, B, D válasz sem teljesen elképzelhetetlen, mint az első és második feladat esetében a rossz válaszok.

A negyedik feladatban egy összetettebb feltétel alapján kellett megállapítani egy halmaz elemeit. A $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 5 \wedge (x = 3 \vee x = -4)\}$ halmazra vonatkozó kérdésnél a helyes válaszadási arány mindössze 56% volt. Ez az eredmény egyértelműen mutatja, hogy a hallgatók számára a komplexebb logikai kapcsolatok, például az „és" ($\wedge$) és „vagy" ($\vee$) operátorok együttes kezelése kisebb nehézséget okozott. Több hallgató láthatóan, hibásan azt feltételezte, hogy az „és" operátor azt jelenti, hogy a halmazban azok az egészek is benne vannak, akikre igaz a $x^2 \leq 5$ feltétel valamint azok is akikre az $x = 3$ és $x = -4$ teljesül. Ezek a

hibák is véleményem szerint arra a problémára vezethetőek vissza, hogy a hallgatóknak az operátorok és kvantorok olvasása még komoly nehézséget okozott ekkor. Ez egy olyan készség, amelyet a *Bevezető analízis* gyakorlat fejleszteni próbál.

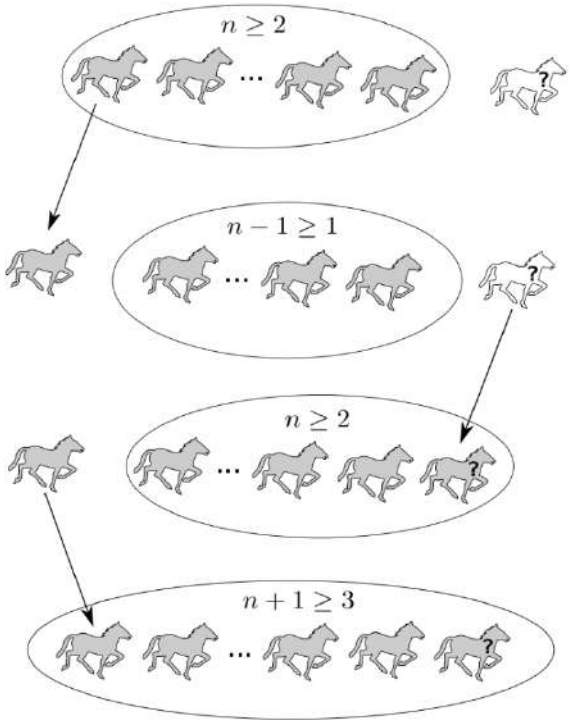
Az utolsó feladat, amelynek helyes válaszadási aránya mindössze 25% volt, egyértelműen a legnagyobb kihívást jelentette a hallgatók számára. A feladatban megjelenő halmaz a következő volt: $\{x \in \mathbb{Z} : (\forall y \in \mathbb{Z})(y < x \implies y^2 < 4)\}$. Ez egy bonyolult logikai állítást fogalmazott meg, amely a „minden" kvantor ($\forall$) és a „ha-akkor" ($\implies$) kapcsolat együttes alkalmazását követelte meg. Valamint több betű is megjelent a felírásban, nem úgy, mint a korábbi feladatokban, hiszen itt nem csak x, de y is szerepelt a halmaz definiálásában. A válaszokból kiderült, hogy sok hallgató nem értette pontosan, hogy x-nek olyan alsó korlátot kell képeznie, amely alatt már nincs olyan y, amelyre $y^2 \geq 4$. A helytelen válaszok arra utalnak, hogy a hallgatók gyakran nem tudták helyesen értelmezni a kvantorok hatókörét és az implikációs kapcsolatot. Külön érdekességként megjegyezendő, hogy az ötödéves matematika tanárszakos hallgatótársaimnak is komoly fejtörést okozott ez a feladat, mikor megmutattam nekik, és voltak, akik nem látták át, hogy mi a helyes megoldás. Tehát a tapasztalat azt mutatja, hogy annak ellenére, hogy később a kvantorok olvasása már nem okoz gondot a hallgatóknak, még így is lehet olyan komplexen megfogalmazott feladatot feladni ebben a témakörben, amely kifog egy, a kvantorok és implikációk körében jártas emberen is. Természetesen ettől még fejleszteni kell ezt a területet, de ennél a feladatnál nem lepett meg olyan nagyon az eredmény.

6.3. Hibakeresős feladatok

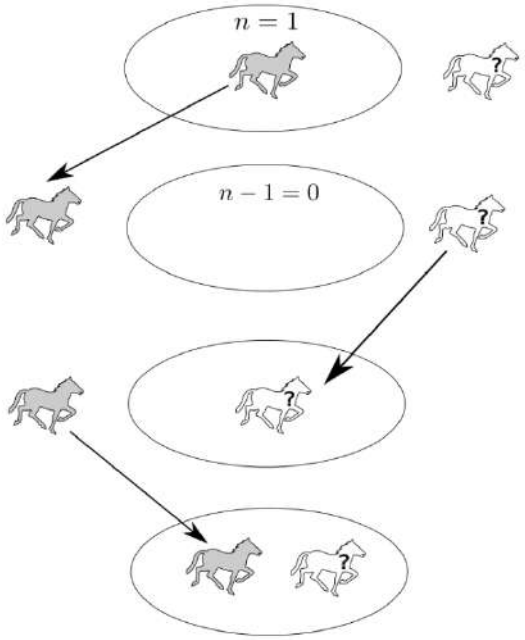
1.100. Állítás: Minden ló egyszínű.
Bizonyítás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely n ló egyszínű. Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy igaz n-re, és ebből fogjuk $n+1$-re belátni: adott $n+1$ ló közül az indukciós feltevés miatt az 1., 2., … , n. is egyszínű és a 2., … , n., $(n+1)$. is egyszínű, tehát mind az $n+1$ ló egyszínű.
Keressük meg a hibát!

Megoldás
A hiba abban rejlik, hogy az $n = 2$ esetében nincs olyan átfedés, amely biztosítaná, hogy a két ló egyszínű legyen.
Az indukciós lépésben azt feltételeztük, hogy az $n+1$ lovak között kiválasztott bármelyik ló eltávolítása után a maradék csoport egyszínű marad, és hogy a két részhalmaz átfedése garantálja az egyszínűséget. Ez azonban $n = 1$-nél nem igaz, mert ha egyetlen lóhoz hozzáadunk még egyet, és eltávolítunk egy lovat, akkor az üres halmaz nem tartalmaz információt

a színek egyezéséről. Ezért az $n+1$-edik ló színe eltérhet.
Az alábbi ábrák jól szemléltetik a hibát: [Ist19]



5. ábra. $n \geq 2$ eset: indukciós feltétel alkalmazása



6. ábra. $n = 2$ eset: a hiba megjelenése

A hibás indukciós lépés miatt az állítás, miszerint „minden ló egyszínű”, nem bizonyítható teljes indukcióval.

1.99. Állítás: Ha $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, akkor minden pozitív egész szám 1.

Bizonyítás teljes indukcióval: Az állítás $n = 1$-re igaz. Most induljunk ki abból, hogy $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\quad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Ha $n \geq 2$, akkor írjuk fel az előbbi azonosságot n helyett $(n-1)$-gyel:$1+2+\cdots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$.
Adjunk mindkét oldalhoz 1-et: $1+2+\cdots+n = \frac{(n-1)n}{2} + 1$.
Tehát $\frac{(n-1)n}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$, amiből következik, hogy $n = 1$.
Keressük meg a hibát!

Megoldás

A bizonyítás hibájának a kulcsa, hogy abban a lépésben, amikor mindkét oldalhoz 1-et adtunk, a bal oldalon nem egy n tagú összeg lett, hanem egy $n-1$ tagú: $1+2+\cdots+(n-2)+n$, tehát az $(n-1)$ nem szerepel a tagok között, így nem helyes az a következtetés sem, hogy az előbbi összeg $\frac{n(n+1)}{2}$-vel egyenlő, vagyis a $\frac{(n-1)n}{2} + 1 \neq \frac{n(n+1)}{2}$, mégpedig $\frac{n(n+1)}{2}$ éppen $n-1$-gyel több, mint $\frac{(n-1)n}{2}+1$. Ez az alábbiakban jól látható: $\frac{n(n+1)}{2} - (n-1) = \frac{n^2+n-2n+2}{2} = \frac{n^2-n+2}{2} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$.

Gondolatok

A hibakeresős feladatok kiemelten fontos szerepet töltenek be a matematikai gondolkodás fejlesztésében, különösen azok számára, akik a jövőben matematika tanárok lesznek. Ezek a feladatok sem csak az *általános szaktárgyi tudást* fejlesztik a hallgatókban, hanem arra is rávilágítanak, hogy egy megoldás helyességének megítélése tanárként sem mindig egyszerű, tehát a *specializált szaktárgyi tudásra* is ugyanúgy pozitív hatással vannak.
Leendő tanárként elengedhetetlen, hogy gyakoroljuk annak észrevételét, hogy egy bizonyításban hiba rejlik. Gyakran előfordulhat az oktatás során, hogy egy diák által bemutatott megoldás első ránézésre logikusnak és hihetőnek tűnik, mégis rejtett hibákat tartalmaz. Ezért azt gondolom, hogy nagy óvatossággal és elővigyázatossággal kell, főleg a jó képességű tanulók megoldásait ellenőrizni. A „Minden ló egyszínű" típusú feladatok kitűnő példát szolgáltatnak arra, hogy a látszólag hibátlan érvelések miként lehetnek mégis tévesek. Az ilyen példák arra tanítják a hallgatókat, hogy a matematikai bizonyításokat mindig kritikusan vizsgálják meg, és ne elégedjenek meg azzal, hogy egy érvelés „jónak tűnik" – annak valóban helyesnek is kell lennie. A hibás bizonyítás elemzése során a diákok felismerhetik, hogy a matematikai érvelésben minden lépésnek szigorú logikai alapokon kell állnia, és hogy a látszólag apró figyelmetlenségek komoly következményekkel járhatnak.
Az ilyen típusú feladatok további előnye, hogy elgondolkodtató módon mutatják be a matematikai bizonyítások természetét, valamint mulatságos jellegük miatt különösen alkalmasak a hallgatók figyelmének és motivációjának fenntartására. A „Minden ló egyszínű" állítás egyaránt szórakoztató és tanulságos. Rámutat, hogy a matematikában elővigyázatosságra van szükség, mivel az érvelésekben előfordulhatnak rejtett feltételezések, amelyek megkérdőjelezhetik a bizonyítás helyességét.
Ezeken túl, a teljes indukció módszerének alkalmazása központi szerepet játszik a matemati-

kai bizonyításokban, és ez a feladat kiválóan szemlélteti az indukció helyes alkalmazásának feltételeit. A teljes indukciós bizonyítások könnyűnek gondolt, és ezért sokszor nem teljes figyelemmel végrehajtott része, annak vizsgálata, hogy kis n-ekre az állítás helyes-e. Gyakori hiba ugyanis ennek a kezdeti lépésnek az elhanyagolása, vagy csak részben való elvégzése, ami "lyukas" érveléshez vezet.

Az egyik gyakori probléma a matematika feladatok megoldásánál, amelyre az **1.99.** feladat jól rámutat, a jelölések nem egyértelmű definiálása. Például egy bizonyításban a „…" szimbólumot gyakran használjuk arra, hogy egy sorozatot vagy egy minta folytatását jelöljük. Ha azonban nem tisztázzuk, hogy pontosan mit értünk alatta, akkor előfordulhat, hogy a megoldás bizonyos pontjain téves következtetéseket vonunk le.
A feladat tehát didaktikai szempontból rendkívül értékes, mert rámutat arra, hogy a matematikában a jelölések precíz használata mennyire elengedhetetlen. Nemcsak a hibák elkerülése érdekében fontos, hanem azért is, hogy a megoldás érthető és követhető legyen mások számára. Különösen leendő tanároknak kell ezt figyelembe venniük, hiszen az ő felelősségük lesz, hogy diákjaikat a pontos és egyértelmű gondolkodásra tanítsák.

Tapasztalatok
Az **1.100.** feladatot, mivel a csoportból senkinek sem sikerült megoldania "Túró Rudis" feladatnak adtam fel. (A helyes megoldásért Túró Rudit ígértem a hallgatóknak.) Ennek ellenére a csoportból csak ketten voltak, akik megbirkóztak vele és közülük is az egyikük internetes segítséget használt hozzá.

A feladatot a hosszas gondolkozási idő után én prezentáltam a táblánál a fent látható ábrák segítségével, ugyanis véleményem szerint ezek az ábrák kellően szemléletesek. Ezt követően a hallgatókban sok kérdés született és ezeket hosszasan megvitattuk.

Az **1.99.** feladatot már sokaknak sikerült abszolválni. Azt gondolom, hogy itt kevésbé volt a hiba "elrejtve", mint a lovas feladat esetében. Többek hamar észrevették, hogy azzal a ponttal van a probléma, amikor mind a két oldalhoz 1-et adunk.

6.4. Fizikával kapcsolatos feladatok

Bevezető analízis 2 1. kiegészítő feladatsor, 3. feladat
(a) Egy futó 20 kört fut, a köröket rendre $v_1, \dots, v_{20}$ sebességgel futja. A teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \dots, v_{20}$ sebességeknek?
(b) Egy másik futó 20 percig fut, a sebességét percenként változtatja, a k-adik percben v_k sebességgel fut ($k = 1, 2, \dots, 20$). Az ő teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \dots, v_{20}$ sebességeknek?
(c) Melyik futónak nagyobb az átlagsebessége?

Megoldás

(a) Egy kör hossza s. Ekkor az i. kört $t_i = \frac{s}{v_i}$ ideig futja le a futó. Az átlagsebesség: $v_{atl.} = \frac{s_{osszes}}{t_{osszes}}$, (összes út / összes idő). Az össezs út $20s$, az összes idő $\sum_{i=1}^{20} t_i$. Tehát az átlagsebesség: $v_{atl.} = \frac{20s}{\sum_{i=1}^{20} \frac{s}{v_i}}$, ami egyszerűsítés után a következő alakban írható fel: $v_{atl.} = \frac{20}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\dots\frac{1}{v_{20}}}$. Ami jól láthatóan a harmonikus közepe a $v_1, \dots, v_{20}$ sebességeknek.

(b) Ebben az esetben az i. percben lefutott útja a futónak $s_i = v_i \cdot t$, mivel a a $t = 1s$ minden táv esetén, ezért $s_i = v_i \cdot 1s$. Az összes idő ebben a feladatban $20s$, az összes út pedig $\sum_{i=1}^{20} s_i = \sum_{i=1}^{20} v_i \cdot 1s$, vagyis az átlagsebesség: $v_{atl.} = \frac{v_1+v_2+\dots+v_{20}}{20}$. Ami jól láthatóan a számtani közepe a $v_1, \dots, v_{20}$ sebességeknek.

(c) A számtani és harmonikus közepek között az alábbi összefüggés ismert:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha: $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Tehát a két futó átlagsebessége közti összefüggés: $\frac{v_1+v_2+\dots+v_{20}}{20} \geq \frac{20}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\dots\frac{1}{v_{20}}}$ és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a v_i-k mind egyenlőek, ami azt jelenti, hogy a futó nem változtatja a sbességét, hanem végig az egész futása alatt ugyanakkora sebességgel fut.

1.134. Egy motorcsónak motorja a csónakot állóvízben v sebességgel hajtja. A csónak az u sebességű folyóban s utat tesz meg a folyás irányában, majd visszamegy a kiindulási helyéhez. Mennyi lesz az átlagsebessége a teljes úton v-hez képest: v-vel egyenlő, v-nél nagyobb vagy v-nél kisebb?

Megoldás

A csónak sebességéhez, amikor a folyó folyásának irányában halad, akkor hozzáadódik a folyó sebessége, visszafelé pedig levonódik. Tehát odafelé $v + u$ sebességgel, bisszafelé $v - u$ sebességgel halad.

(A feladatnak természetesen csak akkor van értelme, ha $u < v$.)

Az átlagsebesség: $v_{atl.} = \frac{s_{ossz.}}{t_{ossz.}}$, (összes út / összes idő). Az össezs út $2s$, az összes idő pedig $t_1 + t_2$. Az odafele úton a csónak mozgásának ideje $t_1 = \frac{s}{v+u}$, visszafelé $t_2 = \frac{s}{v-u}$.

Az átlagsebessége tehát:

$$v_{atl.} = \frac{2s}{\frac{s}{v+u} + \frac{s}{v-u}} = \frac{2}{\frac{1}{v+u} + \frac{1}{v-u}}$$

Ez azt jelenti, hogy az átlagsebesség a $v + u$ és $v - u$ harmonikus közepe. A $v + u$ és $v - u$ számtani közepe pedig éppen v. Mivel ismeretes a számtani és a harmonikus közép közti összefüggés, így mondható, hogy $v \geq \frac{2}{\frac{1}{v+u} + \frac{1}{v-u}}$. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $v + u = v - u$, tehát $u = 0$, vagyis a folyó nem folyik.

Vagyis abban az esetben, ha a folyó folyik, az átlagsebessége kisebb lesz a csónaknak, mint v.
A feladat természetesen meggondolható közepek használata nélkül is. Az átlagsebességet tovább alakítva a következőket kapjuk:

$$v_{\text{átlag}} = \frac{2}{\frac{1}{v+u} + \frac{1}{v-u}} = \frac{2}{\frac{v-u+v+u}{(v+u)(v-u)}} = \frac{2}{\frac{2v}{v^2-u^2}} = \frac{v^2-u^2}{v} = v - \frac{u^2}{v}$$

Mivel $\frac{u^2}{v} > 0$, ezért $v_{\text{átlag}} = v - \frac{u^2}{v} < v$.

A feladat szemléletesen meggondolható a következő módon is: a folyóval egy irányba a csónak gyorsabban megy, mint a folyóval ellentétes irányba haladva, tehát a második esetben tovább tart az út megtétele, hiszen ugyanakkora utat kisebb sebességgel hosszabb ideig tesz meg. Az átlagsebességedet ez a lassú szakasz befolyásolja. Több ideig halad a csónak lassan, mint gyorsan, ezért az egész úton az átlagsebessége mindig kisebb lesz, mint amikor állóvízben halad v sebességgel.

Gondolatok

Az analízis oktatása során különösen fontos, hogy a hallgatók találkozzanak fizikával kapcsolatos feladatokkal, még akkor is, ha a fizika nem a másik szakjuk. Ezek a feladatok nemcsak a matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazását segítik, hanem rávilágítanak arra is, hogy az analízis milyen központi szerepet játszik a természettudományokban. Éppen ezért ez a feladat jól fejleszti a hallgatók *horizont szaktárgyi tudását*.
A fizikában számos jelenség leírása és megértése analízisbeli fogalmakra és módszerekre épül. Többek között a deriválás és integrálás az, ami szorosan kapcsolódik az analízishez és elengedhetetlen eszköze a fizikának is, de gondolhatunk például az átlagsebesség kiszámítására különböző körülmények között. Amely valójában különböző típusú középértékek – harmonikus és számtani közepek – megértésére és helyes alkalmazására vezethető vissza, így ideális feladat analízis gyakorlaton.
Ezek a feladatok különösen fontosak a jövő matematika tanárai számára, hiszen a középiskolai tanítás során is gyakran előfordulhat, hogy a diákok egy-egy fizikai jelenséget próbálnak megérteni matematikai eszközök segítségével. A tanároknak fel kell készülniük arra, hogy ezeket a kapcsolatokat érthetően magyarázzák el, és segítsenek a diákoknak átlátni a két tudományterület közötti összefüggéseket.
Továbbá ezen feladatok fejlesztik a hallgatók *szaktárgyi tartalmi tudását* is. Az ilyen típusú problémák megoldása többféle gondolkodási lépést igényel: a szöveg értelmezésétől kezdve a helyes modell felállításán át a matematikai számítások elvégzéséig. Ezáltal a hallgatók nemcsak a matematikai módszereket mélyítik el, hanem azt is megtanulják, hogyan kell ezeket alkalmazni gyakorlati helyzetekben.

Az is lényeges szempont, hogy a fizikai kontextusban való gondolkodás segíti a hallgatókat abban, hogy a matematika ne csak elméleti diszciplínaként jelenjen meg számukra, hanem olyan eszközként, amely valós problémák megoldásában is hasznos lehet. A matematika tanításának egyik kulcsfontosságú célja, hogy a diákokat megtanítsa a logikus, analitikus gondolkodásra, amely túlmutat a szigorúan vett tantárgyi határokon.

Tapasztalatok

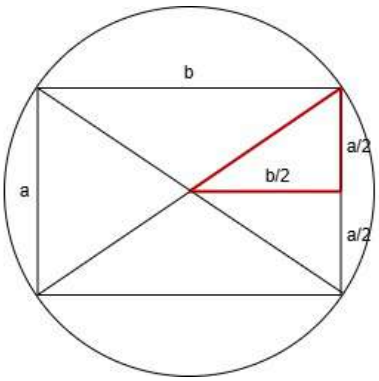
Általános tapasztalat volt, mind a két feladat esetében, hogy szinte csak azon tanulók tudtak megbirkózni vele, akiknek a másik szakja a fizika volt. Nehéz belehelyezkednem az ő helyzetükbe, de mindenesetre ez meglepő volt számomra, bár az egyetemen hallgatóként is tapasztaltam, hogy a nem fizika szakpárral rendelkező diáktársaim nehezebben értik az analízisen megjelent fizika példákat, mint más feladatokat. Előfordulhat, hogy már az a tény, hogy egy olyan feladattal foglalkozunk ami "fizika" és ez nem volt sikerélmény nekik a gimnáziumban, azt eredményezi, hogy a hozzáállásuk miatt nem tudnak boldogulni a példával.

6.5. Geometriai feladat

1.136. Melyik az egységkörbe írható maximális területű téglalap?

Megoldás

Ez a feladat többféleképpen is megoldható. Ezen megoldások közül 4-et közlök.



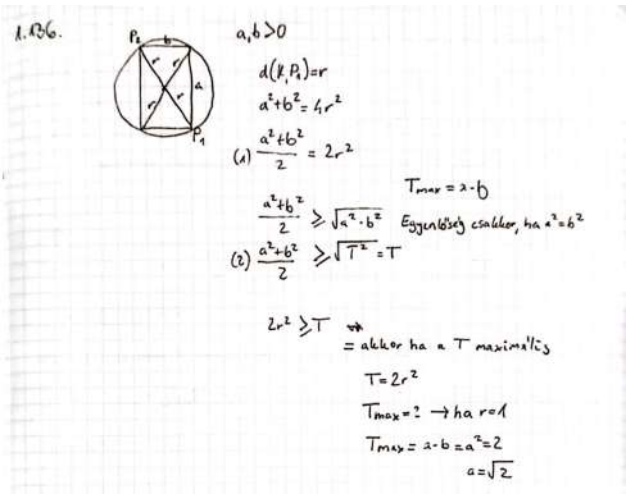
1. megoldás: A maximális területű téglalap oldalai legyenek a és b. Ekkor az ábrán látható piros derékszögű háromszög befogói $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$ hosszú. Az átfogója pedig 1 hosszúságú, mivel ez az egységkör sugara. A háromszögre a Pitagorasz-tétel felírható, miszerint: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1$, ami átrendezve: $\frac{b}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. A téglalap területe az alábbi módon számolható: $T = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot 4 = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot 4$

Ennek keressük tehát a maximumát. T maximuma ott van, ahol $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}$ maximuma. A számtani és mértani közép közti összefüggést felhasználva felírhatjuk, hogy:

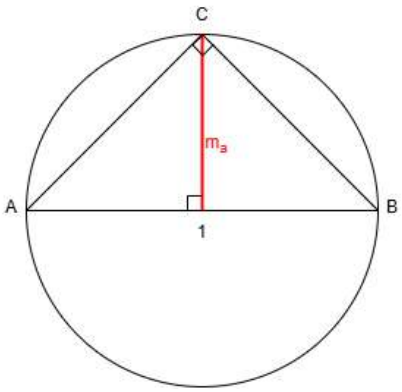
$$\sqrt{\frac{a^2}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)} \leq \frac{\frac{a^2}{4} + \left(1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}{2} = \frac{1}{2}$$

Egyenlőség pedig akkor és csak akkor van, ha $\frac{a^2}{4} = 1 - \frac{a^2}{4}$. Tehát T akkor maximális, ha $\frac{a^2}{2} = 1$, vagyis $a = \sqrt{2}$. Ebből pedig következik, hogy ha $\frac{b}{2} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, hogy $b = \sqrt{2}$. Vagyis a $\sqrt{2}$ oldalú négyzetnek lesz a legnagyobb az egységkörbe írható téglalapok közül a területe.

2. megoldás:



3. megoldás: A feladat megoldható úgy is, a fenti ábra jelöléseit használva, – középiskolás módszerekkel – hogy észrevesszük, hogy a pirossal jelölt $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$ befogójú háromszög területe nyolcada az a és b oldalú téglalapnak. Tehát a téglalap területe akkor maximális, amikor a piros háromszög területe is az. A piros háromszög átfogója 1, tehát azt kell meghatároznunk, hogy mekkorák a befogói egy egység átmérőjű derékszögű háromszögnek. Ennek a meghatározására a Thalész kör van segítségünkre.



Amennyiben, az ábrán is jelölt A és B csúcs a háromszög átfogójának két végpontja, akkor a C csúcs, ahol a derékszög van mindenképp a köríven kell elhelyezkedjen.

A háromszög területe számolható, amennyiben a háromszög átfogója 1 és a hozzá tartozó magasság m_a, mint $\frac{1 \cdot m_a}{2}$. Tehát a kérdés már csak az, hogy az m_a mely C-re maximális. Jól láthatóan $0 < m_a \leq \frac{1}{2}$, az $\frac{1}{2}$-et csak akkor veszi fel, amikor a háromszög egyenlő szárú, tehát az $\overline{AC} = \overline{CB} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Tehát a téglalap területe akkor maximális, amikor $\frac{a}{2} = \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, vagyis $a = b = \sqrt{2}$.

4. megoldás: A feladat megoldható deriválás segítségével is. Az 1. megoldásban levezetett összefüggésnek keressük a maximumát. T maximuma ott van, ahol $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{4 \cdot a^2 - a^4}$ maximuma. Ennek a kifejezésnek pedig ott lehet maximuma, ahol a deriváltja nulla. A deriváltja $-\frac{a(a^2-2)}{2\sqrt{-a^2(x^2-4)}}$, $(a \neq \pm 2)$ akkor 0, ha

$$a = 0$$

vagy

$$a^2 - 2 = 0$$

$$a = \pm\sqrt{2}$$

Tehát ebből a megoldásból is látszik, hogy a téglalap területe akkor maximális, ha $a = b = \sqrt{2}$.

Gondolatok

A geometria és az analízis szoros kapcsolatban állnak egymással, hiszen számos geometriai jelenség analitikus eszközökkel is leírható, például deriválással, integrálással vagy éppen egyenlőtlenségek segítségével.

Az ilyen feladatok analízis gyakorlaton azért különösen hasznosak, mert fejlesztik a hallgatók problémamegoldó képességét és matematikai kreativitását. A geometriai problémák gyakran többféle megközelítési lehetőséget kínálnak, ami arra ösztönzi a tanulókat, hogy különböző

módszereket próbáljanak ki, és felismerjék a közöttük lévő összefüggéseket. Az analízis elméleti eszközeit, például a nevezetes közepek közti összefüggések használatát, a geometriai helyzetekben történő alkalmazás révén gyakorlatiasabb módon lehet elsajátítani. A vizuális ábrák és a rajzok szintén kiemelt szerepet kapnak, hiszen segítenek a feladat pontos megértésében és a problémamegoldás logikai lépéseinek átlátásában.
Az **1.136. feladat** remek példa arra, hogy hogyan lehet egy problémát egyszerre geometriai és analitikus szemlélettel megközelíteni. A feladatban a maximum keresés természetesen megoldható deriválással is, amely kézenfekvő megoldásként felvetődhet, akár egy gimnáziumi csoportban is, de mivel a *Bevezető analízisnek* nem anyaga a deriválás, így ezt a megoldási módszert az órán is kértem, hogy hanyagolja a társaság.

Tapasztalatok

A gyakorlat során, ahol a fenti példa előkerült, azt tapasztaltam, hogy a hallgatók nagy többsége nem tudta megoldani a feladatot. Bár a probléma első ránézésre nem tűnik különösebben nehéznek, mégis több hallgató számára jelentős kihívást jelentett. A gyakorlaton csak egyetlen diák jelentkezett, hogy a táblánál bemutassa a megoldását. Az ő megközelítése az, ami csatolásra került fentebb. Fontosnak tartom itt azt kiemelni, hogy az a diák, aki sikeresen megoldotta a feladatot, az évfolyam egyik legügyesebb hallgatója.
A feladat megoldásának nehézsége mögött több tényező is állhatott. Az egyik probléma az volt, hogy a hallgatók közül sokan mindenáron a deriválás eszközéhez szerettek volna nyúlni, mert a középiskolai tanulmányaik során főként ezt a módszert használták a maximum- és minimumértékek meghatározására. Ez a reflex természetesen érthető, azonban a derivált használatát még teljesen hanyagoltuk az első évben és akik ezzel próbálkoztak sem jutottak sikerre, hiszen itt egy meglehetősen összetett függvény deriváltja a kérdés.
A másik jelentős probléma az volt, hogy többen nem tudták, hogyan kezdjék el a feladatot. Az egységkör adta speciális feltételek és az azokból következő összefüggések felismerése egyértelműen több gyakorlást igényeltek még ekkor.
Az is érdekes tapasztalat volt számomra, hogy egyes diákok már abban is bizonytalanok voltak, hogy miért alkalmazható az egyenlőtlenség a számtani és mértani közepek között. Felmerültek bennük olyan kérdések, mint: „Ezt honnan tudjuk? Bármikor felírhatjuk, csak úgy?” A legnagyobb nehézséget azonban az okozta, hogy megértsék: ha egy mennyiségnek van egy adott felső korlátja, akkor az a mennyiség pontosan akkor maximális, ha eléri ezt az értéket. További zavart keltett az is, hogy nem volt egyértelmű számukra, miért nem kell külön bizonyítani azt, hogy mikor áll fenn az egyenlőség. Felmerült a kérdés: „Nem éppen ez lenne a feladat? Vagy ezt most egyszerűen felhasználhatjuk?”
Őszintén szólva, számomra sem volt teljesen világos, hogy pontosan mi okozza a nehézséget. Végül úgy tűnt, hogy sikerült tisztázni a kérdéseket, de mindenképp fontos ezzel tisztában lenni, hogy a nevezetes közepek közti egyenlőtlenségek nem a legegyszerűbb téma a tanulók számára.

6.6. Matematikai indukció

Bevezető analízis 2 1. kiegészítő feladatsor, 1. feladat Legyen $A_1, A_2, \ldots$ állítások egy végtelen sorozata. Mely állításokról kell tudnunk közülük, hogy igazak, hogy az összes belátásához elég legyen minden pozitív egész n-re az alábbi következtetést bizonyítani?
(a) Ha igaz A_n, akkor igaz A_{n+1}.
(b) Ha igaz A_n, és A_{n+1}, akkor igaz A_{n+2} is.
(c) Ha igaz A_n, A_{n+1} és A_{n+2}, akkor igaz A_{n+3} is.
(d) Ha minden n-nél kisebb pozitív egész k-ra igaz A_k, akkor igaz A_n is.

Megoldás
(a) A_1. Amennyiben A_1-ről tudjuk, hogy igaz, illetve, hogy ha igaz A_n, akkor igaz A_{n+1}, abból következik, hogy A_2 is igaz. Amennyiben A_2-ről tudjuk, hogy igaz, illetve, hogy ha igaz A_n, akkor igaz A_{n+1}, abból következik, hogy A_3 is igaz. Ez így megy tovább egészen az utolsó állításig, A_m-ig. Illetve A_1-ről mindenképp kell tudjuk, hogy igaz, hiszen ha róla nem tudnánk semmit, akkor nem tudnánk következtetni semmire se. Valamint más sem lesz jó A_1-en kívül, hiszen visszafelé nem tudunk egyik állítás igazságára sem következtetni.

$$A_1 \text{ igaz} \implies A_2 \text{ igaz} \implies \cdots \implies A_m \text{ igaz.}$$

(b) A_1 és A_2. Ha igaz A_1 és A_2 és ha igaz A_n, és A_{n+1}, akkor igaz A_{n+2} is, akkor A_3 is igaz, és hasonlóan a fentiekhez ez így mehet tovább A_m-ig. Az nem elegendő, hogy csak egy állításról tudjuk biztosan, hogy igaz, mert egy állítás igazságából nem következik semmi. Valamint más sem lesz jó A_1-en és A_2-n kívül, hiszen visszafelé nem tudunk egyik állítás igazságára sem következtetni.

$$A_1 \text{és} A_2 \text{ igaz} \implies A_3 \text{ igaz}, A_2 \text{és} A_3 \text{ igaz} \implies A_4 \text{ igaz}, \ldots A_{m-2} \text{és} A_{m-1} \text{ igaz} \implies A_m \text{ igaz}$$

(c) Nagyon hasonlóan az a) és b) feladathoz, itt az A_1, A_2 és A_3 állításoknak kell igaznak lenniük, hogy az összes állítás belátásához elég legyen minden pozitív egész n-re azt bizonyítani, hogy ha igaz A_n, A_{n+1} és A_{n+2}, akkor igaz A_{n+3} is.
(d) Itt egyetlen állításról sem kell tudnunk, hogy igaz, csak azt kell belátnunk, hogy ha minden n-nél kisebb pozitív egész k-ra igaz A_k, akkor igaz A_n is. Hiszen ha ez igaz, akkor, mivel 1-nél nincsen kisebb pozitív egész szám, ezért igaz lesz, hogy minden 1-nél kisebb pozitív egész k-ra igaz A_k. (Üres halmaz minden eleméről bármit állíthatunk.) Vagyis igaz lesz A_1 is. Ekkor a 2-re is igaz lesz, hogy minden 2-nél kisebb pozitív egész k-ra igaz A_k, hiszen A_1 igaz ... Ez így megy tovább egészen A_m-ig.

Bevezető analízis 2 1. kiegészítő feladatsor, 14. feladat * Huszonöt szuperintelligens gonosz oroszlán közé egy darab oszthatatlan hús kerül. Ha valamelyik megeszi, akkor elalszik, és amíg alszik, a többiek úgy tekintenek rá, mint egy darab oszthatatlan húsra. Az oroszlánok szívesen esznek, de épp nem fenyeget, hogy éhen haljanak, ezért azt semmiképpen sem szeretnék, hogy megegyék őket. A fentieket az oroszlánok is mind tudják. Mi fog történni?

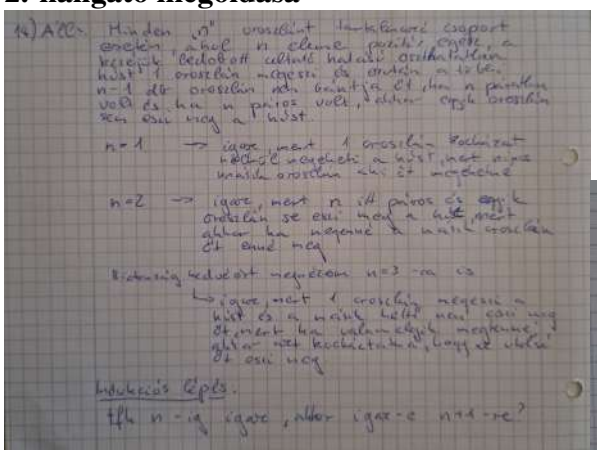
Megoldás Ehhez a feladathoz három hallgatói megoldást fogok bemutatni. Ezeket a feladatokat a hallgatók emailen küldték, ugyanis plusz pontért beadható feladatként volt feladva.

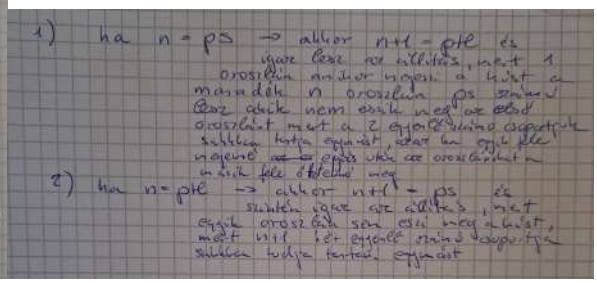
1. hallgató megoldása

Megnézzük, mi történhet kis számú oroszlánokkal. $N = 1$ esetben nyilván megeszi a húst. $N = 2$ esetben, ha valamelyikük megenné, az $N = 1$-es eset állna fenn, ahol biztonságos megenni a húst, ezért nem fogják megenni, nehogy megegye őket a társuk. $N = 3$ esetben egyikük biztonságosan megeheti, hiszen tudja, hogy utána $N = 2$ állna fenn, ahol senki sem fog enni. És így tovább.

Tehát páros oroszlán esetén semmi sem történik (veszélyes eset), páratlan esetén egyikük megeszi (biztonságos eset), de ez után nyilván a páros eset fog fennállni, így több evés nem fog történni. Mivel a 25 páratlan, így egy valaki fog jóllakni, a többiek meg farkasszemet néznek.

2. hallgató megoldása





Illetve a feladatra érkezett egy hosszú levél is:

3. hallgatótól érkezett válaszlevél

Kérésednek eleget téve küldöm az értekezésemet a huszonöt szuperintelligens gonosz oroszlánról, mindjárt kezdve azzal, hogy én nagy valószínűséggel nem vagyok egy a szuperintelligens gonosz oroszlánok közül, hiszen hosszas gondolkodás után se jutottam többre, mint amit most olvashatsz is üzenetemben, melynek alapja, hogy a feladatnak nem sok értelme van. Viszont tapasztalat alapján, amikor erre a következtetésre jutok, kiderül, hogy sosem a feladat érthetetlen, hanem mindig én vagyok Csekély értelmű Medvebocs. Legalább abban biztosak lehetünk, hogy nem lehetünk biztosak abban, hogy minden szuperintelligens gonosz oroszlán egyszínű.

Rövid összegzés: minden szuperintelligens gonosz oroszlán meghal.

Kifejtés:
(a) Véleményem szerint egy darabig, egészen pontosan, amíg el nem kezdenek éhezni, senki nem tesz semmit. (b) Egy idő után azonban eljutunk arra a pontra, amikor az első, legkisebb önuralommal rendelkező szuperintelligens gonosz oroszlán már nem tud a következményekre gondolni, és megeszi a darab oszthatatlan húst, majd elalszik. Itt két dolog történhet: (c) ha felébred, még mielőtt egy másik szuperintelligens gonosz oroszlán is elvesztené önuralmát, akkor nem lesz több darab oszthatatlan hús, és – feltételezve, hogy ébren nem eszik meg egymást, illetve más élelemforráshoz sem jutnak – mind éhen halnak. Ki előbb, ki utóbb.

(a) Amennyiben egy halott szuperintelligens gonosz oroszlán ugyancsak egy darab oszthatatlan hússal egyenértékű, akkor az első éhhalált szenvedett szuperintelligens gonosz oroszlánt követően kezdődik az egész elölről. A különbség csupán annyi, hogy már csak 24 szuperintelligens gonosz oroszlán van versenyben a túlélésért. (c) Ha azonban a halott szuperintelligens gonosz oroszlán nem több, mint egy halott szuperintelligens gonosz oroszlán, akkor mind egymás után sorra éhen halnak, míg el nem fogynak, és egyetlen élő szuperintelligens gonosz oroszlán sem marad. Fentebb azt írtam, "itt két dolog történhet". Íme a második lehetőség: (a) nem ébred fel a kajakóma által alvásba kárhoztatott szuperintelligens gonosz oroszlán időben, egy másik szuperintelligens gonosz oroszlán elveszti önuralmát, és megeszi a darab oszthatatlan húst, majd elalszik, ezzel létrehozva a (b) helyzetet, ahonnan a (c), vagy az (a)→(b) irányába történhetnek a dolgok immár 23 szuperintelligens gonosz oroszlánnal, a már kifejtettek szerint.

Ha egyik szuperintelligens gonosz oroszlán sem ébred fel (illetve elképzelhető, hogy néhány plusz kör lefutásával történik ugyanez), eljutunk addig, míg csupán egy szuperintelligens gonosz oroszlán marad, aki, miután megette az utolsó alvó szuperintelligens gonosz oroszlánt egy darab oszthatatlan hús képében, elalszik, majd miután felébred, éhen hal (c).

Összegzés
A fent leírt érvelések alapján a probléma összetettsége és az ismeretlen változók száma miatt nem tartom lehetségesnek a teljes levezetést. Az egyetlen dolog, amelyben majdnem biztos vagyok, hogy végül minden szuperintelligens gonosz oroszlán meghal. (Már csak azért is, mert a jó győz, a gonosz pedig elnyeri méltó büntetését.) Remélem, értékeled az igyekezetemet, igazán sok (szánalmasan sok) energiát fektettem bele.

Gondolatok

A fentiekben két olyan feladatot mutattam be, amelyek során a hallgatóknak a matematikai indukció módszerét kellett alkalmazniuk. Ez a bizonyítási technika az egyik sűrűn használt eszköz a matematikában, amely már a középiskolai oktatásban is megjelenik. Az indukció segítségével nemcsak konkrét esetekre vonatkozó állításokat igazolhatunk, hanem általános érvényű tételeket is bizonyíthatunk. Éppen ezért különösen lényeges, hogy a hallgatók megértsék és helyesen tudják használni ezt a módszert, hiszen ez az *általános szaktárgyi tudásuk* fejlődésében elengedhetetlen.

Az „oroszlános" 14. feladat számomra utólagos reflexióra adott okot. Bár a feladat formailag alkalmas volt az indukciós módszer alkalmazásának gyakorlására, magam részéről a megítélése vegyes érzelmeket váltott ki. A feladat kapcsán több jövőbeli tanártársammal, illetve az előadóval is beszélgetést folytattam. Ezek az eszmecserék tovább erősítették bennem azt a véleményt, hogy az „oroszlános feladat" nem teljesen felel meg azoknak a kritériumoknak, amelyeket egy plusz pontért beadható feladattól elvárnék.
Különösen azután mélyült el bennem ez az érzés, miután kézhez kaptam a fentebb olvasható idézett válaszlevelet, amely mélyebb megvilágításba helyezte a feladat gyengeségeit. Úgy gondolom, hogy a jövőben érdemes lenne alaposabban megvizsgálni, hogy az egyes feladatok milyen módon támogatják a hallgatók logikai gondolkodásának és bizonyítási készségének fejlődését, különös tekintettel arra, hogy leendő tanárként nekik is fontos lesz a problémák világos, egyértelmű megfogalmazása és a hallgatóik vezetése az ilyen típusú feladatok során. Az is bizonyossá tette bennem ezt az érzést, hogy egy hallgatótársam elmesélte, hogy ezt a feladatot ő általános iskola 6. osztályosainak is fel szokta adni. A feladat megoldása tehát könnyen érthető, de véleményem szerint, rengeteg gondolkozás után nem hozza magával az "AHA-élményt", ha az ember megtudja a megoldást.

Tapasztalatok

A két feladat kapcsán eltérő tapasztalatokat szereztem. Az első feladat (a), (b) és (c) részei a csoport nagy részének sikerültek, és a hallgatók megértették a teljes indukció alapvető logikáját. Azonban a (d) feladatrész már senkinek sem ment, sem az én csoportomban, sem más gyakorlati csoportokban. Házi feladatként került elő ez a kérdés, és érdekes módon a hallgatók úgy vélték, hogy jól oldották meg, ezért nem is tartották szükségesnek megbeszélni azt az órai kereteken belül, én tartottam fontosnak, hogy ellenőrizzük, mert tartottam tőle, hogy sokan rossz megoldást adtak a feladatra. Érdekes, hogy annak ellenére, hogy vicces példamondatokkal már mindannyian szinte tudták ekkor is, hogy az üres halmaz elemeire a "van olyan" kezdetű állítások mind hamisak, a "minden" kezdetűek pedig mind igazak, mégis egy matematikai példában kevésbé vették ezt észre.
Az „oroszlános" feladat egészen más jellegű problémát vetett fel. Ahogyan az a megoldásokból is látszik, ehhez a feladathoz egyáltalán nem szükséges a teljes indukció kimondása, és ennek ellenére mégis kapcsolatba hozható az indukcióval. A 3. hallgató válaszlevelét ezért is érzem jogosnak, mert olyan kérdésre, hogy „mi fog történni", leginkább az tudja a választ, aki a feladatot kitalálta. Az, aki tisztában van azzal, hogy mit szeretne bemutatni vele, és aki érti, hogyan kapcsolódik mindez a teljes indukcióhoz. Ezért lehet az, hogy a megoldás önmagában nem egy „nehéz gondolat", hanem egy logikai láncra épül, amelynek megértése szinte bárki számára elérhető. Nem véletlen tehát, hogy egy általános iskolás diák is képes lehet megérteni ezt a problémát.
Egy szokatlan vagy filozofikus jellegű feladat esetében könnyen elveszhet a fókusz, különösen akkor, ha nem egyértelmű, hogy pontosan mit szeretnénk vele demonstrálni.

6.7. Állítások logikai kapcsolata

2.38. Mi a **P** és a **Q** állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

P: Az (a_n) sorozat szigorúan monoton nő. **Q:** Az (a_n) sorozat tart a végtelenhez.

Megoldás

Egyik állításból sem következik a másik.Tehát mind a két esetre mutatunk ellenpéldát. (Amikor igaz **P**, de nem igaz **Q** és fordítva, amikor igaz **Q**, de nem igaz **P**.)

P $\not\Rightarrow$ **Q**:

$a_n = -\frac{1}{n}$ sorozat szig.mon.nő., mert ha $n_1 < n_2$, akkor $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{n_2}$, beszorozva (-1)-gyel pedig megfordul a relációs jel és így $-\frac{1}{n_1} < -\frac{1}{n_2}$.

Viszont a sorozat nem tart végtelenhez. Ez már onnan látható, hogy egyáltalán nem vesz fel pozitív értéket a sorozat.

Q $\not\Rightarrow$ **P**:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 2 \\ n, & \text{ha } n \neq 2 \end{cases}$$

sorozat láthatóan végtelenhez tart, mivel egy sorozat akkor tart $+\infty$-hez, ha $\forall\ K > 0$-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > K$.

Legyen $K > 0$ tetszőleges szám. Válasszuk $N = \max\{K, 2\}$. Ekkor minden $n > N$ esetén $n > K$, és mivel a sorozat definíciója szerint $a_n = n$ minden $n \neq 2$ esetén, így:

$$a_n = n > K \quad \text{ha } n > K.$$

Viszont triviálisan látszik, hogy a sorozat nem szig. mon. nő, mert $a_1 = a_2 = 1$.

Mi a következő állításpárok logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

2.138. **P:** $a_n + b_n \to \infty$ **Q:** $a_n \to \infty$ vagy $b_n \to \infty$.

Megoldás

Egyik állításból sem következik a másik.Tehát mind a két esetre mutatunk ellenpéldát. (Amikor igaz **P**, de nem igaz **Q** és fordítva, amikor igaz **Q**, de nem igaz **P**.)

P $\not\Rightarrow$ **Q**:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ n, & \text{ha } n \neq 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{ha } n \neq 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ekkor $a_n + b_n = n + 1$, ami végtelenhez tart, viszont a két sorozat közül sem a_n, sem b_n nem tart végtelenhez.

$\mathbf{Q} \not\Rightarrow \mathbf{P}$:

$$a_n = n \qquad b_n = -n$$

Az $a_n \to \infty$, tehát teljesül $\mathbf{Q}$, de $\mathbf{P}$ nem, mert az $a_n + b_n = 0 \to 0$, tehát nem tart végtelenhez.

Gondolatok

Az állításpárok logikai kapcsolatának vizsgálata különösen érdekes és hasznos feladat véleményem szerint. Általában az egyik irány bizonyítása szinte triviálisan következik, vagy egy már ismert és aktuálisan tanult tétel közvetlen alkalmazásával könnyen belátható. Éppen ezért gyakran azt várják egy ilyen feladatnál a hallgatók, hogy az egyik irányba az állítás igaz, míg a másikba nem. Ezzel szemben sokszor előfordul, hogy vagy mind a két irány igaz, vagy mind a kettő hamis, csak a másik irány bizonyítása sok esetben jóval összetettebb gondolatmenetet igényel.

Ezen feladatoknál is azt gondolom, hogy a gyakorlásukra nem csak az *általános szaktárgyi tudás*, de a *specializált szaktárgyi tudás* fejlődése érdekében is szükség van. Hiszen ezen feladtok is segítik annak a képességnek a fejlesztését, hogy két állításról el tudja dönteni a matematika tanár, hogy ekvivalensek-e.

Ezeket a feladatokat gyakran házi feladatként adtam fel, majd Plickers segítségével kérdeztem meg őket az órán, hogy mit gondolnak melyik következtetés helyes és melyik nem. A hallgatók így előzetesen gondolkodhattak rajtuk, majd közösen megbeszéltük a táblánál a bizonyításukat. A tapasztalataim szerint a diákok kifejezetten szerették ezeket a feladatokat, és segítették őket abban is, hogy jobban megértsék, miként lehet belátni két állítás ekvivalenciáját. Megtanulták, hogy az ekvivalencia bizonyításához sokszor külön a két irányt kell vizsgálni: egyik esetben azt, hogy az egyik állításból következik a másik, másik esetben pedig fordítva.

Ezek a feladatok továbbá hozzájárultak ahhoz is, hogy a hallgatók tudatosítsák: ha egy P állításból következik egy Q, akkor egy feladat megoldása során elegendő P-t belátni ahhoz, hogy Q-t igaznak tekintsük. Emellett olyan esetekkel is találkozhattak, amikor ránézésre úgy tűnik, hogy két állítás ekvivalens vagy egyikből következik a másik, de ellenpéldák segítségével kimutatható, hogy ez nem igaz. Ez segítette őket abban, hogy felismerjék: egy állítás helyességének igazolásához nem elegendő a megérzés vagy az intuitív következtetés, hanem precíz és formális bizonyításra van szükség.

Tapasztalatok

A **2.38**-as feladat megoldása gördülékenyen ment a hallgatóknak, és más gyakorlati csoportokban sem okozott különösebb nehézséget. A szemléletes példák gyorsan előkerültek, és a hallgatók könnyen megértették a feladat lényegét. Ugyanakkor az eredmények pontos, formalizált leírása, a függvények precíz definiálása néhány esetben kisebb segítséget igényelt.

Ennek ellenére a végére minden hallgató sikeresen meg tudta oldani a feladatot.
Ezzel szemben a **2.138**-as feladat már komolyabb kihívást jelentett. Első pillantásra én magam is tévesen azt hittem, hogy az egyik irányból való következtetés igaz. Az óra végén terveztem a feladat közös megbeszélését, de már nem fért bele az időbe, ezért előzetesen csak annyit közöltem a hallgatókkal, hogy az egyik irány igaz, míg a másik nem. Ekkor azonban az egyik hallgató jelezte, hogy tud egy ellenpéldát mondani. Ennek hatására realizáltam, hogy valóban igaza van, és egyik irány sem következik a másikból. Ez az eset jól példázza, hogy nemcsak a hallgatók, hanem akár a gyakorlatvezető is – különösen, ha még maga is egyetemi hallgató – könnyen téves következtetésre juthat.
Más gyakorlatvezetők is beszámoltak arról, hogy a hallgatók kezdetben hibásan gondolkodtak az adott irányról, majd a bizonyítás során sem tudták megfelelően alátámasztani állításaikat. Ezért a feladatot én is, a többi gyakorlatvezetővel összhangban, újra visszaadtam házi feladatként, immár azzal a kiegészítéssel, hogy a hallgatók tisztában voltak a helyes következtetéssel, viszont még nem találtak mind ellenpéldát a $\mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ irányra.

6.8. Sorozatok versenyfutása

Sorozatok versenyfutása: Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat a versenyfutásban legyőzi a (b_n) sorozatot, ha van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n > N$ esetén $a_n > b_n$. Határozzuk meg, hogy a következő feladatokban melyik sorozat nyeri a versenyfutást!

1.308. $a_n = n^{15} + 3n^6 - 2n + 500, \quad b_n = 1000n^4 + 100n^3 + 1$

Megoldás
Ezt a feladatot úgy oldhatjuk meg, hogy megsejtjük, hogy az a_n sorozat fog győzni, majd az a_n-et alulról, a b_n-et felülről becsüljük, míg eljutunk két olyan kifejezéshez, amelyekről könnyedén megállapítható, hogy mi a reláció közöttük. Természetesen többféle alsó és felső becslés is elképzelhető, ezek közül egyet közlök most.

$$a_n = n^{15} + 3n^6 - 2n + 500 > n^{15} - 2n > n^{15} - n^4, \text{ha } n > 1$$

$$b_n = 1000n^4 + 100n^3 + 1 < 1000n^4 + 100n^4 + n^4 = 1101n^4$$

Az $n^{15} - n^4$ pedig nagyobb, mint $1101n^4$, mert

$n^{15} - n^4 > 1101n^4$ igaz lesz, ha:

$n^{11} > 1102$. Ez pedig teljesül, ha $n > 1$.

Tehát beláttuk, hogy a_n nyeri a versenyt b_n-nel szemben.

1.311. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad b_n = 0.0001$

Megoldás

Ennek a feladatnak az egyik megoldása, hogy megsejtjük, hogy a b_n sorozat fog győzni, majd az a_n-et beszorozzuk eggyel $\left(= \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$, egyszerűbb alakra hozzuk az $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ azonosságot használva és felülről becsüljük.

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, ami $<$ mint $0,0001 = \frac{1}{10000}$, ha $10000 < \sqrt{n}$, tehát $N = 10^8$megfelelő.

Gondolatok

Kifejezetten érdekesnek tartottam a „versenyfutós" feladatokat, mivel játékos megfogalmazásuk miatt kevésbé tűnnek akadémiai jellegűnek, ugyanakkor rendkívül szemléletes módon segítik a sorozatok növekedési viszonyainak megértését. A hallgatók számára ezek a feladatok kiváló előkészítést nyújtanak a határérték számításokhoz, mivel lehetőséget biztosítanak az alsó és felső becslések módszereinek gyakorlására. Különösen fontos, hogy a hallgatók megismerjék a különböző technikákat a becslések elvégzésére, és megértsék azok alkalmazási módját különböző típusú problémák esetén.

Ezen feladatok az *általános szaktárgyi tudás* fejlesztésén túl a *szaktárgyi és tanításról szóló tudás* kialakulásában is szerepet játszanak, hiszen a "sorozatok versenyfutása" is egy olyan fogalom, ami a határérték előkészítését segíti elő. Ebbe a tudástartományba beletartozik, hogy a tanárok megállapítják, hogy melyik tanítási mód a legjobb egy fogalom megtanításához, azt is végiggondolva, hogy ez később milyen hatással lesz a tanulásra. (Ez esetben a "sorozatok versenyfutása" a határérték fogalomra.)

Az olyan feladatok, mint például a **1.311.** számú, különösen hasznosak abból a szempontból, hogy a hallgatók különböző algebrai átalakítási módszereket is gyakorolhatnak. Ezek közé tartozik például a nevezetes azonosságok alkalmazása vagy az a technika, amikor egy kifejezést egy megfelelően választott "1" alakjával szorzunk be annak érdekében, hogy az könnyebben kezelhetővé váljon,

Ezen kívül a feladatok másik fontos aspektusa, hogy a kapott eredmények alapján a hallgatóknak általános következtetéseket kell levonniuk. Meg kell határozniuk egy olyan N indexet, amelytől kezdve egy adott sorozat minden eleme nagyobb egy másik sorozat megfelelő eleménél. Ez a fajta gondolkodásmód az analízis egyik alapvető eszköze, különösen a határértékek vizsgálatánál, és elengedhetetlen a sorozatokkal és függvényekkel kapcsolatos precíz matematikai érvelés kialakításához.

Tapasztalatok

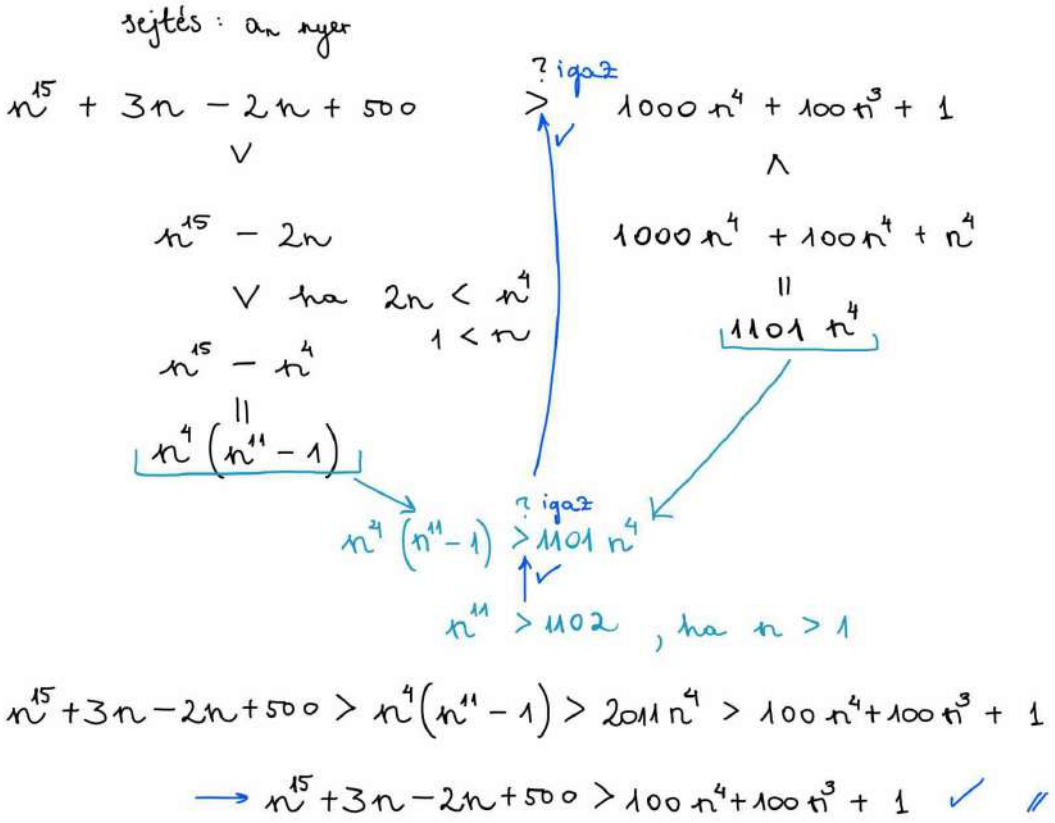
A hallgatók ezeket a feladatokat minden gyakorlati csoportban kis, 3-4 fős csoportokban oldották meg. Az egyik gyakorlatvezető tapasztalatai szerint a feladatok kezdetben szokatlanok voltak a diákok számára, mivel nem a megszokott módon kellett nekifogniuk, ahogyan azt korábban egyenlőtlenségek kapcsán a középiskolában tanulták. Emiatt a megoldási folyamat lassan indult be, és a hallgatók nem mindig az elvárt irányba haladtak. A gyakorlatvezető visszajelezte nekünk, hogy ha újra bevezetné ezt a témakört, akkor először egy egyszerűbb példát, például a **308**-as feladatot közösen dolgozná ki a csoporttal, hogy szemléltetni tudja a hatékony megoldási stratégiát. Ezt a módszert ajánlotta nekünk, a mi gyakorlatunkra.

A hatékony megoldási stratégia kulcsa nem az egyenlőtlenségek algebrai átalakításokkal való „masszírozása", hanem a sorozatok becslése. Az első lépés a győztes sorozat megsejtése, majd ennek igazolására egy nagyvonalú alsó és felső becslés alkalmazása, vagy 0-val vagy a domináns taggal, majd egyszerűsítjük az egyenlőtlenséget, hogy mindkét oldal egyetlen taggá olvadjon össze és könnyen megállapítható legyen a reláció közöttük.

A becslések leírásának egyik hatékony módja, hogy ha azt szeretnénk belátni, hogy elegendően nagy n-re a bal oldali kifejezés legfeljebb a jobb oldali, akkor a bal oldali kifejezés alá mindig egy nagyobb értéket írunk (ha szükséges, több lépésben, több sorban), a jobb oldali kifejezés alá pedig egy kisebb értéket. Ezt megfelelő jelöléssel látjuk el, majd végül a legalsó sorban megmutatjuk, hogy a bal oldali kifejezés valóban legfeljebb a jobb oldali, és tranzitivitással igazoljuk az állítást.

A **311**-es feladat kapcsán a gyakorlatvezető tapasztalatai szerint segítséget igényelt annak felismerése, hogy milyen technikákat érdemes alkalmazni gyök-kifejezések esetén. Előzetesen meg is beszélték azokat a módszereket, amelyeket ilyen esetekben érdemes megpróbálni, így a hallgatók már könnyebben tudták megoldani ezt a feladatot.

A fenti gyakorlatvezető tapasztalata miatt a mi csoportunkban a **308**-as feladatot közösen beszéltük meg. Ehhez egy táblaképet is csatoltam, amely bemutatja a fentebb leírt megoldási mód felépítését. A **311**-es feladat kihívást jelentett a hallgatóim számára. A „trükkös" egységgel való beszorzás nem merült fel bennük maguktól, így ebben irányított segítséget nyújtottam nekik. A diákok számára kezdetben nagyon új gondolat volt az alsó és felső becslések módszerének alkalmazása, valamint a tranzitivitás használata az egyenlőtlenségek igazolására. Azonban idővel úgy éreztem, hogy a koncepció világossá vált számukra, és ezek a feladatok kifejezetten hasznosnak bizonyultak a határérték fogalmának bevezetésére és megalapozására.



7. ábra. órai táblakép, az 1.308-as feladat megoldása

6.9. Határérték

Bizonyítsuk be, hogy a következő sorozatok végtelenhez tartanak, azaz keressünk küszöbindexet a következő sorozatokhoz!

2.64.

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n}$$

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n}=\infty,\text{ ha a következő definíció teljesül:}$$

$$\forall K\in\mathbb{R},\quad \exists N_0\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq N_0\quad \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n}>K.$$

A feladat N_0 meghatározását kéri adott K esetén. Ennek meghatározásához alulról becsüljük a törtet.

Azért mert n páros és páratlan is lehet, azt mondhatjuk, hogy az első $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ számot alulról becsülhetjük 0-val, az utolsó $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ számokat pedig mind $\sqrt{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil}$ -vel, tehát az egész törtre azt

mondhatjuk, hogy:

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n} > \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \sqrt{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}}{n} > \frac{\frac{n}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}}{n} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}}$$

Ezek után azt mondhatjuk, hogy ha K negatív, akkor $\forall n$-re $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} > K$, amennyiben pedig $K \geq 0$, akkor $n > 8K^2$ esetén teljesül, hogy $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} > K$.

Tehát $N_0 = 8K^2$ jó küszöbindex lesz, hiszen ekkor $K < \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{2}} < \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n}$, vagyis $K < \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n}$.

Gondolatok

Az adott feladat jól szemlélteti annak jelentőségét, amikor egy sorozatot egy másik, könnyebben kezelhető sorozattal becsüljük alulról, amelyről könnyedén meg tudjuk határozni, hogy milyen n esetén haladja meg az értéke egy adott K küszöbértéket, és ebből következtethetünk az eredeti sorozatra is. Lényegében itt már a Csendőr-szabály alkalmazásáról van szó: ha egy sorozatról belátjuk, hogy a végtelenbe tart, és egy másik sorozat (egy adott n-től kezdődően) nagyobb ennél, akkor az utóbbi is a végtelenbe tart.

A feladat megoldása egy kevésbé triviális módszert igényelt, amely elsőre talán nem jut eszébe mindenkinek. A megközelítés lényege az volt, hogy a sorozat bizonyos tagjait 0-val, míg a többi tagot ugyanazzal az értékkel becsültük alul. Mivel a kurzus ezen szakaszában éppen a közepek közötti egyenlőtlenségekkel foglalkoztunk, várható volt, hogy a hallgatók többsége inkább ezek alkalmazására gondolt elsőként, ami nem feltétlen vezet sikerhez.

Tapasztalatok

Ezzel a feladattal a tapasztalatom különösen érdekes, mivel eredetileg órai feladatnak készült, azonban végül beadandó feladatként került kiadásra, rendhagyó módon mégis közösen megbeszéltük az órán. (A legtöbb beadandó feladatot a hallgatók egészen a következő zárthelyi dolgozat időpontjáig megoldhatták, ennek a feladatnak az esetében azonban csupán egy hét állt rendelkezésükre, hogy az órán közösen átbeszélhessük a megoldást.)

A hallgatók jelentős része nehezen boldogult ezzel a problémával. Sokan a különböző közepek közötti összefüggések alkalmazásával próbálkoztak, azonban hamar elakadtak. Még pluszpontért sem adtak be megoldásokat, ami arra utal, hogy a feladat megoldásához szükséges gondolat nem volt számukra egyértelmű.

Úgy vélem, hogy a feladat kifejezetten elegáns, hiszen egy megfelelő gondolati lépés megtalálásával a megoldás mindössze néhány sorban levezethető. Ennek ellenére a hallgatók nem fogadták olyan lelkesedéssel, mint amire számítottam. Többen az óra utáni konzultáción is visszatértek rá, jelezve, hogy számukra nem volt teljesen világos a megoldás.

Úgy tűnik, hogy a várakozásaimmal ellentétben a feladat nem hozta meg azt a „heurisztikus örömöt”, amelyet reméltem, vagyis hogy azok a hallgatók is érdekesnek találják, akik végül nem tudták megoldani. Elképzelhető, hogy ennek egyik oka az volt, hogy viszonylag későn, az év vége felé került sor a feladatra, amikor a hallgatók már kevésbé voltak motiváltak a kihívást jelentő gondolkodtató problémák iránt.

6.10. Halmaz eleme és részhalmaza

Bevezető analízis 2 1. kiegészítő feladatsor, 7. feladat Van-e olyan A halmaz, amelyre $\mathbb{Z} \subset A$ és $\mathbb{Z} \in A$ is teljesül?

Megoldás

Van ilyen halmaz. Például ilyen halmaz: $A = \{\mathbb{Z}; \dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots\}$, tehát az a halmaz, amely elemként tartalmazza az egész számok halmazát és eleme még az összes egész szám.

Gondolatok

Ez a feladat kiválóan feladható akár egy tehetséggondozó gimnáziumi csoportban is, 9. osztálytól kezdődően, vagy egy közepes erősségű gimnáziumban az érdeklődő diákok számára, amikor a halmazelméleti fogalmakkal ismerkednek. Tapasztalataim szerint a halmaz eleme és részhalmaza közötti különbség megértése sok tanulónak komoly nehézséget okoz középiskolában, amennyiben azonban ezek a fogalmak már stabilan rögzültek, a feladat bátran beépíthető az oktatásba.

Ezért is fontos, hogy a tanárszakos hallgatók számára egy ilyen típusú feladat ne jelentsen kihívást, hiszen jövőbeli tanárként az alapvető halmazelméleti összefüggések biztos megértése és magyarázata elengedhetetlen. Ennek megfelelően a feladatot tudatosan választottuk ki, hogy fejlesszük az ilyen típusú problémák kezelésében szükséges készségeket.

Tapasztalatok

Ez a feladat meglepetésemre még a tehetségesebb hallgatók számára is kihívást jelentett. Nehézséget okozott számukra a halmaz eleme és részhalmaza közötti különbség pontos megértése. A fogalmak tisztázása érdekében több halmazábrát készítettem, és különböző szemléltető módszerekkel próbáltam segíteni a megértést.

Az egyik magyarázat során a halmazokat egy zsákhoz hasonlítottam: ha egy halmazt egy zsákként képzelünk el, amelybe belenézve találunk egy másik zsákot, amelyre az van írva, hogy „Ebben vannak az egész számok”, akkor ez azt jelenti, hogy az egész számok halmaza az eredeti halmaz egyik eleme. Ugyanakkor, ha ezen kívül az összes egész számot külön is megtaláljuk a zsákban, akkor ki tudunk választani a zsákból egy olyan csoportot, amelyet egy másik zsákba helyezhetünk, amelyben az egész számok szerepelnek. Ebben az esetben

az egész számok nemcsak elemei az eredeti halmaznak, hanem annak részhalmazát is képezik.
A visszajelzések alapján ez a fajta szemléltetés segített a hallgatóknak abban, hogy pontosabban megértsék a két fogalom közötti különbséget.

6.11. +1 érdekes feladat

Bevezető analízis 2 2. kiegészítő feladatsor, 11. feladat

(a) Peti nézi Annát, Anna nézi Gergőt. Peti házas, Gergő nem házas. Néz házas ember nem házas embert? (Lehetőségek: Igen / Nem / Ennyi információból nem lehet eldönteni.)

(b) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = ?$

(c) Bizonyítsuk be, hogy irracionális szám irracionális kitevős hatványa lehet racionális!

Megoldás

(a) Igen, néz házas ember nem házas embert. Ezt a következők szerint gondolhatjuk végig:
1. Amennyiben Anna nem házas, akkor, mivel Peti házas és Peti nézi Annát, néz házas ember nem házas embert.
2. Abban az esetben viszont, ha Anna házas, akkor mivel ő nézi a nem házas Gergőt, szintúgy néz házas ember nem házas embert.
Tehát teljesen mindegy, hogy Anna házas-e vagy sem, mindenképp igaz lesz, hogy néz házas ember nem házas embert.

(b) A hatványozás azonosságait, valamint azt használva, hogy $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ megállapítható, hogy: $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

(c) Tudjuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális és alkalmazhatjuk az a) feladatrészben lévő ötletet.
1. Amennyiben $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irracionális, akkor, mivel a $\sqrt{2}$ irracionális, van olyan irracionális szám $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)$, aminek az irracionális kitevős $\left(\sqrt{2}\right)$ hatványa racionális (2)
2. Abban az esetben viszont, ha $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ racionális, akkor, mivel a $\sqrt{2}$ irracionális van olyan irracionális szám $\left(\sqrt{2}\right)$, aminek az irracionális $\left(\sqrt{2}\right)$ kitevős hatványa racionális $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)$.

Gondolatok

Ezt a feladatot Keleti Tamás állította össze, és az ő javaslatára került be az egyik kiegészítő feladatsorba. A feladatrészek önmagukban külön-külön ismertek, azonban az ő ötlete volt azok

összekapcsolása, így alkotva egy egységes, újszerű problémát. Véleményem szerint ezáltal egy rendkívül ötletes és jól felépített feladat született, ami jól fejleszti a tanulók *szaktárgyi és tanításról szóló tudását*, hiszen ez a feladat egy szemléletes példa arra, hogy egyes feladatok esetében egy jól választott, látszólag nem oda kapcsolódó, felvezető részfeladat nagyban hozzájárul ahhoz, hogy a feladatot abszolválni tudjuk.
A terv az volt, hogy a tanulók csoportmunkában dolgozzák fel a feladatot, amely meg is valósult az órán: a csoportok kialakításánál figyelembe vettük, hogy mindegyikbe kerüljön legalább egy erősebb tanuló.
A feladat különlegessége abban rejlik, hogy három, első látásra teljesen különálló részfeladatot kapcsol össze, amelyek között a tanulók vicces vagy váratlan módon fedezhetnek fel összefüggést. Didaktikai szempontból különösen hasznos, hogy a tanulók először az a) és b) részfeladatokat oldják meg, amelyek megalapozzák a c) feladat megoldását. Véleményem szerint, ha kizárólag a c) feladat került volna kiadásra, jelentősen kevesebb diák tudott volna megbirkózni vele.

Tapasztalatok

A feladatokat az eredeti terveknek megfelelően minden kurzuson négyfős csoportokban dolgozták fel a hallgatók. Az a) és b) feladatrészeket a legtöbb csoport gyorsan és magabiztosan megoldotta. A c) rész megoldása, illetve annak felismerése, hogy az hogyan kapcsolódik az előző két részfeladathoz, azonban már komolyabb gondolkodást és segítséget igényelt.
A munkaszervezés során azt az instrukciót kapták a csoportok minden kurzuson, hogy csak akkor lépjenek tovább, ha minden csoporttag egyetért a megoldásban, és mindenki pontosan érti azt. Ennek érdekében azt kértük, gyakorlatvezetők, hogy vitassák meg egymással a feladatot, és addig magyarázzanak egymásnak, amíg mindenki számára világossá nem válik a megoldás.
Ez a módszer összességében jól működött mindenütt. Bár a diákokon nem igazán látszott, hogy különösebb lelkesedéssel fogadták volna a feladat „vicces” jellegét, de a közös gondolkodás és az érvek ütköztetése megtörtént. A feladat feldolgozása körülbelül 20–30 percet vett igénybe. A munka során folyamatosan körbejártam én is, a többi gyakorlatvezetőhöz hasonlóan a teremben, és igyekeztem meggyőződni arról, hogy a megoldásokat valóban minden csoporttag érti. Az egyik gyakorlati csoportban a gyakorlatvezető segítségnyújtásának köszönhetően a feladatot már nem kellett külön megbeszélni a táblánál, viszont nálunk a c) részt végül csak egyetlen csoport tudta teljes mértékben megérteni és megoldani, így ők ismertették a megoldást a többiekkel.
Összességében a feladat jó visszajelzést adott a csoportmunka működéséről: a hallgatók vitatkoztak, gondolkodtak, és aktívan együttműködtek.

7. Hallgatói vélemények, kérdőív eredménye

A *Bevezető analízis 2.* tárgy előadója, Dr. Keleti Tamás a tanév végén egy kérdőívet küldött ki a hallgatóknak, amelyet saját maga állított össze annak érdekében, hogy a diákok anonim módon reflektálhassanak a félév tapasztalataira. Minden félév végén a Neptun rendszerén keresztül központi kérdőívek is elérhetővé válnak a hallgatók számára, azonban Tamás szeretett volna a tárgyra és a kurzusra specifikus kérdéseket is feltenni, hogy ne csupán az általános visszajelzéseket kapjuk meg.

A kérdőívben olyan kérdések szerepeltek, mint például: *"Mennyire maradt meg, erősödött meg, vagy tűnt el a matematika iránti szeretete a tárgy hatására?"*, illetve *"Mennyire volt jól belőve a feladatok nehézségi szintje?"*. Emellett természetesen olyan kérdések is megjelentek, amelyek a központi kérdőívben is szerepelnek, például: *"Mennyire tartotta a tárgy értékelési rendszerét igazságosnak?"* vagy *"Mennyire találta hasznosnak a gyakorlatokat?"*.

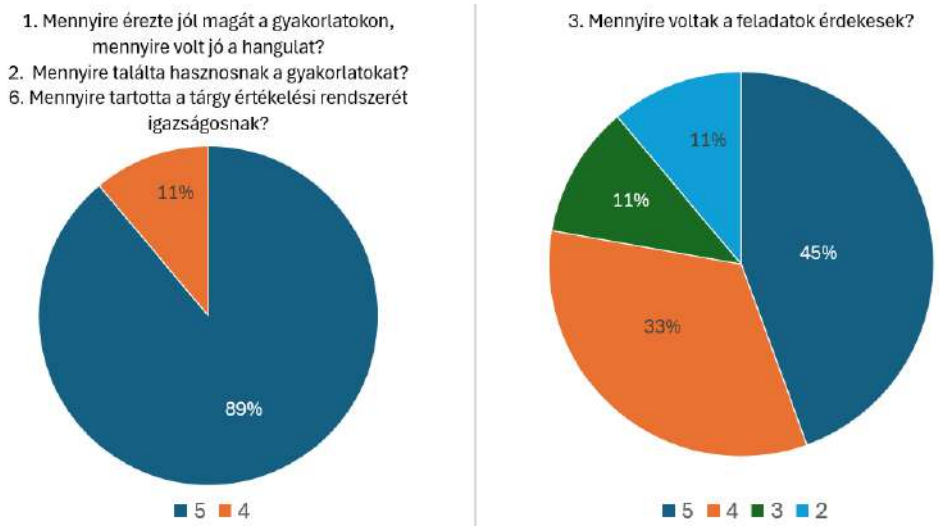
A kérdőív egy része az előadásra és a vizsgára vonatkozott, és mivel ezek teljes mértékben Dr. Keleti Tamás felelősségi körébe tartoztak, ezekre vonatkozó kérdésekről és a válaszokról nem tervezek részletes beszámolót adni. Valamint, javarészt a saját hallgatóim értékeléseit foglalom össze, mivel ezekre tartom relevánsnak a reflexiót. Sajnos nem minden hallgatótól érkezett visszajelzés, de a csoport több, mint fele kitöltötte a kérdőívet.
A kérdésekre adott válaszok formátuma eltérő volt attól függően, hogy milyen típusú visszajelzést kívántunk kapni. Egyes esetekben a hallgatók egy előre megadott lista elemei közül választhatták ki azt a lehetőséget, amellyel a leginkább egyetértettek. Más esetekben egy 1-től 5-ig terjedő skálán kellett megjelölniük, hogy mennyire értenek egyet az adott állítással. Ez a skálázás lehetővé tette, hogy a válaszok számszerűsíthető módon is értékelhetők legyenek, így a visszajelzések statisztikai elemzése is elvégezhető.

7.1. Az 1-12. kérdésre adott válaszok elemzése

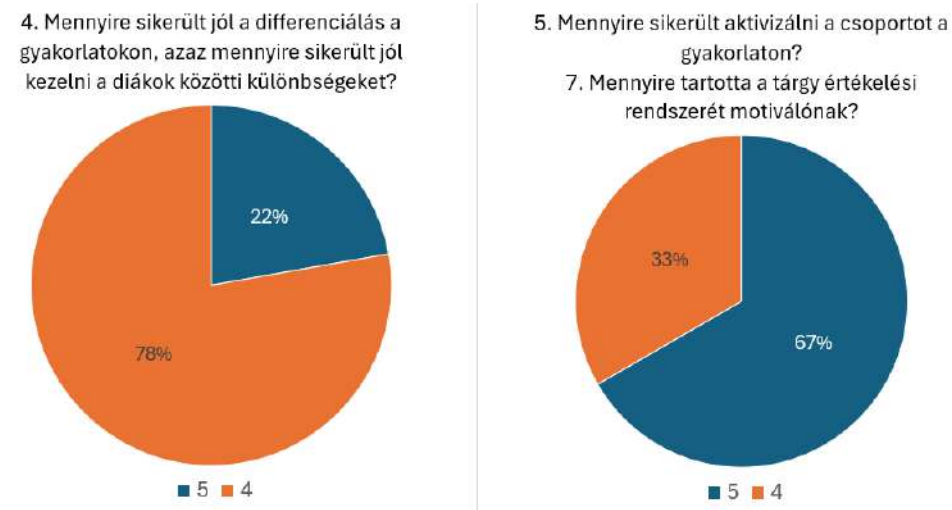
Az alábbi kérdésekre 1-5-ig érkezett pontszámokat elemzem és foglalom össze diagramok segítségével:

1. Mennyire érezte jól magát a gyakorlatokon, mennyire volt jó a hangulat?
2. Mennyire találta hasznosnak a gyakorlatokat?
3. Mennyire voltak a feladatok érdekesek?
4. Mennyire sikerült jól a differenciálás a gyakorlatokon, azaz mennyire sikerült jól kezelni a diákok közötti különbségeket?
5. Mennyire sikerült aktivizálni a csoportot a gyakorlaton?
6. Mennyire tartotta a tárgy értékelési rendszerét igazságosnak?

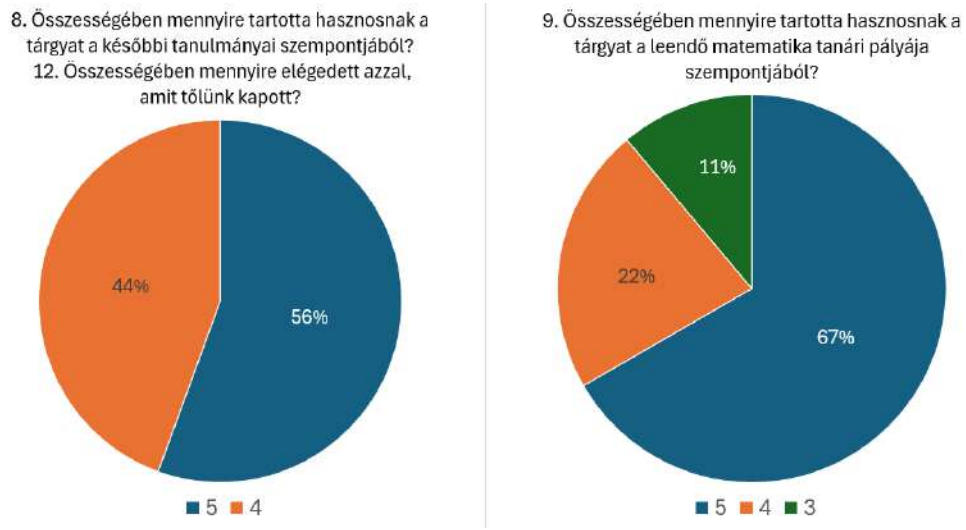
7. Mennyire tartotta a tárgy értékelési rendszerét motiválónak?
8. Összességében mennyire tartotta hasznosnak a tárgyat a későbbi tanulmányai szempontjából? (Amennyire ezt előre látható.)
9. Összességében mennyire tartotta hasznosnak a tárgyat a leendő matematika tanári pályája szempontjából? (Amennyire ez előre meg lehet ítélni.)
10. Mennyire maradt meg, erősödött meg, vagy tűnt el a matematika iránti szeretete a tárgy hatására?
11. Mennyire maradt meg, erősödött meg, vagy tűnt el a matematikával kapcsolatos önbizalma a tárgy hatására?
12. Összességében mennyire elégedett azzal, amit tőlünk kapott?



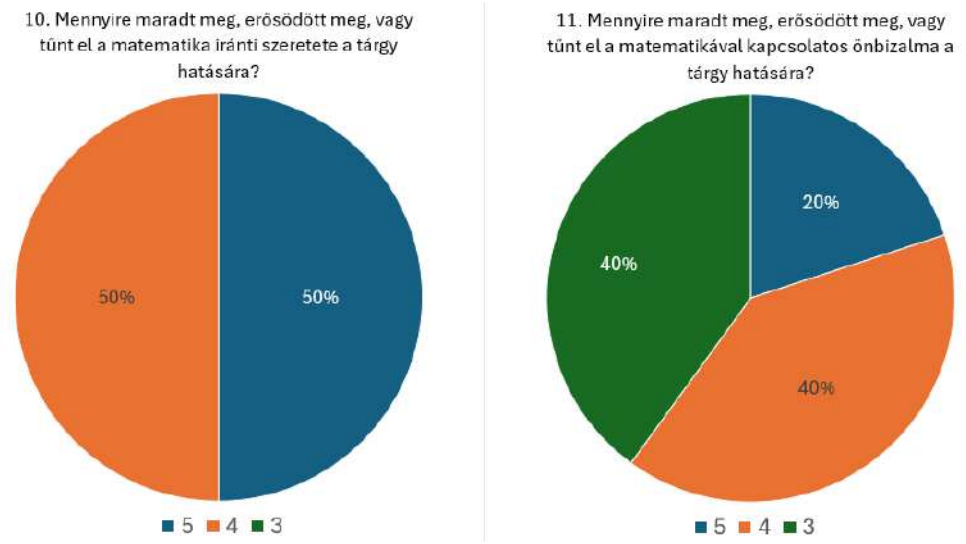
8. ábra. 1.,2.,6. kérdésre érkezett válaszok



9. ábra. 4.,5.,7. kérdésre érkezett válaszok



10. ábra. 8.,9.,12. kérdésre érkezett válaszok



11. ábra. 10.,11. kérdésre érkezett válaszok

A gyakorlatok általános megítélése

A fent látható értékelések alapján azt gondolom, hogy kijelenthető, hogy a hallgatók többsége pozitívan értékelte a *Bevezető analízis 2* gyakorlatot, hiszen a legtöbb kérdésre adott válasz átlaga bőven 4 felett volt. Különösen az órai hangulatot, a tárgy hasznosságát és értékelési rendszerének igazságosságát értékelte kifejezetten pozitívan a csapat. Ez azt gondolom, hogy azt mutatja, hogy a kurzus légköre kedvező volt a diákok számára, amely segíthette az aktív részvételüket és hozzájárult a tanulás hatékonyságához. Sikernek könyvelem el, hogy a hallgatók igazságosnak érezték az értékelési rendszert, ugyanis a gyakorlatvezető társaimmal sok időt szenteltünk arra, hogy igazságos, pontrendszert állítsunk össze. Figyeltünk rá, hogy a különböző habitusú hallgatók mind érvényesülni tudjanak azon a területen, amin a legerősebbek, és így szerezhessenek pontot.

A feladatok érdekessége és a hallgatók bevonása, differenciálás

A feladatok érdekességét vizsgáló kérdésre a hallgatók 45%-a 5-ös értékelést adott, 33%-uk 4-est, míg 22% alacsonyabb pontszámot. Ez azt mutatja, hogy a feladatok többségét érdekesnek találták, de van lehetőség további fejlesztésre. A diagram a saját csoportom véleményét mutatja, de mivel minden gyakorlaton ugyanazok a feladatok voltak, megjegyezném, hogy a teljes évfolyam szintjén az erre a kérdésre adott válasz átlaga 4,2, míg az én csoportomé 4,1 volt.
Természetesen szinte elérhetetlen egy olyan "idilli" állapot, amikor minden hallgató maximálisra értékeli a feladatok érdekességét, mert mind különböző feladatokat találunk izgalmasnak, a hallgatók is mind eltérő igényekkel rendelkeznek a feladatok típusait illetően. Ezen a területen tehát lehet, de nem egyszerű fejlődnie a gyakorlatvezetőknek, ugyanis ha más feladatokat hozunk, akkor lehet, hogy azon hallgatók szavaznak 4-el, vagy 3-mal, akik eddig 5-tel szavaztak. Azt látom egy lehetőségnek, annak érdekében, hogy mindenki megtalálja a neki tetsző feladatokat, hogy több példa közül is választhatnak a hallgatók. Ebben azonban az a nagyon nehéz, hogy így nem tudunk mindent órán ellenőrizni, ill. a felmerülő kérdéseket megbeszélni.
A hallgatók 78%-a 4-es, 22%-a pedig 5-ös értékelést adott arra a kérdésre, hogy mennyire sikerült kezelni a diákok közötti tudáskülönbségeket, mennyire volt hatékony a differenciálási szándékunk. Az aktivizálás terén pedig a hallgatók 67%-a 5-ös, 33%-a pedig 4-es osztályzatot adott, ami arra utal, hogy a kurzus nagyobb részt sikeresen bevonta a hallgatókat az aktív tanulásba. A differenciálás pedig, ezek szerint, minden törekvésünk és a fenti fejezetekben tárgyalt módszerek ellenére sem sikerült maradéktalanul. Természetesen itt sem tartom valószínűnek, hogy lehetett volna olyan módszert alkalmazni, amely segítségével a hallgatók mind azt érzékelik, hogy hibátlanul megvalósult a differenciálás. Leginkább az tud segíteni abban, hogy a hallgatókra személyesen tudjunk figyelni, hogy ha egy gyakorlati csoport kevés főből áll, maximum 10-15 hallgatóból. A *Bevezető analízis 2* gyakorlati csoportomban 16 hallgató volt összesen, akik közül sajnos 3-an nem tudták teljesíteni a tárgyat. Ez mindenképp azt jelzi, hogy mindenkinek nem sikerült átadni az anyagot. Azt gondolom, hogy a differenciálás hatékonyságát még azzal tudjuk növelni, ha külön gyakorló és nehezebb feladatokat is kiadunk azoknak a hallgatóknak akik igénylik, és tartunk konzultációt rendszeresen, hogy aki akar, az fel tudjon zárkózni. A felmérésből okulva ez a rendszer már megjelent az *Egyváltozós analízis 1* kurzuson, ahol Kerekes Balázs gyakorlatvezető tartott konzultációt minden héten a hallgatóknak, valamint megoldhatóak és beadhatóak voltak feladatok, amiknek a megoldását közzétettük, hogy a hallgatók ebből is tanulhassanak.

A tantárgy hasznossága a további tanulmányok és a tanári pálya szempontjából

Az egyik szempont a kurzus hasznosságának megítélése volt a hallgatók további tanulmányai, valamint a tanári pálya szempontjából. A visszajelzések alapján, a hallgatók 56%-a

maximálisan hasznosnak találta a tantárgyat a későbbi tanulmányai szempontjából, míg 44% 4-es értékelést adott. Érdekes, hogy ez az értékelés teljesen megegyezik arra a kérdésre adott válasszal, hogy összességében mennyire elégedettek azzal, amit tőlünk kaptak.
A leendő tanári pályára nézve 67% maximális, 22% 4-es értékelést adott, míg 11% 3-as osztályzattal illette a tantárgy relevanciáját későbbi munkája szempontjából.
Kifejezetten érdekesnek tartom, hogy a hallgatóknak az $1/3$-a gondolja azt, hogy a *Bevezető analízisen* tanultak nem fontosak maximálisan a tanárságukhoz. Itt azt is megjegyezném, hogy egész évfolyam szinten ugyanaz lett a hallgatók válaszának átlaga, mint az én csoportomban, 4,6. Ez azért elgondolkoztató, ugyanis ennek a kurzusnak a célja, hogy a középiskolában tanultakat megszilárdítsa. Így felmerülhet a kérdés, hogy vajon olyan hallgatók nem jelölték az 5-öst, akik általános iskolában készülnek tanítani, olyanok, akik egy kevésbé matek orientált középiskolában szeretnének elhelyezkedni, vagy azok, akik nem szeretnének emelt szinten tanítani. Persze természetesen az is előfordulhat, hogy nekünk, oktatóknak, nem sikerült maradéktalanul annak átadása, hogy mi a célja a kurzusnak és ezért nem érzik többen, hogy ez a tárgy feltétlenül hasznos lesz majd számukra.
A további tanulmányok szempontjából sem gondolták mindannyian, hogy ez majd később 100%-ban kelleni fog. Ezt jobban el tudom fogadni, hiszen bár egymásra épülnek az analízis tárgyai, és természetesen rengeteg olyan fogalom, tétel és ismeret elsajátítására szükség van *Bevezető analízisen*, ami később, *Egyváltozós analízisen* elengdhetetlen, de természetesen tanultunk olyan tételeket is, amik nem feltétlenül kerülnek újra elő. (Pl. Bernoulli-egyenlőtlenség)

A matematika iránti attitűd változása

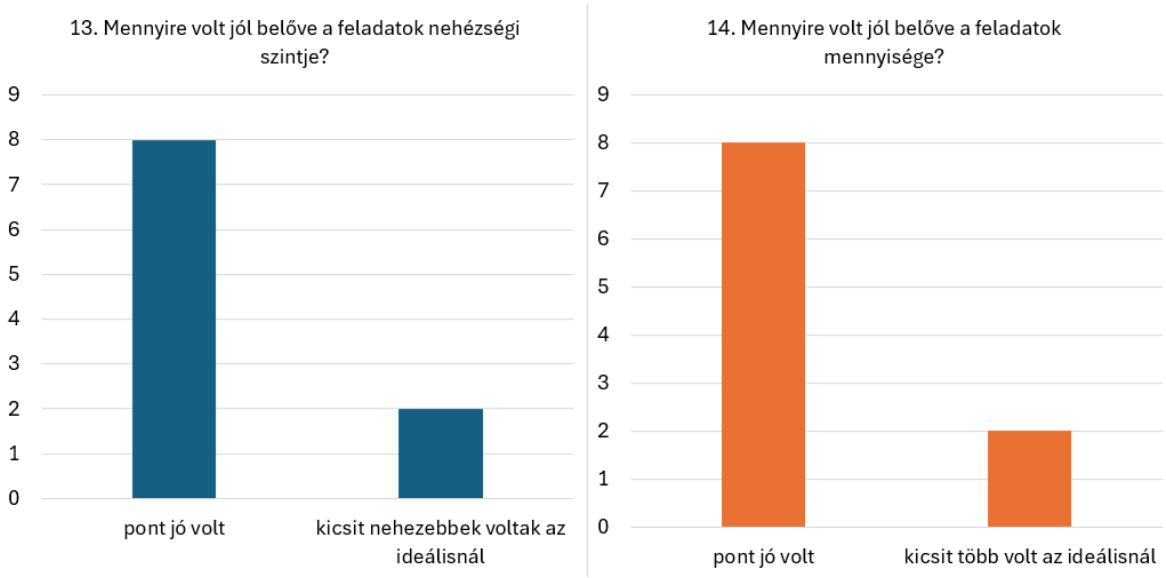
Abban a kérdésben, hogy mennyire erősödött meg vagy tűnt el a matematika iránti szeretete a hallgatóknak, a csoport két egyenlő részre bomlott. a fele társaság 5, a fele 4-es értékelést adott a kérdésre. Ez az eredmény azt gondolom, hogy nagyon megnyugtató, hiszen azt mutatja, hogy a kurzus nem csökkentette a hallgatók matematikához való pozitív viszonyulását, sőt, erősítette azt, kinél kisebb, kinél nagyobb mértékben.
A matematika iránti önbizalom fejlődésének vizsgálata során a hallgatók következő arányban értékelték a kurzus hatását, 40% maximális, 5-ös, 40% 4-es, 20% 3-as osztályzatot adott. Ezek az eredmények elméletben arra utalnak, hogy a hallgatók többségénél a matematikával kapcsolatos önbizalom megerősödött, de vannak olyan diákok is, akik nem tapasztaltak jelentős változást ezen a területen. Én azonban gondolom, hogy feltételezhető, hogy a 3-as értékelést adó hallgató nem csupán az önbizalma stagnálását érzékelte, hanem inkább annak enyhe csökkenését. Valószínűsíthető, hogy azok a diákok, akik úgy érezték, hogy önbizalmuk nem változott jelentősen, inkább a 4-es osztályzatot választották.
A kurzus egyik kiemelt célja kell, hogy legyen a hallgatók középiskolai matematikában való magabiztosságának megszilárdítása. Ugyanakkor nem feltétlenül probléma, ha önbizalmuk időnként nem maximális, hiszen ez azt jelezheti, hogy tudatában vannak a matematika azon

területeinek, amelyek további elmélyülést és megértést igényelnek. Nem lenne kívánatos, hogy minden hallgató tévesen azt gondolja magáról, hogy kiváló matematikai tudással rendelkezik, függetlenül tényleges képességeitől. Fontos, hogy azok, akik nehézségekbe ütköznek, felismerjék ezt, és inkább még a tanulmányaik során szembesüljenek ezzel, mintsem később, tanárként, amikor már az osztály előtt állnak. Ezáltal lehetőségük nyílik arra, hogy időben fejlesszék tudásukat, és felkészültebben lépjenek a pedagógusi pályára.

7.2. A 13-14. kérdésre adott válaszok elemzése

13. Mennyire volt jól belőve a feladatok nehézségi szintje?

14. Mennyire volt jól belőve a feladatok mennyisége?



12. ábra. 13-14. kérdésre érkezett válaszok

A kurzuson előforduló feladatok nehézségi szintje és mennyisége

A 13. kérdés válaszai alapján a hallgatók többsége úgy érezte, hogy a feladatok nehézségi szintje megfelelő volt, ezzel szemben, kisebb arányban úgy nyilatkoztak, hogy a feladatok valamivel nehezebbek voltak az ideálisnál. Ez azt mutatja, hogy az összességében a feladatok megfelelően voltak belőve, esetleg egyszerűbb gyakorló feladatokat lehetett volna még bevinni az órára. (Ez a következő évben, az *Egyváltozós analízis 1* tárgyon meg is valósult.) A 14. kérdés esetében szintén ugyanaz a tendencia figyelhető meg. A hallgatók döntő többsége úgy vélte, hogy a feladatok mennyisége optimális volt, ugyanakkor kisebb arányban akadtak olyanok, akik szerint a feladatok száma kissé több volt az ideálisnál. Ezt a választ éppen azon hallgatók adták, akik a 13. kérdés esetében is a kisebbséget képezték. Ez arra mutat rá, hogy fontos a gyengébb tanulókkal foglalkozni és az ő felzárkóztatásukra, akár konzultáció keretein belül, hangsúlyt fektetni.

7.3. A 15-22. kérdésre adott válaszok elemzése

15. Mit gondol a gyakorlaton belüli időbeosztásról?

16. Mit gondol a röpdolgozatokról?

17. Mit gondol arról, hogy egymás röpdolgozatait javították?

18. Mit lenne érdemes máshogy csinálnia a gyakorlatvezetőnek?

19. Mit csinált különösen jól a gyakorlatvezető, mit érdemes másoknak is átvenni tőle?

20. Mi az az értékelési rendszerben, amit mindenképpen érdemes lenne megtartanunk?

21. Mit tart a leghasznosabbnak abból, amit ebből a tárgyból tanult?

22. Mit tart a leghaszontalanabbnak abból, amit ebből a tárgyból tanult?

A gyakorlat időbeosztásának értékelése

A hallgatók véleménye megoszlott a gyakorlat során alkalmazott időbeosztással kapcsolatban. Többen teljes mértékben elégedettek voltak, és úgy vélték, hogy az óra beosztása megfelelő volt, ugyanakkor néhány hallgató jelezte, hogy a házi feladatok megbeszélésére túl sok idő ment el, emiatt kevesebb lehetőség maradt az órai önálló munkára és az új feladatok megoldására.
Egyes visszajelzések szerint a tanév vége felé az órákat a házi feladatok megbeszélése dominálta, aminek következtében az órai feladatok szinte teljes mértékben házi feladatnak maradtak, amelyek tárgyalása így következő órára került át. Ezt a kialakult helyzetet már akkor konstatáltam és próbáltam azzal feloldani, hogy csak azokat a feladatokat beszéltük meg, amelyeket a hallgatók külön kértek. Ezt a próbálkozásomat volt hallgató, aki pozitívumként értékelte is.
Voltak olyanok is, akik úgy érezték, hogy több időt kellett volna szánni csoportos munkára, illetve arra, hogy én, mint gyakorlatvezető oldjak meg feladatokat a táblánál.
Ugyanakkor a csoport nagy része jelezte azt, hogy "minden pompás volt", vagy azt, hogy az adott időkeretek között "ennél többet nem lehetett volna kihozni egy gyakorlati órából".

A röpdolgozatok értékelése, egymás röpdolgozatainak javítása

A hallgatók a heti két gyakorlati órából az egyiken írtak mindig röpzh.-t. Ezekben a dolgozatokban volt egy elméleti kérdés, ami az előadáson elhangzottakra vonatkozott és egy olyan példa, ami gyakorlaton fordult elő. Ezeket a zh-kat, ahogy egy fentebbi fejezetben is már említettem, a hallgatók egymásnak javították, így természetesen erre a rendszerre is kértünk visszajelzést.

A hallgatók véleménye szerint a röpdolgozatoknak fontos szerepük volt a kurzus során. Többen kiemelték, hogy hasznos visszajelzést adtak az aktuális tudásukról és jól motiválták, valamint segítettek abban őket, hogy folyamatosan foglalkozzanak az anyaggal, és ne halogassák a tanulást az év végére, vagy a zárthelyi dolgozatok idejére.
Néhány hallgató megjegyezte, hogy a röpdolgozatok egyes esetekben stresszessé tették a gyakorlatokat, de ugyanakkor ez a nyomás arra késztette őket, hogy rendszeresen foglalkozzanak a tananyaggal. Azt gondolom, hogy ennek eredményeként a kurzus anyaga jobban rögzült, és a folyamatos tanulásnak köszönhetően kevesebb volt a lemaradás, mint esetlegesen más kurzusokon.
A hallgatók visszajelzései alapján az egymás röpdolgozatainak javítása vegyes érzelmeket váltott ki. Többen úgy vélték, hogy ez egy hasznos és érdekes tapasztalat volt, amely lehetőséget adott arra, hogy jobban megértsék a feladatok értékelési szempontjait. Egyesek számára ez kifejezetten jó mókának bizonyult, és élvezték a folyamatot.
Más hallgatók azonban kellemetlennek érezték mások munkájának értékelését. Néhányan megjegyezték, hogy a javítás során szembesültek azzal, hogy nem mindig egyértelmű és könnyű eldönteni, mi a helyes megoldás. Ez azt gondolom, hogy fontos tapasztalat a jövő tanárainak.
Pozitív visszajelzés érkezett arra is, hogy igazságosnak érezték a javítást, ugyanis én, gyakorlatvezetőként, újra ellenőriztem a pontozásokat.

Javaslatok a gyakorlatvezető számára, valamint a gyakorlatvezető kiemelkedő módszerei

A hallgatók visszajelzései alapján nem érkezett jelentős kritika a munkámmal kapcsolatban. Az egyetlen konkrét javaslat az volt, hogy amennyiben a házi feladatok megbeszélésére az órán nem jut elég idő, akkor azok részletes levezetését elérhetővé lehetne tenni online felületen, például Teamsen. Ugyanakkor a válaszadó megjegyezte, hogy ezt korábban nem jelezték igényként felém.
Összességében ez a visszajelzés arra utal, hogy a hallgatók alapvetően elégedettek voltak az órák lebonyolításával, és nem éreztek szükséget jelentős változtatásokra.
A hallgatók visszajelzései alapján sikerült olyan légkört teremtenem a gyakorlatokon, amelyben felszabadultan és motiváltan dolgozhattak. Többen kiemelték, hogy társként kezeltem őket, ami segítette a nyitott kommunikációt és az aktív részvételt. Azt is értékelték, hogy mindenki kérdezhetett, és senki sem érezte magát kellemetlenül, ha egy feladatot elsőre nem értett meg.
A visszajelzések szerint a magyarázatok érthetőek voltak. Ha valaki nem értett meg egy feladatot elsőre, próbáltam többféleképpen elmagyarázni, hogy mindenki számára világossá váljon az anyag. A hallgatók különösen hasznosnak találták, hogy figyeltem a saját tempójukra, és ha valaki teljesen elakadt, nem ragadtunk le egyetlen feladatnál, hanem közösen dolgoztunk a megoldáson, így az óra hatékony maradt.

Összességében a hallgatók szerint az órák hangulata és hatékonysága jól kiegyensúlyozott volt. Bár mindig van lehetőség a fejlődésre, örülök annak, hogy a visszajelzések alapján módszereim támogatták őket a tanulásban és a matematikai gondolkodásuk fejlesztésében. Őszintén azonban úgy gondolom, hogy a pozitív hatást elsősorban azzal érhettem el, hogy életkorban közel állok a diákokhoz, és magam is még hallgató vagyok. Ez megteremtette azt a légkört, amelyben nem féltek attól, hogy hibáznak előttem, hiszen én magam is többször kerültem hasonló helyzetbe. Gyakran előfordul, hogy egy professzor vagy egy nagy tekintélyű matematikus előtt a hallgatók tartanak attól, hogy hibás választ adnak, vagy butaságot mondanak. Úgy vélem, hogy a pedagógiai módszereim sikerében meghatározó szerepet az játszott, hogy a hallgatók számára könnyebben megközelíthető, közvetlenebb módon tudtam segíteni őket.

Az értékelési rendszer megtartandó elemei

A hallgatók visszajelzései alapján az értékelési rendszer jól működött, és számos olyan elemet tartalmazott, amelyeket érdemes lenne a jövőben is megtartani. Többen kiemelték, hogy a táblánál megoldott feladatokért járó pontok motiválták őket az aktív részvételre, ezért ezt mindenképpen megőriznék.
A röpzh.-k szintén népszerűek voltak, mivel ösztönözték a rendszeres tanulást, és lehetőséget adtak a hallgatóknak arra, hogy folyamatosan nyomon kövessék a saját fejlődésüket.
Több visszajelzés hangsúlyozta a pluszpontszerzési lehetőséget a beadható plusz feladatok esetében, amelyek segítségével a hallgatók extra munkával javíthattak az eredményeiken.

A tárgy leghasznosabb és leghaszontalanabb elemei

A hallgatók visszajelzései alapján a *Bevezető Analízis 2.* kurzus során elsajátított tudás legnagyobb értékét a gondolkodásmód fejlesztése jelentette. Többen kiemelték, hogy a tárgy nemcsak konkrét számítási technikákat tanított, hanem megtanította őket arra is, hogy egy problémát alaposan átgondoljanak, megértsenek, ne csak a végeredményre fókuszáljanak, hanem annak bizonyítására is.
A hallgatók közül néhányan különösen értékelték a bizonyítások pontos levezetésének módszereit, valamint az alapvető matematikai fogalmak tisztázását. Külön említést kapott a határértékszámítás és a sorozatok fogalmának tisztázása, amelyeket a hallgatók egy része kifejezetten élvezett.

Aminek pedig nagyon örültem, hogy egyetlen hallgató sem jelzett lényegében olyan elemet, amit haszontalannak tartott a kurzuson.

8. Reflexió a gyakorlatvezetői tapasztalatokról és a tudásfejlődésről

A dolgozat zárásaként röviden összefoglalnám, hogy analízis gyakorlatvezetőként mit tapasztaltam, milyen tudásterületekben fejlődtem a félév során. Összességében azt mondhatom, hogy szinte mind a hat területen gyarapodott a tudásom.

Az *általános szaktárgyi tudásom*, a hallgatókéval együtt természetesen fejlődött. Bár én 4 évvel ezelőtt tanultam azt, amit tanítottam, de természetesen így minden feladatot még stabilabban kellett értenem és át kellett ismételnem azt a területet, ami a gyakorlaton előjött. Nem volt olyan lehetőségem, hogy úgy menjek be egy gyakorlatra, hogy egy feladatot nem tudok megoldani, vagy nem foglalkoztam a házi feladatokkal. Illetve azt is fontos megjegyeznem, hogy amikor hallgatóként vettem részt ezen a tárgyon, akkor volt a Covid19-járvány kezdete. Ennek következtében ezt a témakört nem tudtam mélyen elsajátítani 2020-ban, mivel az óráink online formában zajlottak, és a gyakorlatvezetőmnek sem állt rendelkezésre a szükséges technikai felszereltség. Emiatt nem tudtunk elmélyülni az anyagban, és a gyakorlati munka sem volt kellően intenzív. Ezért külön hálás vagyok, hogy 2024-ben még egyszer találkozhattam ezzel a témával és jobban beleáshattam magamat.

A *specializált szaktárgyi tudásom* fejlődött talán a legtöbbet, ugyanis rengeteget gyakorolhattam annak felismerését, mikor egy diák elmond egy feladatmegoldást, hogy helyes-e a gondolatmenete. Hiába oldottam meg előre egy feladatot, ha valaki más módszerrel közelítette meg, át kellett látnom, hogy az is helytálló-e. Véleményem szerint abban is sokat fejlődtem, hogy hatékonyabban el tudom magyarázni a "miért" kérdésekre a választ, ugyanis nem csak egy megközelítést látok, valamint abban is szereztem tapasztalatot, hogy egy feladat kapcsán milyen szemléltetés az, ami segíti a megértést a diákoknak.

A *horizont szaktárgyi tudásom* is gyarapodott, ugyanis átfogóbb kép alakult ki bennem a tananyag vertikális/horizontális kapcsolatairól. Tisztában kellett lennem egy téma vagy feladat kapcsán, hogy ez hogyan épül be a tananyagba, hogyan kapcsolódik a későbbiekhez, vagy ahhoz, amit akkor tanítok. Tudnom kellett, hogy hogyan érdemes egy fogalomról beszélni, az alapján, hogy mi a következő, amit előkészít.

A *szaktárgyi és diákokról szóló tudásom* olyan szempontból fejlődött, hogy véleményem szerint már jobban felismerem a diákok tipikus félreértéseit (pl. helytelen gondolkodási sémákat), és azt gondolom, hogy hatékonyabban választok reprezentációkat (pl. vizuális eszközöket, szemléltető feladatokat), amelyek egyértelműek és motiválóak a diákok számára.

A *szaktárgyi és tanításról szóló tudásom* azért gondolom, hogy gyarapodott, mert láttam, hogy az előadó milyen logika alapján határozta meg a példák ill. a tanított anyagrészek sorrendjét. Ezt, bár gyakorlati tapasztalatot nem szereztem, véleményem szerint jobban átlátom már. Illetve azt is ebbe a tudásterületbe sorolnám, hogy a gyakorlat végére, ill. következő félévekben már rutinosabban választottam ki, hogy milyen feladatoknál érdemes alkalmazni a Plickers-t, vagy páros/csoportmunkát.

A *szaktárgyi és tantervi tudásom* csak kis részben fejlődött, ugyanis a félév alatt nem kellett tisztában lennem a kimeneti követelményekkel, hiszen erre az előadó figyelt, ugyanakkor természetesen ebbe is nyertem egy kis betekintést.

Összességében tehát nagyon hálás vagyok, hogy Dr. Keleti Tamás engem kért fel gyakorlatvezetőnek, ugyanis kifejezetten sokat fejlődtem, amiket később, tanárként remélhetőleg hasznosítani tudok. Hiszen egy speciális matematika tagozaton, vagy egy erősebb gimnáziumban megjelenhetnek ugyanezen feladatok és akkor már nem lesz számomra teljesen újdonság a tanításuk és tisztában leszek azzal is, hogy mely területek magyarázatára, szemléltetésére kell nagyobb hangsúlyt fektetni, és mi az, ami a diákoknak könnyebben érthető.

9. Összegzés

A dolgozatban sikerült megvalósítanom azt a célt, amelyet kezdetben kitűztem magam elé. A *Bevezető analízis 2* gyakorlaton megjelent feladatok elemzésén keresztül összefoglaltam, hogy milyen tapasztalataim voltak a tanítás során és milyen tudásterületekben fejlődtek a tanulók velem együtt. Fontos volt számomra, hogy egy történelmi áttekintés után bemutassam, hogy a különböző oktatási szinteken (általános iskola, középiskola, egyetem) hogyan épül fel az analízis, valamint szerettem volna hangsúlyt fektetni az egyetemi differenciálásra is, hogy ezt követően foglalkozzak olyan feladatokkal, amik valami miatt relevánsak voltak a számomra.

Összességében a szakdolgozat írása nem csupán az analízis oktatásának elméleti és gyakorlati kérdéseivel kapcsolatos ismereteimet gyarapította, hanem lehetőséget adott a saját pedagógiai hozzáállásom reflexiójára is.

Bibliográfia

[Már86] Sain Márton. *A matematikai analízis története*. E-könyv. 1986. URL: https://mek.oszk.hu/05000/05052/pdf/08_sain_663-808.pdf.

[Shu86] L. S. Shulman. "Those who understand: Knowledge growth in teaching". *Educational Researcher* 15.2 (1986), 4–14. old.

[Shu87] L. S. Shulman. "Knowledge and teaching: Foundations of the new reform". *Harvard Educational Review* 57 (1987), 1–22. old.

[BTP08] D. L. Ball, M. H. Thames és G. Phelps. "Content knowledge for teaching: What makes it special?": *Journal of Teacher Education* 59.5 (2008), 389–407. old. DOI: 10.1177/0022487108324554.

[Món10] Lukács Mónika. *A MATEMATIKAI ANALÍZIS TÖRTÉNETE A 17-18. SZÁZADBAN*. Matematika Bsc Tanári szakirány szakdolgozat. 2010. URL: https://abesenyei.web.elte.hu/theses/lukacs.pdf.

[Zol16] Gémes Margit; Szentmiklóssy Zoltán. *Bevezető analízis II. példatár*. Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar Matematikai Intézet, 2016. URL: https://margitgemes.web.elte.hu/Tanar/Bevanal/bev_anal2_peldatar.pdf.

[Ist18] Porubszky István. "Középkori számolási eljárásokról". *DIMENZIÓK - Matematikai Közlemények* 6 (2018). Cseh Tudományos Akadémia Informatikai Kutatóintézete, Prága. DOI: 10.20312/dim.2018.07. URL: https://real.mtak.hu/88134/1/dim.2018.07.pdf.

[Ist19] Stráhl István. *Minden ló egyforma színű!* 2019. URL: https://comsciblogh un.wordpress.com/2019/08/31/minden-lo-egyforma-szinu/.

[Okt20] Oktatási Hivatal. *A 2020-as NAT-hoz illeszkedő tartalmi szabályozók*. Oktatási dokumentum. 2020. URL: https://www.oktatas.hu/kozneveles/kerettantervek/2020_nat.

[Ger21] Bognár Gergely. "Megoldotta-e a fizika zénón paradoxonjait?": *Fizikai Szemle* (2021), 238–240. old. URL: https://real-j.mtak.hu/15255/55/FizSzem-20210708-PDFA.pdf#page=24.

[Hiv21] Oktatási Hivatal. *Matematika Részletes Érettségi Vizsgakövetelmény*. Hivatalos dokumentum. 2021. URL: https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2024/matematika_2024_e.pdf.

[Sán21] Kántor Sándorné. *Fejezetek a matematikai analízis tanításának történetéből*. 2021. URL: https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2021-6/1115-kantor-tunde-az-analizis-tanitasa.

[Eöt22] Eötvös Loránd Tudományegyetem. *Matematikatanári szak — Tárgyleírások*. 2022. URL: https://www.math.elte.hu/wp-content/uploads/2022/09/TTK_OTAK_matematikatanar_targyleirasok_2022.pdf.

[Esz23] Varga Eszter. "PROBLÉMÁKON KERESZTÜLI TANÍTÁS, PROBLÉMASOROZATOK ÉS PROBLÉMARENDSZEREK TERVEZÉSE: A TANÁROK KÖZTI TUDÁSKÖZVETÍTÉS LEHETSÉGES ESZKÖZEI A MAGYAR FELFEDEZTETŐ MATEMATIKAOKTATÁSBAN". Dissz. Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2023. DOI: 10.15476/ELTE.2023.161.

[Att24] Szilágyi Szilvia; Körei Attila. "Kártyajátékok a felsőoktatásban – Szisztematikus áttekintés a Miskolci Egyetemen fejlesztett matematikai témájú didaktikai játékokról". (2024). DOI: 10.29180/978-615-6342-90-4_23. URL: https://publikaciotar.uni-bge.hu/id/eprint/2358/1/23.cikk_II.Cserny%C3%A1k_L%C3%A1szl%C3%B3_Konf_K%C3%B6zlem%C3%A9nyei.pdf.

[Tam24] Keleti Tamás. *Bevezető analízis 2, 2024. tavasz, 1. csoport*. 2024. URL: https://keletita.web.elte.hu/bevanal2tavasz24.html.

[Edi] V. Gilbert Edit. *Heterogén hallgatói csoportok és a differenciálás igénye a felsőoktatásban*. Pécsi Tudományegyetem. URL: https://polc.ttk.pte.hu/tamop-4.1.2.b.2-13/1-2013-0014/1/heterogn_hallgati_csoportok_s_a_differencils_ignye_a_felsoktatsban.html.

[Pli] Plickers. *What is Plickers?* angol. URL: https://help.plickers.com/hc/en-us/articles/360009395854-What-is-Plickers.

Alulírott Török Emese nyilatkozom, hogy szakdolgozatom elkészítése során az alább felsorolt feladatok elvégzésére a megadott MI alapú eszközöket alkalmaztam:

Feladat	**Felhasznált eszköz**	**Felhasználás helye**	**Megjegyzés**
Nyelvhelyesség ellenőrzés	DeepSeek	1, 4, 8 és 9. fejezet	
	GPT-4o	2, 3, 5, 6 és 7. fejezet	
LaTeX kódolásban segítség	GPT-4o és DeepSeek	Teljes dolgozatban több helyen	
Adatfeldolgozás	GPT-4o	6. fejezet	LaTeX kód generálása a feladatokról képernyőképből
Szövegvázlat készítés	DeepSeek	1, 4, 8 és 9. fejezetben több helyen	
	GPT-4o	2, 3, 5, 6 és 7. fejezetben több helyen	
Szinonímák keresése	DeepSeek	1, 4, 8 és 9. fejezetben több helyen	
	GPT-4o	2, 3, 5, 6 és 7. fejezetben több helyen	

1. táblázat. MI alapú eszközök felhasználása

A felsoroltakon túl más MI alapú eszközt nem használtam.