EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szakdolgozat

Különleges függvények az egyváltozós analízisben

Témavezető:
Besenyei Ádám
egyetemi docens

Készítette:
Szlezák Zsófia
Matematika tanár – Fizikatanár
Osztatlan tanári mesterszak

2020

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott SZLEZÁK ZSÓFIA, Neptun-kód: G84ACV ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE matematika-fizika osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2020. 11. 24.

Szlezák Zsófia

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék **3**

Bevezetés **4**

1. Egy érdekes függvénycsalád **5**
1.1. Függvényhatárérték . . . 5
1.1.1. Elméleti háttér . . . 5
1.1.2. A függvénycsalád vizsgálata . . . 6
1.2. Folytonosság . . . 7
1.2.1. Elméleti háttér . . . 7
1.2.2. A függvénycsalád vizsgálata . . . 8
1.3. Differenciálhatóság . . . 9
1.3.1. Elméleti háttér . . . 9
1.3.2. A függvénycsalád vizsgálata . . . 9
1.4. Lokális tulajdonságok . . . 12
1.4.1. Lokális növekedés és csökkenés . . . 12
1.4.2. Lokális szélsőérték . . . 15
1.4.3. Lokális tulajdonságok és derivált . . . 16
1.5. Primitív függvény . . . 19
1.5.1. Elégséges feltétel – a folytonosság . . . 19
1.5.2. Szükséges feltétel – a Darboux-tulajdonság . . . 20
1.6. Grafikon ívhossz . . . 22
1.6.1. Elméleti háttér . . . 22
1.6.2. A függvénycsalád vizsgálata . . . 22

2. Függvénytan és különleges függvények középiskolában **24**
2.1. Nemzeti Alaptanterv – Helyi tanterv . . . 24
2.2. Tankönyvek – Mindenki ugyanúgy kezdte? . . . 26
2.2.1. Mozaik tankönyvkiadó – 9. évfolyam . . . 26
2.2.2. Mozaik tankönyvkiadó – 11. évfolyam . . . 26
2.2.3. Mozaik tankönyvkiadó – Az analízis elemei . . . 27
2.2.4. Mozaik – Az analízis elemei – Feladatgyűjtemény . . . 28
2.2.5. Nemzeti tankönyvkiadó – 9. évfolyam . . . 28
2.2.6. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. . . . 29
2.2.7. OFI – 11. évfolyam . . . 30
2.2.8. Nemzeti tankönyvkiadó – 11–12. évfolyam . . . 30
2.2.9. Tankönyvkiadó – 9. évfolyam . . . 32
2.2.10. Tankönyvkiadó – 10. évfolyam . . . 33
2.3. Konklúzió . . . 33

Irodalomjegyzék **35**

Bevezetés

Matematika–fizika tanárként különösen sokszor találkozom a függvények témakörével. Ez volt az egyik indoka, hogy erről szerettem volna írni, hiszen sokszor tanítom vagy csak visszautalok rá, és máris látom az „üres tekinteteket”. Sajnos az az érzésem, hogy minél többet próbálunk meg a függvénytannal foglalkozni, annál rosszabb a helyzet.

A második indok amiért ezt a témakört választottam, az az volt, mert szeretem. Bár kis elfogultsággal lehet vádolni, de a matematikában ez az egyik kedvenc témaköröm. Ebből pedig egyenesen következik, hogy fontosnak tartom és szívemen viselem azt, hogy hogyan tanítjuk/tanítom a függvényeket.

A harmadik indok pedig az volt, hogy érdekesnek találom, hogy milyen a hétköznapi ember gondolkodása erről a témáról. Meglepő módon sokszor hallom, hogy a függvény transzformációk emlékezetesek maradnak az idősebb korosztály számára is. Az sem mellékes, hogy ezekre pozitívan vagy negatívan emlékezünk vissza, hiszen gyermekeink, unokáink a mi élményeinkből is fognak táplálkozni.

Mindezen indíttatásból a szakdolgozatomban szeretném egy függvénycsaládon keresztül megmutatni, hogy a függvények tulajdonságai milyen szervesen épülnek egymásra. Majd a középiskolai függvénytanra is kitérek. Bemutatom a régi és az új kerettantervek közötti alapvető különbségeket. Végül pedig több kornak is a tankönyvét, vagyis különböző kiadók, különböző években kiadott könyveit is megvizsgálom a függvénytan szempontjából.

Szakdolgozatom elkészüléséhez nagyban hozzájárult Besenyei Ádám, akinek nagyon köszönöm, hogy ennyire türelmesen, higgadtan és lelkiismeretesen állt a munkámhoz. Családomnak, kollégáimnak és tanítványaimnak is köszönöm. Istennek pedig, hogy elkísért.

Úgy kell imádkoznunk, mintha minden Istentől függene, és úgy dolgozni, mintha minden tőlünk függne.

Szent Ágoston

1. fejezet

Egy érdekes függvénycsalád

Ebben a fejezetben egy érdekes függvénycsaládot veszünk részletesen szemügyre, és ezen keresztül az a célunk, hogy az egyváltozós függvényekhez kapcsolódó analízisbeli fogalmakat szemléltessük és elmélyítsük. Ilyen fogalmak a függvényhatárérték, folytonosság, differenciálhatóság, primitív függvény, grafikon ívhossz.

A vizsgálatunk tárgyát képező függvénycsalád a következő:

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ és a g_α függvényt a lehető legbővebb halmazon értelmezzük. Ha α egész szám, akkor g_α az egész számegyenesen értelmezett, nem egész kitevő esetén azonban a $(-\infty; 0)$ félegyenesen g_α csak bizonyos α értékek esetén van értelmezve (például $\alpha = 1/3$ esetén igen, $\alpha = 1/2$ esetén nem), míg a $[0; \infty)$ félegyenesen való értelmezhetőségnek nincs akadálya. Vegyük észre, hogy a hatványfüggvények és a trigonometrikus függvények megfelelő félegyeneseken való differenciálhatósága és a deriválási szabályok miatt a g_α függvény az $x = 0$ pont kivételével akárhányszor differenciálható (méghozzá a képlet formális deriválásával). Ennek alapján a g_α függvény viselkedése főképpen a 0 pontban kérdéses. A továbbiakban ezt tanulmányozzuk részletesen. Az egyváltozós analízishez kapcsolódó fogalmak és tételek kapcsán a [2] könyvre támaszkodunk. Továbbá az [1] cikk bizonyos példáit is felhasználjuk.

1.1. Függvényhatárérték

1.1.1. Elméleti háttér

A g_α függvénynek a 0-beli viselkedését először a határérték szempontjából vizsgáljuk. Kérdés, hogy a különböző α paraméterértékek mellett mikor van és mikor nincs határértéke.

A határérték vizsgálatához célszerű felelevenítenünk a szükséges definíciókat és összefüggéseket.

1.1. Definíció (Pontozott környezet)**.** Legyen $a \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor az *a pontozott környezetei* az $(a - \delta; a + \delta) \setminus \{0\}$ alakú halmazok, ahol $\delta > 0$ tetszőleges.

1.2. Definíció (Függvényhatárérték)**.** Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az $a \in \mathbb{R}$ pont egy pontozott környezetében. Ekkor az f függvény *határértéke* az a pontban a

- $b \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy minden x-re igaz, hogy $0 < |x - a| < \delta$ esetén $|f(x) - b| < \varepsilon$. Ezt jelöléssel úgy fejezzük ki, hogy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ vagy $f(x) \to b$ $(x \to a)$.

- ∞, ha minden K számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy minden x-re igaz, hogy $0 < |x-a| < \delta$ esetén $f(x) > K$. Jelöléssel: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ vagy $f(x) \to \infty$ $(x \to a)$.
- $-\infty$, ha minden K számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy minden x-re igaz, hogy $0 < |x-a| < \delta$ esetén $f(x) < K$. Jelöléssel: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ vagy $f(x) \to -\infty$ $(x \to a)$.

A függvényhatárérték definícióját az átviteli elv segítségével a sorozatok határérték fogalmára vezethetjük vissza

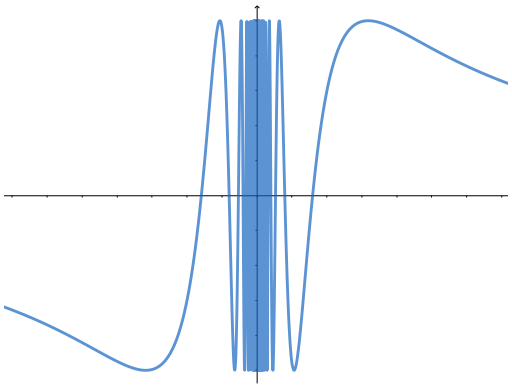
1.3. Tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv)**.** *Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az $a \in \mathbb{R}$ pont egy pontozott környezetében és legyen β egy valós szám vagy pedig a ∞ és a $-\infty$ szimbólumok valamelyike. Ekkor ekvivalens a következő két állítás:*

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \beta$*;*

(2) *Az f értelmezési tartományában haladó tetszőleges (x_n) számsorozatra teljesül, hogy ha $x_n \to a$ és minden n-re $x_n \neq a$, akkor $f(x_n) \to \beta$.*

1.1.2. A függvénycsalád vizsgálata

1.4. Állítás. *Ha $\alpha = 0$, akkor az (1.1) függvénynek az $x = 0$ pontban nincs határértéke. (A függvény grafikonját az 1.1. ábra szemlélteti.)*



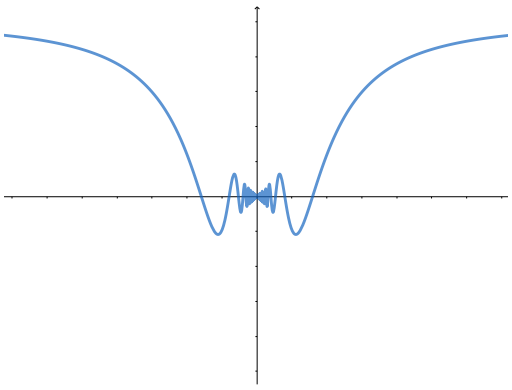
1.1. ábra. Az (1.1) függvény grafikonja $\alpha = 0$ esetben

Bizonyítás. A bizonyításhoz használjuk az 1.3. átviteli elvet.

Ha a g_0 függvénynek lenne határértéke a 0 pontban, akkor tetszőleges $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozat esetén a $g_0(x_n)$ függvényértékek sorozatának is lenne határértéke (mégpedig ugyanaz a β érték). Azonban az $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ $(n = 1, 2, \dots)$ választással $x_n \to 0$ és minden n-re $x_n \neq 0$, továbbá

$$g_0(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n.$$

Ennek a sorozatnak nincsen határértéke, hiszen a páros indexű tagokból álló részsorozata a konstans 1 sorozat, amelyek határértéke 1; a páratlan indexű tagokból álló részsorozata a konstans (-1) sorozat, amelyek határértéke -1, márpedig ha egy sorozat konvergens, akkor bármelyik részsorozatának ugyanaz a határértéke. Mivel találtunk olyan $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatot, amelyre a $(g_0(x_n))$ sorozatnak nincs határértéke, ezért az 1.3. átviteli elv alapján a g_0 függvénynek a 0 pontban nem létezik határértéke. □



1.2. ábra. Az (1.1) függvény grafikonja $\alpha = 1$ esetben

1.5. Állítás. *Ha $\alpha = 1$, akkor az (1.1) függvénynek az $x = 0$ pontban van határértéke, mégpedig 0 a határértéke. (A függvény grafikonját az 1.2. ábra szemlélteti.)*

Bizonyítás. Definíció szerint igazoljuk, hogy $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor olyan $\delta > 0$ számot kell megadni, hogy ha $0 < |x| < \delta$, akkor $|g_1(x) - 0| < \varepsilon$, azaz

$$\left| x \sin\frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Mivel a szinuszfüggvény értékei legfeljebb 1 abszolút értékűek, ezért

$$\left| x \sin\frac{1}{x} - 0 \right| = |x| \cdot \left| \sin\frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

így $\delta = \varepsilon$ választással teljesül, hogy $0 < |x| < \delta$ esetén $|g_1(x) - 0| < \varepsilon$.

□

1.6. *Megjegyzés.* Hasonlóan igazolható, hogy ha $\alpha > 0$ egész szám, akkor a g_α függvénynek a 0 pontban 0 a határértéke. Ha $\alpha > 0$ nem feltétlenül egész, akkor a g_α függvénynek a 0-ban a jobb oldali határértéke létezik és 0 az értéke (ilyenkor $x < 0$ esetén $g_\alpha(x)$ általában nem értelmezett).

1.2. Folytonosság

Ebben a részben az (1.1) függvénycsaládnak a 0 pontbeli folytonosságát tanulmányozzuk különböző paraméterértékek esetén. Elevenítsük fel a szükséges fogalmakat és összefüggéseket.

1.2.1. Elméleti háttér

1.7. Definíció (Környezet)**.** Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor az a pont $\delta > 0$ sugarú *környezete* az $(a - \delta; a + \delta)$ intervallum.

1.8. Definíció (Folytonosság)**.** Az f függvény *folytonos* az $a \in \mathbb{R}$ pontban, ha:

- értelmezve van az a pont egy környezetében és
- minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$ úgy, hogy minden x-re igaz: ha $|x - a| < \delta$, akkor $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

A függvényhatárértékhez hasonlóan a folytonosság fogalma is kapcsolatba hozható a sorozathatárérték fogalmával. Erről szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv.

1.9. Tétel (Folytonosságra vonatkozó átviteli elv)**.** *Az f függvény legyen értelmezve az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében. Ekkor ekvivalensek a következő állítások:*

(1) *Az f függvény folytonos az a pontban.*

(2) *Minden, az f függvény értelmezési tartományában haladó (x_n) számsorozat esetén igaz, hogy ha $x_n \to a$, akkor $f(x_n) \to f(a)$.*

A folytonosság és a függvényhatárérték szorosan összefügg egymással, ezt fogalmazza meg a következő tétel.

1.10. Tétel (Folytonosság és függvényhatárérték kapcsolata)**.** *Legyen az f függvény értelmezve az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében. Ekkor az f pontosan akkor folytonos az a-ban, ha ott létezik a határértéke és az megegyezik az $f(a)$ helyettesítési értékkel.*

1.11. Tétel (Folytonosság és algebrai műveletek kapcsolata)**.** *Ha az f, g függvények folytonosak az $a \in \mathbb{R}$ pontban, akkor $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ is folytonos a-ban, továbbá ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos a-ban.*

1.12. Tétel (Folytonosság és kompozíció kapcsolata)**.** *Ha az f függvény folytonos egy $a \in \mathbb{R}$ pontban, a g függvény pedig folytonos az $f(a)$ pontban, akkor a $g \circ f$ összetett függvény is folytonos az a pontban.*

1.2.2. A függvénycsalád vizsgálata

Térjünk rá a g_α függvények vizsgálatára, és nézzük meg, hogy az $x = 0$ pontban miként viselkednek folytonosság szempontjából.

1.13. Állítás. *Ha $\alpha = 0$, akkor az (1.1) függvény az $x = 0$ pontban nem folytonos.*

Bizonyítás. A g_0 függvény értelmezve van a 0 egy környezetében (hiszen az egész számegyenesen értelmezve van), azonban az 1.4. állításban igazoltuk, hogy a 0 pontban nem létezik határértéke. Ekkor az 1.10. tétel alapján nem is lehet folytonos ebben a pontban. □

1.14. Állítás. *Ha $\alpha = 1$, akkor az (1.1) függvény az $x = 0$ pontban folytonos.*

Bizonyítás. A g_1 függvény értelmezve van a 0 egy környezetében (az egész számegyenesen), továbbá az 1.5. állításban megmutattuk, hogy a 0 pontban van határértéke és az 0, ami éppen a függvény 0-beli helyettesítési értéke. Ekkor az 1.10. tétel alapján a g_1 függvény folytonos a 0 pontban. □

1.15. *Megjegyzés.* Ahogy az 1.6. megjegyzésben utaltunk rá, valójában tetszőleges pozitív egész α esetén a g_α függvénynek létezik a 0-ban határértéke és az 0-val, vagyis a 0-beli helyettesítési értékkel egyenlő. Következésképpen a g_α minden pozitív egész α paraméterérték esetén folytonos a 0 pontban.

1.3. Differenciálhatóság

Először tekintsük át a deriválhatósághoz kapcsolódó definíciókat és összefüggéseket.

1.3.1. Elméleti háttér

1.16. Definíció (Differenciahányados)**.** Legyen $a \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az f függvény értelmezve van az a pont egy környezetében. Ekkor az

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \neq a)$$

függvényt az f függvény a ponthoz tartozó *differenciahányados függvényének* vagy más néven *különbségi hányados függvényének* nevezzük.

1.17. Definíció (Derivált)**.** Legyen az f függvény értelmezve az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében. Ekkor az f függvény *deriválható* vagy *differenciálható* az a pontban, ha létezik és véges a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték. Ezt a határértéket az f függvény a pontbeli *differenciálhányadosának* vagy *deriváltjának* nevezzük, jele $f'(a)$.

A differenciálhatóság és folytonosság kapcsolatáról szól a következő tétel.

1.18. Tétel (A differenciálhatóság és folytonosság kapcsolata)**.** *Ha az f függvény deriválható az a pontban, akkor folytonos is a-ban.*

1.3.2. A függvénycsalád vizsgálata

1.19. Állítás. *Ha $\alpha = 0$, akkor az* (1.1) *függvény az $x = 0$ pontban nem deriválható.*

Bizonyítás. Mivel az 1.13. állítás szerint a g_0 függvény nem folytonos a 0 pontban, ezért az 1.18. tétel alapján g_0 nem is differenciálható a 0 pontban. □

1.20. Állítás. *Ha $\alpha = 1$, akkor az* (1.1) *függvény az $x = 0$ pontban nem deriválható.*

Bizonyítás. A g_1 függvény 0 ponthoz tartozó differenciahányadosa:

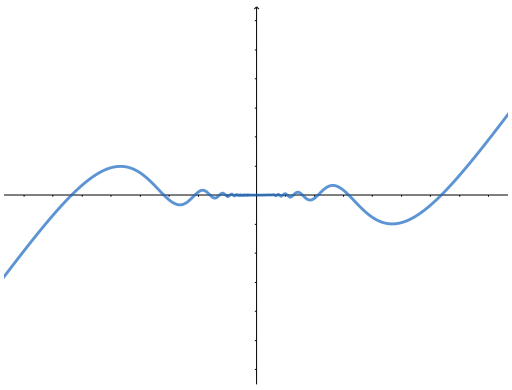
$$\frac{g_1(x) - g_1(0)}{x - 0} = \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Az 1.4. tételből tudjuk, hogy a $\sin \frac{1}{x}$ függvénynek az $x = 0$ pontban nincsen határértéke, ezért a fenti különbségi hányadosnak nem létezik határértéke a 0 pontban. Tehát a g_1 függvény nem deriválható az $x = 0$ pontban. □

1.21. Állítás. *Ha $\alpha = 2$, akkor az* (1.1) *függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, azonban a deriváltfüggvénye nem folytonos a 0 pontban. (A függvény grafikonját az 1.3. ábra szemlélteti.)*

Bizonyítás. Ismét írjuk fel a 0 ponthoz tartozó különbségi hányadost:

$$\frac{g_2(x) - g_2(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$



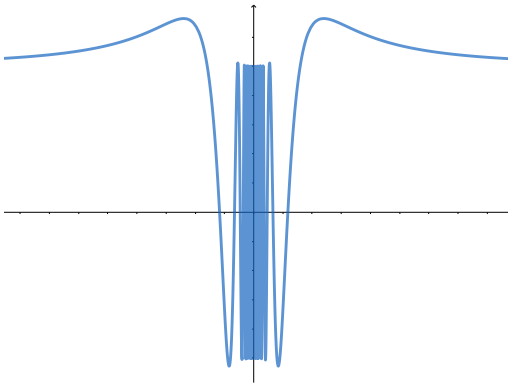
1.3. ábra. Az (1.1) függvény grafikonja $\alpha = 2$ esetben

Ezzel (a 0 kivételével) visszakaptuk az $x \sin \frac{1}{x}$ függvényt, melyről már az 1.5. állításban igazoltuk, hogy az $x = 0$ pontban van határértéke és az 0. Tehát a g_2 függvény differenciálható a 0 pontban és $g_2'(0) = 0$.

Szükségünk van a deriváltfüggvényre az $x \neq 0$ pontban is. Ezekben a pontokban a deriválási szabályok alapján végezhetjük a deriválást és így kapjuk, hogy:

$$g_2'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

amely függvény grafikonját az 1.4. ábra mutatja.



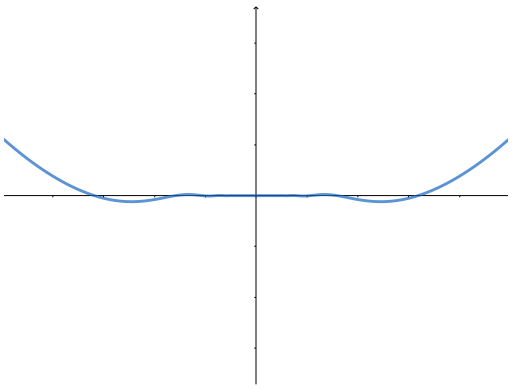
1.4. ábra. Az (1.1) függvény deriváltfüggvénye $\alpha = 2$ esetén

Megmutatjuk, hogy a g_2' deriváltfüggvénynek a 0 pontban nincsen határértéke. Ehhez a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elvet használjuk. Legyen $x_n = \frac{1}{n\pi}$, ahol $(n \in \mathbb{N}^+)$. Ekkor $x_n \to 0$ és minden n-re $x_n \neq 0$. Másrészt

$$g_2'(x_n) = 2\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi) - \cos(n\pi) = (-1)^{n+1}.$$

Ennek a sorozatnak nincs határértéke, így a g_2' függvénynek sincsen határértéke a 0 pontban, ezért nem is folytonos. □

1.22. Állítás. *Ha $\alpha = 3$, akkor az (1.1) függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és a deriváltfüggvénye mindenütt folytonos. (A függvény grafikonját az 1.5. ábra szemlélteti.)*



1.5. ábra. Az (1.1) függvény grafikonja $\alpha = 3$ esetben

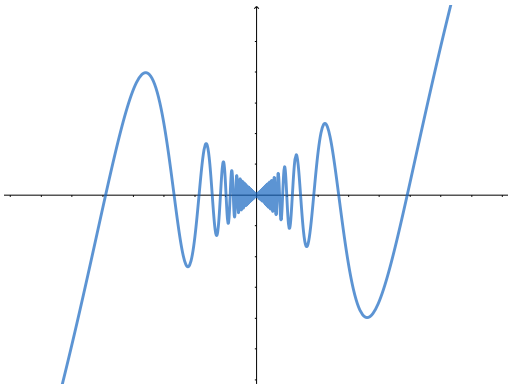
Bizonyítás. A g_3 függvény 0 ponthoz tartozó különbségi hányadosa:

$$\frac{g_3(x) - g_3(0)}{x - 0} = \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Ezzel (a 0 pont kivételével) megkaptuk az (1.1) függvényt $\alpha = 2$ paraméterértékkel. Erről az 1.6. megjegyzésben láttuk, hogy van határértéke a 0 pontban és a határérték 0. Ezért g_3 differenciálható a 0 pontban és $g_3'(0) = 0$. Az $x \neq 0$ pontokban a g_3' függvény a deriválási szabályok segítségével számolható, így

$$g_3'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

amely függvény grafikonját az 1.6. ábra szemlélteti.



1.6. ábra. Az (1.1) függvény deriváltfüggvénye $\alpha = 3$ esetén

A g_3' deriváltfüggvény az $x \neq 0$ pontokban elemi függvényekből nyerhető algebrai műveletek és kompozíció segítségével, ezért az 1.12. tétel alapján folytonos. A g_3' függvény 0 pontbeli folytonossága pedig abból adódik, hogy előáll a

$$\begin{cases} 3x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

és

$$\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

függvények különbségeként. Az előbbi függvény valójában $3g_2$, amelyről az 1.6. megjegyzésben láttuk, hogy folytonos az $x = 0$ pontban. Utóbbi függvény 0 pontbeli folytonossága a g_1 függvény mintájára igazolható szinte szóról szóra. Mivel az előbbi két függvény mindegyike folytonos a 0 pontban, ezért különbségük, g_3' is folytonos a 0 pontban. □

1.4. Lokális tulajdonságok

Ebben a szakaszban a függvények néhány lokális tulajdonságát tekintjük át: a lokális növekedést és csökkenést, valamint a lokális szélsőértéket. A lokális növekedés és csökkenés kapcsán az ezzel könnyen összetéveszthető globális fogalomról, a monoton növekedésről és csökkenésről is szót ejtünk. A definíciók átismétlése után a fogalmak közötti kapcsolatokat az (1.1) függvénycsaládból származó példákkal szemléltetjük. Ezt követően kitérünk a lokális tulajdonságok és a derivált kapcsolatára is, ugyancsak példákkal bemutatva.

1.4.1. Lokális növekedés és csökkenés

Kezdjük rögtön a definícióval.

1.23. Definíció (Lokális növekedés/csökkenés)**.** Legyen az f függvény értelmezve az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében. Ekkor

- *f lokálisan növekedő* a-ban, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $a - \delta < x < a$ esetén $f(x) \leq f(a)$ és minden $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) \geq f(a)$.
- *f szigorúan lokálisan növekedő* a-ban, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $a - \delta < x < a$ esetén $f(x) < f(a)$ és minden $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) > f(a)$.
- *f lokálisan csökkenő* a-ban, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $a - \delta < x < a$ esetén $f(x) \geq f(a)$ és minden $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) \leq f(a)$.
- *f szigorúan lokálisan csökkenő* a-ban, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $a - \delta < x < a$ esetén $f(x) > f(a)$ és minden $a < x < a + \delta$ esetén $f(x) < f(a)$.

1.24. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a lokális növekedés/csökkenés definíciójában csak az adott $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében felvett függvényértékek játszanak szerepet, az a-tól „távolabbi" pontokban felvett függvényértékek nem. Ezért nevezzük ezeket a tulajdonságokat lokálisnak vagy középiskolai szóhasználattal helyinek. Középiskolában a lokális növekedés/csökkenés fogalma ritkán fordul elő, ellentétben egy másik növekedés és csökkenés fogalmával. Ez a monotonitás. A monoton növekedés és csökkenés fogalmában az adott intervallum összes függvényértéke szerepet játszik. A fogalom ezért globális.

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy a kétféle növekedés fogalma milyen kapcsolatban áll egymással. Ehhez elevenítsük fel a monotonitás definícióját is.

1.25. Definíció (Monotonitás)**.** Legyen az f függvény értelmezve egy $(c; d)$ intervallumon. Ekkor az f függvény a $(c; d)$ intervallumon

- *monoton növekvő*, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in (c; d)$ esetén igaz, hogy ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$.

- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in (c;d)$ esetén igaz, hogy ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$.
- *monoton csökkenő*, ha tetszőleges $x_1, x_2 \in (c;d)$ esetén igaz, hogy ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in (c;d)$ esetén igaz, hogy ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$.

A kétféle növekedés/csökkenés fogalmának kapcsolatát két állításban fogalmazhatjuk meg.

1.26. Állítás (Monotonitás és lokális növekedés kapcsolata 1.)**.** *Ha az f függvény monoton nő a $(c;d)$ intervallumon, akkor f lokálisan növekszik $(c;d)$ minden pontjában.*

Bizonyítás. Legyen $a \in (c;d)$ egy tetszőleges pont. A monoton növekedés definíciója alapján $x \in (c;a)$ esetén $f(x) \leq f(a)$, továbbá $x \in (a;d)$ esetén $f(x) \geq f(a)$. Ekkor $\delta = \min(a-c; d-a)$ választással teljesül az a-beli lokális növekedés definíciója. □

Az iménti állítás megfordítása is igaz, ám ennek bizonyítása már jóval összetettebb.

1.27. Állítás (Monotonitás és lokális növekedés kapcsolata 2.)**.** *Ha az f függvény lokálisan növekszik a $(c;d)$ intervallum minden pontjában, akkor f monoton nő a $(c;d)$ intervallumon.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy f nem monoton növő a $(c;d)$ intervallumon. Ekkor vannak olyan $x_1, x_2 \in (c;d)$ számok, hogy $x_1 < x_2$, de $f(x_1) > f(x_2)$. Az f függvény lokálisan nő x_1-ben, így valamely $\delta > 0$ esetén igaz, hogy ha $x \in [x_1, x_1 + \delta)$, akkor $f(x_1) \leq f(x)$.

Tekintsük most azon $x \in [x_1; x_2]$ számok H halmazát, amelyekre $f(x_1) \leq f(x)$, azaz

$$H := \{x \in [x_1; x_2] : f(x_1) \leq f(x)\}.$$

Az előbbiek alapján világos, hogy $x_2 \notin H$, továbbá $[x_1; x_1 + \delta) \subset H$. Mivel a H halmaz nem üres, felülről korlátos (például x_2 felső korlátja), ezért a legkisebb felső korlátja (szuprémuma) egy valós szám, amely ráadásul legalább $x_1 + \delta$. Vezessük be az $\alpha = \sup H$ jelölést, ekkor tehát $\alpha \in (x_1; x_2]$. Két eset lehetséges: $x_1 < \alpha < x_2$ vagy $\alpha = x_2$.

Ha $x_1 < \alpha < x_2$, akkor α definíciója miatt $x \in (\alpha; x_2)$ esetén $f(x_1) > f(x)$, továbbá bármely $\varepsilon > 0$ választás mellett az $(\alpha-\varepsilon; \alpha)$ intervallumban van olyan z szám, hogy $f(x_1) \leq f(z)$. Ez azt jelenti, hogy az α tetszőleges környezetében vannak olyan $z < \alpha < x$ számok, hogy $f(x) < f(z)$, ami ellentmond az f függvény α-beli lokális növekedésének, hiszen aszerint $f(z) \leq f(\alpha) \leq f(x)$ kellene, hogy teljesüljön egy környezetben.

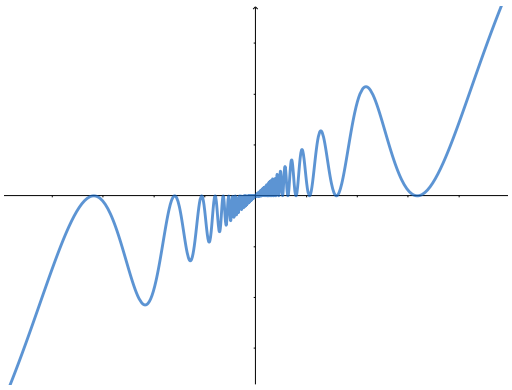
Nézzük meg a másik esetet is, azaz ha $\alpha = x_2$. Ekkor ismét a szuprémum definíciója miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az $(x_2 - \varepsilon; x_2)$ intervallumban van olyan z szám, hogy $f(x_1) \leq f(z)$. Mivel $f(x_1) > f(x_2)$, ezért $f(x_2) < f(z)$ is teljesül. Azonban f lokálisan nő x_2-ben, így valamely $(x_2-\varepsilon; x_2)$ intervallumon minden z-re $f(x) \leq f(x_2)$ kell, hogy teljesüljön, tehát ellentmondásra jutottunk. □

1.28. *Megjegyzés.* Az 1.26. és az 1.27. állítások növekedés helyett csökkenésre is igazak.

Ha az adott intervallumnak csupán egyetlen pontjában követeljük a lokális növekedést/csökkenést, akkor abból általában nem következik, hogy a függvény az intervallumon monoton növekszik/csökken. Sőt az sem következik, hogy az adott pontnak valamely környezetében monoton növekedő/csökkenő volna a függvény. Ezt mutatja a következő példa.

1.29. Állítás. *Legyen*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin^2 \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$



1.7. ábra. Az (1.6) függvény grafikonja

Ekkor az f függvény a 0 pontban lokálisan növekedő, de a 0-nak nincsen olyan környezete, amelyben f monoton növekszik. (A függvény grafikonját az 1.7. ábra szemlélteti.)

Bizonyítás. Mivel minden $x \neq 0$ esetén $\sin^2 \frac{1}{x} \geq 0$, ezért ha $x > 0$, akkor $f(x) \geq 0$, és ha $x < 0$, akkor $f(x) \leq 0$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\delta > 0$ választással teljesül a 0-beli lokális növekedés definíciója f-re, tehát f lokálisan növekedő a 0-ban.

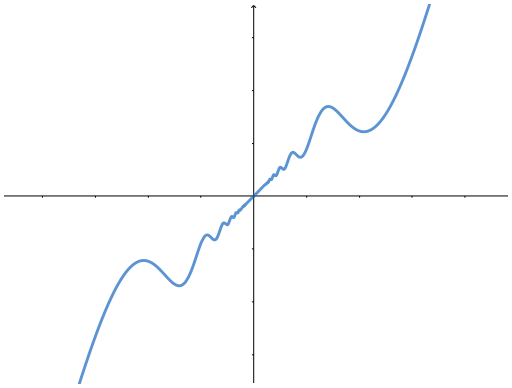
Azonban legyen $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ és $y_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $x_n < y_n$ minden n-re és $f(x_n) = x_n$, $f(y_n) = y_n$, tehát $f(x_n) > f(y_n)$. Mivel $x_n \to 0$ és $y_n \to 0$ ezért a 0 tetszőleges környezetében vannak olyan $x_n < y_n$ pontok, amelyekre $f(x_n) > f(y_n)$, ami éppen azt jelenti, hogy f a 0 semmilyen környezetében sem monoton növő. □

Második példánk szintén az 1.27. tételhez kapcsolódik.

1.30. Állítás. *Legyen*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Ekkor az f függvény a 0-ban szigorúan lokálisan nő, de a 0-nak nincs olyan környezete, amelyben f szigorúan monoton növekedő volna. (A függvény grafikonját az 1.8. ábra szemlélteti.)



1.8. ábra. Az (1.7) függvény grafikonja

Bizonyítás. Először az állítás első részét igazoljuk.

Ha $-\frac{1}{2} < x < 0$, akkor $f(x) \leq x + 2x^2 = x(1+2x) < 0$. Ha pedig $0 < x < \frac{1}{2}$, akkor $f(x) \geq x - 2x^2 = x(1-2x) > 0$. Ebből következik, hogy $\delta = \frac{1}{2}$ választással teljesül f-re a 0-beli szigorú lokális növekedés definíciója.

Most nézzük az állítás második részét. Azt szeretnénk igazolni, hogy az f függvény a 0 semmilyen környezetében sem szigorúan monoton növő. Ehhez elegendő megadnunk olyan (x_n), (y_n) sorozatokat, amelyre $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, és teljesül, hogy $x_n < y_n$, de $f(x_n) \geq f(y_n)$. Legyenek

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}, \quad ahol \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ekkor nyilván $x_n < y_n$. Megmutatjuk, hogy $f(x_n) \geq f(y_n)$. Minthogy $f(x_n) = x_n + 2x_n^2$ és $f(y_n) = y_n - 2y_n^2$, ezért azt kell belátni, hogy

$$x_n + 2x_n^2 > y_n - 2y_n^2. \tag{1.8}$$

A könnyebb számolás érdekében x_n nevezőjét jelöljük a-val, y_n-ét pedig b-vel. Ekkor az előbbi egyenlőtlenség így alakul:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} > \frac{1}{b} - \frac{2}{b^2}.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát az a^2b^2 kifejezéssel szorozva, rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$ab(b-a) + 2b^2 + 2a^2 > 0.$$

Helyettesítsük most vissza a és b értékeit:

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\left(\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right) + 2\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^2 + \left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) > 0.$$

Összevonás után:

$$\left(4n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)(-\pi) + 2\left(\frac{\pi^2}{2} + 8n^2\pi^2\right) > 0.$$

Újabb kiemelést végezzünk el:

$$4n^2\pi^2(4-\pi) + \frac{\pi^2}{4}(4+\pi) > 0.$$

Mivel mindkét szorzat minden tényezője nagyobb, mint 0, így az összeg is pozitív. Végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a kiindulási (1.8) egyenlőtlenség is igaz, tehát valóban $f(x_n) > f(y_n)$. □

1.4.2. Lokális szélsőérték

A lokális növekedés és csökkenés után egy harmadik lokális tulajdonságot is vizsgáljunk meg, a lokális szélsőértéket.

1.31. Definíció (Lokális szélsőérték)**.** Legyen az f függvény értelmezve az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében. Ekkor az f függvénynek az a-ban

- *lokális maximuma* van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in (a-\delta; a+\delta)$ esetén $f(x) \leq f(a)$.
- *szigorú lokális maximuma* van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in (a-\delta; a+\delta) \setminus \{a\}$ esetén $f(x) < f(a)$.

- *lokális minimuma* van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in (a-\delta; a+\delta)$ esetén $f(x) \geq f(a)$.
- *szigorú lokális minimuma* van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden $x \in (a-\delta; a+\delta) \setminus \{a\}$ esetén $f(x) > f(a)$.

Az eddig megismert 3 lokális tulajdonság nem fed le minden esetet. Bár a lokális szélsőérték, szigorú lokális növekedés, szigorú lokális csökkenés egymást kizáróak, van olyan eset, hogy egyik lokális tulajdonság sem teljesül. Nézzünk erre is egy példát.

1.32. Állítás. *Legyen f az 1.4. állításból megismert függvény. Ennek az $x = 0$ pontban nincsen lokális szélsőértéke, és se nem szigorúan lokálisan növekedő, se nem csökkenő.*

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg először a lokális szélsőértéket. Az $x = 0$ pont tetszőleges $[0; \delta)$ jobb oldali környezetét vizsgáljuk. Az $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}} \to 0$ és $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}} \to 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ sorozatokat választva azt kapjuk, hogy az $f(x_n) > 0$ és $f(y_n) > 0$, így f egyaránt felvesz pozitív és negatív értékeket bármely $(0; \delta)$ intervallumban.

Ugyanígy nézzük meg a szigorú lokális növekedést és csökkenést. Ahhoz, hogy f szigorúan lokálisan növekedő legyen a 0 pontban, az $(0; \delta)$ intervallumban minden függvényértéknek nagyobbnak kell lennie, mint $f(0)$, mely most egyenlő 0-val. Azonban az előbbi $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}}$ sorozat is mutatta, hogy van negatív érték is, melyet az f felvesz ebben az intervallumban. Ugyanígy a lokálisan szigorú csökkenés esetében, ott az $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ sorozat adja meg, hogy a $(0; \delta)$ intervallumban van pozitív függvényérték. Tehát f nem lehet lokálisan csökkenő sem. □

1.4.3. Lokális tulajdonságok és derivált

Az előző fejezetben ismertetett lokális tulajdonságok az adott pontbeli deriválttal is kapcsolatba hozhatók. Erről szól a következő tétel.

1.33. Tétel (Lokális tulajdonságok és a derivált kapcsolata)**.** *Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pontban.*

1. *Ha $f'(a) > 0$, akkor f szigorúan lokálisan nő a-ban.*
2. *Ha $f'(a) < 0$, akkor f szigorúan lokálisan csökken a-ban.*
3. *Ha f lokálisan nő a-ban, akkor $f'(a) \geq 0$.*
4. *Ha f lokálisan csökken a-ban, akkor $f'(a) \leq 0$.*
5. *Ha f-nek lokális szélsőértékhelye van a-ban, akkor $f'(a) = 0$.*

1.34. *Megjegyzés.* Az előző tételben megfogalmazott 5 állítás egyike sem megfordítható, amit egyszerű példákkal szemléltethetünk.

Az első állítás esetében tekintsük az $f(x) = x^3$ függvényt és legyen $a = 0$. Ekkor f szigorúan lokálisan nő a 0-ban, azonban $f'(0) = 0$.

A 2. állítás esetében az $f(x) = -x^3$ függvény, és az $a = 0$ pont mutatja, hogy nem érvényes a megfordítás.

A 3. és 4. állítás nem megfordíthatóságához például az $f(x) = x^2$ függvényt tekinthetjük az $a = 0$ pontban.

Végül az 5. állítás esetében legyen $f(x) = x^3$ és $a = 0$, ekkor $f'(0) = 0$, de f-nek a 0-ban nincs lokális szélsőértéke.

Egy adott pontbeli derivált előjeléből csak lokális növekedésre vagy csökkenésre következtethetünk, monoton növekedésre vagy csökkenésre nem. Ezt mutatja a következő példa is.

1.35. Állítás. *Tekintsük az (1.7) képlettel megadott f függvényt. Ekkor $f'(0) > 0$, de f a 0 egyetlen környezetében sem monoton növekedő.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $f(x) = x + 2g_2(x)$, ahol g_2 az (1.1) függvénycsalád tagja $\alpha = 2$ választással. Az 1.21. állításban már meghatároztuk a g_2 függvény 0-beli deriváltját, mégpedig $g_2'(0) = 0$, így ennek felhasználásával kapjuk, hogy $f'(0) = 1 + 0 = 1 > 0$. Azonban az 1.29. állításban láthattuk, hogy f a 0 egyetlen környezetében sem monoton növő. □

Láttuk, hogy $f'(a) = 0$ nem elegendő lokális szélsőérték létezéséhez a-ban. De plusz feltétellel már adódik a szélsőérték létezése.

1.36. Tétel (Lokális szélsőérték elégséges feltétele)**.** *Legyen az f függvény differenciálható az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében.*

1. *Ha $f'(a) = 0$ és az f' deriváltfüggvény lokálisan növekszik a-ban, akkor ebben a pontban f-nek lokális minimumhelye van.*

2. *Ha $f'(a) = 0$ és az f' deriváltfüggvény szigorúan lokálisan növekszik a-ban, akkor ebben a pontban f-nek szigorú lokális minimumhelye van.*

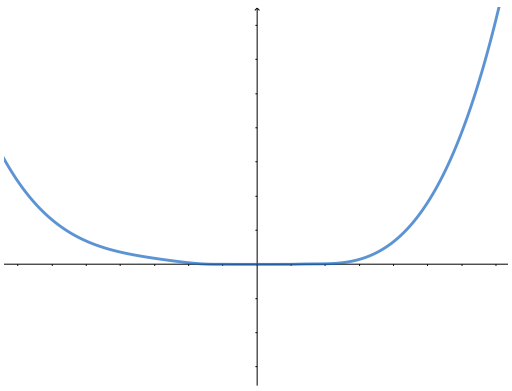
1.37. *Megjegyzés.* Ha $f'(a) = 0$ és az f' deriváltfüggvény lokálisan növekedő vagy lokálisan csökkenő a-ban, akkor azt mondjuk, hogy az f' deriváltfüggvény *előjelet vált* a-ban.

Fontos megjegyezni, hogy az f' adott pontbeli előjelváltása nem szükséges feltétele annak, hogy az f függvénynek lokális szélsőértékhelye legyen abban a pontban. Nézzünk ehhez egy példát.

1.38. Állítás. *Legyen*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \dfrac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Ekkor az f-nek a 0-ban szigorú lokális minimumhelye van, de f' nem vált előjelet 0-ban. (Az f függvény grafikonját az 1.9. ábra szemlélteti.)



1.9. ábra. Az (1.9) függvény grafikonja

Bizonyítás. Az állítás első fele könnyen belátható, ugyanis $f(0) = 0$, és f a 0 helyet kivéve mindenhol nagyobb, mint 0. Tehát a 0 valóban szigorú lokális minimumhely. Nézzük az állítás második felét, és ehhez a deriváltfüggvényt. Az $x \neq 0$ pontban a képletet deriválhatjuk:

$$f'(x) = 4x^3\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) - x^2\cos\frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

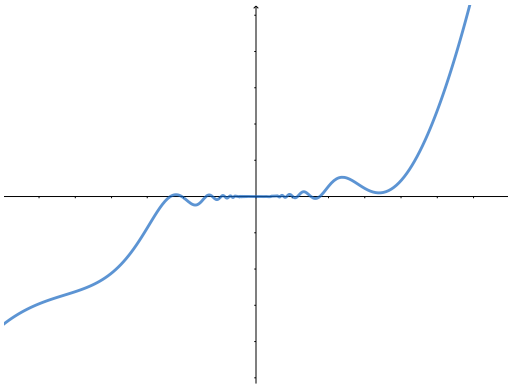
Az $x = 0$ pontban a definíció szerint kell eljárni. A különbségi hányados:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x^3\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right),$$

és ennek $x \to 0$ esetén 0 a határértéke, hiszen $x^3 \to 0$ és $2 + \sin\dfrac{1}{x}$ korlátos. Tehát $f'(0) = 0$. Összefoglalva:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right) - x^2\cos\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

amelynek grafikonját az 1.10. ábra mutatja.



1.10. ábra. Az (1.10) függvény grafikonja

Erről a deriváltfüggvényről szeretnénk belátni, hogy az $x = 0$ pontban nem vált előjelet, vagyis se nem lokálisan nő, se nem lokálisan csökken. Ehhez elég megmutatni, hogy f' tetszőleges $(0; \delta)$ intervallumban felvesz pozitív és negatív értéket is. Tekintsük a következő sorozatokat: $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ és $y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, továbbá

$$f'(x_n) = \frac{4(2 + \sin(2n\pi))}{(2n\pi)^3} - \frac{\cos(2n\pi)}{(2n\pi)^2} = \frac{8}{(2n\pi)^3} - \frac{1}{(2n\pi)^2} = \frac{1}{(2n\pi)^2}\left(\frac{8}{2n\pi} - 1\right) < 0, \text{ha} \quad n \geq 2,$$

illetve

$$f'(y_n) = \frac{4(2 + \sin((2n+1)\pi))}{((2n+1)\pi)^3} - \frac{\cos((2n+1)\pi)}{((2n+1)\pi)^2} = \frac{3}{((2n+1)\pi)^3} + \frac{1}{(2n\pi)^2} > 0.$$

Mivel $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, ezért a 0 tetszőleges $[0; \delta)$ jobb oldali környezetében f felvesz pozitív és negatív értékeket egyaránt, tehát nem vált előjelet. □

1.5. Primitív függvény

Ebben a szakaszban a primitív függvény fogalmával kapcsolatban vizsgáljuk meg az (1.1) függvénycsalád bizonyos tagjait.

1.39. Definíció (Primitív függvény)**.** Ha az F függvény differenciálható egy I intervallumon és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in I$-re, akkor azt mondjuk, hogy F az f függvény *primitív függvénye* I-n.

Ha egy függvénynek van primitív függvénye, akkor végtelen sok van, de ezek csak konstansban térnek el egymástól.

1.40. Tétel. *Ha F primitív függvénye f-nek az I intervallumon, akkor f összes primitív függvénye $F + c$ alakú, ahol c tetszőleges konstans. Másképpen fogalmazva: a primitív függvény additív konstans erejéig egyértelmű.*

A primitív függvény és az algebrai műveletek kapcsolatáról szól a következő tétel.

1.41. Tétel. *Ha f-nek F és g-nek G primitív függvénye az I intervallumon, akkor $f + g$-nek $F + G$ és $c \cdot f$-nek $c \cdot F$ a primitív függvénye az I-n.*

1.42. Definíció (Határozatlan integrál)**.** Tegyük fel, hogy az f függvénynek van primitív függvénye I-n. Ekkor az f függvény primitív függvényeinek halmazát $\int f dx$ jelöli, és az f *határozatlan integráljának* nevezzük. Tehát $\int f dx$ függvények halmaza, amelynek egy F függvény akkor és csak akkor eleme, ha $F' = f$ az I-n.

1.43. *Megjegyzés.* Nem minden függvénynek van primitív függvénye. Belátható (az egyváltozós analízis kurzusokon ez általában tananyag), hogy ha f az előjelfüggvény, vagyis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

és $0 \in I$, akkor f-nek az I-n nincs primitív függvénye.

A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy milyen függvénytulajdonság elégséges és milyen tulajdonság szükséges a primitív függvény létezéséhez.

1.5.1. Elégséges feltétel – a folytonosság

Az egyváltozós analízis kurzus tanegységeként szokott szerepelni a következő tétel.

1.44. Tétel. *Ha f folytonos az I intervallumban, akkor f-nek van primitív függvénye.*

Ahhoz, hogy belássuk, hogy a folytonosság valóban csak elégséges, de nem szükséges feltétele annak, hogy létezzen primitív függvény, lássunk egy példát.

1.45. Állítás. *Legyen*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \textit{ha } x \neq 0, \\ 0, & \textit{ha } x = 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

azaz f az (1.1) függvénycsalád $\alpha = 2$ paraméterhez tartozó tagja. Ekkor a $g := f'$ függvény nem folytonos, de van primitív függvénye, például f.

Bizonyítás. Az f függvény mindenütt differenciálható, ezt már láthattuk az 1.21. állításban. A deriváltja

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Az 1.21. állításban nemcsak az f függvény differenciálhatóságát, hanem az f' deriváltfüggvény 0 pontbeli nem folytonosságát is bizonyítottuk. □

1.5.2. Szükséges feltétel – a Darboux-tulajdonság

Korlátos és zárt intervallumban folytonos függvények egy fontos tulajdonságát fogalmazza meg a Bolzano–Darboux–tétel:

1.46. Tétel (Bolzano–Darboux)**.** *Ha $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor f az $[a; b]$ intervallumban minden értéket felvesz $f(a)$ és $f(b)$ között.*

Nemcsak a folytonos függvények, de a deriváltfüggvények is rendelkeznek az előbbi tulajdonsággal.

1.47. Tétel (Darboux-tétel)**.** *Ha f differenciálható az $[a; b]$ intervallum minden pontjában, akkor itt f' felvesz minden értéket $f'(a)$ és $f'(b)$ között.*

1.48. Definíció (Darboux-tulajdonság)**.** Egy függvény *Darboux-tulajdonságú* az I intervallumban, ha tetszőleges $a, b \in I$ és $a < b$ esetén f felvesz minden értéket $f(a)$ és $f(b)$ között.

A Darboux-tétel úgy is fogalmazható, hogy a deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú, más szóval, egy függvénynek csak akkor lehet primitív függvénye, ha Darboux-tulajdonságú. Tehát a Darboux-tulajdonság szükséges feltétele a primitív függvény létezésének.

Nézzünk meg egy példát arra, hogy a Darboux-tulajdonság nem elégséges feltétel primitív függvény létezéséhez.

1.49. Állítás. *Legyen*

$$h_1(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \textit{ha } x \neq 0, \\ 0, & \textit{ha } x = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

és

$$h_2(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x}, & \textit{ha } x \neq 0, \\ 0, & \textit{ha } x = 0. \end{cases} \tag{1.15}$$

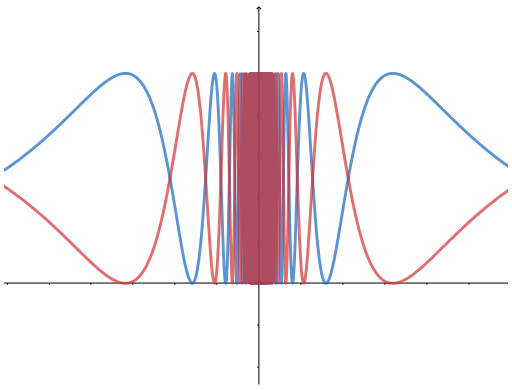
Ekkor h_1-nek és h_2-nek van primitív függvénye $\mathbb{R}$-en, de négyzeteiknek nincsen, azonban a négyzeteik Darboux-tulajdonságúak.

Bizonyítás. Az állítás első felével kezdjük. Használjuk fel, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

függvény az 1.21. állítás alapján differenciálható és deriváltja:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$



1.11. ábra. A $\sin^2 \dfrac{1}{x}$ (kék) és $\cos^2 \dfrac{1}{x}$ (piros) grafikonja

Ekkor az

$$f'(x) + h_2(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases} \tag{1.18}$$

függvényről már az 1.14. állításban beláttuk, hogy folytonos. Tehát az 1.44. tétel szerint van primitív függvénye, ez legyen g, azaz $g' = f' + h_2$. Ekkor $(g - f)' = g' - f' = h_2$, vagyis $g - f$ primitív függvénye h_2-nek. Hasonlóan igazolható, hogy h_1-nek is van primitív függvénye.

Most lássuk az állítás második felét. Vegyük észre, hogy a h_1^2 és h_2^2 függvények összege 0-ban 0, mindenhol máshol pedig 1 a $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ trigonometrikus összefüggésnek köszönhetően. Kaptunk egy olyan függvényt, amely nem Darboux-tulajdonságú, így az 1.47. tétel alapján a $h_1^2 + h_2^2$ összegfüggvénynek nincsen primitív függvénye.

A $h_2^2 - h_1^2$ függvény a $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ trigonometrikus összefüggés miatt 0-n kívül $\cos \dfrac{2}{x}$, a 0-ban pedig 0. Erről a függvényről az állítás első felében közvetve beláttuk, hogy van primitív függvénye.

Tekintsük most a $h_1^2 + h_2^2$ függvény alábbi felbontását:

$$h_1^2 + h_2^2 = (h_2^2 - h_1^2) + 2h_1^2.$$

A jobb oldalon szereplő különbségfüggvényről már beláttuk, hogy rendelkezik primitív függvénnyel, az egyenlet bal oldaláról pedig beláttuk, hogy nincsen primitív függvénye. Tehát, ha a h_1^2 függvénynek volna primitív függvénye, akkor az egyenlet jobb oldalának is volna, így a bal oldalnak is, ez azonban ellentmondás. Vagyis a h_1^2 függvénynek nincs primitív függvénye.

A $h_1^2 + h_2^2$ függvény egy másik felbontása:

$$h_1^2 + h_2^2 = -(h_2^2 - h_1^2) + 2h_2^2.$$

Hasonlóan az előző gondolatmenethez, a különbségfüggvényről tudjuk, hogy van primitív függvénye, az egyenlet bal oldalának viszont nincsen. Tehát ha a h_2^2-nek volna primitív függvénye, akkor a bal oldalnak is volna. Ezzel a h_1^2-ről és a h_2^2-ről is beláttuk, hogy nincsen primitív függvénye.

Vizsgáljuk meg azt is, hogy a h_1^2 és a h_2^2 függvények valóban Darboux-tulajdonságúak. Mivel a h_1^2 a 0 pont kivételével folytonos, ezért a Darboux-tulajdonságot elegendő olyan $[a; b]$ intervallumon vizsgálni, amelyre $a \leq 0 < b$ vagy $a < 0 \leq b$.Vegyük észre, hogy tetszőleges n-re az $\left[\dfrac{1}{(2n+2)\pi}; \dfrac{1}{2n\pi}\right]$ és $\left[-\dfrac{1}{2n\pi}; -\dfrac{1}{(2n+2)\pi}\right]$ intervallumokon a h_1^2 függvény a teljes értékkészletét, a $[0; 1]$ intervallum minden elemét felveszi. Ha n elegendően nagy, akkor az előbbi két intervallum legalább egyike része az $[a; b]$-nek, így h_1^2 az értékkészletének minden elemét felveszi $[a; b]$-n. Speciálisan $f(a)$ és $f(b)$ között is felvesz minden értéket, így h_1^2 Darboux-tulajdonságú. Hasonlóan belátható, hogy a h_2^2 függvény is Darboux-tulajdonságú. □

1.6. Grafikon ívhossz

Ebben a szakaszban függvénygrafikonok ívhosszával foglalkozunk. Először a szükséges fogalmakat tekintjük át.

1.6.1. Elméleti háttér

1.50. Definíció (Szakasz)**.** Legyen $p, q \in \mathbb{R}^2$ két pont a síkon. Ekkor a p és q pontokat összekötő *szakasz*:

$$[p;q] := \{(1-t)p + tq : t \in [0;1]\}.$$

A $[p;q]$ szakasz hossza a két végpontjának távolsága, azaz

$$|p-q| = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2},$$

ahol $p = (p_1; p_2)$ és $q = (q_1; q_2)$.

1.51. Definíció (Töröttvonal)**.** Véges sok egymáshoz csatlakozó szakasz unióját *töröttvonalnak* (más néven poligonnak) hívjuk. Tehát töröttvonal a $[p_0;p_1] \cup [p_1;p_2] \cup [p_2;p_3] \cup \cdots \cup [p_{n-1};p_n]$ halmaz, ahol $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^2$. Egy törött vonal hossza a csatlakozó szakaszok hosszainak összege.

1.52. Definíció (Beírt poligon)**.** Legyen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ és legyen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ az $[a;b]$ intervallum egy felosztása. Az f függvény grafikonjának ehhez a felosztáshoz tartozó *beírt poligonján* a $p_0 = (x_0; f(x_0)), p_1 = (x_1; f(x_1)), \ldots, p_n = (x_n; f(x_n))$ pontok által meghatározott $[p_0;p_1] \cup \cdots \cup [p_{n-1};p_n]$ töröttvonalat értjük.

1.53. Definíció (Grafikon ívhossza)**.** Legyen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$. Ekkor az f függvény *grafikonjának ívhossza* az összes beírható poligon hosszaiból álló halmaz felső határa. Az ívhosszat $s(f;[a;b])$ jelöli.

1.54. Definíció (Rektifikálhatóság)**.** Az $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja *rektifikálható*, ha $s(f;[a;b])$ véges.

1.6.2. A függvénycsalád vizsgálata

Szemléletünk hajlamos azt mondani, hogy egy folytonos függvény grafikonjának ívhossza véges. Azonban ez általában nincs így, ezt mutatja a következő példa.

1.55. Állítás. *Legyen $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, ahol*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

tehát f az (1.1) függvénycsalád tagja $\alpha = 1$ esetén. Ekkor f folytonos, de a grafikonja nem rektifikálható.

Bizonyítás. Az f függvény folytonosságát az 1.14. állításban igazoltuk. Foglalkozzunk a nem rektifikálhatósággal. Megmutatjuk, hogy f grafikonjának tetszőlegesen nagy hosszúságú beírt poligonjai vannak.

Tekintsük a $[0;1]$ intervallum

$$0 < \frac{2}{(2n-1)\pi} < \frac{2}{((2n-1)-1)\pi} < \cdots < \frac{2}{\pi} < 1$$

felosztását. Ekkor

$$f\left(\frac{2}{(2i-1)\pi}\right) = (-1)^{i+1}\frac{2}{(2i-1)\pi}.$$

A beírt poligon bármely $[p;q]$ szakaszának hossza legalább akkora, mint $|p_2 - q_2|$ (ahol $p = (p_1;p_2)$ és $q = (q_1;q_2)$), így a beírt poligon hossza legalább

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left|f\left(\frac{2}{((2i+1)-1)\pi}\right) - f\left(\frac{2}{(2i-1)\pi}\right)\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2i-1}\right).$$

Mivel a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség miatt

$$\frac{1}{2i+1}+\frac{1}{2i-1} > \frac{4}{(2i+1)+(2i-1)} = \frac{1}{i},$$

így a beírt poligon hossza legalább

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}.$$

Ez a harmonikus sor egy részletösszege, ami $n \to \infty$ esetén végtelenhez tart, hiszen a harmonikus sor divergens. Végeredményben tehát f grafikonjának tetszőlegesen nagy hosszúságú beírt töröttvonaljai is vannak, ezért a beírt töröttvonalak hosszaiból álló halmaz felső határa ∞, tehát f grafikonja nem rektifikálható. □

2. fejezet

Függvénytan és különleges függvények középiskolában

Nem csak a munkámból kifolyólag tartom fontosnak, hogy a diákok hogyan is találkoznak függvényekkel a középiskolai tanulmányaik során. A matematika általánosabb, társadalmi megítélése is múlhat azon, hogy az emberek iskolás korukban, matematika órákon milyen módon találkoznak ezzel a témakörrel.

Ezen indíttatásból ebben a fejezetben először a kerettanterveket, majd több tankönyvet is szeretnék megvizsgálni, hogy képet kapjunk arról, hogyan is találkozik egy diák a függvényekkel középiskolában.

2.1. Nemzeti Alaptanterv – Helyi tanterv

Ebben a szakaszban a 2012-es és 2020-as NAT-ra épülő kerettanterveket szeretném megvizsgálni, főleg abban a vonatkozásban, hogy a függvénytan felépítésében milyen változások történtek, és ezáltal a követelmények hogyan változtak meg.

2012 és 2020 között egy normál tanterv szerint haladó diák mire középiskolába felvételt nyert, 20, illetve 25 órányi ([8]) függvényekkel kapcsolatos tanulmányokon van túl. Ez idő alatt legfőképpen megtanul sorozatokat folytatni, biztosan tájékozódni a koordináta-rendszerben, két halmaz közötti hozzárendelést értelmezni, egyszerű grafikonokat ábrázolni és értelmezni, lineáris függvényeket értelmezni, egyenes arányosságot és egyszerű egyismeretlenes elsőfokú egyenleteket megoldani függvények segítségével.

Az idei évtől kezdve ezen a téren más előzetes tudással fognak rendelkezni a diákok. Már csak 10 és 12 óra ([5]) gyakorlás áll a gyerekek mögött, vagyis gyakorlatilag a fele a korábbi évekhez képest. Ugyanúgy megismerik a két halmaz közötti hozzárendelés fogalmát, az egyenes és a fordított(!) arányosságot, az egyenes arányosság és grafikonok közötti összefüggést, a lineáris függvények jellemzését és az értéktáblázat szerinti ábrázolást. Viszont az egyenletek grafikus megoldása teljesen kimarad.

Tehát az arányosság és az értéktáblázat látszólag nagyobb hangsúlyt kap (a grafikus megoldást cserébe teljesen elhagyva), de ne felejtsük el, hogy egy erősen megvágott óraszámnál lehet, hogy 4 helyett már csak 2 órán tudják ezeket az új fogalmakat gyakorolni.

Térjünk vissza a 2012-es kerettantervekre és hogy, hogyan folytatódik 9. osztályban a függvények témaköre.

9. évfolyamon a kifutóban lévő [7] NAT 16 óraszámot javasol a függvények témakörére, melyen az új NAT [4] nem változtatott.

Az eddig használt [9] kerettantervek alapján ebbe a 16 óraszámba bekerült a lineáris függvény, az abszolút érték, négyzetgyök és a fordított arányosság függvényei. Ezen felül függvényvizsgálat, transzformációk és az egyenletek grafikus megoldása is tananyag.

Az új [6] kerettanterv szintén veszi ezeket a függvényeket egy jelentős eltéréssel: az abszolút érték függvényt nem veszi, egyszer jelenik meg mindössze a függvény transzformációk között. Ez utóbbi kifejtve szerepel, ahogy a függvényvizsgálat is. Az egyenletek grafikus úton való megoldása ebben a témakörben nem jelenik meg. Ami szembetűnő az aktuális NAT-ban és az arra épülő gimnáziumi kerettantervekben, hogy olyan fejlesztési területeket és tanulási eredményeket említ, melyek már a 8. osztályos tantervben is szerepeltek. Ilyenek: „a táblázattal megadott függvény összetartozó értékeit ábrázolja koordináta-rendszerben", „függvények ábrázolása táblázat alapján", a [9] 12. oldalán.

Helyi tantervről is szeretnék pár szót szólni. Egy vidéki középiskolában, ahol tanítási gyakorlatomat végzem, és emellett alkalmazva vagyok, a következő fogalmak jelennek meg a 9. osztályra vonatkozó helyi tantervben (az aktuális kerettantervhez igazítottat ismertetem):

- bevezető fogalmak: pontok, rendezett számpárok, derékszögű koordináta–rendszer
- egyértelmű és kölcsönösen egyértelmű hozzárendelések
- alapfogalmak: tárgyhalmaz, képhalmaz, helyettesítési érték
- valós folyamatok ábrázolása grafikonon
- függvények ábrázolása IKT eszközökkel
- függvény hozzárendelési szabályának megadása
- ábrázolás értéktáblázat alapján
- lineáris függvények
- értelmezési tartomány, értékkészlet, zérushely, monotonitás
- egyenes arányosság
- másodfokú függvények
- szélsőérték, paritás
- függvény transzformáció
- abszolút érték függvény
- négyzetgyök függvény
- harmadfokú függvény
- racionális tört függvény
- fordított arányosság
- függvények ábrázolása, jellemzése

A felsorolt fogalmak természetesen csak nagy vonalakban adják meg a tanulási célokat. Mindösszesen 15 óra jut ezek kifejtésére, és ha csak azt nézzük, hogy én itt 19 pontban soroltam fel a legfontosabbakat, érezhető, hogy ez igencsak szűkös keret.

Erre épül még a 11. osztályban az exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények témaköre. Az említett helyi tantervben sincs külön modul a függvényekhez, mindegyik a vele azonos témakörben kerül kifejtésre. Így az exponenciális függvényre 1 óra, a logaritmusra is 1 óra, a kettő kapcsolatára szintén 1 óra jut. Ezenfelül a trigonometrikus függvények tárgyalására 3 óra az irányszám.

2.2. Tankönyvek – Mindenki ugyanúgy kezdte?

Ebben a szakaszban szeretném bemutatni, hogy egyes tankönyvekben hogyan van felépítve a függvénytan. Külön kiemelem, ha egy-egy különleges függvény szóba kerül. Ezen felül szándékomban áll rávilágítani, hogy az évek során mennyire megváltozott a témakör középiskolai ütemterve.

2.2.1. Mozaik tankönyvkiadó – 9. évfolyam

9-es évfolyamnak íródott ez a [12] tankönyv, tehát a függvénytan alapjainál kezdődik, kevésbé építve a felső tagozatban tanultakra. Így egészen visszanyúl a tankönyv, és olyan kérdésekkel kezd, minthogy: mi a koordináta-rendszer, és hogyan értelmezzük benne a pontokat és a ponthalmazokat?

Már a második fejezetben veszi a függvény fogalmát, teljesen leegyszerűsítve. „... a pozitív a számokhoz a képlet hozzárendeli a négyszeresüket. Ezzel a képlettel egy függvényt értelmezhetünk..." – a [12] tankönyv 92. oldalán – mondattal gyorsan bevezeti a függvényt inkább, mint elnevezést, sem egy új fogalmat. Ebben a mondatban próbálja összekapcsolni a hozzárendelési szabályt a függvényhez, bár az előbbi kissé homályos marad, és később sem tisztázódik. Definiálja az értelmezési tartományt, értékkészletet és a helyettesítési értéket. Majd ezután a függvény képét, azaz grafikonját magyarázza el. Ez a sorrend számomra idegenül hat, mert az értelmezési tartomány és értékkészlet is nagyon nehezen emészthető fogalmak egy 9-es diák számára. Emiatt is van, hogy középiskolába érve, a diákok már ábrázolnak függvényeket, pedig az értelmezési tartományról/értékkészletről mit sem tudnak.

Ezt követi a zérushely definíciója.

Ezután valamilyen okból kifolyólag újra az értelmezési tartományról ír, és arról, hogy egy függvény grafikonja csak leszűkítése a valódi függvénynek, hiszen $+/-\infty$-ben nem tudunk ábrázolni. Ez a csapongás is kissé fura, kérdőjelt hagyhat a tanárban és diákban is, hogy ezt miért nem ott taglalja a könyv, ahol definiálta ezeket a fogalmakat.

Ügyes példákon keresztül bevezeti a meredekséget, és bár megemlíti, hogy „az y tengelyt a $[0; b]$ pontban metszi." a 94. oldalon, nem mondja ki, hogy a b lesz a lineáris függvényeket jellemző tengelymetszet. Itt még megemlíti, hogy az elsőfokú függvény egyben az egyenes arányosság függvénye is.

Az abszolút érték függvény következik és ezzel együtt bevezeti a szélsőértéket, valamint a monotonitást, bár itt még csak erre a példára vonatkoztatva és nem általánosan. Később a lokális szélsőérték általános definícióját megadja a tankönyv, a monotonitását nem (annak ellenére, hogy a fent említett példában teljesen szabályszerűen lett megállapítva – nem bebizonyítva – a monotonitás).

A következő fejezetekben a tankönyv veszi a másodfokú, a négyzetgyök-, a törtfüggvényeket. Az utóbbinál kitér a fordított arányosságra. Emelt szintű tananyagként említi meg az egészrész-, a törtrész- és az előjelfüggvényeket. További "emelt szintű" példákat is említ, többek között az $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ és a $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvényeket. Ezek egy-egy tulajdonságáról említést is tesz.

A Mozaik kiadó tankönyve külön leckét szentel a függvénytranszformációknak, és bár itt sincsen említve a teljes függvényvizsgálat, itt legalább a leckék végén lévő feladatok kérik a kitűzött függvények jellemzését.

2.2.2. Mozaik tankönyvkiadó – 11. évfolyam

A korábbi NAT-hoz és kerettantervhez készült [13] tankönyv még részleteiben tartalmazta az exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvényeket, ezért szenteltek ezeknek egy külön fejezetet.

Kissé meg is töri a rendet azzal, hogy a tankönyvíró külön szedte a függvények témakörét az algebrai tárgyalástól. Először veszi az exponenciálist és logaritmust, majd a trigonometriát anélkül, hogy ezek függvényeit tárgyalná. Később visszatér ez utóbbi témakörhöz, amikor ugyanebben a sorrendben megjelennek ezen matematikai fogalmak grafikonjai. Középiskolai mércével mérve komolyabb függvények is előkerülnek, például a $d(x) = |\log_2 |x||$ függvény. Mindhárom anyagrész egyenletmegoldásait összekapcsolja azok grafikonjaival a [13] tankönyv.

Az $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ függvény segítségével megmutat egy teljes függvényvizsgálatot, amely bár nem a legegyszerűbb példa, de így legalább lát a diák egy általános példát.

2.2.3. Mozaik tankönyvkiadó – Az analízis elemei

Ez a [14] tankönyv a legkomolyabb tankönyv, amivel foglalkozom és középiskolásoknak íródott. Egyértelműen nem csak emelt érettségire készíti fel azt a diákot, aki ebből tanul.

A függvények témakörét a monoton, korlátos és periodikus tulajdonságokkal kezdi. A (szigorúan) monoton növekedés egyetemen is tanult definícióját veszi a tankönyv, a csökkenést csak azért nem, mert azt feladja feladatként. Bár nehezebb feladatként szerepel benne az $f(x) = |x| - |x - 1|$ monotonitásának bebizonyítása, definíció szerint kéri a tankönyv. A korlátosságnál beszél a tankönyv a legnagyobb alsó korlátról és a legkisebb felső korlátról, de a szuprémum és infimum elnevezéseket nem vezeti be. Azok megállapítását csak egyszerű függvényeknél végzi el, és csak behelyettesítéssel, illetve grafikonról való leolvasással, komolyabb bizonyítást nem kér. A periódusnál példaként felhozza a törtrészfüggvényt, a trigonometrikus függvényeket, és a konstans függvényt.

Ezután jön egy nagyobb lélegzetvételű téma, a határérték. A Mozaik kiadó tankönyve az eggyel korábbi fejezetben, a sorozatoknál már bevezette ezt a fogalmat, így nem teljesen új a függvényeknél. Ezt kihasználva az első példák megoldásainál/bizonyításainál, ahol adott pontbeli határértéket kell meghatározni, a határértékre vonatkozó átviteli elvet használja. Ez egy helyen kissé problémás, hiszen ehhez a bizonyítási módszerhez minden $x_n \to x_0$ sorozatnak be kellene látni a határértékét, de efölött elsiklik a könyvbeli bizonyítás. A határértékre vonatkozó átviteli elvet egyébként pontosan megadja a tankönyv, sőt közvetlenül utána a Cauchy–féle definíciót is. Ezután veszi a jobb és bal oldali határértéket és a végtelenben vett határértékeket. Ez utóbbinál, csak a véges szám esetét veszi.

Függvényekkel való műveletek után következik a folytonosság. Kimondja az adott pontbeli folytonosság definícióját, valamint a folytonos függvényekkel való műveletre és a függvénykompozíciókra vonatkozó tételeket. Egyszerű példákon mutatja be a folytonosságot, és csak megjegyzésben említi meg, hogy itt is van Heine–féle definíció, azaz folytonosságra vonatkozó átviteli elv. A legbonyolultabb függvény, ami előjön az az $f(x) = |\ln(x - 1) - 1|$, de itt is csak általános jellemzést kér, nem említi külön a folytonosságot.

Ezután a szélsőértékkel folytatja a függvények vizsgálatát. A korlátosságot már definiálta, ez ad egy kis visszacsatolási lehetőséget. A lokális szélsőértéknek a pontos definícióját adja meg a tankönyv, akárcsak Bolzano és Weierstrass tételeinél.

A függvények konvexitása és a pár gyakorló példa után a differenciálszámítás következik. A differenciahányados és derivált pontos definícióival kezdi a témakört. Kimondja, sőt bizonyítja is, hogy ha egy pontbeli differenciálhatóság fennáll, akkor ott folytonos is a függvény. Ezután a deriválás műveleti szabályait bizonyítja, és külön kitér a függvénykompozíciókra és az inverz függvényekre. A trigonometrikus, logaritmus és exponenciális függvényekről is külön lecke szól. Monotonitás és lokális szélsőérték kapcsolatáról szól a következő lecke. Nagyon szépen levezeti, hogy az $f(x) = x \cdot e^x$ függvény esetében a derivált egy pontban előjelet vált, és így nem csak a monotonitása változik, hanem az adott pontban egy lehetséges szélsőértékhelyet is felfedezhetünk. Ez alapján fogalmazza meg, hogy a szélsőérték elégséges feltétele, hogy az adott pontban a derivált nulla, illetve ott előjelet is vált. Ezután kiegészítő anyagok következnek,

vagyis kitekintő tananyagok az egyetemi tanulmányokra. 4 lecke van így feltüntetve: a középértéktételek (Rolle, Fermat, Cauchy, Lagrange), magasabb rendű deriváltak, az inflexiós pont, teljes függvényvizsgálat. További kitekintés az egyetemi analízisre, hogy ez utóbbi leckében, még a L'Hospital–szabály is megjelenik.

Ezután az integrálás témaköre következik, mely két részre szakad. Először veszi a tankönyv a határozatlan integrált. A primitív függvény definíciójával kezdi, melyet antideriváltnak is hív (a deriválás inverz műveleteként említve). Sok művelet van középiskolában, melyek egymás inverzei és így módszertanilag könnyebb őket tanítani, így ezt személy szerint jónak tartom; de elnevezésében ezt sosem szoktuk jelölni. (A logaritmust sem hívjuk, anti–exponenciálisnak, pedig azonos alap esetén ott is inverz műveletről van szó.) Az integrálszámítás alaptétele, és a határozatlan integrál definíciója követi ezt. Ezután egy érdekes eszmefuttatásban szó esik róla, hogy nincsen minden függvénynek primitív függvénye, illetve hogy a folytonosság egy elégséges, de nem szükséges feltétele a primitív függvény létezésének. Egy lépcsős függvény példáján keresztül pedig bemutatja, hogy egy függvényről hogyan lehet belátni, hogy nincsen primitív függvénye. Az ezt követő lecke a műveleti tulajdonságokról és integrálási szabályokról szól. A kiegészítő anyag pedig még a parciális integrálást és a racionális törteket is tartalmazza.

A határozott integrálás a felosztásokkal és azok finomságával, valamint alsó és felső összegek fogalmának definiálásával kezdődik. Ezt követi a határozott integrál pontos definíciója, majd több egyszerű példa. A Riemann–integrál tulajdonságairól is van szó, de a Newton–Leibniz formulát csak jóval később veszi a tankönyv. A fejezetet a területszámítással fejezi be.

Az ok amiért egy picit bővebben írtam erről a [14] tankönyvről, hogy egyrészt közelebb áll az egyetemi, és így ennek a szakdolgozatnak is a témaköréhez. A másik, hogy bár a tankönyvlistáról kivont szakirodalomról van szó, mégis ez a környezetemben lévő kollégák által gyakran használt és nagyon gondosan felépített tankönyv.

2.2.4. Mozaik – Az analízis elemei – Feladatgyűjtemény

Miután a tankönyv nem bővelkedik túl sok megoldandó példában, nem is kell, hiszen van külön [15] feladatgyűjtemény. Ez a hiány ott szépen be van pótolva.

Már az első leckében $g(x) = \sin[x]$ függvényről nem csak azt kéri a feladat, hogy mennyi a periódusa, hanem annak bizonyítását is. A függvények folytonossága témakörben találkozhatunk egyedül ennek a szakdolgozatnak is az alapjául szolgáló (1.1) függvény-családdal. Nehezebb feladatként feltüntve kéri, hogy bizonyítsuk, hogy az $x = 0$ pontban az 1.13 függvény nem folytonos. Megoldásként pedig a folytonosságra vonatkozó átviteli elvet használja fel.

Több trigonometrikus kifejezés is megjelenik a további példák során, egészen bonyolultak is. Például primitív függvény keresésnél adja meg a következő függvényt a feladat:

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{e^{\cos^2 x}}{e^{\sin^2 x}}.$$

Érdekes, hogy egy ilyen függvény előkerül, de az (1.1) függvény-családból $\alpha = 2$ eset már nem.

2.2.5. Nemzeti tankönyvkiadó – 9. évfolyam

Ez a tankönyv 2020-ban lett kiadva, tehát már az új NAT szerint íródott.

A 9. osztályosoknak szóló [10] tankönyv a hozzárendelési szabályokkal kezdi és nevezetes adatpárokra visszavezetve, az egyenes és fordított arányosságokat veszi elsőként. Ezután részletezi, hogy az értelmezési tartomány elemeihez egyértelmű hozzárendelés kell, hogy függvényről beszélhessünk. Hozzárendelési szabályokat magyarázva a tankönyv bevezeti, hogy táblázatokkal is meg lehet adni egy függvényt, vagy „akár rendezett számpárokkal is", a [17] 161. oldalán.

Ezután a koordináta-rendszer fogalmának bevezetése sokkal egyszerűbbé válik, majd külön kiemeli, hogy hogyan lehet benne ábrázolni, az abszcissza és ordináta segítségével. Ponthalmazok és függvények értelmezése és ábrázolása után jönnek a konkrét függvény típusok: lineáris, abszolút érték, másodfokú, racionális törtfüggvények. Ezeken felül olvasmányként, tehát nem a kötelező tananyag részeként bemutatja az egészrész-, a törtrész- és az előjelfüggvényt. A tankönyvben még egy definíció és egy triviális példa erejéig szerepel a periodikus függvény, de ez annyira el van rejtve, hogy ki sincs emelve, hogy ez egy definíció, valamint egyetlen egy példa van rá, a konstans függvény.

A függvény típusok mellett párhuzamosan veszi a transzformációkat, de azokat csak a példákon keresztül, és kissé elnagyolva: „egy konstans hozzáadása, vagy elvétele csak függőlegesen mozdítja el a grafikont" olvasható a 184. oldalon.

A teljes függvényvizsgálatnak középiskolában nagy jelentősége van. Zavaró módon igencsak keresnem kellett, hogy melyik fogalmat melyik függvénynél vezeti be. Illetve a tankönyvben nem szerepel olyan feladat, mely kérné a teljes függvényvizsgálatot, vagy egy példán bemutatná azt teljes egészében.

Számomra az első 4 lecke tanulságos ebben a tankönyvben. Ezek felső tagozatos tananyagok voltak. Ezzel együtt ez a része összhangban van a NAT-tal és a kerettantervvel. Ugyanakkor az ilyen szintű visszatérés a tananyagban magyarázható azzal, amit már korábban említettem: 4 év alatt 45 óra helyett mindössze 22 órája van az általános iskolás matematika tanároknak arra, hogy a diákokkal megismertessék a függvénytan alapjait.

2.2.6. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.

A szakdolgozatomban a 2. kötetről szeretnék csak röviden írni. Azért erről, mert a függvényekkel kapcsolatos feladatok ebben lettek összegyűjtve.

Amiért fontosnak tartom kiemelni, az az, mert a [19] tankönyv nagyon következetesen és precízen adja meg az egyes tananyaghoz tartozó gyakorló példákat. Ez nagy segítség mind pedagógusnak, mind diáknak. Ez az egyik nagy pozitívuma a könyvnek.

A másik fontos észrevétel, hogy ebben a feladatgyűjteményben egyaránt megtalálható a könnyű, közepes és nehéz feladat. Miután különleges függvényekre külön is ki szeretnék térni, ezért hadd említsek meg azokból párat. Tipikusan emelt feladatként vannak megemlítve a függvénykompozícióra vonatkozó példák. Ez teljesen érthető, hiszen az elméleti háttere is emelt szintű tananyag 9. osztályban. Például

$$f(x) = |[x]|$$

vagy

$$\operatorname{sgn}^2(x) \leq |\operatorname{sgn}(x)|$$

típusú feladatok.

Még emelt szintű feladatként sem kéri a trigonometrikus függvények ábrázolását és jellemzést a feladatgyűjtemény, az exponenciálissal és logaritmussal ellentétben. Így jelenik meg olyan feladat is, ahol hármas kompozíciót kell alkotni az $f(x) = |x|$, $g(x) = \log_2 x - 1$ és a $h(x) = x + 2$ függvényekből. Sőt ennél a feladatnál még ábrázolást is kér. Verseny szintnek számít a $c(x) = \sqrt{-4x^2 + 24x - 35}$ függvény ábrázolása és jellemzése.

Páros és páratlan függvényekre valamint periodikusságra vonatkozó példáknál jelennek meg először a várva várt trigonometrikus függvények, melyek közül egyet szeretnék kiemelni: $i(x) = x \cdot \sin^2(x)$. Emellett egy másik függvény, a $k(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$, mely már majdnem a sinh függvény. Ezeknél a függvényeknél már semmilyen jellemzést, ábrázolást nem kér a feladat, csak a páros, vagy páratlan (vagy egyik sem) tulajdonságok megállapítását.

2.2.7. OFI – 11. évfolyam

Bár ebben a tankönyvben nem jelennek meg külön fejezetként a függvények, pont ezért szeretném kiemelni. 11. évfolyamon ugyebár 3 olyan matematikai fogalom is van, melyek miatt előkerül az adott témakör: az exponenciális, a logaritmus és trigonometria. Mivel ebben a [11] könyvben a függvények nincsenek külön kezelve egy másik leckében, ezért mindhárom anyagrészben megjelennek. Elsőként az exponenciálisnál. Ennek grafikonjának nevezetes pontjait értéktáblázat segítségével ábrázolja, majd irracionális kitevőkre is kiterjeszti, hogy folytonos legyen, és a monotonitása vizsgálható legyen.

Külön kiemeli, hogy a függvény szigorúan monoton növekvése vagy csökkenése függ attól, hogy az alap nagyobb vagy kisebb, mint 1. Ezt valóban fontos kiemelni, mert az exponenciális egyenlőtlenségek megoldásához így kapnak egy vizuális segítséget a diákok. Megjegyzésben idézi fel azt a híres példát, hogy ha egy papírlapot elkezdünk félbehajtogatni, akkor elméletben az 50. hajtásra egy meglepően vastag papírlapot kapnánk. Ezzel tényleg jól lehet szemléltetni az exponenciális növekedést. Ezután az $f(x) = 2^{x-3} - 4$ függvényen bemutatja a transzformációját, és teljes függvényvizsgálatot végez. Végül rátér az e számra és az e^x függvényre is.

Pár oldallal később a logaritmusfüggvényt már úgy vezeti be a tankönyv, hogy milyen kapcsolata van az exponenciálissal. Az $f(x) = \log_2$ és $g(x) = \log_{1/2}$ függvényeken keresztül egy gyors függvényvizsgálatot is végez. Ezzel a logaritmus alapjára és grafikonjára az összefüggést bevezeti, de nem bizonyítja a monotonitást. Megemlíti és egy ábrán szemlélteti is, hogy a logaritmus az exponenciális inverz függvénye.

A trigonometria témakörében azonnal visszautal arra, hogy 10. évfolyamon derékszögű háromszögekben már definiáltuk a szögfüggvényeket. Megadja a szögfüggvények általánosítását, tehát az egységkörben egy vektor elforgatottjának mindig lesz egy-egy szinuszt és koszinuszt adó koordinátája, így már lehet beszélni a függvények grafikonjairól is. A tankönyv megadja a szinusz, koszinusz függvényeinek a képét, sőt a tangens grafikonját is, de mindenféle tulajdonságok nélkül. Egyedül az értelmezési tartományt és az értékkészletet adja meg, de azt is úgy, hogy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pedig a szinusznál és koszinusznál köztudott, hogy $[-1; 1]$ intervallum az értékkészlete. Ez itt kissé ellentmondásossá válik, pedig már itt le lehetne tenni a későbbi egyenletmegoldás alapjait, vagyis a diák ne akarjon megoldani egy $\sin x = 2$ egyenletet, mert nem lehet. A szögfüggvények periodikus tulajdonsága az egyenletmegoldásnál merül fel, de inkább mint megoldáshalmaz, és nem a grafikon következményeként. Az egységkörre vezeti vissza, és arra, hogy bizonyos vektorok vetülete megegyezik, sőt azok 360 fokos elforgatottjai is. Tehát a függvények definíció szerinti periodikus tulajdonságáról egyáltalán nem beszél a tankönyv. Szeretném megjegyezni, hogy ugyanezen az évfolyamon a fizika tananyag rezgésekkel és hullámokkal kezdődik, ahol hullámhosszat is kell többek között értelmezniük a diákoknak. Ez a fogalom a periodikus mozgásokra jellemző, tehát tárgyalni kell a periodikusságot is.

2.2.8. Nemzeti tankönyvkiadó – 11–12. évfolyam

Ebben a fejezetben a Nemzeti tankönyvkiadó 2008-ban kiadott Matematika - A középiskolák 11-12. évfolyama számára - Emelt szintű kiegészítő tananyag című könyvét vizsgálom meg [16].

Szót kell ejteni mindenek előtt arról, hogy először is ez egy 11-12. évfolyam számára íródott könyv. Középiskolában 9. osztályban találkozik először egy diák a függvényekkel (ez 2008-ban is így volt), tehát a tankönyvnek és rajta keresztül az íróinak feltételezniük kell, hogy a diákok már rendelkeznek a 9. évfolyamon megszerzett tudásanyaggal. Nemcsak az évfolyam, de az emelt szintűsége miatt is érdekes ez a tankönyv. Ebből kifolyólag kibővíti a függvényekkel kapcsolatos ismereteket, olyan fogalmakkal, mint a(z)

- függvényhatárérték,
- folytonosság,

- differenciahányados és deriválás,
- integrálás és területszámítás.

Nézzük meg egy kicsit részletesebben is ezeket a tankönyvben.

A függvényhatárértéknek bár két definícióját is megadja, mindkettő egy adott pontban vizsgálja a határértéket. Arról pedig nem tesz említést külön, hogy ez lehet egy véges szám és +/- végtelen is. A két definíció egyébként a hagyományos és a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv. Ezek után pedig bevezeti a limeszes jelölést is. Megjegyzésben egy példán keresztül beszél arról, hogy attól még, hogy nincsen határértéke, létezhet külön jobb- és baloldali. Ezután tesz említést arról, hogy egy függvénynek lehet +/- végtelen is a határértéke egy adott pontban, illetve +/- végtelenben is vizsgálhatunk határértéket.

Ezután következik a folytonosság. Itt már csak egy definíciót ismertet, érdekes módon a folytonosságra vonatkozó átviteli elvvel vezeti be ezt a függvénytulajdonságot. Azt azonban megadja a tankönyv, hogy vannak szükséges feltételek a folytonossághoz: értelmezve legyen a függvény az adott pont egy környezetében, és az adott pontbeli határértéknek meg kell egyeznie a helyettesítési értékkel. Ekkor jön két példa, ahol felhasználja az átviteli elvet annak bizonyítására, hogy a két függvény adott pontjukban folytonosak. Kissé szerencsétlen helyzet, hiszen nehéz megmutatni, hogy valóban minden sorozat „jó", ezért is szokták inkább a folytonosság megcáfolására használni ezt a bizonyítás formát. Ráadásul a második függvény, mely az

$$f : [0; 2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

még zavaró is egy folytonosság bemutatására. Bár jó szemléltető, de ha diákként másodszorra ezzel a függvénnyel találkoznék, akkor engem inkább zavarna. A példák után megjegyzi azt is, hogy műveleteket is lehet „végezni" a folytonossággal, majd azt is, hogy a szinusz- és koszinuszfüggvények folytonosak. Ez utóbbi kijelentés dolgozatomat is alapul véve kissé elnagyolt, még akkor is, ha a tankönyvíró nyilván a $f(x) = \sin x$ és $g(x) = \cos x$ függvényekre gondolt.

Ezután visszatér a határértékekre, és bevezeti a művetekkel kapcsolatos tételeket.

A következő függvénytulajdonság a deriválás, melyet az érintővel és az iránytangenssel vezet be. Példákon keresztül mutatja be „mindenféle konkrét jelentéstől függetlenül" hogy mi a differenciahányados a [16] könyv a 77. oldalán. A tankönyv külön fejezetet szentel a differenciálhatóság és folytonosság kapcsolatának, példaként pedig az abszolút érték függvényt hozza. Mindössze megjegyzésben találjuk meg, hogy a folytonosság valójában egy nem elégséges, de szükséges feltétel. Az elemi függvények deriválása, és egy-két deriválási szabály bemutatása után a tankönyv több fejezetben is kitér arra, hogy függvényvizsgálatban hogyan segít a deriválás. Leírja a monotonitás és deriválás közötti kapcsolatot kissé pontatlanul. 2 tétel megfordítás esetében, a [16] könyv a függvény monotonitását annak feltételéül szabja ki, hogy egy nyílt intervallumban nemnegatív/nempozitív. „Ha f' az $]a; b[$ intervallumban nemnegatív (nempozitív), akkor az ff függvény monoton növekedő (fogyó)", tehát nem követeli meg a minden pontban nemnegatív/nempozitív feltételt.

Bár nem vezeti be a lokális növekedést/csökkenést a tankönyv, a lokális szélsőértékről beszél, sőt még hozzá is köti a deriváltfüggvény előjelváltásához. A derivált 0-val való egyenlőségére kimondja, hogy szükséges, de nem elégséges feltétele a szélsőértéknek. Míg az előjelváltás elégséges, de nem szükséges feltétele a szélsőértéknek. Ehhez az utóbbihoz rendkívül kis betűvel, és röviden hozza az

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

példát.

Ezután az integrálás következik, melyet a területszámítással vezet be. A felosztásokat, ha nem is precízen, de vizuálisan először akkor jeleníti meg, amikor a feladat szerint az $f(x) = x^2$ görbéje alatti területet számolja ki a $[0; 1]$ intervallumon. Nemcsak az osztópontok és azok finomítása nehéz ebben a példában (a diákok számára), hanem a végtelen sorok összegének kiszámítása, illetve azok alulról és felülről való becslése. A szuprémum és infimum fogalmakról egyáltalán nem tesz említést, inkább kétoldali közelítéssel végzi a számítást. Ezután bevezeti a Riemann–féle határozott integrált, és ezek kapcsolatát a műveletekkel. Majd a Dirichlet–függvényt pedig arra hozza fel példának, hogy nem minden függvénynek van határozott integrálja. Az integrálfüggvény fogalmán keresztül definiálja a primitív függvényt. Parciális integrálásra és a nevezetes primitív függvényekre is mutat több példát a tankönyv. A Newton–Leibniz–formula gyakorlati alkalmazásával zárja a témakört.

Ahogyan a [14] Mozaikos könyvnél, ennél a [16] tankönyvnél is a részletesebb írásom oka, hogy közelebb áll az egyetemi tanulmányaimhoz és így ennek a szakdolgozatnak a szintjéhez is. Így kaphatunk a témára egy olyan rálátást, mely egy kicsit más szemüvegen keresztül van nézve.

2.2.9. Tankönyvkiadó – 9. évfolyam

Utolsó tankönyvsorozatként egy régi kiadásút szeretnék bemutatni, Hajnal Imre szerzőét [17]. Bár erre vonatkozó kerettantervet nem találtam, sokat elárulhat a tanulási célokról az, hogy a leckék milyen mélységben és hogyan követik egymást.

Az első fogalom, melyet definiál a tankönyv a 134. oldalon, az az értelmezési tartomány mint „változók lehetséges értékeinek a halmaza”. Ezzel még hozzáköti a halmazok témaköréhez, de már a változókkal belekezd a függvények témakörébe. Ezután jön a hozzárendelési szabály, majd a függvényérték és annak halmazát el is nevezi értékkészletnek. Helyettesítési értékről is beszél és csak ezután merül fel komolyabban a változók halmazából a képhalmazba való képzés, és hogy mit jelent a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés. A Descartes–féle koordináta-rendszerrel folytatja, de nem részletezi a rendezett számpárok x és y tengelyek mentén való értelmezését. Ennek egyszerűen azt az okot jelöli meg, hogy „függvényeket koordináta-rendszerben már az általános iskolában is ábrázoltunk.”, írja a könyv a 147. oldalon.

Az alapfogalmak után a lineáris függvénnyel kezd. Speciális esetként hozza elő azt, ha nincs konstans tagja a függvénynek, mert az origón áthaladó egyenes az egyenes arányosság függvényének a grafikonja. Másik speciális eset a konstansfüggvény.

A másodfokú függvényeknél is (máshol is) nagyon következetesen használja, hogy a függvény képét nevezzük parabolának. (Tehát nincs olyan, hogy parabola függvény.) Rögtön megemlíti, hogy van magasabb fokú függvény is, a harmadfokúból 3 példát is mutat. Összefoglaló nevüket is bevezeti, polinomfüggvények, és ha csak 1 tagból állnak ($a = 1$ főegyütthatóval), akkor hatványfüggvények.

Az abszolút érték függvény következik a tankönyvben. Ezt a hagyományos jelöléssel, és intervallumonkénti jelöléssel is megadja.

Az elsőfokú törtfüggvényt már úgy definiálja, hogy az a fordított arányosságot fejezi ki. Ez a függvény érezhetően nagyobb hangsúlyt kap, egy viszonylag bonyolult (annak aki először találkozik ezzel a függvénnyel) példát hoz a tankönyv: $y = \dfrac{x-2}{x+1}$. Megmutatja a grafikonját is, és külön kitér az együtthatókra, kizárva annak a lehetőséget, hogy a tört lehetséges egyszerűsítése után, egy konstanst kapjunk. Az értelmezési tartományáról is megemlíti, hogy ki kell zárni azt a számot, amelynél a nevező 0 értéket ad. A teljes függvényképre pedig bevezeti a hiperbola elnevezést.

A négyzetgyök függvényről ezek után igen szűkszavúan tesz említést. A grafikonját és formuláját mutatja csak meg. Azt azért megemlíti, hogy csak nemnegatív számokhoz tudjuk a négyzetgyökét hozzárendelni.

Egészrész-, és törtfüggvény leírása is nagyon alapos. Az előbbit definícióval vezeti be, az utóbbit az egészrészfüggvény segítségével.

A szignumfüggvényt is megadja képlettel és grafikonnal együtt. Az érdekesség, hogy a $(0; 0)$ pontra úgy hivatkozik, mint elszigetelt (izolált) pont. Egyik tankönyvben sem találkoztam azzal, hogy erre a speciális pontra külön kitértek volna.

Ezek után mutat pár példát olyan függvényekre, melyek nem folytonosak, vagy intervallumonként különböző típusúakból állnak. Például:

$$y = x + |x|.$$

Végül a függvények tulajdonságait veszi sorra: zérushely, monoton csökkenés/növekedés. Külön megemlíti a nemcsökkenő és nemnövekvő fogalmakat, és hogy a konstansfüggvény egyszerre mindkettő. A lokális szélsőértéket is definiálja a tankönyv a 164. oldalon „helyinek" nevezve.

2.2.10. Tankönyvkiadó – 10. évfolyam

Ennek az évfolyamnak szánt [18] tankönyvben folytatódik a függvények témaköre.

7 oldalban összefoglalja a 9. osztályban tanultakat, majd a függvénytranszformáció szabályairól ír. Érdekes, hogy ezt itt írja le először, hiszen már a korábbi évfolyam függvénytanában is szerepelt bonyolultabb képlet. Ezután átismétli a tulajdonságokat is.

Amit már nem ismétlésnek szán a tankönyv, az a gyökfüggvények. Természetesen felemlegeti, hogy az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ függvényeket már tanulták. Ezután azonban magasabb fokú hatvány- és gyökfüggvények következnek.

Miután algebra szempontjából alaposan megtanítja a másodfokú kifejezések témakörét (megoldóképlet, teljes négyzetté alakítás, gyöktényezős alak), mindezt összeköti a mi témakörünkkel. Újra veszi a másodfokú függvények témakörét teljes részletességgel. Még a diszkrimináns és a lokális szélsőértékek elhelyezkedése közötti összefüggést is bemutatja (103. oldalon).

A trigonometria mindig is megjelent 10. évfolyamon, de újabban ezek általánosítása már átcsúszott a 11. évfolyamra. Ebben a tankönyvben még ezen az évfolyamon szerepel az általánosítás, és a függvények grafikonjai is. Részletesen bemutatja mind a 4 függvényt, külön kitér a periodikusságukra. Azt is részletezi, hogy a szinusz és koszinusz függvények egymás eltolásai, és így itt is tárgyalja a függvénytranszformációkat.

2.3. Konklúzió

Szakdolgozatomban sikerült betekintést adnom az 1.1 függvénycsaládba, mely gyakrabban használt példává válhat, akár középiskolák emelt matek csoportok számára is. Ezekben a csoportokban jó gyakorló példa lehetne, a határérték és folytonosságra vonatkozó átviteli elvekhez, valamint a folytonosság és differenciálhatóság közötti összefüggéshez. A határérték – folytonosság – differenciálhatóság tulajdonságok között sok apró részlet bújik, amelyekre középiskolában nincsen lehetőség kitérni. Ám az ehhez hasonló látványos függvények segíthetnek a jobb megértésben.

A tankönyvek is sok érdekességgel szolgáltak.

Mindhárom általam bemutatott 9. évfolyamnak szánt tankönyvek esetében – Mozaik [12], Nemzeti Tankönyvkiadó [10] és a Hajnal–féle [17] – jelentős különbségeket vehettünk észre. Ha a legrégebbitől indulunk, olvasható, hogy az 1987-es matematika tankönyvben konkrétan is ki van mondva, hogy egyes anyagrészeket (a bevezetőt) nem írnak le, mert már tanulták. Ugyanez az anyagrész a Mozaikosban már úgy jelenik, hogy az elméleti oldalát leírják, ha szükséges az ismétlés, de példákat nem ad a tankönyv (ne essünk túlzásokba alapon). Végül az idén kiadott tankönyvben, véglegesen bekerült a bevezetés, elméleti és gyakorlati oldala is. Ez azt az érzetet

kelti, mintha újra meg akarná tanítani a 7–8. osztályos függvénytant. A második nagyobb eltérés az a függvénytípusok bevezetésénél volt. A [17] könyv először csak a legalapvetőbb jellemzőket közölte a diákkal. A függvény képlete, értelmezési tartománya, értékkészlete és a függvény grafikonja. Ahogy bővült a tudásanyag a matematika bármely területén, úgy tért vissza újra és újra függvényekhez. A másik két 9. osztályosoknak íródott tankönyv jobban hasonlít egymásra ezen a téren, bár a Mozaik kiadó tankönyvében még mindig nagyobb a hangsúly a függvények jellemzésén. Ez nem csak a kijelölt feladatok alapján van így, hanem a könyvben szereplő mintapéldákat figyelembe véve is.

Összefoglalható a két 11. évfolyamnak íródott tankönyv jellemzése is. Lényeges különbség lett, hogy míg a Mozaikos szentel egy külön fejezetet az új matematikai kifejezések függvényeinek, addig az OFI-s tankönyvben nincs ilyen. Mindkettőnek lehet előnye is és hátránya is, óraszámban viszont nem feltétlenül okoz eltérést. Ha külön fejezetet szentelünk a függvényeknek, akkor könnyebben megfogalmazhatóak a rájuk vonatkozó általános definíciók. Például ilyen az exponenciális és logaritmus függvények esetében az alap és a monotonitás közötti összefüggések összekapcsolása. Ezek a függvénytulajdonságok a diákok számára is annál érthetőbbek lesznek, minél különbözőbb példákon keresztül látják. Viszont bátorkodom negatívumnak is besorolni azt a fajta rendszerezést, hogy egy fejezetben van az összes függvény. Tudniillik a tanév során így egyetlen egyszer, körülbelül 3 hétig foglalkozik vele a diák és utána „el lehet felejteni”. Az OFI-s tankönyvben pont ez a potenciális lehetőség. Nem egyszerre ismerkedik meg az új függvényekkel, így a diák kénytelen az év során háromszor is felidézni a függvényekről tanultakat. Ez egyfajta folyamatos ismétlésre kényszeríti rá őket, de ezzel nagyon jól is járhatnak, sokkal tartósabbá válhat a tudásuk a függvénytanról.

Végül pedig a 2 emelt tankönyvről is adnék egy gyors összehasonlítást. A legalapvetőbb különbség az a precizitás. A Mozaikos tankönyv felépítése sokkal tisztább, követhetőbb. Ebbe nyilván besegít a tankönyv designja is, de ebbe nem szeretnék belemenni (ez szubjektív nézőpont). Számomra főleg a határozott integrálszámításnál jött elő az a különbség, hogy a Czapáry–Gyapjas–féle könyv nagyon óvatosan közelített az egyetemi tananyag felé. Emiatt több matematikai fogalmat csak úgy tudtak kikerülni, hogy körbeírták, így viszont bonyolultabb lett. Ez a Mozaikosnál a kicsit bátrabb hozzáállás miatt kevésbé volt jellemző.

Nem minden probléma gyökere a középiskolában kezdődik, ezt láthattuk ott is, hogy az újabb tankönyvek azt igyekeznek foltozni, ami tudásismeret a felső tagozatban kimaradt. Sok és jó lehetőség van az új tankönyvekben is, de ezek nem tudnak kibontakozni, ha arra kell koncentrálniuk, hogy visszafelé pótolnak.

Irodalomjegyzék

[1] H. Turgay Kaptanoğlu: In praise of $y = x^{\alpha} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, The American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 2, pp. 144-150, 2001.

[2] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Valós analízis I., Typotex, Budapest, 2012.

[3] Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán: Analízis feladatgyűjtemény I., Typotex, 2014.

[4] Nemzeti Alaptanterv, 2020.

[5] 2020-as NAT-hoz kapcsolódó 5–8. osztályos matematika kerettanterv, 2012.

[6] 2020-as NAT-hoz kapcsolódó 9–12. osztályos matematika kerettanterv, 2012.

[7] Nemzeti Alaptanterv, 2012.

[8] 2012-es NAT-hoz kapcsolódó 5–8. osztályos matematika kerettanterv, 2012.

[9] 2012-es NAT-hoz kapcsolódó 9–12. osztályos matematika kerettanterv, 2012.

[10] Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné dr. Simon Judit: Matematika 9. Az érthető matematika, Oktatási hivatal, Budapest, 2020.

[11] Dr. Gerőcs László, Számadó László: Matematika, A középiskolák 11. évfolyama számára, Oktatási Hivatal, Budapest, 2015.

[12] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán József, Vincze István: Sokszínű Matematika 9., Mozaik Kiadó, Szeged, 2017.

[13] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán József, Vincze István: Sokszínű Matematika 11., Mozaik Kiadó, Szeged, 2017.

[14] Schlegl István, Trembeczki Csaba: Sokszínű Matematika. Az analízis elemei, Mozaik Kiadó, Szeged 2012.

[15] Kovács István, Trembeczki Csaba: Sokszínű Matematika Feladatgyűjtemény. Az analízis elemei, Mozaik Kiadó, Szeged 2016.

[16] Czapáry Endre, Gyapjas Ferenc: Matematika a középiskolák 11–12. évfolyama számára. Emelt szintű kiegészítő anyag, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2008.

[17] Hajnal Imre: Matematika I., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[18] Hajnal Imre: Matematika II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[19] Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Simon Judit: Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.