EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi Kar

SZAKDOLGOZAT

Csalóka periodikusság

Témavezető:
Besenyei Ádám
Egyetemi docens

Készítette:
Takács Anna
matematikatanár – fizikatanár
osztatlan tanári mesterszak

2020

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott TAKÁCS ANNA (név)

AAXTX2 (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az

ELTE MATEMATIKATANÁR - FIZIKATANÁR osztatlan tanári mesterszakján

írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2020.04.27.

Takács Anna

a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Bevezetés **7**

1. Periodikussággal kapcsolatos elemi érdekességek **9**
1.1. A definíció és példák . . . 9
1.2. Műveletek periodikus függvényekkel . . . 13
1.3. A periódusok halmaza . . . 14
1.4. Legkisebb pozitív periódus . . . 16
1.5. Nem összemérhető periódusok . . . 19
1.6. Folytonos és differenciálható függvények . . . 20

2. Összegfüggvények periódusai **25**
2.1. Nem összemérhető periódusú függvények összege . . . 25
2.1.1. Amikor az összeg nem periodikus . . . 25
2.1.2. Amikor az összeg periodikus . . . 30
2.2. Összemérhető periódusú függvények összege . . . 33

3. Periodikus felbonthatóság **39**
3.1. Egy KöMaL feladat . . . 39
3.2. Szükséges feltétel felbonthatósághoz . . . 40
3.3. Elégséges feltétel felbonthatósághoz . . . 43
3.4. Felbonthatóság több függvény összegére . . . 45

4. Periodikusság a középiskolában **49**
4.1. Periodikusság a kerettantervekben . . . 49
4.2. A Sokszínű matematika tankönyvcsalád . . . 50
4.2.1. 9. osztály . . . 50
4.2.2. 10. osztály . . . 51
4.2.3. 11. osztály . . . 53
4.2.4. 12. osztály . . . 54
4.2.5. Az analízis elemei . . . 57
4.3. Periodikusság egyéb tankönyvcsaládokban . . . 63
4.3.1. Az Újgenerációs tankönyvcsalád . . . 63
4.3.2. Hajnal Imre: Matematika a gimnáziumok számára . . . 63
4.3.3. Heuréka tankönyvsorozat . . . 64
4.3.4. Hajdu Sándor által szerkesztett tankönyvcsalád . . . 65
4.3.5. Pintér Lajos: Analízis I. . . . 65

Irodalomjegyzék **67**

Bevezetés

A mindennapok során számtalan féle periodikus jelenséggel találkozhatunk, ilyen például a nappalok és éjszakák váltakozása, az évszakok változása, de periodikus mozgást végeznek a kerékpár kerekei, ezenkívül periodikusságot figyelhetünk meg a hullámok terjedésében, és még sorolhatnánk a további példákat. Az ilyen és ehhez hasonló folyamatok matematikai leírásához nélkülözhetetlenek a periodikus függvények. A periodikusság fogalma első látásra nem túl bonyolult, a középiskolai tananyagban is szerepel. Azonban a fogalom szemléletessége néha kissé csalóka, ugyanis a témakör rejteget néhány meglepetést. Például az alábbi három egyszerű kérdés is olyan, amelynek kapcsán a szemlélet könnyen becsaphatja az embert.

- Van-e minden nem konstans periodikus függvénynek legkisebb pozitív periódusa?
- Igaz-e, hogy bármely két periodikus függvény összege periodikus?
- Előáll-e az $f(x) = x$ függvény két periodikus függvény összegeként?

Dolgozatunkban többek között az iménti kérdésekre is választ fogunk adni, és ezek mellett még számos további, periodikus függvényekkel kapcsolatos érdekes összefüggésre világítunk rá. Célunk annak bemutatása a periodikusság fogalmán keresztül, hogy egy középiskolai matematikatanár számára elengedhetetlen a fogalmak alapos ismerete és értése.

Az első fejezetben tisztázzuk a periodikusság definícióját, majd néhány figyelemre méltó következményét fogalmazzuk meg. Mindeközben több, a fogalom megértését segítő, izgalmas függvény példájával is találkozunk.

A második fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy periodikus függvények összegfüggvénye hogyan viselkedhet periodikusság szempontjából. Középiskolai tankönyvekben és versenyeken kitűzött feladatokból kiindulva járjuk körül a kérdést, és fogalmazunk meg állításokat.

A harmadik fejezetben egy középiskolás diákoknak szóló feladat kapcsán azt tanulmányozzuk, hogy milyen tulajdonságú függvények állhatnak elő periodikus függvények összegeként.

Végül a negyedik fejezetben képet adunk arról, hogy a periodikusság témaköre hogyan jelenik meg a középiskolai matematikatantervekben és néhány tankönyvben, különös figyelmet fordítva a *Sokszínű matematika* című tankönyvcsalád köteteire.

1. fejezet

Periodikussággal kapcsolatos elemi érdekességek

A fejezet és egyben a dolgozat kiindulópontjaként először a periodikusság fogalmát tisztázzuk, azután a definíció néhány egyszerű, majd pedig néhány kevésbé magától értetődő, de annál izgalmasabb következményét tárgyaljuk. Eközben több érdekes periodikus függvényt is megismerünk és megvizsgálunk. A tárgyalt eredmények többsége jól ismert és az egyetemi analízis kurzusokon vagy speciálelőadásokon rendszerint előkerülnek, mi most leginkább a [8] órai jegyzetünkre támaszkodunk.

1.1. A definíció és példák

A továbbiakban csak valós változós, valós értékű (röviden valós) függvényekkel foglalkozunk. Egy f függvény értelmezési tartományára a D_f jelölést fogjuk használni, és mindvégig feltesszük, hogy D_f a valós számok valamely nem üres részhalmaza.

1.1. Definíció. Az f valós függvényt *periodikusnak* nevezzük, ha van olyan $p \neq 0$ valós szám, hogy f értelmezési tartományának minden x elemére teljesül a következő két feltétel:

1. $x + p \in D_f$ és $x - p \in D_f$,
2. $f(x + p) = f(x)$.

Ha van ilyen tulajdonságú p szám, akkor azt az f egy *periódusának* nevezzük, és azt mondjuk, hogy f *periodikus p szerint.*

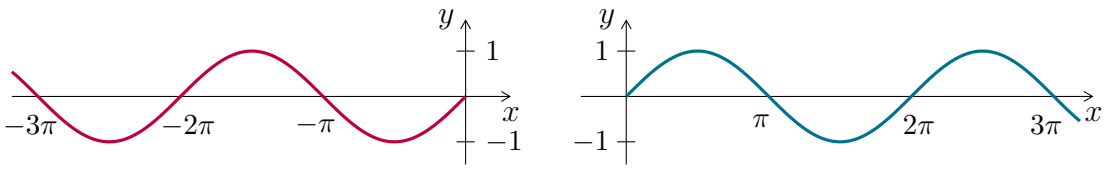
1.2. *Megjegyzés.*

- A $p = 0$ esetet amiatt nem engedjük meg a periodikusság definíciójában, mert különben minden függvény periodikus lenne a 0 periódussal.
- Az első feltétel automatikusan teljesül, ha $D_f = \mathbb{R}$, így ezzel a feltétellel a későbbiekben csak $D_f \neq \mathbb{R}$ esetén foglalkozunk.
- A definícióban megkövetelt második feltételnél azért nem szerepel az $x-p$ helyen felvett függvényérték, mert ebben a feltételben x helyett az $x - p \in D_f$ hely választásával éppen azt kapjuk, hogy $f\big((x-p)+p\big) = f(x-p)$, azaz

$$f(x - p) = f(x),$$

tehát ez már következik a két feltételből. A későbbiekben ezt a tulajdonságot használni is fogjuk.

- Középiskolai tankönyvekben gyakran előfordul (ezzel a 4. fejezetben foglalkozunk), hogy a periodikusság definíciójának az első feltételéhez nem veszik hozzá azt, hogy minden $x \in D_f$ esetén az $x - p$ helyen is legyen értelmezve a függvény. Ez az alternatív definíció megengedi azt is, hogy például félegyenesen értelmezett függvény is lehessen periodikus. Többek között az 1.1. ábrán látható függvények periodikusak lennének az alternatív definíció szerint.



(a) $\sin\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ (b) $\sin\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$

1.1. ábra. Félegyenesen értelmezett periodikus függvények

- Azzal is találkozhatunk tankönyvekben, hogy csak $p > 0$ periódust engednek meg. Ez nem szigorítás az eredeti definícióban, ugyanis később az 1.15. Állításban látni fogjuk, hogy ha egy függvénynek van periódusa, akkor pozitív periódusa is van. Ez a megállapítás az előbbi pontban említett alternatív definíció esetén nem igaz, például az 1.1a. ábrán látható függvénynek nincsen pozitív periódusa, míg az 1.1b. ábrán láthatónak van (sőt, csak az van).

Mi a továbbiakban mindig az 1.1. Definíciót fogjuk periodikusság alatt érteni.

1.3. Példa. A középiskolai tananyagban a periodikusság fogalma kapcsán leggyakrabban a trigonometrikus függvények kerülnek elő. A szinusz- és koszinuszfüggvény definícióból adódóan periodikus $2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \ldots$ szerint, legkisebb pozitív periódusuk 2π. Hasonló módon, a tangens- és kotangensfüggvény periodikus $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \ldots$ szerint, legkisebb pozitív periódusuk π.

1.4. Példa. A valós számokon értelmezett konstansfüggvénynek minden nem nulla szám periódusa. Valóban, ha valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) = c$ $(x \in \mathbb{R})$, és $p \neq 0$ valós szám, akkor minden x valós számra

$$f(x + p) = c = f(x).$$

Az előbbi példa megfordítása is igaz.

1.5. Állítás. *Ha egy f függvénynek (amelyre D_f nem üres) minden nem nulla valós szám periódusa, akkor f az egész számegyenesen értelmezett konstansfüggvény.*

Bizonyítás. Valóban, ha $x \in D_f$ és $y \in \mathbb{R}$, $y \neq x$ tetszőleges, akkor mivel $y - x$ periódus, ezért $x + (y - x) = y \in D_f$ és $f(y) = f(x)$. Tehát minden $y \neq x$ valós szám esetén $f(y) = f(x)$, vagyis f az egész számegyenesen értelmezett és ott konstans. □

Érdekes elemi példa a törtrész-függvény. Ehhez elevenítsük fel az egész és tört rész definícióját.

1.6. Definíció.

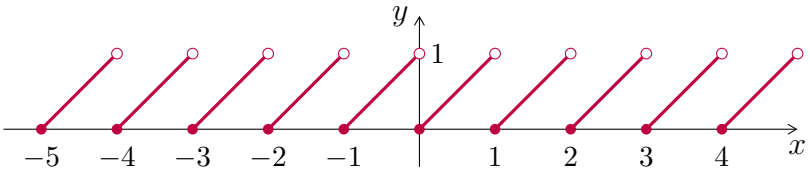
i) Egy x valós szám *egész része* az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb. Szokásos jelölése: $[x]$. Formálisan $[x]$ az az egész szám, amelyre

$$x - 1 < [x] \leq x. \tag{1.1}$$

ii) Az x valós szám *tört részét* úgy kapjuk, hogy a számból kivonjuk az egész részét. Hagyományos jele: $\{x\}$. Formálisan tehát

$$\{x\} = x - [x].$$

1.7. Példa. Tekintsük az $f(x) = \{x\}$ törtrész-függvényt, amely minden valós számhoz a szám tört részét rendeli (a grafikonja az 1.2. ábrán látható).



1.2. ábra. A törtrész-függvény grafikonja

Megmutatjuk, hogy a törtrész-függvény periodikus és pontosan a nem nulla egész számok a periódusai. Ehhez igazolnunk kell, hogy minden $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\{x + k\} = \{x\}. \tag{1.2}$$

A tört rész definíciója szerint ez azt jelenti, hogy

$$x + k - [x + k] = x - [x],$$

vagyis

$$[x + k] = [x] + k. \tag{1.3}$$

Ez utóbbi azonosság igazolásához induljunk ki az x szám egész részének (1.1) tulajdonságából, és adjuk hozzá az egyenlőtlenséglánchoz a k egész számot:

$$(x + k) - 1 < [x] + k \leq x + k.$$

Itt mivel $[x]$ és k is egész számok, ezért összegük is egész, így $[x]+k$ éppen az $x+k$ szám egész része a definíció szerint, tehát az (1.3) összefüggés valóban igaz. Végeredményben az (1.2) összefüggés is teljesül, ezért a törtrész-függvénynek minden nem nulla egész szám periódusa.

A törtrész-függvénynek a nem nulla egész számokon kívül más periódusa viszont nincs, ugyanis ha p periódusa a függvénynek, akkor $\{0\} = \{0 + p\} = \{p\}$ teljesül, viszont $p \notin \mathbb{Z}$ esetén $p \neq [p]$, így

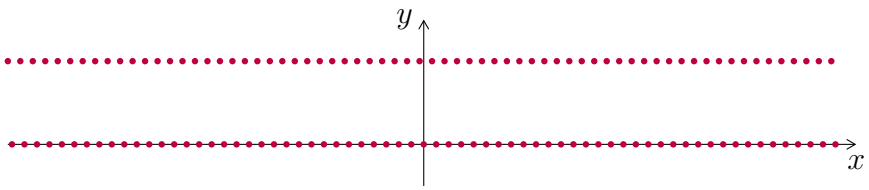
$$\{p\} = p - [p] \neq 0 = \{0\}.$$

A középiskolában ritkábban felbukkanó példa a Dirichlet-függvény.

1.8. Példa. A Dirichlet-függvény hozzárendelési szabálya a következő:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

A függvény grafikonját az 1.3. ábra szemlélteti. Belátjuk, hogy a Dirichlet-függvénynek pontosan a nem nulla racionális számok periódusai. A bizonyításhoz szükségünk lesz egy hasznos segédállításra.



1.3. ábra. A Dirichlet-függvény grafikonja

1.9. Lemma. *Bármely racionális és irracionális szám összege irracionális.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy valamely r_1 racionális és s irracionális számok összege az r_2 racionális szám. Ekkor $r_1 + s = r_2$ alapján $s = r_1 - r_2$, ahol $r_1 - r_2$ racionális szám (hiszen két racionális szám különbsége racionális, ami közös nevezőre hozással nyilvánvalóan adódik), ez viszont ellentmond s irracionalitásának. □

Térjünk most vissza a Dirichlet-függvényhez! Először igazoljuk, hogy minden $p \neq 0$ racionális szám periódusa. A periodikusság definíciójának első feltételével nem kell foglalkoznunk, a második feltételhez pedig legyen $x \in \mathbb{R}$. Ha x racionális, akkor $x + p$ is racionális, hiszen két racionális szám összege racionális (ami közös nevezőre hozással ismét könnyen adódik), így $D(x + p) = D(x) = 1$. Ha pedig x irracionális, akkor az 1.9. Lemma alapján $x + p$ is irracionális, ezért $D(x + p) = D(x) = 0$. Tehát a Dirichlet-függvénynek minden nem nulla racionális szám periódusa. Más periódusa nem lehet, ugyanis irracionális p esetén $D(p) = 1 \neq 0 = D(0)$.

A Dirichlet-függvény példája kapcsán felmerül a kérdés, hogy van-e olyan nem konstans függvény, amelynek minden irracionális szám periódusa. A következő állítás mutatja, hogy nincs.

1.10. Állítás. *Ha egy f függvénynek (amelyre D_f nem üres) minden irracionális szám periódusa, akkor f az egész számegyenesen értelmezett konstansfüggvény.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy ha f-nek minden irracionális szám periódusa, akkor f-nek minden nem nulla racionális szám is periódusa, tehát f-nek minden nem nulla valós szám periódusa, így az 1.5. Állítás szerint f szükségképpen az egész számegyenesen értelmezett konstansfüggvény.

Legyen $r \neq 0, r \in \mathbb{Q}$ és $s \notin \mathbb{Q}$, ekkor az 1.9. Lemma alapján $r + s$ irracionális, tehát periódusa az f függvénynek. Vagyis minden $x \in D_f$ esetén $x + (r + s)$ is az értelmezési tartományban van és

$$f\big(x + (r + s)\big) = f(x). \tag{1.4}$$

Most használjuk ki azt, hogy $(-s)$ is irracionális, tehát periódusa az f függvénynek, vagyis mivel $x+(r+s)$ az értelmezési tartományban van, ezért $x+(r+s)+(-s) = x+r$ is eleme az értelmezési tartománynak és

$$f(x+r) = f\big(x+(r+s)\big). \tag{1.5}$$

Az (1.4) és az (1.5) összefüggésekből azt kapjuk, hogy minden $x \in D_f$ esetén $x+r \in D_f$ és $f(x+r) = f(x)$. Mivel r tetszőleges volt, ezért az előbbiekből $x-r \in D_f$ és $f(x-r) = f(x)$ is következik, tehát f-nek periódusa az r, ahol r tetszőleges nem nulla racionális szám volt. □

1.2. Műveletek periodikus függvényekkel

Ebben a részben megmutatjuk, hogy egy rögzített szám szerint periodikus függvények az algebrai műveletekre nézve zárt halmazt alkotnak.

1.11. Állítás. *Ha az f, g függvények periodikusak a $p \neq 0$ valós szám szerint, akkor a cf (ahol $c \in \mathbb{R}$), $f+g$, fg, f/g függvények is periodikusak p szerint (az értelmezési tartományukon). Ezenkívül ha az f függvény periodikus p szerint, akkor az $x \mapsto f(x+d)$ (ahol $d \in \mathbb{R}$) függvénynek is periódusa p (az értelmezési tartományán).*

Bizonyítás. A későbbiekben leggyakrabban az összeg esetét használjuk, ezért most ezt igazoljuk. Az f és g függvények periodikussága miatt minden $x \in D_f \cap D_g$ esetén $x+p \in D_f \cap D_g$, $x-p \in D_f \cap D_g$, továbbá $f(x+p) = f(x)$ és $g(x+p) = g(x)$, ezért

$$(f+g)(x+p) = f(x+p) + g(x+p) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

tehát $f+g$ valóban periodikus p szerint.

A többi függvény esetében a bizonyítás a fentiekhez hasonló. Az f/g függvény esetén kell arra vigyázni, hogy az értelmezési tartománya:

$$D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\},$$

az $x \mapsto f(x+d)$ esetén pedig

$$D\big(x \mapsto f(x+d)\big) = \{x \in \mathbb{R} \mid x+d \in D_f\}.$$

□

1.12. *Megjegyzés.* Ha az f és g függvényeknek nincs közös periódusa, akkor $f+g$ periodikussága nem feltétlenül következik, ezzel a 2. fejezetben foglalkozunk részletesen.

1.13. Állítás. *Ha az f függvény periodikus a $p \neq 0$ valós szám szerint és g tetszőleges függvény, akkor a $g \circ f$ összetett függvény is periodikus p szerint (az értelmezési tartományán).*

Bizonyítás. A $g \circ f$ függvény értelmezési tartománya:

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

Legyen $x \in D_{g\circ f}$, ekkor az f függvény p szerinti periodikussága folytán $x+p \in D_f$, $x-p \in D_f$ és $f(x+p) = f(x-p) = f(x) \in D_g$, így $x+p \in D_{g\circ f}$ és $x-p \in D_{g\circ f}$, továbbá

$$(g \circ f)(x+p) = g(f(x+p)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x),$$

tehát $g \circ f$ valóban periodikus p szerint. □

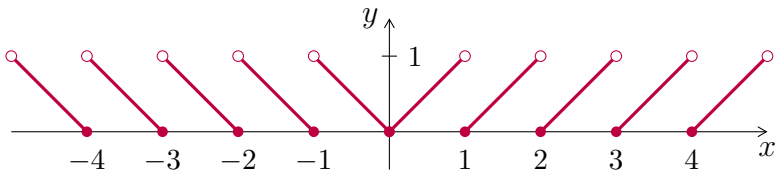
1.14. *Megjegyzés.* Természetesen adódik a kérdés, hogy ha az f függvény periodikus a $p \neq 0$ valós szám szerint, akkor következik-e az $f \circ g$ függvény periodikussága. Általában nem, például $g(x) = |x|$ és $f(x) = \{x\}$ $(x \in \mathbb{R})$ esetén a $h(x) = (f \circ g)(x) = \{|x|\}$ függvény (amelynek grafikonja az 1.4. ábrán látható) nem periodikus, azaz semelyik nem nulla valós szám sem periódusa. Valóban, a nemnegatív félegyenesen a h függvény megegyezik a törtrész-függvénnyel, amely pontosan a nem nulla egész számok szerint periodikus, így elég azt belátnunk, hogy h-nak nem periódusai a nem nulla egész számok. Ez pedig következik abból, hogy tetszőleges k pozitív egész szám esetén az (1.2) összefüggés figyelembevételével

$$h\left(-\frac{1}{3}+k\right) = \left\{\left|-\frac{1}{3}+k\right|\right\} = \left\{k-\frac{1}{3}\right\} = \left\{-\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3},$$

így

$$h\left(-\frac{1}{3}+k\right) = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{3} = h\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Tehát h nem periodikus függvény.



1.4. ábra. A $h(x) = \{|x|\}$ függvény grafikonja

1.3. A periódusok halmaza

Ebben a szakaszban belátjuk, hogy egy periodikus függvény periódusainak halmaza zárt az összeadás műveletére nézve.

1.15. Állítás. *Ha az f függvénynek a p és q nem nulla valós számok periódusai, akkor $n, m \in \mathbb{Z}$ esetén $np + mq$ is periódusa (feltéve, hogy $np + mq \neq 0$). Következésképpen, ha egy függvénynek van periódusa, akkor végtelen sok periódusa van, nevezetesen egy periódus minden nem nulla egész számszorosa is periódus, és ezek között van pozitív és negatív is.*

Bizonyítás. A bizonyítást két lépésben fogjuk elvégezni. Először belátjuk, hogy ha egy f függvénynek a p és q nem nulla valós számok periódusai és összegük nem nulla, akkor f-nek $p + q$ is periódusa. Ezután azt igazoljuk, hogy ha egy f függvénynek a p nem nulla valós szám periódusa, akkor $(-p)$ is periódusa.

1. lépés. Mivel f periodikus p szerint, minden $x \in D_f$ esetén $x+p \in D_f$, $x-p \in D_f$ és $f(x+p) = f(x)$, továbbá az f függvénynek q is periódusa, ezért $(x+p)+q \in D_f$, $(x-p)-q \in D_f$ és

$$f(x+p) = f\big((x+p)+q\big) = f\big(x+(p+q)\big),$$

tehát $f(x+(p+q)) = f(x)$. Vagyis f valóban periodikus $p+q$ szerint is. Speciálisan $q = p$ választással kapjuk, hogy f periodikus $p+p = 2p$, $2p+p = 3p$, …, $(n-1)p+p = np$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ szerint.

2. lépés. Ha f-nek periódusa p, akkor minden $x \in D_f$ esetén $x+p$ és $x-p$ is az értelmezési tartományban van, ami egyenértékűen úgy írható, hogy $x+p = x-(-p)$ és $x-p = x+(-p)$ is az értelmezési tartományban van. Továbbá $f(x) = f(x-p)$, amit szintén írhatunk úgy, hogy

$$f(x) = f\big(x+(-p)\big).$$

Tehát f-nek $(-p)$ is periódusa.

□

1.16. Következmény. Egy periodikus függvény periódusainak halmaza a 0 számmal kiegészítve csoportot alkot az összeadás műveletére nézve. Ez a csoport a valós számok additív csoportjának egy nem triviális részcsoportja.

Valójában a valós számok additív csoportjának tetszőleges nem triviális részcsoportjából a nullát elhagyva a kapott halmaz előáll mint egy periodikus függvény periódusainak halmaza.

1.17. Állítás. *Legyen G a valós számok additív csoportjának tetszőleges nem triviális részcsoportja és*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in G, \\ 0, & \text{ha } x \notin G. \end{cases}$$

Ekkor az f függvény periodikus és a periódusai éppen a $G \setminus \{0\}$ (nem üres) halmazt alkotják.

A bizonyításhoz az 1.9. Lemma alábbi általánosítását látjuk be.

1.18. Lemma. *Legyen G a valós számok additív csoportjának tetszőleges részcsoportja. Ekkor minden $x \in G$ és $y \notin G$ esetén $x+y \notin G$.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan $x \in G$ és $y \notin G$, hogy $x+y \in G$. Ekkor mivel G egy részcsoport, ezért $-x \in G$, valamint $(x+y)+(-x) = y \in G$, ami ellentmondás, hiszen a feltétel szerint $y \notin G$. □

Az 1.17. Állítás bizonyítása. Legyen először $p \in G \setminus \{0\}$. Ekkor ha $x \in G$, akkor a részcsoport-tulajdonság miatt $x+p \in G$, így

$$f(x+p) = f(x) = 1.$$

Ha $x \notin G$, akkor pedig az 1.18. Lemma alapján $x+p \notin G$, ezért

$$f(x+p) = f(x) = 0.$$

Tehát f periodikus p szerint.

Az f függvénynek más periódusa nincs, ugyanis $p \notin G$ esetén

$$f(p) = 0 \neq 1 = f(0).$$

□

1.19. *Megjegyzés.* Az 1.17. Állításban a $G = \mathbb{Q}$ választással éppen a Dirichlet-függvényt nyerjük, amelyről az 1.8. Példában láttuk, hogy valóban a nem nulla racionális számok alkotják a periódusait.

1.4. Legkisebb pozitív periódus

Az 1.15. Állításban láttuk, hogy ha egy függvény periodikus valamely p nem nulla valós szám szerint, akkor bármely n nem nulla egész számra np is periódusa a függvénynek, amelyek között tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív számok is vannak, ezért egy periodikus függvénynek nincs legkisebb periódusa. A pozitív periódusok között viszont már van értelme legkisebbet keresni. Természetesen legkisebb pozitív periódus sem létezik általában, hiszen például a konstansfüggvénynek nincs legkisebb pozitív periódusa, de a Dirichlet-függvénynek sincs, amely ráadásul nem is konstans. Ha egyáltalán van legkisebb pozitív periódus, akkor az a pozitív periódusok halmazának infimuma kell, hogy legyen. Az alábbiakban ezt az infimumot vizsgáljuk meg kicsit tüzetesebben a [9] cikk alapján.

1.20. Tétel. *Legyen f periodikus függvény és*

$$q := \inf\{p > 0 \mid p \text{ periódusa } f\text{-nek}\}.$$

Ekkor két eset lehetséges:

1. *Ha $q > 0$, akkor q is periódusa f-nek (méghozzá f legkisebb pozitív periódusa), és f periódusai éppen a q nem nulla egész számszorosai.*

2. *Ha $q = 0$, akkor f periódusai sűrűek $\mathbb{R}$-ben, azaz bármely két különböző valós szám között található olyan valós szám, amely f-nek periódusa (tehát f-nek nincs legkisebb pozitív periódusa).*

Bizonyítás. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy az 1.15. Állítás alapján a pozitív periódusok halmaza nem üres, ezenkívül a 0 egy nyilvánvaló alsó korlátja, így q szükségképpen egy nemnegatív valós szám.

1. lépés. Először megmutatjuk, hogy ha $q > 0$, akkor q periódusa f-nek. Indirekt módon tegyük fel, hogy q mégsem periódus. Mivel $q < 2q$, ezért az infimum definíciója alapján létezik $2q$-nál kisebb pozitív periódus, amely (mivel q nem periódus) nem lehet q, tehát van olyan p_1 periódus, hogy $q < p_1 < 2q$. Hasonlóan létezik p_2 periódus, melyre $q < p_2 < p_1 < 2q$. Minthogy periódusok összege és egész számszorosa is periódus, ezért $p_1 - p_2$ is periódus. De $0 < p_1 - p_2 < q$, tehát találtunk q-nál kisebb pozitív periódust, ami ellentmond annak, hogy q az f függvény pozitív periódusait tartalmazó halmaznak a legnagyobb alsó korlátja.

2. lépés. Tudjuk tehát, hogy q periódus, és az 1.15. Állítás szerint egy periódus bármely nem nulla egész számszorosa is periódus. Most belátjuk, hogy f minden periódusa q egész számú többszöröse. Legyen p egy tetszőleges periódusa az f függvénynek. Ekkor a maradékos osztás szerint létezik $n \in \mathbb{Z}$ és $0 \leq r < q$, hogy $p = nq + r$. Mivel p és q periódusai az f függvénynek, ezért minden $x \in D_f$ esetén

$$f(x) = f(x + p) = f(x + nq + r) = f(x + r).$$

Ebből viszont az következik, hogy $r = 0$ vagy r egy, a q-nál kisebb pozitív periódus, de ez utóbbi nem lehetséges, mert q a legkisebb pozitív periódus. Tehát $r = 0$, és így $p = nq$, vagyis p valóban egész számszorosa a legkisebb pozitív periódusnak.

3. lépés. Most tegyük fel, hogy $q = 0$, ekkor belátjuk, hogy bármely $a < b$ valós számok esetén f-nek van periódusa a és b között. Ha $a < 0 < b$, akkor az infimum definíciója miatt b nem alsó korlátja a pozitív periódusok halmazának, tehát létezik 0

és b között pozitív periódus. A maradék két eset közül elegendő azt vizsgálni, amikor $0 \leq a < b$, mert erre visszavezethető az $a < b \leq 0$ eset. Valóban, ha a pozitív periódusok sűrűn vannak a $[0, \infty)$ félegyenesen, akkor mivel az 1.15. Állítás miatt periódus ellentettje is periódus, ezért a negatív periódusok sűrűn vannak a $(-\infty, 0]$ félegyenesen.

Ha $0 \leq a < b$, akkor $b - a > 0$, így létezik olyan p pozitív periódus, amelyre $p < b - a$. Az arkhimédészi axióma miatt létezik az a/p valós számnál nagyobb pozitív egész, vagyis található olyan $n \in \mathbb{Z}^+$, melyre $a < np$. Jelölje az ilyen n pozitív egészek között a legkisebbet $\tilde{n}$, ekkor $\tilde{n} - 1 = 0$ vagy $\tilde{n} - 1$ az $\tilde{n}$-nál kisebb pozitív egész, így mindenképpen

$$(\tilde{n} - 1)p \leq a,$$

amely egyenlőtlenség mindkét oldalához p-t hozzáadva $p < b - a$ figyelembevételével kapjuk, hogy

$$a < \tilde{n}p \leq a + p < a + (b - a) = b.$$

Mivel p periódusa f-nek, ezért $\tilde{n}p$ is periódusa, amely a fentiek alapján a és b között van, tehát valóban található bármely két különböző nemnegatív valós szám között periódusa az f függvénynek. □

1.21. *Megjegyzés.* Az 1.20. Tétel mögött valójában az a mélyebb eredmény húzódik meg, hogy a valós számok additív csoportjának bármely nem triviális részcsoportja vagy ciklikus, vagy sűrű a számegyenesen (a bizonyítás lényegében az előbbi gondolatmenet). Mivel az 1.16. Következmény alapján a pozitív periódusok halmaza 0-val kiegészítve nem triviális részcsoport, ezért következik az 1.20. Tétel.

A legkisebb pozitív periódus létezésének egy elegendő feltétele a folytonosság.

1.22. Állítás. *Ha f nem konstans, periodikus és van olyan pont, ahol folytonos, akkor f-nek van legkisebb pozitív periódusa.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az 1.20. Tétel második pontja áll fenn. Legyen $y \in D_f$ tetszőleges. Ekkor a periódusok sűrűsége miatt létezik periódusoknak olyan (p_n) sorozata, hogy $p_n \to x - y$, vagyis $y + p_n \to x$. Mivel p_n periódus, ezért $y + p_n \in D_f$ és $f(y + p_n) = f(y)$. Az f folytonos x-ben, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv miatt $f(y + p_n) \to f(x)$, következésképp $f(x) = f(y)$ minden $x \in D_f$ esetén. Tehát f konstans, ami ellentmondás. □

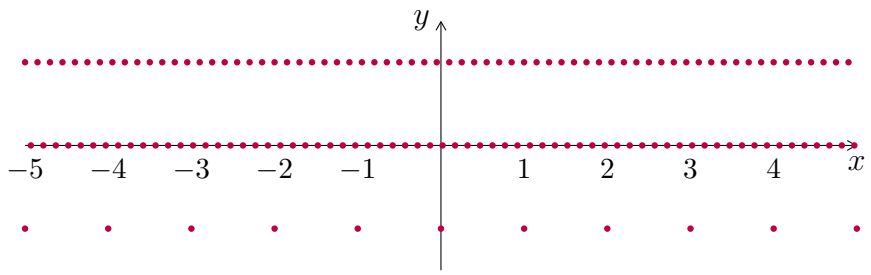
A folytonosság nem szükséges a legkisebb pozitív periódus létezéséhez. Ezt mutatja a következő példa.

1.23. Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Ekkor az átviteli elvvel nem nehéz belátni, hogy f sehol sem folytonos. Valóban, ha x racionális, akkor $f(x) = 1$ vagy $f(x) = -1$, de ha irracionális számokból álló sorozattal tartunk az x-hez, akkor a függvényértékek sorozata 0-hoz tart. Ha pedig x irracionális, akkor $f(x) = 0$, de x-hez racionális sorozattal tartva a függvényértékek sorozata 1-hez tart.

Továbbá f-nek az 1 periódusa, hiszen ha x irracionális, akkor $x + 1$ is irracionális; ha x egész, akkor $x + 1$ is egész; valamint ha x racionális, de nem egész, akkor $x + 1$ racionális, de nem egész; így végül minden x valós szám esetén $f(x + 1) = f(x)$.



1.5. ábra. Az (1.6) hozzárendeléssel értelmezett f függvény grafikonja

Az f függvénynek 1-nél kisebb pozitív periódusa nincsen, ugyanis $0 < p < 1$ esetén p nem egész, tehát $f(p) \neq -1 = f(0)$. A függvény grafikonjának vázlata az 1.5. ábrán látható.

A későbbiek miatt érdemes megvizsgálnunk, hogy bizonyos függvénytranszformációk hatására hogyan változik egy periodikus függvény legkisebb pozitív periódusa (ha van).

1.24. Állítás. *Tegyük fel, hogy az f periodikus függvény legkisebb pozitív periódusa a p szám. Ha a, b, c, d tetszőleges konstansok, amelyekre $a \neq 0$ és $c \neq 0$, akkor a $g(x) = cf(ax+b)+d$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény legkisebb pozitív periódusa $p/|a|$ (az értelmezési tartományán).*

Bizonyítás. A g függvény értelmezési tartománya:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid ax + b \in D_f\}.$$

Valójában az $x \mapsto ax + b$ függvény bijekciót létesít a g és f függvények értelmezési tartománya között.

Lássuk be először azt, hogy a $p/|a|$ szám valóban periódusa a g függvénynek. Minden $x \in D_g$ esetén $ax + b \in D_f$, így az f függvény p szerinti periodikussága folytán az $ax + b \pm p \in D_f$, ezért

$$a\left(x \pm \frac{p}{|a|}\right) + b = ax + b \pm \frac{a}{|a|}p \in D_f,$$

ugyanis $a/|a| = \pm 1$ az a előjelétől függően. Továbbá

$$g\left(x + \frac{p}{|a|}\right) = cf\left(a\left(x + \frac{p}{|a|}\right) + b\right) + d = cf(ax \pm p + b) + d,$$

ahol a plusz jel választandó, ha $a > 0$, és a mínusz jel, ha $a < 0$. Az f függvény p szerinti periodikusságából adódóan $cf(ax \pm p + b) + d = cf(ax + b) + d = g(x)$, tehát valóban

$$g\left(x + \frac{p}{|a|}\right) = g(x).$$

Most lássuk be azt, hogy $p/|a|$ a legkisebb pozitív periódusa g-nek. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik olyan $0 < q < p/|a|$ valós szám, amely periódusa g-nek. Ekkor minden $x \in D_g$ esetén $g(x + q) = g(x)$, ebből következően $c \neq 0$ miatt

$$f(ax + aq + b) = f(ax + b).$$

Az $y = ax + b$ jelöléssel ez azt jelenti, hogy minden $y \in D_f$ esetén $f(y + aq) = f(y)$, azaz f-nek periódusa az aq szám, így $-aq$ is, tehát $|a|q$ szintén. Ez azonban a p-nél kisebb pozitív periódus lenne, ami lehetetlen. □

1.5. Nem összemérhető periódusok

Az 1.20. Tételben igazoltuk, hogy ha egy függvénynek van legkisebb pozitív periódusa, akkor bármely két periódusa np és mp alakú, ahol p a legkisebb pozitív periódus és n, m tetszőleges nem nulla egészek. Ekkor bármely két periódus hányadosa racionális.

1.25. Definíció. Két nem nulla valós szám *összemérhető*, ha hányadosuk racionális.

1.26. *Megjegyzés.* Mivel nem nulla számokról van szó, ezért a definícióban lényegtelen, hogy melyik számot osztjuk el melyikkel, a két hányados egyszerre racionális vagy irracionális.

A Dirichlet-függvénynek nincs legkisebb periódusa, mégis bármely két periódusa összemérhető egymással. Felmerülhet a kérdés, hogy van-e olyan nem konstans függvény, amelynek van két nem összemérhető periódusa? Például van-e olyan nem konstans függvény, amelynek az 1 és a $\sqrt{2}$ egyaránt periódusa? A válasz igen, de a függvény konstrukciója előtt néhány előkészületre van szükségünk.

Tekintsük a következő halmazt:

$$H := \{n + m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.7}$$

Világos, hogy a H-nak része az egész számok halmaza ($m = 0$ választással). Viszont van olyan valós szám, amelyik nem H-beli, például a $\sqrt{3}$. Ugyanis indirekt módon tegyük fel, hogy a $\sqrt{3}$ mégis eleme a H halmaznak, vagyis előáll a következő alakban:

$$\sqrt{3} = n + m\sqrt{2}, \tag{1.8}$$

ahol n, m egész számok, és $m \neq 0$, mert ekkor $\sqrt{3} = n$ adódna, ami nem lehetséges, hiszen $\sqrt{3}$ nem egész szám. Az (1.8) egyenlőséget négyzetre emelve, rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{3 - n^2 - 2m^2}{2n} = \sqrt{2},$$

ahol a bal oldalon egy racionális szám áll, a jobb oldalon pedig egy irracionális, melyek egyenlősége ellentmondás.

Vizsgáljuk most meg a H halmaz és az elemeinek néhány egyszerű tulajdonságát.

1.27. Állítás. *Ha egy szám előáll $n + m\sqrt{2}$ alakban, ahol n, m egészek, akkor ez az alak egyértelmű, vagyis $n_1 + m_1\sqrt{2} = n_2 + m_2\sqrt{2}$ (ahol n_1, n_2, m_1, m_2 egészek) pontosan akkor teljesül, ha $n_1 = n_2$ és $m_1 = m_2$.*

Bizonyítás. Ha $n_1 = n_2$ és $m_1 = m_2$, akkor nyilvánvalóan egyenlő a két alak.

A másik irányhoz legyen

$$n_1 + m_1\sqrt{2} = n_2 + m_2\sqrt{2}. \tag{1.9}$$

Ha $m_1 - m_2 \neq 0$ lenne, akkor

$$\frac{n_1 - n_2}{m_1 - m_2} = \sqrt{2},$$

ahol a bal oldalon egy racionális szám áll, a jobb oldalon pedig irracionális, ami ellentmondás. Szükségképpen tehát $m_1 = m_2$, de ekkor az (1.9) összefüggés alapján $n_1 = n_2$, amit bizonyítani akartunk. □

1.28. Állítás. *Az* (1.7) *összefüggéssel megadott H halmaz zárt az ellentettképzésre és az összeadásra nézve, azaz bármely H-beli elem ellentettje és bármely két H-beli elem összege H-beli.*

Bizonyítás. Minden $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ esetén

$$-(n_1 + m_1\sqrt{2}) = (-n_1) + (-m_1)\sqrt{2}$$

és

$$(n_1 + m_1\sqrt{2}) + (n_2 + m_2\sqrt{2}) = (n_1 + n_2) + (m_1 + m_2)\sqrt{2},$$

ahol $-n_1$, $-m_1$, $n_1 + n_2$ és $m_1 + m_2$ továbbra is egészek, ezért a H halmaz valóban zárt az ellentettképzésre és az összeadásra nézve. □

Az 1.28. Állítás alapján a H halmaz a valós számok additív csoportjának nem triviális részcsoportja.

Tekintsük ezek után a következő hozzárendelési szabállyal értelmezett $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in H, \\ 0, & \text{ha } x \notin H. \end{cases}$$

1.29. Állítás. *Az f függvénynek periódusa az 1 és a $\sqrt{2}$ is, sőt az $n + m\sqrt{2}$ alakú nem nulla számok is, ahol $n, m \in \mathbb{Z}$.*

Bizonyítás. Ez speciális esete az 1.17. Állításnak $G = H$ választással. □

1.30. *Megjegyzés.* A binomiális tétel alapján

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{2})^{n-k}(-1)^k,$$

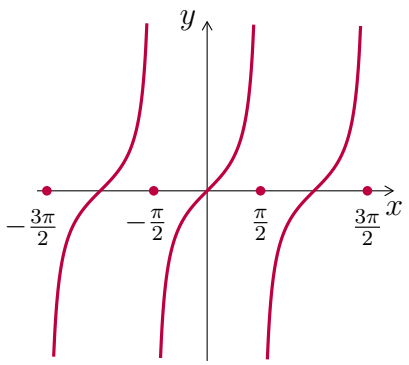
amely összegben minden tag egész vagy pedig $\sqrt{2}$ egész számú többszöröse, így az összeg előáll $n + m\sqrt{2}$ alakban, ahol n, m egész számok, tehát $(\sqrt{2} - 1)^n$ is periódusa az f függvénynek. Viszont $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ miatt $(\sqrt{2} - 1)^n \to 0$, ezért f pozitív periódusainak infimuma 0, vagyis az 1.20. Tétel alapján f periódusai sűrűn vannak a számegyenesen, így az 1.22. Állításból következően f sehol sem folytonos.

Belátható, hogy a H halmaz definíciójában a $\sqrt{2}$ helyett tetszőleges irracionális számot véve ugyancsak olyan függvényt kapunk, amelynek periódusai sűrűek $\mathbb{R}$-ben és vannak nem összemérhető periódusai. Ebben az esetben a sűrűség Kronecker tételén múlik, mely szerint ha b tetszőleges irracionális szám, akkor az $n + mb$ $(n, m \in \mathbb{Z})$ alakú számok sűrűn vannak a számegyenesen.

1.6. Folytonos és differenciálható függvények

Ebben a szakaszban először folytonos, majd differenciálható periodikus függvényekről fogalmazunk meg néhány fontos tulajdonságot.

1.31. Állítás. *Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus és mindenütt folytonos, akkor korlátos, sőt van maximuma és minimuma is.*



1.6. ábra. Az (1.10) hozzárendeléssel értelmezett f függvény grafikonja

Bizonyítás. Legyen az f függvény egy periódusa a $p > 0$ szám. Ekkor $f(0) = f(p)$, és a p szerinti periodikusság miatt az $f|_{[np,(n+1)p]}$ függvény értékkészlete megegyezik az $f|_{[0,p]}$ függvény értékkészletével, ahol n tetszőleges egész. Minthogy az $[np, (n+1)p]$ intervallumok uniója a valós számok halmaza, ezért f és $f|_{[0,p]}$ értékkészlete ugyanaz. A nem üres, korlátos, zárt $[0, p]$ halmazon értelmezett $f|_{[0,p]}$ függvénynek a Weierstrass-tétel alapján létezik maximuma és minimuma, tehát f-nek is van, ami egyúttal azt is jelenti, hogy f korlátos. □

1.32. *Megjegyzés.* Ha a folytonosságot nem tesszük fel, akkor egy periodikus függvény nem feltétlenül korlátos. Például tekintsük a következő függvényt, melynek grafikonja az 1.6. ábrán látható:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{ha } x \neq \pi/2 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ 0, & \text{ha } x = \pi/2 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases} \tag{1.10}$$

A tangensfüggvény jól ismert tulajdonságaiból adódóan az f függvény nem folytonos az $x = \pi/2 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ pontokban, továbbá periodikus π szerint, viszont nem korlátos.

A tangensfüggvény példája arra is felhívja a figyelmet, hogy az értelmezési tartomány is lényeges, hiszen a tangensfüggvény periodikus és az egész értelmezési tartományán folytonos, mégsem korlátos.

A törtrész-függvény példája mutatja, hogy ha egy periodikus függvény korlátos, akkor sem biztos, hogy van maximuma és minimuma. Hiszen a törtrész-függvény korlátos, periodikus, de nincs maximuma.

Folytonos periodikus függvények egy érdekes tulajdonságát fogalmazza meg a következő állítás.

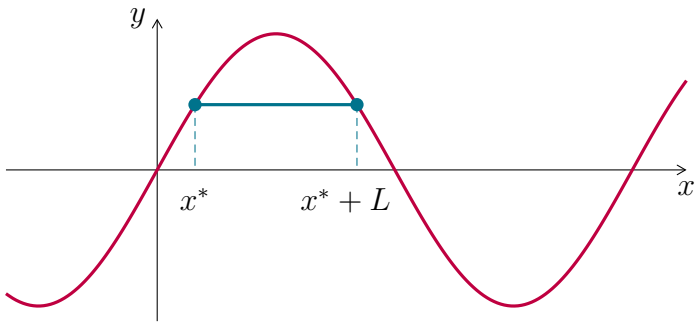
1.33. Állítás. *Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus és mindenütt folytonos, akkor a grafikonjának van tetszőleges hosszúságú vízszintes (azaz az x tengellyel párhuzamos) húrja.*

Bizonyítás. Legyen $L > 0$ és tekintsük a

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x + L) - f(x)$$

függvényt. Mivel f folytonos, ezért g is az. Továbbá f periodikus, így az 1.11. Állítás miatt g szintén periodikus. Ebből következően az 1.31. Állítás alapján f-nek van maximuma és minimuma, legyen egy maximumhelye $x_{\max}$, egy minimumhelye pedig $x_{\min}$. Ekkor

$$g(x_{\max}) = f(x_{\max} + L) - f(x_{\max}) \leq 0,$$
$$g(x_{\min}) = f(x_{\min} + L) - f(x_{\min}) \geq 0.$$



1.7. ábra. Periodikus függvény grafikonjának vízszintes húrja

Ebből következően a Bolzano-tétel szerint a g függvény felveszi a 0 értéket az $[x_{\min}, x_{\max}]$ (vagy $[x_{\max}, x_{\min}]$) intervallumon. Tehát van olyan x^* valós szám, hogy $g(x^*) = 0$, azaz $f(x^*+L) = f(x^*)$. Ez éppen azt jelenti, hogy az f grafikonjának x^* és x^*+L abszcisszájú pontjait összekötő vízszintes húr hossza L (lásd az 1.7. ábrán). □

1.34. *Megjegyzés.* Ha nem tesszük fel a folytonosságot, akkor egy periodikus függvény grafikonjának nem feltétlenül van tetszőleges hosszúságú vízszintes húrja. Például könnyen láthatóan a törtrész-függvény grafikonjának csak egész hosszúságú vízszintes húrjai vannak.

A differenciálhatóság és periodikusság kapcsolatáról szól a következő állítás.

1.35. Állítás. *Ha f periodikus és az értelmezési tartományán mindenütt differenciálható, akkor az f' deriváltfüggvény is periodikus.*

Bizonyítás. Legyen $p \neq 0$ valós szám az f függvény egy periódusa, ekkor minden $x \in D_f$ esetén $f(x+p) = f(x)$. Ebből következően $x_0 \in D_f$ pontot rögzítve az x_0 és $x_0 + p$ helyekhez tartozó különbségihányados-függvények megegyeznek:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x+p) - f(x_0+p)}{x+p-(x_0+p)}.$$

Az előző egyenlőségben az $x \to x_0$ határátmenet elvégzésével adódik, hogy

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x+p) - f(x_0+p)}{x+p-(x_0+p)} = f'(x_0+p).$$

Tehát az f' deriváltfüggvény szintén periodikus p szerint. □

Felmerül a kérdés, hogy visszafele igaz-e az állítás: ha egy függvény deriváltja periodikus, akkor az eredeti függvény is periodikus-e? A válasz nem, példaként tekintsük az $f(x) = x + \sin x$ függvényt (melynek grafikonját lásd az 1.8. ábrán). Az f függvény deriváltfüggvénye $f'(x) = 1 + \cos x$, amely nyilvánvalóan periodikus 2π szerint. Viszont az alábbi állítás mutatja, hogy f nem periodikus.

1.36. Állítás. *Az $f(x) = x + \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény nem periodikus.*

Az állításra három különböző bizonyítást adunk.

Az 1.36. Állítás 1. bizonyítása. Az f függvény folytonos, azonban nem korlátos, hiszen $f(x) \geq x - 1 \xrightarrow{x\to\infty} \infty$, így az 1.31. Állítás alapján nem periodikus. □

Az 1.36. Állítás 2. bizonyítása. Mivel $f'(x) = 1 + \cos x$, ezért $f' \geq 0$ és nincs olyan nem elfajuló intervallum, ahol $f' = 0$, így f szigorúan monoton növő, tehát minden függvényértéket pontosan egyszer vesz fel. □

Az 1.36. Állítás 3. bizonyítása. Indirekt módon tegyük fel, hogy a $p \neq 0$ valós szám periódusa az f függvénynek. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$x + p + \sin(x + p) = x + \sin x,$$

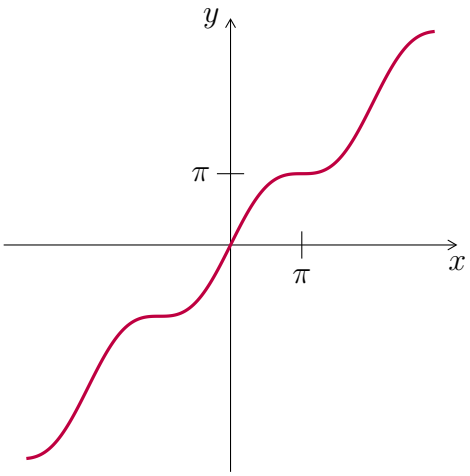
ahonnan

$$p + \sin(x + p) = \sin x.$$

Az előbbi egyenlőségbe rendre az $x = 0$ és $x = \pi$ értékeket helyettesítve és felhasználva a $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$ összefüggést adódik, hogy

$$p + \sin p = 0,$$
$$p - \sin p = 0.$$

Az előbbi két egyenlet összege alapján $p = 0$, ami ellentmondás. □



1.8. ábra. Az $f(x) = x + \sin x$ függvény grafikonja

2. fejezet

Összegfüggvények periódusai

Az 1. fejezetben az 1.11. Állításban igazoltuk, hogy ha két periodikus függvénynek van közös periódusa, akkor ez a közös érték a két függvény összegének is periódusa. Gyakori, hogy az előbbi észrevételből kiindulva a diákok egy része arra következtet, hogy bármely két periodikus függvény összege periodikus. Ám ez egy hibás gondolat, ugyanis két periodikus függvény összege nem feltétlenül periodikus. Ebben a fejezetben több olyan példát is látni fogunk erre, melyek középiskolai versenyeken is felbukkantak. Ezenkívül azt is megvizsgáljuk, hogy ha két periodikus függvény összege periodikus, akkor mi lehet az összegfüggvény legkisebb pozitív periódusa (ha egyáltalán van).

2.1. Nem összemérhető periódusú függvények összege

Ebben a szakaszban arra mutatunk példát, hogy ha két periodikus függvény legkisebb pozitív periódusa nem összemérhető, akkor a két függvény összege lehet nem periodikus és lehet periodikus is.

2.1.1. Amikor az összeg nem periodikus

A 2000/2001-es tanévben az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen (OKTV) matematikából a nem speciális tanterv szerint haladó gimnazisták kategóriájának 2. fordulójában tűzték ki a következő feladatot.

2.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan n pozitív egész, amelyre a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \cos x + \cos\left(x\sqrt{n^2+1}\right)$$

függvény periodikus.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $x = 0$ esetén $f(0) = 2$. Megmutatjuk, hogy f máshol nem veszi fel ezt az értéket, így nem lehet periodikus. Mivel a cos függvény minden értéke legfeljebb 1, ezért csak olyan x-re lehet $f(x) = 2$, melyre

$$\cos x = 1 \quad \text{és} \quad \cos\left(x\sqrt{n^2+1}\right) = 1,$$

ahonnan az adódik, hogy

$$x = k2\pi \quad \text{és} \quad x\sqrt{n^2+1} = \ell 2\pi \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}).$$

Belátjuk, hogy az iménti egyenlőségek csak $x = 0$ esetén állhatnak fenn egyszerre. Ha ugyanis $x \neq 0$, akkor az előző egyenlőségek hányadosát véve:

$$\sqrt{n^2+1} = \frac{\ell}{k},$$

tehát $\sqrt{n^2+1}$ szükségképpen racionális. Ez viszont a következő lemma alapján nem lehetséges. Végeredményben tehát $x = 0$, így f csak a 0 pontban veszi fel a 2 értéket. □

2.2. Lemma. *Ha n nem nulla egész szám, akkor $\sqrt{n^2+1}$ irracionális.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\sqrt{n^2+1}$ racionális. Ekkor léteznek ℓ, k egymáshoz relatív prím, pozitív egész számok, hogy $\sqrt{n^2+1} = \ell/k$. Ebből négyzetre emeléssel $n^2+1 = \ell^2/k^2$ adódik, ahol a bal oldal egész szám, így szükségképpen a jobb oldal is az, tehát k^2 osztója ℓ^2-nek. De ekkor k osztója ℓ-nek, ami ℓ és k relatív prím volta miatt csak úgy lehetséges, hogy $k = 1$. Következésképpen $\sqrt{n^2+1}$ egész szám, ami viszont lehetetlen, hiszen $n \neq 0$ esetén két egymás utáni egész szám közé esik:

$$|n| = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2|n|+1} < \sqrt{(|n|+1)^2} = |n|+1.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát $\sqrt{n^2+1}$ irracionális szám. □

Vegyük észre, hogy a 2.1. Feladat megoldásának okoskodása lényegében azon múlt, hogy a $\cos x$ és $\cos\left(x\sqrt{n^2+1}\right)$ függvények legkisebb pozitív periódusai az 1.24. Állítás alapján rendre 2π és $2\pi/\sqrt{n^2+1}$, amelyek nem összemérhetők, továbbá mindkét függvénynek a maximumhelyei éppen a legkisebb pozitív periódus egész számú többszörösei. Ez az ötlet egy általános tételben is megfogalmazható a [9] cikk nyomán.

2.3. Tétel (Caveny és Caveny, 1982)**.** *Legyenek $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus függvények, melyek legkisebb pozitív periódusai rendre p és q. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$f(0) > f(x) \quad \big(x \in (0,p)\big),$$
$$g(0) > g(x) \quad \big(x \in (0,q)\big).$$

Ha az $f+g$ függvény periodikus, akkor p és q összemérhető (más szóval, ha p és q nem összemérhetők, akkor $f+g$ nem periodikus).

Bizonyítás. Mindenekelőtt gondoljuk meg, hogy a feltételekből adódóan az f és g függvényeknek rendre az np és nq ($n \in \mathbb{Z}$) pontok adják a maximumhelyeit. Valóban, például az f esetében a p szerinti periodikussága miatt $f(np) = f(0)$, valamint ha $np < x < (n+1)p$, akkor $0 < x - np < p$, és így

$$f(x) = f(x-np) < f(0).$$

A g esete teljesen hasonló. Tegyük fel ezek után, hogy az $f+g$ függvény periodikus, és legyen r egy pozitív periódusa. Ekkor

$$f(r) + g(r) = (f+g)(r) = (f+g)(0) = f(0) + g(0).$$

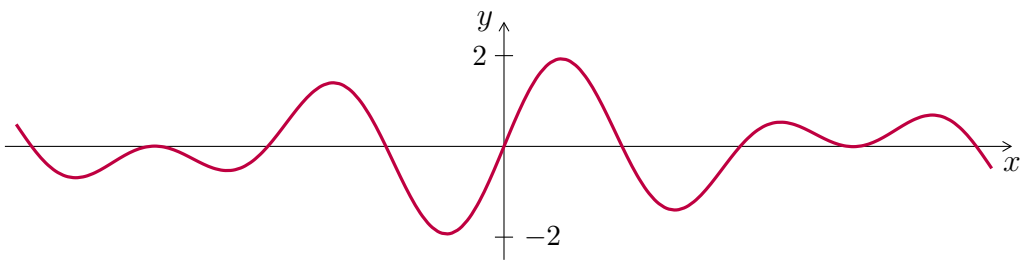
Mivel azonban $f(r) \leq f(0)$ és $g(r) \leq g(0)$, ezért az előbbi egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $f(r) = f(0)$ és $g(r) = g(0)$. Minthogy az f és g függvényeknek a maximumhelyei a legkisebb pozitív periódusaik egész számszorosaiban vannak, ezért szükségképpen $r = np$ és $r = mq$, ahol n, m nem nulla egész számok. Ekkor viszont $np = mq$, vagyis $p/q = n/m$, tehát p és q összemérhetők. □

A 2.1. Feladathoz hasonló feladatot tűztek ki az 1968/1969-es tanévi matematika OKTV-n az általános tanterv szerint tanuló gimnazisták kategóriájának 2. (döntő) fordulójában.

2.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$$

függvény nem periodikus.



2.1. ábra. Az $f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2})$ függvény grafikonjának egy szelete

A 2.1. Feladat megoldásában alkalmazott ötlet sajnos most az f függvényre nem működik közvetlenül, de a deriváltjára viszont igen.

A 2.4. Feladat 1. megoldása. Világos, hogy az f függvény mindenütt differenciálható. Ha f periodikus lenne valamely $p \neq 0$ szám szerint, akkor az 1.35. Állítás alapján az f' deriváltfüggvény is periodikus volna. Az f függvény deriváltja:

$$f'(x) = \cos x + \sqrt{2}\cos(x\sqrt{2}),$$

amely (a 2.1. Feladat megoldásának mintájára láthatóan) csak az $x = 0$ pontban veszi fel az $1+\sqrt{2}$ értéket, így nem lehet periodikus. Ennélfogva f sem lehet periodikus. □

Érdemes megnéznünk az OKTV feladat [5] könyvben olvasható hivatalos megoldását, amely ügyes helyettesítéseken alapul.

A 2.4. Feladat 2. megoldása. Indirekt módon tegyük fel, hogy f periodikus, vagyis létezik $p \neq 0$ szám, melyre minden $x \in D_f$ esetén $f(x) = f(x+p)$, azaz

$$\sin x + \sin(x\sqrt{2}) = \sin(x+p) + \sin\big((x+p)\sqrt{2}\big). \tag{2.1}$$

A $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ addíciós tétel alkalmazásával adódik, hogy

$$\sin x + \sin(x\sqrt{2}) = \sin x\cos p + \cos x\sin p + \sin(x\sqrt{2})\cos(p\sqrt{2}) + \cos(x\sqrt{2})\sin(p\sqrt{2}).$$

Ebbe az egyenletbe rendre $x = 0, \pi/2$ és $-\pi/2$ értékeket helyettesítve kapjuk, hogy

$$0 = \sin p + \sin(p\sqrt{2}), \tag{2.2}$$

$$1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right) = \cos p + \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right)\cos(p\sqrt{2}) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right)\sin(p\sqrt{2}), \tag{2.3}$$

$$-1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right) = -\cos p - \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right)\cos(p\sqrt{2}) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right)\sin(p\sqrt{2}), \tag{2.4}$$

ahonnan a (2.3) és a (2.4) egyenlőségek összegét véve adódik, hogy

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right)\sin(p\sqrt{2}) = 0.$$

Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, de mivel $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}\sqrt{2} < \pi$ miatt $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{2}\right) \neq 0$, ezért szükségképpen $\sin(p\sqrt{2}) = 0$. Ebből az következik, hogy $p\sqrt{2} = n\pi$, ahol n egész szám, amely nem lehet nulla, hiszen p periódus. Ezt az összefüggést a (2.2) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $\sin p = 0$, vagyis $p = m\pi$ valamely m nem nulla egész szám esetén. Ekkor viszont $p\sqrt{2}$ és p hányadosa, $\sqrt{2}$, az n/m racionális szám, ami ellentmondás, hiszen $\sqrt{2}$ irracionális. Ez mutatja, hogy az indirekt feltevésünk hamis volt, f nem periodikus.

□

A 2.4. Feladat 1992 szeptemberében a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (KöMaL) folyóiratban is ki lett tűzve F. 2914. sorszámmal. A feladathoz két megoldás jelent meg az 1993. márciusi számban, amelyek közül az egyik az f függvény zérushelyeinek vizsgálatán alapul (a másik a korábban már bemutatott, deriválást használó okoskodás), az alábbiakban ezt ismertetjük.

A 2.4. Feladat 3. megoldása. Az f függvény hozzárendelési szabályát átalakíthatjuk a $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$ trigonometrikus azonosság alapján:

$$f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2}) = 2\sin\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}x\right).$$

Mivel egy szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, ezért az előző egyenlőség alapján a függvénynek pontosan azon x helyeken vannak zérushelyei, melyekre

$$\frac{\sqrt{2}+1}{2}x = k\pi \quad \text{vagy} \quad \frac{\sqrt{2}-1}{2}x = \frac{\pi}{2} + \ell\pi,$$

azaz f zérushelyei:

$$x_k = \frac{k2\pi}{\sqrt{2}+1} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{és} \quad \tilde{x}_\ell = \frac{(2\ell+1)\pi}{\sqrt{2}-1} \quad (\ell \in \mathbb{Z}).$$

Vegyük észre, hogy (x_k) egy $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}+1}$ differenciájú, $(\tilde{x}_\ell)$ pedig egy $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}-1}$ differenciájú végtelen számtani sorozat; az f zérushelyeit tehát e két sorozat tagjai szolgáltatják. Indirekt módon tegyük fel, hogy f periodikus és a $p > 0$ szám egy periódusa. Ekkor a $[0, p)$ intervallumban az (x_k) és $(\tilde{x}_\ell)$ nem konstans számtani sorozatoknak csak véges sok tagja van, így f-nek is csak véges sok zérushelye. Minden x esetén $[x/p]\,p$ (ahol $[x/p]$ az x/p szám egész részét jelöli) vagy nulla, vagy p-nek nem nulla egész számszorosa, ezért ez utóbbi esetben az 1.15. Állítás alapján maga is periódus. Így minden x zérushely esetén az $x - [x/p]\,p$ szám is zérushelye a függvénynek, amelyre az egész rész

$$\frac{x}{p} - 1 < \left[\frac{x}{p}\right] \leq \frac{x}{p}$$

tulajdonsága miatt teljesül, hogy

$$0 \le x - \left[\frac{x}{p}\right] p < p. \tag{2.5}$$

Tehát az f minden zérushelyéhez a p megfelelő egész számszorosának levonásával egyértelműen hozzárendelhetünk egy zérushelyet a $[0, p)$ intervallumból. Mivel a $\dfrac{k2\pi}{\sqrt{2}+1}$ alakú zérushelyekből végtelen sok van, ezért biztosan található közöttük legalább két különböző, melyekhez a (2.5) összefüggés alapján rendelt $[0, p)$ intervallumba eső zérushelyek megegyeznek. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan k_1, k_2 egész számok, amelyekre a $\dfrac{k_1 2\pi}{\sqrt{2}+1}$ és $\dfrac{k_2 2\pi}{\sqrt{2}+1}$ számok különbsége a p nem nulla egész számú többszöröse, tehát

$$\frac{k_1 2\pi}{\sqrt{2}+1} - \frac{k_2 2\pi}{\sqrt{2}+1} = mp \quad (m \neq 0). \tag{2.6}$$

Hasonlóan, a $\dfrac{(2\ell+1)\pi}{\sqrt{2}-1}$ alakú zérushelyekből is végtelen sok van, így vannak olyan ℓ_1, ℓ_2 és $n \neq 0$ egész számok, hogy

$$\frac{(2\ell_1+1)\pi}{\sqrt{2}-1} - \frac{(2\ell_2+1)\pi}{\sqrt{2}-1} = np. \tag{2.7}$$

Ekkor a (2.6) és a (2.7) egyenletek hányadosát véve

$$\frac{k_1 - k_2}{\ell_1 - \ell_2} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{m}{n},$$

ahonnan rendezéssel adódik, hogy

$$\frac{(k_1 - k_2)n}{(\ell_1 - \ell_2)m} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2},$$

ami ellentmondás, hiszen a bal oldalon álló szám racionális, míg a jobb oldal irracionális (ugyanis egy racionális és egy irracionális szám összege, amely az 1.9. Lemma szerint irracionális). □

A 2.4. Feladat a 11. osztályos Sokszínű matematika tankönyv feladatgyűjteményében 3537. sorszámmal szerepel. Az ott közölt megoldás kissé tömör, az alábbiakban ezt ismertetjük, a részleteket teljesen kifejtve.

A 2.4. Feladat 4. megoldása. Újfent indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy f periodikus $p > 0$ szerint. Ekkor minden $x \in D_f$ esetén $f(x+p) = f(x)$, tehát

$$0 = f(x+p) - f(x) = \sin(x+p) + \sin(x\sqrt{2} + p\sqrt{2}) - \sin x - \sin(x\sqrt{2}).$$

A jobb oldalon a $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ azonosságot alkalmazva:

$$0 = 2\sin\frac{p}{2}\cos\left(x + \frac{p}{2}\right) + 2\sin\frac{p\sqrt{2}}{2}\cos\left(x\sqrt{2} + \frac{p\sqrt{2}}{2}\right).$$

Az előbbi egyenletbe az $x = -\frac{p}{2}$ és $x = 2\pi - \frac{p}{2}$ értékeket helyettesítve kapjuk, hogy

$$0 = 2\sin\frac{p}{2} + 2\sin\frac{p\sqrt{2}}{2}, \tag{2.8}$$
$$0 = 2\sin\frac{p}{2} + 2\sin\frac{p\sqrt{2}}{2}\cos(2\pi\sqrt{2}).$$

Az első egyenletből a másodikat kivonva:

$$0 = 2\sin\frac{p\sqrt{2}}{2}\left(1 - \cos(2\pi\sqrt{2})\right).$$

Mivel $1 - \cos(2\pi\sqrt{2}) \neq 0$, ezért szükségképpen $\sin\frac{p\sqrt{2}}{2} = 0$, és így a (2.8) egyenlet alapján $\sin\frac{p}{2} = 0$. Tehát valamely $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ esetén $\frac{p}{2} = n\pi$ és $\frac{p\sqrt{2}}{2} = m\pi$, ahonnan következik, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

ami ellentmondás.

□

A 2.4. Feladat egy általánosítása 1991-ben a tanárképző főiskolák Péter Rózsa Matematikai Versenyén szerepelt (a [31] könyvben olvasható megoldás az előbbiekben tárgyalt 4. megoldás általános változata, de bizonyos részletek nincsenek kifejtve).

2.5. Feladat. Döntsük el, hogy periodikus-e a következő függvény:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x + \sin ax, \quad a \notin \mathbb{Q}.$$

Az előzőekben ismertetett okoskodásokhoz hasonlóan igazolható, hogy a feladatban szereplő f függvény nem periodikus.

2.1.2. Amikor az összeg periodikus

Az előző szakaszbeli példák alapján hajlamosak lehetünk azt gondolni, hogy ha két függvény legkisebb pozitív periódusa egymással nem összemérhető, akkor a két függvény összege nem periodikus. Ez azonban téves elképzelés. A következőkben a [9] cikket követve megadunk olyan periodikus $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyeknek van legkisebb pozitív periódusuk, ezek nem összemérhetők, azonban $f+g$ mégis periodikus. A konstrukcióban szereplő f, g és $f + g$ függvények legkisebb pozitív periódusa rendre $1, \sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$. Ilyen függvények megadásához szükségünk van egy kis előkészületre.

Tekintsük a következő halmazt:

$$H = \left\{ n + m\sqrt{2} + k\sqrt{3} \mid n, m, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

amely az 1.5. szakaszban szereplő (1.7) halmaznak az általánosítása. Világos, hogy H tartalmazza az egész számok halmazát, sőt az (1.7) halmazt is. Vizsgáljuk meg a H halmaz néhány tulajdonságát.

2.6. Állítás. *Ha egy valós szám előáll $n+m\sqrt{2}+k\sqrt{3}$ alakban valamely n, m, k egészek esetén, akkor ez az alak egyértelmű, vagyis*

$$n_1 + m_1\sqrt{2} + k_1\sqrt{3} = n_2 + m_2\sqrt{2} + k_2\sqrt{3} \quad (n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

pontosan akkor teljesül, ha $n_1 = n_2$, $m_1 = m_2$ és $k_1 = k_2$.

2.7. Állítás. *A H halmaz zárt az összeadásra, valamint ellentettképzésre.*

Az előbbi két állítás bizonyítása az 1.27. és az 1.28. Állításokéhoz hasonló, ezért mellőzzük.

Mindezek alapján H a valós számok additív csoportjának nem triviális részcsoportja, így az 1.18. Lemma szerint minden $x \in H$ és $y \notin H$ esetén $x + y \notin H$. Ezt a tulajdonságot hamarosan többször is használni fogjuk.

Ezek után a [9] cikk nyomán készen állunk az f és g függvények konstrukciójára.

2.8. Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-|m|} - 2^{-|k|}, & \text{ha } x \in H \text{ és } x = n + m\sqrt{2} + k\sqrt{3}, \\ 0, & \text{ha } x \notin H \end{cases}$$

és

$$g(x) = \begin{cases} 2^{-|k|} - 2^{-|n|}, & \text{ha } x \in H \text{ és } x = n + m\sqrt{2} + k\sqrt{3}, \\ 0, & \text{ha } x \notin H. \end{cases}$$

Mivel a 2.6. Állítás szerint $x \in H$ esetén az $x = n + m\sqrt{2} + k\sqrt{3}$ előállítás egyértelmű, ezért az f és g függvények jól definiáltak. Ekkor világos módon:

$$h(x) = (f+g)(x) = \begin{cases} 2^{-|m|} - 2^{-|n|}, & \text{ha } x \in H \text{ és } x = n + m\sqrt{2} + k\sqrt{3}, \\ 0, & \text{ha } x \notin H. \end{cases}$$

2.9. Állítás. *A 2.8. Példában értelmezett f, g és $f+g$ függvények periodikusak, legkisebb pozitív periódusaik rendre $1, \sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$.*

Bizonyítás. A függvények hasonló jellege miatt elegendő azt belátnunk, hogy az f függvény legkisebb pozitív periódusa az 1. Az 1 eleme a H halmaznak, hiszen $n = 1$, $m = k = 0$ választással előáll $n + m\sqrt{2} + k\sqrt{3}$ alakban. Így az 1.18. Lemma alapján, ha $x \notin H$, akkor $x + 1 \notin H$, ennélfogva $f(x + 1) = f(x) = 0$; ha pedig $x \in H$, vagyis $x = n + m\sqrt{2} + k\sqrt{3}$ $(n, m, k \in \mathbb{Z})$, akkor $x + 1 \in H$ és $x + 1 = (n + 1) + m\sqrt{2} + k\sqrt{3}$, ezért

$$f(x + 1) = 2^{-|m|} - 2^{-|k|} = f(x).$$

Így minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + 1) = f(x)$, tehát az 1 valóban periódusa f-nek.

Most belátjuk, hogy az 1 az f legkisebb pozitív periódusa. Tegyük fel, hogy f periodikus a $p \neq 0$ valós szám szerint. Ekkor $p \in H$, különben $\sqrt{2} \in H$ miatt $\sqrt{2} + p$ nem volna H-beli, ezért $f(\sqrt{2} + p) = 0 \neq 1/2 = f(\sqrt{2})$ lenne. Tehát p benne van a H halmazban, vagyis léteznek a, b, c egészek, melyekre $p = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$. Az $f(x + p) = f(x)$ összefüggésben az $x = m\sqrt{2}$ $(m \in \mathbb{Z})$ választással

$$2^{-|m+b|} - 2^{-|c|} = 2^{-|m|} - 2^0. \tag{2.9}$$

Ebből az $m \to \infty$ határátmenettel az adódik, hogy $-2^{-|c|} = -2^0$, ahonnan $c = 0$ következik. Ezt a (2.9) egyenletben felhasználva kapjuk, hogy $2^{-|m+b|} = 2^{-|m|}$, ahol $m = 0$ választással b szükségképpen nulla. Mindezek alapján $p = a \in \mathbb{Z}$, tehát az f függvény legkisebb pozitív periódusa $a = 1$ választással valóban az 1. □

Ezzel a konstrukcióval egyben megválaszoltuk a következő, a KöMaL-ban 2018 májusában B. 4964. számmal kitűzött feladatot is.

2.10. Feladat. Igaz-e, hogy ha az $f, g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ függvények periodikusak, és az $f+g$ függvény is periodikus, akkor van közös periódusuk?

Megoldás. A kérdésre a válasz nemleges. A 2.8. Példában szereplő f, g és $f+g$ függvények periódusai a legkisebb pozitív periódusaik nem nulla egész számszorosai, tehát rendre az $n, m\sqrt{2}$ és $k\sqrt{3}$ alakú számok, ahol n, m, k nem nulla egészek. Ezek között nincsenek egyenlők, hiszen n egész, $m\sqrt{2}$ és $k\sqrt{3}$ irracionális, továbbá $m\sqrt{2} = k\sqrt{3}$ sem lehetséges (ennek igazolása ugyanúgy történhet, mint a $\sqrt{2}$ irracionalitásának klasszikus bizonyítása). A 2.8. Példabeli f, g függvények majdnem megfelelőek a KöMaL feladatban is, azonban az értékeik nem a $[0,1]$ intervallumba esnek, hanem a $0 \le 2^{-|y|} \le 1$ egyenlőség alapján a $[-1,1]$ intervallumba. Ekkor az $\tilde{f} = (f+1)/2$ és $\tilde{g} = (g+1)/2$ függvények már a $[0,1]$ intervallumra képeznek és az $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{f}+\tilde{g}$ függvényeknek továbbra sincsen közös periódusuk, hiszen a periódusaik rendre az $f, g, f+g$ függvények periódusaival egyeznek meg. □

A 2.8. Példa összetettsége nem véletlen, ugyanis a következő tétel mutatja, hogy ha két periodikus függvény legkisebb pozitív periódusa nem összemérhető, akkor az összegfüggvény csak úgy lehet periodikus, ha a két függvény közül legalább az egyik nem folytonos.

2.11. Tétel (Caveny és Caveny, 1982)**.** *Legyenek $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus függvények, amelyek közül legalább az egyik mindenütt folytonos. Ha az $f+g$ függvény periodikus, akkor f és g legkisebb pozitív periódusai összemérhetők.*

Bizonyítás. Legyen az f, g és $f+g$ függvények legkisebb pozitív periódusa rendre p, q és r. Minthogy f és g szerepe szimmetrikus, ezért feltehető, hogy f mindenütt folytonos. Mivel $f+g$ periódusa r, így

$$f(x+r) + g(x+r) = (f+g)(x+r) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahonnan

$$f(x+r) - f(x) = g(x) - g(x+r) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.10}$$

Tekintsük most a $h(x) = f(x+r) - f(x)$ függvényt, amely f folytonossága miatt folytonos. Az f függvény p szerinti periodikusságából adódóan az 1.11. Állítás alapján h szintén periodikus p szerint, továbbá a (2.10) összefüggés és a g függvény q szerinti periodikussága folytán h periodikus q szerint is. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset. Ha a h függvénynek van legkisebb pozitív periódusa, jelölje ezt t, akkor az 1.20. Tétel szerint minden periódusa a t nem nulla egész számszorosa, vagyis

$$p = nt \quad \text{és} \quad q = mt \quad (n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}),$$

ahonnan azonnal adódik, hogy $p/q = n/m$, tehát f és g legkisebb pozitív periódusai összemérhetők.

2. eset. Ha a h függvénynek nincs legkisebb pozitív periódusa, akkor a folytonosságának felhasználásával az 1.22. Állítás alapján következik, hogy konstansfüggvény. Ez azt jelenti, hogy valamely $c \in \mathbb{R}$ számra

$$h(x) = f(x+r) - f(x) = c \quad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz $f(x+r) = f(x) + c$, ahonnan teljes indukcióval nyerjük tetszőleges n pozitív egész szám esetén, hogy $f(x+nr) = f(x) + nc$. Ha $c \neq 0$ lenne, akkor $(f(x) + nc)$ nem korlátos sorozat, így az $f(x+n)$ függvényértékek sorozata sem korlátos. Mivel azonban az 1.31. Állításból kifolyólag folytonos periodikus függvény korlátos, ezért szükségképpen $c = 0$. Tehát minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+r) = f(x)$ és a (2.10) összefüggés alapján $g(x+r) = g(x)$. Ez azt jelenti, hogy f-nek és g-nek is periódusa az r, és ekkor r a legkisebb pozitív periódusnak nem nulla egész számszorosa: $r = kp$, $r = mq$. Innen $p/q = k/m$, vagyis p és q valóban összemérhetők. □

2.2. Összemérhető periódusú függvények összege

Az 1.11. Állításban láttuk, hogy ha két függvény mindegyike periodikus a $p \neq 0$ valós szám szerint, akkor p az összegüknek is periódusa.

2.12. Következmény. Ha az f függvénynek van olyan p periódusa, továbbá a g függvénynek olyan q periódusa, hogy p és q összemérhetők, akkor az $f + g$ összegfüggvény is periodikus, és minden olyan szám periódusa, amely p-nek és q-nak egyaránt egész számszorosa.

Bizonyítás. Ha egy r szám egész számú többszöröse p-nek és q-nak is, akkor az 1.15. Állítás alapján r periódusa f-nek és g-nek is, így az 1.11. Állításból következően az $(f + g)$-nek is. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ha p és q összemérhetők, akkor létezik olyan valós szám, amely egyaránt egész számszorosa p-nek és q-nak is. Mivel p és q összemérhetők, ezért vannak olyan n, m nem nulla egész számok, melyekre

$$\frac{p}{q} = \frac{n}{m},$$

ahonnan beszorzással adódik, hogy

$$mp = nq.$$

Vagyis az $r = mp = nq$ olyan valós szám, amely egyaránt periódusa f-nek és g-nek. □

Tegyük fel, hogy az f és g periodikus függvényeknek van legkisebb pozitív periódusa, amelyek ráadásul összemérhetők. Felmerül a kérdés, hogy ekkor mi az összegfüggvényük legkisebb pozitív periódusa. Az $f+g$ függvénynek minden olyan pozitív szám periódusa, amely f és g legkisebb pozitív periódusának egyaránt egész számszorosa. Ilyen szám az összemérhetőség miatt létezik, és ezek között van legkisebb is.

2.13. Definíció. Legyen a és b két összemérhető pozitív valós szám. Ekkor a és b *legkisebb közös többszöröse* az a legkisebb pozitív valós szám, amely a-nak és b-nek egyaránt egész számszorosa.

Első látásra természetesen adódó gondolat, hogy az összemérhető legkisebb pozitív periódusú f és g függvények összegének legkisebb pozitív periódusa az f és g függvények legkisebb pozitív periódusainak legkisebb közös többszöröse. Azonban általában ez nem igaz, amit a következő példákon szemléltetünk.

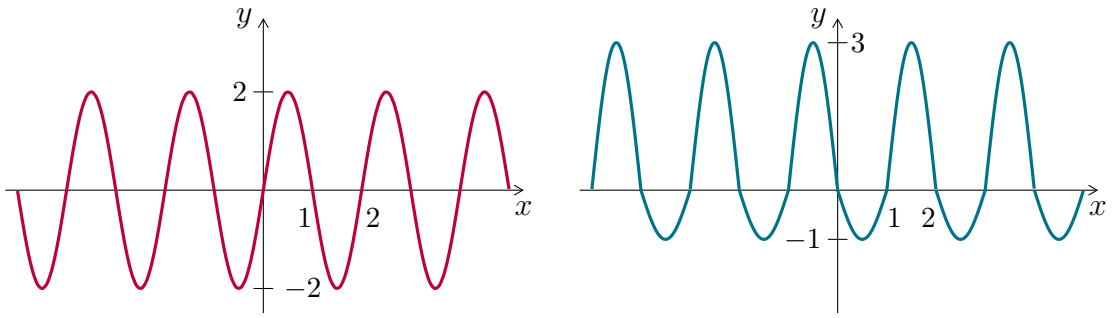
2.14. Példa. Értelmezzük az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket a következő hozzárendelési szabályokkal:

$$f(x) = 2\sin(\pi x) \tag{2.11}$$

és

$$g(x) = \begin{cases} -\sin(\pi x), & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ -3\sin(\pi x), & \text{ha } 1 < x < 2, \\ g(x-2), & \text{ha } x \ge 2, \\ g(x+2), & \text{ha } x < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

A g függvény definíciójában az utolsó két sor azt jelenti, hogy a $[2n, 2(n+1))$ $(n \in \mathbb{Z})$ intervallumokon g egyezzen meg a $[0, 2)$ intervallumra való leszűkítésével, így g-nek periódusa a 2. Az f és g függvények grafikonjának vázlata a 2.2. ábrán látható.



(a) A (2.11) függvény grafikonja (b) A (2.12) függvény grafikonja

2.2. ábra. A (2.11) és a (2.12) függvények grafikonja

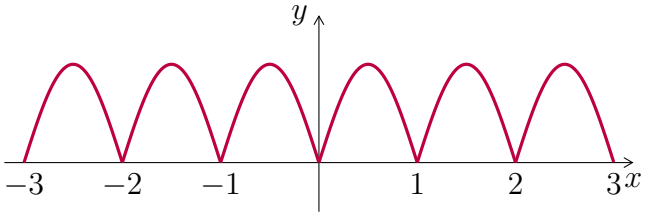
Ekkor az 1.24. Állítás miatt az f függvény legkisebb pozitív periódusa $2\pi/\pi = 2$. A g függvény a definíciójából adódóan 2 szerint periodikus, továbbá ennél kisebb periódusa nincs, mivel a $[0, 2)$ intervallumon pontosan egyszer veszi fel a -1 értéket, mégpedig az $x = 1/2$ helyen. Valóban, az $(1, 2)$ intervallumon $g(x) \ge 0$, a $[0, 1]$ intervallumon pedig $-\sin(\pi x) \ge -1$, és egyenlőség pontosan akkor lehetséges, ha $\sin(\pi x) = 1$, tehát $\pi x = \pi/2$. Most tekintsük az f és g összegfüggvényét:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & \text{ha } 2n \le x \le 2n+1 \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ -\sin(\pi x), & \text{ha } 2n+1 < x < 2n+2 \quad (n \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

azaz

$$(f+g)(x) = |\sin(\pi x)|\,,$$

melynek grafikonja a 2.3. ábrán látható.

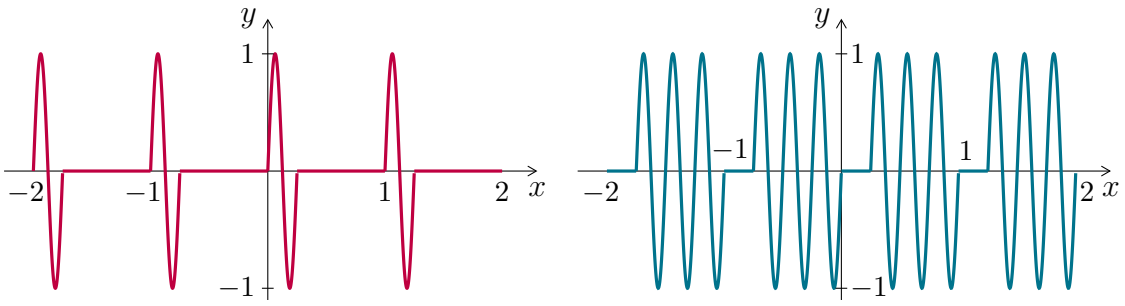


2.3. ábra. A (2.11) és a (2.12) függvények összegfüggvényének grafikonja

Ennek a függvénynek a legkisebb pozitív periódusa 1, hiszen egyrészt

$$|\sin(\pi(x+1))| = |\sin(\pi x + \pi)| = |-\sin(\pi x)| = |\sin(\pi x)|\,,$$

másrészt a függvény a nulla értéket csakis az egész számokban veszi fel, ezért 1-nél kisebb pozitív periódusa nem lehet.



(a) Az f függvény grafikonja (b) A g függvény grafikonja

2.4. ábra. A 2.15. Példában szereplő f és g függvények grafikonja

Olyan példát is konstruálhatunk, amelyben az f és g függvények legkisebb pozitív periódusának értéke rögzített, de az összegfüggvény legkisebb pozitív periódusa tetszőlegesen kicsi szám lehet (a függvények grafikonjai a 2.4. ábrán láthatók).

2.15. Példa. Legyen rögzített N pozitív egész szám esetén az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2N\pi x), & \text{ha } 0 \le x \le \dfrac{1}{N}, \\ 0, & \text{ha } \dfrac{1}{N} < x < 1, \\ f(x-1), & \text{ha } x \ge 1, \\ f(x+1), & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le x \le \dfrac{1}{N}, \\ \sin(2N\pi x), & \text{ha } \dfrac{1}{N} < x < 1, \\ g(x-1), & \text{ha } x \ge 1, \\ g(x+1), & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Ekkor az f és g függvények a definíciójuk utolsó két sorában szereplő feltételek miatt periodikusak 1 szerint. Az f függvénynek nincs 1-nél kisebb pozitív periódusa, hiszen a $[0, 1)$ intervallumon pontosan egyszer veszi fel az 1-et értékként, mégpedig az $x = 1/(4N)$ helyen. A g függvénynek hasonló módon nincs 1-nél kisebb pozitív periódusa, mert az $(1/N, 1)$ intervallumon az 1 értéket a $\dfrac{1}{4N} + \dfrac{k}{N}$ alakú helyeken veszi fel (ahol $k = 1, 2, \ldots, N-1$ egész), viszont

$$g\left(\frac{1}{4N}\right) = 0 \neq 1 = g\left(\frac{1}{4N} + \frac{k}{N}\right),$$

így g-nek szintén 1 a legkisebb pozitív periódusa. Viszont f és g összegfüggvénye:

$$(f+g)(x) = \sin(2N\pi x),$$

melynek legkisebb pozitív periódusa az 1.24. Állítás alapján $\dfrac{1}{N}$.

Az is lehetséges, hogy annak ellenére, hogy valamely f és g függvényeknek van legkisebb pozitív periódusa, az összegüknek nincs. Nyilvánvaló példa, ha az f periodikus függvényhez az ellentettjét adjuk hozzá. Ha ugyanis az f legkisebb pozitív periódusa a p valós szám, akkor az 1.11. Állítás alapján $(-f)$ is periodikus, sőt az 1.24. Állítás szerint az f és $(-f)$ függvények legkisebb pozitív periódusai megegyeznek, így $(-f)$ legkisebb pozitív periódusa szintén a p valós szám. Ekkor az f és $(-f)$ függvények összege a konstans nulla függvény, melyről az 1.4. Pédában láttuk, hogy nincs legkisebb periódusa. Most következzen egy kevésbé triviális példa.

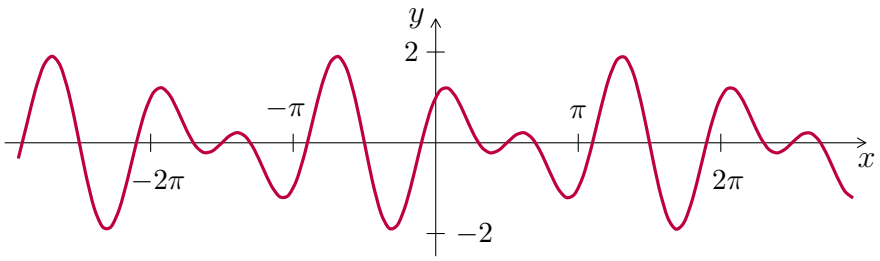
2.16. Példa. Tekintsük a következő hozzárendelési szabállyal adott $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \text{és} \qquad g(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Az f függvényről az 1.23. Példában láttuk, hogy az 1 a legkisebb pozitív periódusa, és ehhez hasonlóan igazolható, hogy g-nek is az 1 a legkisebb pozitív periódusa. Viszont az f és g összegfüggvénye a Dirichlet-függvény, melyről az 1.8. Példában igazoltuk, hogy nincs legkisebb pozitív periódusa.

Ennyi ellenpélda után most egy speciális függvénycsaládban, a trigonometrikus függvények körében vizsgáljuk az összegfüggvény legkisebb pozitív periódusának kérdését. Ehhez kiindulási feladatunk a Sokszínű matematika tankönyvcsalád „Az analízis elemei” című kötetének 72. oldalán található 7. feladat. (A feladat a [14] példatárban is ki van tűzve 3.99. sorszámmal.)

2.17. Feladat. Határozzuk meg a $\sin 2x + \cos 3x$ függvény legkisebb pozitív periódusát!



2.5. ábra. Az $x \mapsto \sin 2x + \cos 3x$ függvény grafikonja

Mielőtt megoldanánk a feladatot, először gondoljuk meg, hogy a szóban forgó függvény valóban periodikus. Az 1.24. Állítás alapján a $\sin 2x$ függvény legkisebb pozitív periódusa π, míg a $\cos 3x$ függvényé $\frac{2}{3}\pi$. Ez a két periódus összemérhető, tehát a 2.12. Következmény alapján az összegfüggvény is periodikus. A $\frac{2}{3}\pi$ és a π legkisebb közös többszöröse 2π, ezért ez periódusa a $\sin 2x + \cos 3x$ függvénynek. A 2.5. ábra alapján azt sejtjük, hogy ez a legkisebb pozitív periódusa.

A 2.17. Feladat 1. megoldása. Legyen $p > 0$, amelyre

$$\sin 2x + \cos 3x = \sin\big(2(x+p)\big) + \cos\big(3(x+p)\big) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Helyettesítsük ebbe az $x = 0$ és $x = \pi$ értékeket, ekkor

$$1 = \sin 2p + \cos 3p, \tag{2.13}$$
$$-1 = \sin 2p - \cos 3p, \tag{2.14}$$

ahol az utóbbi egyenlet esetében felhasználtuk, hogy

$$\cos(\alpha + 3\pi) = \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha.$$

A (2.13) és a (2.14) egyenletek összegéből és különbségéből nyerjük, hogy

$$\sin 2p = 0, \quad \cos 3p = 1.$$

Következésképpen $2p = k\pi$ és $3p = \ell 2\pi$, vagyis $p = k\frac{\pi}{2}$ és $p = \ell\frac{2\pi}{3}$, ahol k, ℓ pozitív egészek. Ekkor a $k\frac{\pi}{2} = \ell\frac{2\pi}{3}$ egyenlőség egyenértékű azzal, hogy $3k = 4\ell$, vagyis k 4-gyel, ℓ pedig 3-mal osztható, így a lehető legkisebb pozitív értékük $k = 4$ és $\ell = 3$, ebben az esetben $p = 2\pi$. Tehát p legkisebb értéke 2π, amelyről láttuk, hogy valóban periódus. □

A 2.17. Feladat deriválással is megoldható.

A 2.17. Feladat 2. megoldása. Legyen f egy pozitív periódusa p. Tekintsük az f függvényt és első három deriváltfüggvényét:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x + \cos 3x, \\ f'(x) &= 2\cos 2x - 3\sin 3x, \\ f''(x) &= -4\sin 2x - 9\cos 3x, \\ f'''(x) &= -8\cos 2x + 27\sin 3x. \end{aligned}$$

Az 1.35. Állítás alapján az előbbi függvényeknek is periódusa p, így a 0 és p helyeken felvett függvényértékek megegyeznek, azaz

$$1 = \sin 2p + \cos 3p, \tag{2.15}$$
$$2 = 2\cos 2p - 3\sin 3p, \tag{2.16}$$
$$-9 = -4\sin 2p - 9\cos 3p, \tag{2.17}$$
$$-8 = -8\cos 2p + 27\sin 3p. \tag{2.18}$$

A (2.15) egyenlet 4-szeresét a (2.17) egyenlethez hozzáadva, valamint a (2.16) egyenlet 9-szeresét a (2.18) egyenlethez hozzáadva adódik, hogy

$$\cos 3p = 1 \quad \text{és} \quad \cos 2p = 1.$$

Mindezek alapján

$$3p = k2\pi \quad \text{és} \quad 2p = \ell 2\pi \quad (k, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}),$$

ahonnan

$$p = k\frac{2\pi}{3} \quad \text{és} \quad p = \ell\pi.$$

Ekkor p a π-nek egész számú többszöröse, így $p = k\frac{2\pi}{3}$ miatt k legalább 3, tehát abban az esetben a legkisebb p, ha a π és $2\pi/3$ értékek legkisebb közös többszöröse, azaz $p = 2\pi$, amelyről már láttuk, hogy periódus.

□

A 2.17. Feladat valójában speciális esete egy általános tételnek, amelyet az előző differenciálszámítást használó megoldás mintájára könnyen igazolhatunk (a tétel elemi, deriválást nem igénylő, de meglehetősen hosszadalmas bizonyítása a [7] írásban olvasható).

2.18. Tétel. *Legyen* $f(x) = a\sin\alpha x + b\cos\beta x$ $(x \in \mathbb{R})$*, ahol* $a \neq 0$ *és* $b \neq 0$*, valamint* $\alpha > 0$*,* $\beta > 0$ *valós számok.*

1. *Ha* α *és* β *összemérhetők, akkor az* f *függvény periodikus és legkisebb pozitív periódusa a* $2\pi/\alpha$ *és* $2\pi/\beta$ *számok legkisebb közös többszöröse.*

2. *Ha* α *és* β *nem összemérhetők, akkor* f *nem periodikus.*

Bizonyítás. Először is jegyezzük meg, hogy az 1.24. Állítás alapján az $a\sin\alpha x$ és $b\cos\beta x$ függvények legkisebb pozitív periódusai rendre $2\pi/\alpha$ és $2\pi/\beta$. Ezek összemérhetők, ha α és β összemérhetők, és ekkor az f függvény periodikus minden olyan szám szerint, amely a $2\pi/\alpha$ és $2\pi/\beta$ számoknak egyaránt egész számú többszöröse. Tegyük fel, hogy p egy pozitív periódusa az f függvénynek. Ekkor az f bármely deriváltfüggvényének is periódusa a p, ezért $f^{(n)}(p) = f^{(n)}(0)$, ahonnan $n = 0, 1, 2, 3$ választással kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a\sin\alpha p + b\cos\beta p &= b,\\ a\alpha\cos\alpha p - b\beta\sin\beta p &= a\alpha,\\ -a\alpha^2\sin\alpha p - b\beta^2\cos\beta p &= -b\beta^2,\\ -a\alpha^3\cos\alpha p + b\beta^3\sin\beta p &= -a\alpha^3. \end{aligned}$$

1. eset. Ha $\alpha \neq \beta$, akkor az első egyenlet α^2-szeresét a harmadik egyenlethez hozzáadva adódik, hogy

$$b(\alpha^2 - \beta^2)\cos\beta p = b(\alpha^2 - \beta^2).$$

Mivel $\alpha \neq \beta$, ezért $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$, így a $b(\alpha^2 - \beta^2)$ nem nulla tényezővel osztva az előbbi egyenletet azt kapjuk, hogy $\cos\beta p = 1$, vagyis $\beta p = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, tehát p egész számú többszöröse a $2\pi/\beta$ számnak. Az egyenletrendszer második egyenletének β^2-szeresét hozzáadva a negyedik egyenlethez adódik, hogy

$$a\alpha(\beta^2 - \alpha^2)\cos\alpha p = a\alpha(\beta^2 - \alpha^2),$$

ahonnan $a \neq 0, \alpha \neq 0$ és $\alpha \neq \beta$ miatt $\cos\alpha p = 1$. Tehát $\alpha p = \ell 2\pi$ $(\ell \in \mathbb{Z})$, amiből következően p egész számszorosa a $2\pi/\alpha$ számnak. Mindezek alapján p egész számú többszöröse a $2\pi/\alpha$ és $2\pi/\beta$ számoknak, így legkisebb pozitív értéke valóban a $2\pi/\alpha$ és $2\pi/\beta$ számok legkisebb közös többszöröse, amennyiben α és β összemérhetők. Ha α és β nem összemérhetők (ekkor nyilván $\alpha \neq \beta$), akkor nincs olyan nem nulla p szám, amely egyszerre $2\pi/\alpha$-nak és $2\pi/\beta$-nak egész számú többszöröse (különben $k2\pi/\alpha = \ell 2\pi/\beta$ azt eredményezné, hogy $\alpha/\beta = \ell/k$), tehát f nem periodikus.

2. eset. Ha $\alpha = \beta$, akkor a négy egyenletből álló egyenletrendszer első két egyenlete:

$$\begin{aligned} a\sin\alpha p + b\cos\alpha p &= b,\\ a\alpha\cos\alpha p - b\alpha\sin\alpha p &= a\alpha. \end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy $\sin\alpha p = 0$ és $\cos\alpha p = 1$. Tehát p legkisebb értéke $2\pi/\alpha$. □

2.19. *Megjegyzés.* A 2.18. Tétel megfogalmazásából kimaradt $\alpha < 0$ vagy $\beta < 0$ eset a szinusz- és koszinuszfüggvények páratlan és páros voltának felhasználásával visszavezethető az $\alpha > 0$, $\beta > 0$ esetre. Ha az a, b, α, β konstansok között van 0, akkor az f függvény képletében szereplő két tag legalább egyike állandó, és ekkor az 1.24. Állításból adódik a legkisebb pozitív periódus (vagy pedig f konstansfüggvény).

3. fejezet

Periodikus felbonthatóság

Ebben a fejezetben egy középiskolásoknak szánt feladatból kiindulva azt vizsgáljuk, hogy milyen szükséges feltétel adható arra vonatkozóan, hogy egy függvény felbontható legyen két periodikus függvény összegére. Ezután arról is szót ejtünk, hogy ez a feltétel vajon elégséges-e. Mindezeket konkrét függvények példáján is szemléltetni fogjuk.

3.1. Egy KöMaL feladat

A KöMaL 1990. áprilisi számában tűzték ki F. 2794. sorszámmal a következő feladatot.

3.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^2$ függvény nem áll elő két periodikus függvény összegeként!

Megoldás. A KöMaL 1991. márciusi számában megjelent hivatalos megoldást követve indirekt módon okoskodunk. Tegyük fel, hogy az $f(x) = x^2$ függvény mégis előáll két periodikus függvény összegeként, tehát vannak olyan g és h függvények, amelyekre

$$x^2 = g(x) + h(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol a g egy periódusa a $p \neq 0$ szám és a h egy periódusa a $q \neq 0$ szám. Az előbbi egyenletbe helyettesítsük be rendre az $x = 0, p, q$, valamint $p + q$ értékeket:

$$0 = g(0) + h(0), \tag{3.1}$$

$$p^2 = g(p) + h(p), \tag{3.2}$$

$$q^2 = g(q) + h(q), \tag{3.3}$$

$$(p + q)^2 = g(p + q) + h(p + q). \tag{3.4}$$

A g és h függvények periodikussága miatt a (3.4) egyenlet jobb oldalán $g(p+q) = g(q)$, valamint $h(p + q) = h(p)$, a bal oldali kifejezést pedig nevezetes azonosság alapján bonthatjuk ki, így az egyenletet a következő alakban írhatjuk fel:

$$p^2 + 2pq + q^2 = g(q) + h(p).$$

Ebből az egyenletből a (3.2) és (3.3) egyenleteket kivonva, majd a (3.1) egyenletet hozzáadva:

$$2pq = -g(p) - h(q) + g(0) + h(0),$$

ahol g és h periodikussága miatt $g(0) = g(p)$ és $h(0) = h(q)$, tehát azt kapjuk, hogy $2pq = 0$. Ez viszont ellentmond annak, hogy sem p, sem q nem nulla, hiszen mindketten periódusok. □

Hasonló gondolatmenettel bizonyíthatjuk a 3.1. Feladat alábbi általánosítását.

3.2. Állítás. *Tetszőleges $n \geq 2$ egész szám esetén az $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény nem áll elő két periodikus függvény összegeként.*

Bizonyítás. Ismét indirekt módon feltételezzük, hogy x^n előáll a g és h periodikus függvények összegeként, azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x^n = g(x) + h(x)$. Legyen g egy periódusa p, h egy periódusa q, amelyek az 1.15. Állítás alapján választhatók pozitívnak. Az indirekt feltevésbe rendre az $x = 0, p, q$ és $p + q$ értékeket helyettesítve a következő összefüggéseket kapjuk:

$$0 = g(0) + h(0), \tag{3.5}$$
$$p^n = g(p) + h(p), \tag{3.6}$$
$$q^n = g(q) + h(q), \tag{3.7}$$
$$(p+q)^n = g(p+q) + h(p+q). \tag{3.8}$$

Vizsgáljuk most meg a $(p+q)^n$ hatványt a binomiális tétel segítségével:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} q^k = p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} q + \ldots + \binom{n}{n-1} p q^{n-1} + q^n.$$

Az iménti azonosság jobb oldalán p, q pozitív volta miatt $\binom{n}{\ell} p^{n-\ell} q^\ell > 0$, ha $0 < \ell < n$, így ezen tagok elhagyásával nyerjük, hogy

$$p^n + q^n < (p+q)^n.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek és a g, h függvények periodikus voltának felhasználásával a (3.8) egyenletből adódik, hogy

$$p^n + q^n < g(q) + h(p).$$

Ebből az összefüggésből a (3.6) és (3.7) egyenlőségeket kivonva és az f és g függvények periodikusságát kihasználva a következőt kapjuk:

$$0 < -(g(0) + h(0)).$$

Ez viszont ellentmond a (3.5) összefüggésnek. □

3.3. *Megjegyzés.* Mivel a 3.2. Állításban az $n = 1$ eset kimaradt, ezért rögtön adódik a kérdés, hogy vajon az $f(x) = x$ függvény előáll-e két periodikus függvény összegeként. Ez a kérdés a [29] középiskolai feladatgyűjteményben is ki van tűzve 253. sorszámmal. A kérdésre kicsit később visszatérünk, előtte azonban azt vizsgáljuk meg, hogy milyen szükséges feltétel adható két periodikus függvény összegeként való előállíthatósághoz.

3.2. Szükséges feltétel felbonthatósághoz

Felmerülhet bennünk a kérdés, hogy vajon adható-e arra vonatkozóan szükséges feltétel, hogy egy függvény előállítható legyen két periodikus függvény összegeként. A kérdés megválaszolásához először definiáljuk a következő differenciaoperátort.

3.4. Definíció. Legyen p rögzített valós szám. A D_p *differenciaoperátor* egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez rendelje azt a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$g(x) = f(x+p) - f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

3.5. *Megjegyzés.* A továbbiakban egy f függvénynek a D_p operátor általi képét $D_p(f)$ vagy tömörebben $D_p\, f$ fogja jelölni, de bizonyos esetekben a képletek egyszerűsítése érdekében (kissé pontatlanul) ezek helyett a $D_p(f(x))$ jelölést fogjunk használni (úgy ahogy f helyett $f(x)$ függvényről beszélünk). Vegyük észre, hogy $p = 0$ esetén a D_p operátor minden függvényhez az azonosan nulla függvényt rendeli, ezért nem érdekes.

A differenciaoperátor néhány egyszerű tulajdonságát fogalmazza meg a következő állítás.

3.6. Állítás (A differenciaoperátor tulajdonságai)**.**

i) *Legyen $p \neq 0$ rögzített valós szám. Ekkor egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor periodikus p szerint, ha $D_p\, f = 0$.*

ii) *Miden p valós szám esetén a D_p differenciaoperátor lineáris operátor, azaz bármely $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekre és $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ számokra teljesül, hogy*

$$D_p(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1\, D_p\, f + \lambda_2\, D_p\, g.$$

iii) *Ha $p \neq 0$, akkor a D_p differenciaoperátor bármely legalább elsőfokú polinomfüggvénynek pontosan eggyel csökkenti a fokszámát, a konstans polinomokhoz pedig a 0 polinomot rendeli (amelynek nem tulajdonítunk fokot).*

iv) *Tetszőleges p, q valós számok esetén a D_p és D_q operátorok felcserélhetők, azaz minden $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre*

$$D_p\,(D_q\, f) = D_q\,(D_p\, f)\,.$$

Bizonyítás.

i) Ha $D_p\, f$ a konstans nulla függvény, akkor a D_p operátor definíciója szerint ez ekvivalens azzal, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x+p) = f(x)$, ami $p \neq 0$ miatt egyenértékű azzal, hogy az f függvénynek egy periódusa a p szám.

ii) Vizsgáljuk meg a differenciaoperátor hatását a $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ függvényen:

$$\big(D_p\,(\lambda_1 f + \lambda_2 g)\big)(x) = \lambda_1 f(x+p) + \lambda_2 g(x+p) - \lambda_1 f(x) - \lambda_2 g(x).$$

Itt a jobb oldali kifejezés egyszerű átalakítások után a következő alakban írható:

$$\lambda_1\,(f(x+p) - f(x)) + \lambda_2\,(g(x+p) - g(x))\,,$$

ami éppen $\lambda_1\, D_p\, f + \lambda_2\, D_p\, g$, tehát a D_p operátor valóban lineáris.

iii) Vegyük észre, hogy a differenciaoperátor lineáris volta miatt elég csak az x^n egytagú (monom) kifejezésre igazolni az állítást. Ha $n \geq 1$, akkor a binomiális tétel felhasználásával

$$D_p\,(x^n) = (x+p)^n - x^n = \binom{n}{1} p x^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} x + p^n,$$

ahol a jobb oldalon szereplő polinom fokszáma $p \neq 0$ miatt $n-1$. Ha viszont az $n = 0$ eset áll fenn, vagyis a függvény az $f(x) = c$ konstans polinom, ahol $c \in \mathbb{R}$, akkor $D_p\,(c) = c - c = 0$, tehát valóban a konstans nulla polinomot kapjuk.

iv) Vizsgáljuk meg az operátorok hatását az f függvényen a kétféle sorrendben. Egyrészt, mivel

$$(D_p\,(D_q\,f))\,(x) = D_p\,(f(x+q) - f(x))\,,$$

ezért

$$(D_p\,(D_q\,f))\,(x) = f(x+p+q) - f(x+q) - f(x+p) + f(x).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$(D_q\,(D_p\,f))\,(x) = f(x+p+q) - f(x+p) - f(x+q) + f(x).$$

Ezekből világosan látszik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$(D_p\,(D_q\,f))\,(x) = (D_q\,(D_p\,f))\,(x),$$

és éppen ezt akartuk igazolni.

□

3.7. *Megjegyzés.* A D_p és D_q operátorok egymás utáni alkalmazásával nyert operátort gyakran röviden $D_p\,D_p$ (vagy $D_q\,D_p$) jelöli.

A D_p differenciaoperátor segítségével a következő szükséges feltételt fogalmazhatjuk meg két periodikus függvény összegeként való előállíthatósághoz.

3.8. Állítás (Két periodikus függvény összegekénti előállítás egy szükséges feltétele)**.** *Ha egy $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény előáll egy p szerint periodikus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény és egy q szerint periodikus $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény összegeként, akkor*

$$D_p\,(D_q\,h) = 0.$$

Bizonyítás. Ellenőrizzük a $D_p\,D_q = D_q\,D_p$ operátor hatását a $h = f + g$ függvényen! Alkalmazzuk először a D_q operátort a h függvényre kihasználva a differenciaoperátor lineáris voltát:

$$D_q(f+g) = D_q\,f + D_q\,g,$$

ahol mivel g-nek egy periódusa a q, a 3.6. Állítás (i) pontja szerint $D_q\,g = 0$, tehát

$$D_q(f+g) = D_q\,f.$$

Alkalmazva mindkét oldalra a D_p operátort és felhasználva azt, hogy a D_p és D_q operátorok felcserélhetők, azt kapjuk, hogy

$$D_p(D_q(f+g)) = D_p(D_q\,f)) = D_q(D_p\,f)),$$

ahol mivel az f függvénynek p egy periódusa, ezért ismét a 3.6. Állítás (i) pontja alapján $D_p\,f = 0$, így

$$D_q(D_p\,f) = D_q(0) = 0.$$

□

3.9. Példa. Vizsgáljuk meg az $f(x) = x^2$ függvény esetét az előbbi szükséges feltétel segítségével! Ekkor

$$D_q\left(D_p(x^2)\right) = D_q\left((x+p)^2 - x^2)\right) = D_q\left(2px + p^2\right) = 2pq, \tag{3.9}$$

ahol $2pq \neq 0$, tehát nem teljesül a szükséges feltétel, és így az x^2 függvény nem írható fel két periodikus függvény összegeként.

Vegyük észre, hogy a (3.9) átalakítás tulajdonképpen a 3.1. szakaszbeli korábbi megoldás egy sorba tömörített változata. A (3.9) számolás helyett természetesen a 3.6. Állítás (iii) pontját is alkalmazhattuk volna: a differenciaoperátor kétszeres alkalmazása pontosan kettővel csökkenti az x^2 polinom fokát, így $D_p(D_q(x^2))$ egy nem nulla konstans polinom.

3.10. Példa. Előáll-e az $f(x) = e^x$ függvény két periodikus függvény összegeként? Vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e a szükséges feltétel! Mivel

$$D_p(e^x) = e^{x+p} - e^x = e^x(e^p - 1),$$

így

$$D_q\left(D_p(e^x)\right) = e^{x+q}\left(e^p - 1\right) - e^x(e^p - 1) = e^x\left(e^p - 1\right)\left(e^q - 1\right),$$

ahol e^x pozitivitásából kifolyólag a jobb oldali szorzat akkor és csak akkor lehetne minden x-re nulla, ha $p = 0$ vagy $q = 0$, de minthogy p és q periódusok, ezért ez nem lehetséges. Tehát az e^x függvény nem írható fel két periodikus függvény összegeként, mert nem teljesül ennek szükséges feltétele.

3.11. Példa. Előáll-e az $f(x) = x$ függvény két periodikus összegeként? Mivel

$$D_q\left(D_p\, x\right) = D_q\left((x + p) - x\right)\right) = D_q\left(p\right) = p - p = 0, \tag{3.10}$$

ezért teljesül az előállíthatóság szükséges feltétele. Ám ebből még nem következtethetünk arra, hogy az $f(x) = x$ függvény felírható lenne egy p szerint periodikus és egy q szerint periodikus függvény összegeként. Erre a következő szakaszban kapunk választ.

3.3. Elégséges feltétel felbonthatósághoz

Láttuk, hogy tetszőleges p, q nem nulla valós számok esetén $D_p\, D_q(x) = 0$, vagyis teljesül a két periodikus függvény összegeként való előállíthatóság szükséges feltétele az $f(x) = x$ függvényre. Vajon elegendő-e a feltétel, azaz tetszőleges p, q nem nulla számok esetén az $f(x) = x$ függvény előállítható-e egy p szerint periodikus és egy q szerint periodikus függvény összegeként? Könnyen látható, hogy általában nem. Valóban, ha p és q összemérhetők, akkor a 2.12. Következmény szerint egy p szerint periodikus és egy q szerint periodikus függvény összege periodikus, ám az $f(x) = x$ függvény nem az (hiszen például a 0 értéket csak egyszer veszi fel). Mindenképpen fel kell tennünk tehát, hogy p és q nem összemérhetők, ekkor már következik az előállíthatóság.

3.12. Tétel. *Legyenek p és q tetszőleges nem összemérhető, nem nulla valós számok. Ekkor az $f(x) = x$ függvény előállítható egy p szerint periodikus és egy q szerint periodikus függvény összegeként.*

A tétel bizonyításához szükségünk lesz némi lineáris algebrai ismeretre, pontosabban végtelen dimenziós vektorterek bázisával kapcsolatos alapvető összefüggésekre (vektorterekről bővebben lásd a [11] könyvet). Először emlékeztetünk a bázis fogalmára.

3.13. Definíció. A T test feletti V vektortér egy $B = \{v_i \mid i \in I\}$ vektorrendszerét (ahol I valamilyen indexhalmaz) *bázisnak* nevezzük, ha

- *B lineárisan független rendszer*, azaz B bármely véges részrendszere lineárisan független, vagyis tetszőleges $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k} \in B$ vektorok és $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k} \in T$ testbeli elemek (ahol $i_1, \ldots, i_k \in I$ páronként különböző indexek) esetén, ha

$$\alpha_{i_1} v_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k} v_{i_k} = 0,$$

  akkor $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_k} = 0$;

- *B generátorrendszer*, azaz a V bármely eleme előáll B-beli vektorok véges lineáris kombinációjaként, vagyis minden $v \in V$ esetén léteznek $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k} \in B$ vektorok és $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k} \in T$ testbeli elemek, hogy

$$v = \alpha_{i_1} v_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k} v_{i_k}.$$

3.14. *Megjegyzés.* A definíció ekvivalens módon úgy is fogalmazható, hogy B pontosan akkor bázis, ha minden $v \in V$ vektorhoz egyértelműen léteznek olyan $\alpha_i \in T$ $(i \in I)$ testbeli elemek, hogy véges sok kivétellel $\alpha_i = 0$, továbbá $v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$ (ami valójában egy véges összeg, hiszen legfeljebb véges sok α_i lehet nem nulla).

Bázis létezésével kapcsolatban alapvető fontosságú a következő tétel.

3.15. Tétel. *Minden vektortérnek van bázisa. Sőt a vektortér bármely lineárisan független vektorrendszere kiegészíthető a vektortér bázisává.*

A tétel bizonyítása a kiválasztási axiómán múlik. Végtelen elemszámú bázist szokás Hamel-bázisnak hívni.

Ennyi előkészület után visszatérünk a 3.12. Tétel bizonyításához.

A 3.12. Tétel bizonyítása. Tekintsük a valós számok halmazát a racionális számok teste fölötti vektortérként. Ha p, q nem összemérhető, nem nulla valós számok, akkor p és q lineárisan függetlenek ebben a vektortérben. Valóban, ha p és q lineárisan összefüggők lennének, akkor valamilyen egyszerre nem nulla r_1 és r_2 racionális számokkal

$$r_1 p + r_2 q = 0.$$

Ha az r_1, r_2 együtthatók közül az egyik nulla lenne, akkor $p \neq 0$ és $q \neq 0$ miatt az előbbi egyenlőség alapján a másik együttható is nulla volna. Következésképpen r_1 és r_2 egyike sem nulla. Ekkor viszont az előbbi egyenlőségből $p/q = -r_2/r_1$ adódik, ami azt jelenti, hogy p és q összemérhetők.

Mivel p és q lineárisan függetlenek a szóban forgó vektortérben, ezért a 3.15. Tétel szerint létezik a vektortérnek olyan B bázisa, amelyre $p, q \in B$. Definiáljunk ekkor két függvényt a következő módon. Ha

$$x = \alpha_p p + \sum_{b \in B \setminus \{p\}} \alpha_b b$$

egyértelmű előállítás, ahol az α_b $(b \in B)$ együtthatók véges sok kivétellel nullával egyenlők, akkor legyen

$$g(x) := \alpha_p p,$$
$$h(x) := \sum_{b \in B \setminus \{p\}} \alpha_b b.$$

Ekkor nyilván

$$g(x) + h(x) = \alpha_p p + \sum_{b \in B \setminus \{p\}} \alpha_b b = x,$$

és azt állítjuk, hogy a h periodikus p szerint, a g-nek pedig bármely $\widetilde{b} \in B \setminus \{p\}$ periódusa, speciálisan q is az. Valóban, a bázisban való egyértelmű előállíthatóság folytán

$$x + p = (\alpha_p + 1)p + \sum_{b \in B \setminus \{p\}} \alpha_b b,$$

így

$$h(x + p) = \sum_{b \in B \setminus \{p\}} \alpha_b b = h(x),$$

tehát h periodikus p szerint.

Ezenkívül tetszőleges $\widetilde{b} \in B \setminus \{p\}$ esetén

$$x + \widetilde{b} = \alpha_p p + (\alpha_{\widetilde{b}} + 1)\widetilde{b} + \sum_{b \in B \setminus \{p, \widetilde{b}\}} \alpha_b b,$$

ezért

$$g(x + \widetilde{b}) = \alpha_p p = g(x),$$

következésképp g periodikus $\widetilde{b}$ szerint. Azt kaptuk tehát, hogy az $f(x) = x$ függvény előáll a p szerint periodikus h és q szerint periodikus g függvény összegeként. □

3.16. *Megjegyzés.* Az $f(x) = x$ függvény bármely periodikus felbontásában szereplő g és h függvények nem lehetnek folytonosak, hiszen ha például g folytonos, akkor szintén folytonos a $h(x) = x - g(x)$ függvény, de akkor g és h is korlátos (hiszen az 1.31. Állítás alapján mindenütt értelmezett periodikus és folytonos függvény korlátos), azonban $g(x) + h(x) = x$ nem korlátos.

A 3.12. Tételnél valójában sokkal több is igaz.

3.17. Tétel (Két periodikus függvény összegekénti előállíthatóság elégséges feltétele)**.** *Legyenek p és q tetszőleges nem összemérhető, nem nulla valós számok. Ekkor ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $D_p(D_q f) = 0$, akkor f előáll egy p szerint periodikus és egy q szerint periodikus függvény összegeként.*

A bizonyítás megtalálható a [21] cikkben.

3.4. Felbonthatóság több függvény összegére

Ebben a szakaszban a két periodikus függvény összegére való felbonthatóság témakörében tárgyalt eredményeknek kettő helyett tetszőleges véges sok periodikus függvényre vonatkozó általánosítását fogalmazzuk meg.

3.18. Állítás (Szükséges feltétel véges sok periodikus függvény összegeként való előállíthatósághoz)**.** *Ha egy függvény előáll a $g_1, g_2, \dots g_k$ periodikus függvények összegeként, ahol a g_j függvény egy periódusa p_j $(j = 1, \dots, k)$, akkor*

$$D_{p_1}(\dots(D_{p_{k-1}}(D_{p_k} f))\dots) = 0.$$

3.19. *Megjegyzés.* A differenciaoperátorok páronként felcserélhetőek, ezért a sorrendjük tetszőleges lehet. A jelölések egyszerűsítése érdekében $D_{p_1}(\dots(D_{p_{k-1}}(D_{p_k} f))\dots)$ helyett tömörebben azt írjuk, hogy $D_{p_1}\dots D_{p_{k-1}} D_{p_k} f$.

Bizonyítás. Legyen $f = g_1 + \dots + g_k$. Ekkor a differenciaoperátorok felcserélhetősége miatt tetszőleges sorrendben alkalmazhatjuk a D_{p_i} operátorokat, így g_j-re először D_{p_j}-t alkalmazva rögtön a 0 függvényhez jutunk. A $g_1+\dots+g_k$ összegre tagonként alkalmazva az operátorokat végül a bizonyítandó összefüggést nyerjük. □

A 3.10. Példában láttuk, hogy az e^x függvény nem bontható fel két periodikus függvény összegére. Ez valójában kettő helyett tetszőleges véges sok tag esetén igaz.

3.20. Állítás. *Az e^x függvény nem bontható fel véges sok periodikus függvény összegére.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt módon, hogy az e^x függvény felbontható k darab periodikus függvény összegére, legyenek a felbontásban szereplő függvények periódusai rendre $p_1, \dots, p_k$. Ekkor a 3.18. Állítás szerint

$$0 = D_{p_1}\dots D_{p_k}(e^x) = e^x\,(e^{p_1}-1)\,(e^{p_2}-1)\dots(e^{p_k}-1)\,,$$

ahol $e^x > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így a jobb oldali szorzat csak úgy lehet nulla, ha legalább egy $e^{p_i}-1$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ alakú tényező nulla. Ez viszont akkor és csak akkor lehetséges, ha valamelyik p_i periódus nulla, ami azonban ellentmond annak, hogy egy periódus nem lehet nulla. □

3.21. Példa. Mivel a differenciaoperátor pontosan eggyel csökkenti egy legalább elsőfokú polinom fokát, így a $D_{p_1}\dots D_{p_n}$ operátor pontosan n-nel csökkenti egy n-edfokú polinom fokszámát (ahol $n \geq 1$), tehát speciálisan $D_{p_1}\dots D_{p_n}(x^n)$ egy nem nulla konstans polinom, így az x^n függvény nem állítható elő n darab periodikus függvény összegeként.

Ahogy a $k = 2$ esetben, úgy általában sem elegendő a 3.18. Állításban szereplő feltétel a periodikus felbonthatóságra. Ismét feltételezni kell a $p_1, \dots, p_k$ számok nem összemérhetőségét.

3.22. Tétel. *Legyenek $p_1, \dots, p_k$ $(k \geq 2)$ páronként nem összemérhető, nem nulla valós számok. Ekkor ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre*

$$D_{p_1}\dots D_{p_{k-1}} D_{p_k} f = 0$$

teljesül, akkor léteznek olyan $g_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, k)$ periodikus függvények, hogy g_j egy periódusa p_j, továbbá $f = g_1 + \dots + g_k$.

A bizonyítás megtalálható a [21] cikkben.

3.23. Következmény. Legyenek $p_1, \dots, p_{n+1}$ $(n \geq 1)$ páronként nem összemérhető, nem nulla valós számok. Ekkor léteznek olyan $g_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, n+1)$ periodikus függvények, hogy a g_j függvénynek p_j egy periódusa, és az $f(x) = x^n$ függvény előáll a g_j függvények összegeként.

Bizonyítás. Mivel a differenciaoperátor pontosan eggyel csökkenti egy legalább elsőfokú polinom fokát, továbbá a konstans polinomokhoz az azonosan nulla polinomot rendeli, így a $D_{p_1}\dots D_{p_{n+1}}(x^n)$ a konstans nulla polinom, tehát teljesül az előállíthatóság elégséges feltétele. □

3.24. Példa. Szemléltetésképpen az előbbi következménynek egy speciális esetét igazoljuk (a [30] írás nyomán). Legyenek p, q, r olyan valós számok, amelyek lineárisan függetlenek a racionális számtest felett (ez többet jelent annál, hogy páronként nem összemérhetők, hiszen például az $1, \sqrt{2}$ és $1+\sqrt{2}$ páronként nem összemérhetők, de nem lineárisan függetlenek a racionális számtest felett). Ekkor előállíthatjuk az x^2 függvényt egy p szerint, egy q szerint és egy r szerint periodikus függvény összegeként.

Tekintsük ismét a valós számok halmazát a racionális számok teste feletti vektortérként, és vegyük ennek egy olyan B bázisát, amelyre $p, q, r \in B$. Ha egy x valós szám egyértelmű előállítása ebben a bázisban

$$x = \sum_{b\in B} \alpha_b b = \alpha_p p + \alpha_q q + \sum_{b\in B\setminus\{p,q\}} \alpha_b b,$$

ahol véges sok kivétellel $\alpha_b = 0$, akkor (mivel valójában véges összegről van szó)

$$x^2 = \sum_{a,b\in B} \alpha_a\alpha_b ab.$$

Itt a jobb oldalt a következőképp bonthatjuk szét:

$$\alpha_p^2 p^2 + 2\sum_{b\in B\setminus\{p,q\}} \alpha_p\alpha_b pb + 2\alpha_p\alpha_q pq + \sum_{a,b\in B\setminus\{p\}} \alpha_a\alpha_b ab.$$

Definiáljuk ekkor az f, g, h függvényeket a következőképpen

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{a,b\in B\setminus\{p\}} \alpha_a\alpha_b ab,\\ g(x) &= \alpha_p^2 p^2 + 2\sum_{b\in B\setminus\{p,q\}} \alpha_p\alpha_b pb,\\ h(x) &= 2\alpha_p\alpha_q pq. \end{aligned}$$

Az előbbiek alapján világosan látható, hogy

$$x^2 = f(x) + g(x) + h(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

továbbá azt állítjuk, hogy az f függvény egy periódusa p, a g függvény egy periódusa q és a h függvény egy periódusa r. Az, hogy az f függvény egy periódusa p, abból következik, hogy

$$x + p = (\alpha_p + 1)p + \sum_{b\in B\setminus\{p\}} \alpha_b b,$$

és így $f(x+p) = \sum_{b\in B\setminus\{p\}} \alpha_b b = f(x)$. A g és h függvények periodikus volta a megfelelő periódussal hasonlóan igazolható: $g(x)$ értékében az α_q együttható, $h(x)$ értékében pedig az α_r nem játszik szerepet, emiatt $g(x+q) = g(x)$ és $h(x+r) = h(x)$.

4. fejezet

Periodikusság a középiskolában

Ebben a fejezetben először röviden áttekintjük, hogy a középiskolai matematikatantervekben hol és milyen formában jelenik meg a periodikusság fogalma, valamint a dolgozatban tárgyalt témakörök. Ezután az általános és középiskolai matematikaoktatásban széleskörűen használt és méltán népszerű *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád középiskolásoknak szóló köteteit és feladatgyűjteményeit vesszük szemügyre, hogy a periodikusság témaköre hol bukkan fel bennük, és milyen feladatokat kínálnak a témához. Végül azt is megnézzük, hogy néhány további tankönyvcsaládban milyen módon van értelmezve a periodikusság fogalma.

4.1. Periodikusság a kerettantervekben

A 2013. szeptember 1-jén hatályba lépett *Nemzeti alaptantervben* a matematika műveltségi területen többször is előkerül a periodikusság témaköre. A teljes tizenkét évfolyamot átölelő fejlesztési feladatok között két helyen is találkozhatunk a témával. A *tájékozódás* fejlesztési feladat *tájékozódás az időben* elnevezésű egységében a 9–12. évfolyamon az időtől függő periodikus jelenségeket említi az alaptanterv. Ezenkívül az *alkotás és kreativitás* nevű fejlesztési területen szerepel a számsorozatok alkotása és szabályosságainak, többek közt a periodikusságuk vizsgálata. A fejlesztési feladatokon túl a köznevelési tartalmakat tárgyaló részben is megjelenik a periodikusság. A középiskola 9–10. évfolyamán a *függvények jellemzése* témakörnek egy eleme a periodicitás leolvasása a függvénygrafikonról.

A kerettantervek a Nemzeti alaptantervnél részletesebben fejtik ki az egyes közműveltségi területek tananyagának tartalmait. Matematikából háromféle gimnáziumi kerettanterv létezik, a nem emelt szintű képzést választó diákoknak egy, az emelt szintű képzést választó diákoknak pedig kétféle változat, ez utóbbi kettő az óraszám és a tananyag tekintetében is eltér.

A matematikából nem emelt szintű képzés szerint tanuló diákoknak szóló kerettantervben a periodicitással először a 9. évfolyam *Gondolkodási és megismerési módszerek* című tematikai egységben találkozhatunk, de csupán a magyar nyelv és irodalomhoz való kapcsolódási pontként említi a dokumentum a következőképp: „periodicitás és ismétlődés mint szervezőelv a poetizált szövegekben”. Később a 11–12. évfolyamon a szögfüggvények kiterjesztésének kapcsán kerül elő a periodikusság, ahol az időtől függő periodikus jelenségek kezelése is szerepel a fejlesztési követelmények között, ezenkívül pedig kapcsolódási pontként a fizikára találhatunk utalást, ahol a diákok a hullámmozgás, valamint a váltakozó áram matematikai leírásakor találkoznak a periodikussággal.

Végül pedig a *Rendszerező összefoglalás* című tematikai egységnek a függvényekkel foglalkozó részében ugyancsak megjelenik a periodikusság a különféle függvénytulajdonságok egyikeként, és fejlesztési követelményként a fogalom pontos ismeretét és konkrét feladatokban való alkalmazását nevezi meg a tanterv.

A matematikát emelt szinten tanuló diákoknak szánt kerettantervek „A" változatában először szintén 9–10. osztályban találkozunk a periodikussággal, méghozzá a *Függvények* című tematikai egységen belül új fogalomként. A fejlesztési követelmények között ebben az egységben szerepel a periodikusság pontos definíciójának kimondása, valamint a törtrész- és a Dirichlet-függvény ismerete és jellemzése. A 9–10. évfolyamos ciklus végén a fejlesztés várt eredményei között is megjelenik a periodicitás mint új függvényjellemző ismerete. Később a 11–12. évfolyamon a *Trigonometria* című tematikai egységben ismét találkozunk a periodicitással, mégpedig a szögfüggvények jellemzőjeként. A fizika tantárggyal való kapcsolódási pont a harmonikus rezgőmozgás és a hullámmozgás matematikai leírása, melyhez szögfüggvények szükségesek. Emiatt ezen tematikai egységen belül az egyik fejlesztési cél az időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata. Végül a *Folytonosság, differenciálszámítás* tematikai egységhez szükséges előzetes tudásként jelöli meg a tanterv a függvények jellemzését, amelynek egyik eleme a periodicitás vizsgálata.

Az emelt szinten tanulóknak szóló kerettantervek „B" változata az „A" változatnál kevesebb tananyagot tartalmaz, ennélfogva a periodikusság fogalma is kevesebb helyen jelenik meg. A 9–10. évfolyamon a *Szögfüggvények* tematikai egységben kulcsfogalomként hivatkozik rá a tanterv. Később a 11–12. évfolyamon az „A" változathoz hasonlóan a *Trigonometria* című tematikai egységben kerül elő ismét a periodikusság és kapcsolódási pontként a fizikában a periodikus jelenségek vizsgálata. A „B" változat tananyagában nem szerepel a differenciálszámítás témaköre.

4.2. A Sokszínű matematika tankönyvcsalád

A Sokszínű matematika tankönyvcsalád középiskolásoknak szóló köteteiben számos helyen találkozhatunk a periodikusság fogalmával, a hozzá tartozó feladatgyűjtemények pedig rendkívül gazdag feladatanyagot kínálnak a diákok számára. Célunk ennek az anyagnak a rövid áttekintése és a dolgozatban tárgyalt eredményekhez való kapcsolódási pontok hangsúlyozása. Eközben néhány apró tananyagi pontatlanságra is felhívjuk a figyelmet, ezzel is illusztrálva, hogy egy középiskolai tanár számára mennyire fontos a fogalmak pontos és elmélyült ismerete.

4.2.1. 9. osztály

A 9. osztályos tankönyvben a *Függvények* című témakör hetedik leckéjében találkozunk először periodikussággal, méghozzá a törtrész-függvény kapcsán. A lecke inkább szóhasználatként vezeti be a periodikusságot, nem a tankönyv jelöléseinek megfelelő definícióformátumba helyezi, hanem a törtrész-függvény grafikonjának ábrája alatt egy szembetűnő tulajdonságként említi meg. Pontos definíciót mellőzve a könyv úgy fogalmaz, hogy „bárhol megnézve a függvény értékét, az 1-gyel (vagy bármely egész számmal) nagyobb helyen ugyanaz lesz az értéke: $f(x+1) = f(x)$." Mivel a törtrész-függvény az egész számegyenesen van értelmezve, ezért az 1.2. Megjegyzésben említettek miatt ez a magyarázat valóban helyes képet fest a függvény periodikusságáról. Ebben az életkorban a periodikusságnak az előbbi szemléletes magyarázata elegendőnek tekinthető,

és jól előkészíti a fogalomnak a későbbi évfolyamokban történő pontos bevezetését.

4.2.2. 10. osztály

A tankönyv. A szögfüggvények témakörben kerül elő a periodikusság fogalma, rögtön az első, a szinusz- és koszinuszfüggvények definícióját tartalmazó leckében. Az egységkör segítségével való értelmezés után a legfontosabb tulajdonságok között másodikként szerepel a függvények 2π szerinti periodikussága. A periodikusság definíciója nincs megfogalmazva a leckében, csupán arra hivatkozik, hogy az egységvektor egy teljes körülfordulás után önmagába érkezik, és így $\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha$, $\cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$. A fejezet második leckéjében a szinuszfüggvény grafikonjának ábrázolását már aszerint végzi a tankönyv, hogy a $[-\pi/2, 3\pi/2]$ intervallumon megrajzolt grafikont a periodikusságra hivatkozva 2π-vel és 2π egész számszorosaival eltolja a számegyenes mentén. A koszinuszfüggvény grafikonjának ábrázolása hasonlóan történik a harmadik leckében.

A negyedik lecke a tangens- és kotangensfüggvénnyel foglalkozik, mely szögfüggvényeket a szinusz- és koszinuszértékek megfelelő hányadosával definiálja, így periodikusságuk nem olyan nyilvánvaló. A legfontosabb tulajdonságok között első helyen szerepel az, hogy π periódusa mindkét függvénynek. Ezt a tankönyv a $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$ egyenlőségek ellenőrzésével igazolja a definícióban szereplő hányadosok és a $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$, $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$ összefüggések segítségével. A tangens- és kotangensfüggvények értelmezési tartománya már nem az egész számegyenes, ezért a periodikusság precíz belátásához szigorúan véve az előbbi egyenlőségek igazolása nem elegendő. Grafikonjukat szintén egy teljes periódus vizsgálatával, majd a periodikusság szerinti kiterjesztéssel állítja elő a könyv.

A feladatgyűjtemény. A feladatgyűjteményben található a következő, emelt szintűnek jelzett feladat, amely nagyon hasonló a dolgozatunk 2. fejezetében tárgyalt problémakörhöz. Ez a feladat könnyen vezethet tévútra, a példatárban szereplő megoldás gondolatmenete sem teljes értékű, ezért kiváló példája annak, hogy középiskolai tanárként igen fontos tisztán látni a periodikusság fogalmát.

4.1. Feladat ([2] 2700. Feladat)**.** Mennyi a legkisebb pozitív periódusa a következő függvénynek:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos 2x \sin\frac{x}{2}?$$

A feladatgyűjteményben közölt megoldás abból indul ki, hogy a hozzárendelési szabály első tényezője π szerint, míg a második tényezője 4π szerint periodikus, így szorzatuk legkisebb pozitív periódusa 4π. Ez a gondolatmenet viszont kissé hiányos, hiszen egyrészt azt sugallhatja, hogy ha két függvény periodikus, akkor szorzatfüggvényük is periodikus. Másrészt a megoldás olvasásakor nem világos, hogy milyen meggondolás alapján adódik, hogy 4π periódusa a szorzatfüggvénynek, továbbá az sem derül ki, hogy van-e ennél kisebb pozitív periódusa. A gondolatmenet hiányosságát a következő egyszerű ellenpélda jól mutatja.

4.2. Példa (A szorzatfüggvény nem periodikus)**.** Ha $f(x) = \cos x$ és $g(x) = \cos\bigl(\sqrt{2}x\bigr)$, akkor az f és g függvények legkisebb pozitív periódusai az 1.24. Állítás alapján rendre a 2π és a $2\pi/\sqrt{2}$ valós számok. Viszont az $(fg)(x) = \cos x \cos\bigl(\sqrt{2}x\bigr)$ szorzatuk nem periodikus, amit indirekt okoskodással nem nehéz belátni. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik $p > 0$ periódusa az fg függvénynek. Ekkor az $(fg)(p) = (fg)(0)$ összefüggés alapján

$$\cos p \cos\bigl(p\sqrt{2}\bigr) = \cos 0 \cos\bigl(0\sqrt{2}\bigr) = 1.$$

Az f és g függvények értékkészlete miatt ez pontosan akkor lehetséges, ha $\cos p = 1$ és $\cos\bigl(p\sqrt{2}\bigr) = 1$ vagy ha $\cos p = -1$ és $\cos\bigl(p\sqrt{2}\bigr) = -1$. Ha $\cos p = 1$ és $\cos\bigl(p\sqrt{2}\bigr) = 1$, akkor $p = k2\pi$ és $p\sqrt{2} = \ell 2\pi$ $(k, \ell \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$, amely egyenletek hányadosát véve viszont azt kapjuk, hogy $\sqrt{2} = \ell/k$, ami ellentmondás, hiszen $\sqrt{2}$ irracionális. A $\cos p = -1$ és $\cos\bigl(p\sqrt{2}\bigr) = -1$ eset hasonló ellentmondásra vezet.

Az előbbi példában az f és g függvények legkisebb pozitív periódusai nem voltak összemérhetők. A 4.1. Feladatban viszont a tényezők legkisebb pozitív periódusai összemérhetők, ezért vizsgáljuk meg azt, hogy ebben az esetben milyen igaz állítást fogalmazhatunk meg.

4.3. Állítás. *Ha az f függvénynek van olyan p periódusa, továbbá a g függvénynek olyan q periódusa, hogy p és q összemérhetők, akkor az fg függvény is periodikus, méghozzá minden olyan nem nulla valós szám szerint, amely p-nek és q-nak egyaránt egész számszorosa.*

Bizonyítás. Az 1.11. Állításban már igazoltuk, hogy ha az f és g függvényeknek van közös periódusa, akkor ez a közös érték a szorzatuknak is periódusa. Így az fg szorzatfüggvénynek minden olyan szám periódusa, amely p-nek és q-nak egyaránt nem nulla egész számszorosa. Ilyen szám pedig p és q összemérhetősége miatt létezik, ahogy ezt a 2.12. Következmény bizonyításában is láttuk. □

Az iménti állítás még nem jelenti azt, hogy ha két periodikus függvény legkisebb pozitív periódusa összemérhető, akkor szorzatfüggvényük egyáltalán rendelkezik legkisebb pozitív periódussal.

4.4. Példa (Szorzatfüggvény periodikus, de nincs legkisebb periódusa)**.** Legyen f és g a következő hozzárendeléssel megadva:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

amely függvényt az 1.23. Példában már megvizsgáltunk, és beláttuk, hogy legkisebb pozitív periódusa az 1. Tehát f és g legkisebb pozitív periódusai összemérhetők. Viszont a szorzatuk éppen a Dirichlet-függvény, amelyről az 1.8. Példában igazoltuk, hogy nincs legkisebb periódusa.

Ennyi ellenpélda után térjünk vissza a 4.1. Feladathoz és egészítsük ki a tankönyvi megoldást.

A 4.1. Feladat teljes megoldása. Az 1.24. Állítás alapján a $\cos 2x$ függvény legkisebb pozitív periódusa π, a $\sin\dfrac{x}{2}$ függvény legkisebb pozitív periódusa 4π. A π és 4π pozitív valós számok összemérhetők, hiszen hányadosuk 4, amely racionális szám. Így a 4.3. Állításból következően a szorzatfüggvény periodikus 4π szerint, amely a π és 4π pozitív valós számok legkisebb közös többszöröse.

Ezután azt bizonyítjuk, hogy f-nek nincs 4π-nél kisebb pozitív periódusa. Ehhez elég azt igazolnunk, hogy a $[0, 4\pi]$ intervallumon az f függvény pontosan egyszer veszi fel az 1 értéket. Az f függvény az 1 értéket olyan x helyeken veszi fel, amelyekre

$$\cos 2x \sin\frac{x}{2} = 1.$$

Ez a szinusz- és koszinuszfüggvények értékkészletét figyelembe véve a következő két esetben lehetséges.

1. eset. Ha $\cos 2x = \sin \dfrac{x}{2} = -1$, akkor

$$2x = \pi + k2\pi \quad \text{és} \quad \frac{x}{2} = \frac{3}{2}\pi + \ell 2\pi \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}),$$

ami alapján

$$x = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right) \quad \text{és} \quad x = \pi(3 + 4\ell) \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}).$$

Ám ez utóbbi két egyenlőség egyszerre nem teljesülhet, különben azt kapnánk, hogy $1/2 = 3 + 4\ell - k$, ahol az egyenlet jobb oldalán egész szám áll, míg bal oldalán nem.

2. eset. Ha $\cos 2x = \sin \dfrac{x}{2} = 1$, akkor az előbbi gondolatmenet alapján $x = k\pi$ és $x = \pi(1+4\ell)$ $(k, \ell \in \mathbb{Z})$ adódik, és az ilyen alakú x számok között a $[0, 4\pi]$ intervallumba csak π esik a $k = 1, \ell = 0$ választással.

Tehát az f függvénynek valóban 4π a legkisebb pozitív periódusa. □

4.2.3. 11. osztály

A tankönyv. A *Függvények* témakörön belül a *Trigonometrikus függvények* című leckében fordul elő a periodikusság fogalma mint a függvények egy jellemzője, de már csak ismétlésként, újbóli magyarázat nélkül. Annál érdekesebb viszont, hogy a hatodik leckében a könyv kiegészítő anyagként foglalkozik a trigonometrikus függvények inverz függvényeivel. A 2. kidolgozott példafeladatban szerepel az $\arcsin(\sin x)$ összetett függvény ábrázolása, melynek mintamegoldása rögtön annak közlésével indul, hogy ez a függvény periodikus π szerint, így az ábrázolást elég egy periódusnyi hosszúságú intervallumban elvégezni, majd 2π szerint periodikusan kiterjeszteni az egész számegyenesre. Az 1.13. Állításban beláttuk, hogy mivel a belső függvény periodikus, ezért az $\arcsin(\sin x)$ összetett függvény valóban periodikus, ám ennek igazolását a tankönyv kihagyja.

A feladatgyűjtemény. A 11. osztályos feladatgyűjteményben a függvényekről szóló témakör végén szereplő vegyes feladatok között található 3537. számmal a már korábban tárgyalt 2.4. Feladat, melynek a feladatgyűjtemény által közölt megoldásával a dolgozatunk 2. fejezetében részletesen foglalkoztunk.

A példatárban közvetlenül ez után következő, 3538. számú, szintén emelt szintűnek jelzett feladat is periodikus függvények összegével kapcsolatos.

4.5. Feladat ([3] 3538. Feladat)**.** Igazoljuk, hogy a következő függvény periodikus:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\sqrt{3}x - \cos\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

A 4.5. Feladat megoldása. Az 1.24. Állítás alapján a $\sin\sqrt{3}x$ függvény legkisebb pozitív periódusa $p = 2\pi/\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3}/3$. Az f függvény hozzárendelési szabályában szereplő különbségre most talán kényelmesebb összegként gondolni, ezért célszerű a $-\cos\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ függvény legkisebb pozitív periódusát meghatározni. Ez utóbbi az 1.24. Állítás szerint megegyezik a $\cos\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ függvény legkisebb pozitív periódusával, amely a $q = 2\pi\sqrt{3}$ szám. A p és q pozitív valós számok összemérhetők, hiszen hányadosuk 3,

így a 2.12. Következmény alapján az f függvény is periodikus, sőt a 2.18. Tételből következően az f függvény legkisebb pozitív periódusa a p és q számok legkisebb közös többszöröse, ami éppen q, hiszen, hiszen $q = 3p$. □

A példatárban szereplő megoldás lényegében megegyezik az előbbi gondolatmenettel, ám szerepel benne egy pontatlanság, amelyre érdemes felhívni a diákok figyelmét. A tagok legkisebb pozitív periódusának (p és q) meghatározása után az a kijelentés olvasható, miszerint akkor lesz az f függvény periodikus, ha p és q összemérhetők. A 2.8. Példában viszont láttuk, hogy akkor is lehet egy összegfüggvény periodikus, ha a tagjainak legkisebb pozitív periódusai nem összemérhetők.

4.2.4. 12. osztály

A tankönyv. A *Rendszerező összefoglalás* című fejezet függvényekkel foglalkozó alfejezetében a függvénytulajdonságok ismétlésénél szerepel a periodikusság definíciója a tankönyvcsalád definícióformátumában a következő módon.

4.6. Definíció (Sokszínű matematika 12. osztályos tankönyvéből)**.** Az $f\colon A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ függvény *periodikus*, ha van olyan p pozitív szám, hogy minden $x \in A$ esetén $x + p \in A$ is teljesül, és $f(x) = f(x + p)$. A legkisebb ilyen p számot a függvény periódusának nevezzük.

Több szempontból is érdekes ez az értelmezése a periodikus függvényeknek. Először is az 1.2. Megjegyzésben foglaltak szerint annak hiánya, hogy az $x - p$ helyen is legyen értelmezve a függvény többek között azt eredményezi, hogy például félegyenesen értelmezett függvényt is periodikusnak tekint a definíció. Sőt, ezek közül is a p pozitív voltának megkötése miatt azokat tekinti periodikusnak, melyek $[a, \infty)$ ($a \in \mathbb{R}$) alakú félegyenesen vannak értelmezve.

Ennél meglepőbb, hogy a tankönyv a legkisebb megfelelő tulajdonságú pozitív számot, tehát a mi felfogásunkban a függvény legkisebb pozitív periódusát definiálja periódusként. Ekkor ezen definíció szerint a konstansfüggvénynek nincs periódusa, hiszen az 1.4. Példában láttuk, hogy nincs legkisebb pozitív periódusa. A definíció alatt közvetlenül a könyv érdekes periodikus függvényként hozza fel a Dirichlet-függvény példáját. Ahogy az 1.8. Példában mi is, a könyv szintén megállapítja, hogy a Dirichlet-függvénynek bármely pozitív racionális szám periódusa, ami ellentmond az előbb kimondott definícióval, amely periódusnak csak egyetlen számot nevez.

A feladatgyűjtemény. A 12. osztályos feladatgyűjtemény az érettségire készülés okán leginkább a négy év anyagának ismétléséhez, gyakorlásához tartalmaz feladatokat. A *Függvények* című fejezet 5372. számú, középszintűnek jelzett feladata periodikus függvényeken végzett függvénytranszformációknak a legkisebb pozitív periódusra való hatására kérdez rá, amit a dolgozatban az 1.24. Állításban fogalmaztunk meg.

4.7. Feladat ([4] 5374. Feladat)**.** Döntsük el, hogy igaz vagy hamis a következő állítás!

a) Az $x \mapsto \frac{1}{3}\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ függvény periódusa 2π.

Megoldás. Az 1.24. Állítás alapján a függvény legkisebb pozitív periódusa π, így természetesen 2π szerint is periodikus. Viszont a feladatgyűjteményhez tartozó tankönyvben a 4.6. Definíció szerepel, amely csupán a legkisebb pozitív periódust nevezi periódusnak, ezért a példatárban található megoldás szerint ez egy hamis állítás. □

b) Az $x \mapsto 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ függvény periódusa π.

Megoldás. A függvény legkisebb pozitív periódusa π, így a feladatgyűjtemény szerint is igaz az állítás. □

c) Az $x \mapsto \cos 3x$ függvény periódusa 6π.

Megoldás. A függvény legkisebb pozitív periódusa $2\pi/3$, ezért kilencszerese, tehát 6π is periódusa, de az a) feladatrészhez hasonlóan a feladatgyűjtemény szerint ez egy hamis állítás. □

d) Az $x \mapsto \operatorname{tg} 3x$ függvény periódusa $\frac{\pi}{3}$.

e) Az $x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ függvény periódusa π.

Megoldás. A d)–e) részekben megadott periódusok az 1.24. Állítás alapján mind a szóban forgó függvények legkisebb pozitív periódusai, így az állítások igazak a feladatgyűjtemény szerint is. □

f) Az $x \mapsto 2\sin(x - 30°)$ függvény periódusa $360°$.

Megoldás. A feladatgyűjtemény szerint az állítás igaz, azonban ebben némi pontatlanság fedezhető fel, ugyanis a periodikusság definíciójában csak valós számot nevez periódusnak a tankönyv, márpedig a $360°$ nem valós szám.

□

Az emelt szintűnek jelzett feladatok között található 5390. számmal a következő, amelynek a megfogalmazása kissé ellentmond a tankönyvi definíciónak, hiszen legkisebb pozitív periódust említ.

4.8. Feladat ([4] 5390. Feladat)**.** Határozzuk meg a következő függvények legkisebb pozitív periódusát:

a) $f(x) = \sin 4x + \cos 4x \quad (x \in \mathbb{R})$,

b) $g(x) = |\cos x| \quad (x \in \mathbb{R})$.

A 4.8. Feladat megoldása.

a) A feladatgyűjtemény a $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ és $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$ azonosságok felhasználásával igazolja, hogy minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$. Ám ezzel csak azt bizonyítja, hogy $\pi/2$ periódusa az f függvénynek, még nem jelenthetjük ki, hogy nincs $\pi/2$-nél kisebb pozitív periódusa. Egy teljes indoklás a következő.

Az 1.24. Állítás alapján a $\sin 4x$ és $\cos 4x$ függvények legkisebb pozitív periódusa $\pi/2$, így az 1.11. Állításból következően összegfüggvényük, f is periodikus $\pi/2$ szerint. Ahhoz, hogy belássuk, hogy f-nek nincs $\pi/2$-nél kisebb pozitív periódusa, a következő trigonometrikus átalakítást használjuk:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x=\sin 4x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos 4x=\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Tehát

$$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right).$$

A hozzárendelési szabály ezen alakjából az 1.24. Állítás alapján adódik, hogy az f függvény legkisebb pozitív periódusa $2\pi/4=\pi/2$.

b) A feladatgyűjtemény a $\cos(x+\pi)=-\cos x$ azonosság felhasználásával látja be, hogy minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $g(x+\pi)=g(x)$, vagyis g periodikus π szerint, ám ebben a feladatrészben is elmulasztja megvizsgálni, hogy nincs kisebb pozitív periódusa. Mivel $g(0)=1$ és g a $(0,\pi)$ intervallumon nem veszi fel az 1 értéket, ezért g-nek nincs π-nél kisebb pozitív periódusa.

□

4.9. *Megjegyzés.* Ha a 4.8. Feladatban csak a g függvény periodikusságának igazolására lenne szükség, akkor azt könnyen megtehetjük úgy, hogy összetett függvényként gondolunk g-re. Ekkor a belső függvény periodikus a 2π valós szám szerint, így az 1.13. Állítás alapján g is az.

Periodikus függvények kompozíciójáról szól az ugyancsak emelt szintűként jelölt 5391. számú feladat.

4.10. Feladat ([4] 5391. Feladat)**.** Igazoljuk, hogy az $f(x)=\cos x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény nem periodikus.

Az 1.14. Megjegyzésben már láttunk egy példát arra, hogy ha az 1.13. Állításban nem a belső, hanem a külső függvény periodikus, akkor nem feltétlenül periodikus a kompozíciójuk. Ez a feladat szintén erre példa.

A 4.10. Feladat 1. megoldása. A feladatgyűjtemény egy indirekt okoskodást közöl. Tegyük fel, hogy a $p>0$ szám periódusa az f függvénynek. Ekkor minden x valós szám esetén $f(x+p)=f(x)$, azaz

$$\cos\big((x+p)^2\big)=\cos x^2. \tag{4.1}$$

A koszinuszfüggvény összes periódusa $k2\pi$ alakú, ahol k nem nulla egész szám. Legyen most x rögzített valós szám, amelynek pontos alakját a későbbiekben adjuk meg. A (4.1)

egyenlőség alapján a koszinuszfüggvény értékei az $(x+p)^2$ és x^2 helyeken megegyeznek, ez periodikussága miatt csak úgy lehetséges, ha valamely k egész szám esetén

$$(x+p)^2 - x^2 = k2\pi,$$

azaz

$$x = \frac{k\pi}{p} - \frac{p}{2}. \tag{4.2}$$

A tankönyv itt annyival zárja a gondolatmenetet, hogy az előbbi egyenlőség nem teljesülhet minden valós számra, ez ellentmondás. Érdemes ezt egy kicsit pontosabban megfogalmaznunk. Minthogy a jobb oldal a k egész értékeire egy π/p differenciájú számtani sorozat tagjait állítja elő, így ha x-et úgy választjuk, hogy nem tagja ennek a sorozatnak, máris ellentmondásra jutottunk. Legyen például

$$x = \frac{\pi}{2p} - \frac{p}{2},$$

ekkor a (4.2) egyenlőség az jelentené, hogy

$$\frac{\pi}{2p} - \frac{p}{2} = \frac{k\pi}{p} - \frac{p}{2},$$

azaz $1/2 = k$, ami valóban nem lehetséges. Tehát az f függvény nem periodikus. □

Az analízis eszközeinek segítségével egy másik megoldása is adható a feladatnak.

A 4.10. Feladat 2. megoldása. Újra indirekt módon tegyük fel, hogy az f függvény periodikus. Ekkor az 1.35. Állítás alapján f deriváltfüggvénye is periodikus, melynek hozzárendelési szabálya:

$$f'(x) = -2x \sin x^2.$$

Az f' függvény a számegyenesen mindenütt folytonos, viszont nem korlátos, hiszen $x_k = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k2\pi}$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ választással

$$f(x_k) = -2\sqrt{\frac{\pi}{2} + k2\pi} \xrightarrow{k\to\infty} -\infty.$$

A nem korlátosság ellentmond az 1.31. Állításnak, így f nem lehetett periodikus. □

4.2.5. Az analízis elemei

A tankönyv. A *Sorozatok* témakörben, a sorozatok tulajdonságaival foglalkozó első leckében található 4. mintapélda megoldásában bukkan fel egyedül a periodikusság fogalma az $a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ sorozat monotonitásának vizsgálatakor. A könyv indoklása szerint a sorozat tagjai „periodikusan ismétlődnek", ezért a sorozat nem monoton. Külön definíciója nem szerepel a periodikus sorozatnak, ám mivel a sorozatokra a könyvben szereplő definíciójuk alapján mint speciális, a pozitív egész számokon értelmezett függvényekként gondolunk, ezért ily módon adódik a periodikus sorozatok definíciója a periodikus függvény definíciójából: egy (a_n) sorozat periodikussága azt jelenti, hogy van olyan $p > 0$ egész szám, amelyre minden n pozitív egész esetén $a_{n+p} = a_n$.

Ezután a *Függvények tulajdonságai* című fejezetben találkozhatunk a periodikussággal, melynek következő definíciója szerepel rögtön az első leckében.

4.11. Definíció (Az analízis elemei tankönyvből)**.** Az $f(x)$ függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik úgy $p \in \mathbb{R}^+$, hogy bármely $x \in D_f$ esetén $(x \pm p) \in D_f$, továbbá $f(x) = f(x \pm p)$. Ha van legkisebb ilyen p szám, akkor azt (alap)periódusnak nevezzük.

Az 1.2. Megjegyzésben említettük, hogy a p pozitív voltának megkövetelése nem befolyásolja a definíciót, hiszen az 1.15. Állítás alapján ha egy függvény periodikus, akkor létezik pozitív periódusa. Az alapperiódus fogalmának bevezetésével pedig orvosolták a 12. osztályos tankönyvben szereplő pontatlanságot. A definíció alatt a törtrészfüggvényt, a trigonometrikus függvényeket és a konstansfüggvényt tárgyalja a tankönyv.

Ezek után megjegyzésben szerepel, hogy ha f és g két függvény, melyek legkisebb pozitív periódusa összemérhető, akkor az $f + g$ és $f - g$ függvények is periodikusak, amit mi a 2.12. Következményben igazoltunk. Ezt azért jegyzi meg a tankönyv, mert a lecke végén kitűzött feladatok között 7. számmal szerepel az általunk korábbiakban megoldott 2.17. Feladat, melynek megoldásához szükséges ennek ismerete. Példaként a következő két függvény esetét vizsgálja meg a tankönyv:

$$f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x \quad \text{és} \quad g(x) = \left\{\frac{1}{2}x\right\} - \left\{\frac{2}{3}x\right\}.$$

Ezután bizonyítás nélkül közli, hogy az f függvénynek egy periódusa 2π, a g függvénynek pedig egy periódusa a 6.

A tankönyv *Differenciálszámítás* című fejezetében a *Teljes függvényvizsgálat* című kiegészítő anyagként megjelölt leckében kidolgozott példaként szerepel az $x+\sin x$ függvény vizsgálata. Ennek egyik pontjaként a függvény nem periodikusságát is megemlíti a könyv azzal az indoklással, hogy az

$$x + p + \sin(x + p) = x + \sin x$$

egyenlet csak $p = 0$ esetben azonosság. Ez a kijelentés nem teljesen nyilvánvaló, a gondolatmenetet az 1.36. Állítás harmadik bizonyításában részletesen kifejtettük.

A tankönyv ugyanezen fejezetének végén található a következő feladat.

4.12. Feladat ([27] 146. oldal 2. feladat)**.** Lehet periodikus és nem periodikus függvény összege periodikus? Ha igen, adjunk példát.

Megoldás. Legyen az f periodikus és g nem periodikus függvények összege a h periodikus függvény, azaz $h(x) = f(x) + g(x)$ $(x \in D_f \cap D_g)$. Ekkor $h + (-f) = g$, ahol a bal oldalon az 1.11. Állítás miatt a $-f$ függvény is periodikus, ezért a feladatban feltett kérdés egyenértékű a 2. fejezetben tárgyalt kérdéssel, miszerint lehet-e két periodikus függvény összege nem periodikus. Így a 2.4. Feladat megoldása alapján $f(x) = -\sin\left(x\sqrt{2}\right)$ és $g(x) = \sin x + \sin\left(x\sqrt{2}\right)$ választással a 4.12. Feladatnak megfelelő példát adunk. □

A feladatgyűjtemény. Az analízis elemei feladatgyűjteményben szintén a *Függvények tulajdonságai* című fejezetben találkozhatunk először a periodikusság fogalmával. A definíció megértését, elmélyítését segíti a gyakorlónak jelölt 6034. számú feladat, melynek c) része a következő.

4.13. Feladat ([22] 6034. Feladat c) része)**.** Bizonyítsuk be, hogy ha az f és g függvények periodikusak a $p \neq 0$ szám, akkor a szorzatfüggvényüknek is periódusa p.

Mi is foglalkoztunk ezzel a feladattal az 1.11. Állításban, a bizonyítás menete hasonló, mint az összegfüggvény esetében. Ugyanezen feladat e) része viszont már olyan feladatként van megjelölve, amely az érettségi szintjét meghaladja.

4.14. Feladat ([22] 6034. Feladat e) része)**.** Tegyük fel, hogy az f és fg függvények periodikusak a p nem nulla szám szerint. Igaz-e, hogy ekkor g is periodikus p szerint? Mivel kell kiegészítenünk a feltételeket, hogy igaz legyen az állítás?

Természetesen már a kérdésfeltevés módjából is arra következtethetünk, hogy ebben a formában nem igaz az állítás. Triviális példa az $f(x) = 0$, $g(x) = x$ függvények esete. Ekkor f periodikus, hiszen konstansfüggvény, g pedig nem periodikus, mert például az 1 értéket pontosan egyszer veszi fel a számegyenesen, a szorzatfüggvényük pedig a konstans nulla függvény, amely periodikus.

A 4.14. Feladat megoldása. Ha a szorzatfüggvény periodikus p szerint, akkor minden $x \in D_f \cap D_g$ esetén az f függvény p szerinti periodikusságát felhasználva adódik, hogy

$$f(x)g(x) = (fg)(x) = (fg)(x+p) = f(x+p)g(x+p) = f(x)g(x+p) \tag{4.3}$$

Ha az f függvény valamely x és ebből adódóan az $x+p$ helyen a nulla értéket veszi fel, akkor az egyenlőség nyilvánvalóan teljesül $g(x)$ és $g(x+p)$ értékétől függetlenül, ezért g-nek nem kell periodikusnak lennie. A feladatgyűjteményben szereplő megoldás szerint a feltevésekhez hozzávéve azt, hogy f sehol sem nulla a közös értelmezési tartományon, a (4.3) egyenlőségből adódik, hogy g is periodikus. Itt viszont vigyáznunk kell, hiszen ha $D_f \neq D_g$, akkor a $D_g \setminus D_f$ halmazon általában semmi sem következik a g függvény periodikusságáról, tehát lehet nem periodikus is. Ezt az alábbi példa mutatja.

4.15. Példa. Legyen az f függvény a $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ halmazon értelmezett konstans 1 függvény. Továbbá legyen a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a következő hozzárendelési szabállyal megadva:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in D_f, \\ x, & \text{ha } x \notin D_f. \end{cases}$$

Ekkor az f függvény periodikus 1 szerint, hiszen ha x nem egész, akkor $x+1$ és $x-1$ sem az, így $f(x+1) = f(x)$. Mivel az f és g függvények szorzatfüggvénye éppen az f függvény, így fg is periodikus 1 szerint. Viszont a g függvény nem periodikus, mert például az $1/2$ értéket pontosan egy helyen veszi fel, méghozzá $x = 1/2$ esetén.

Az előző példában a problémát az okozta, hogy az f és g függvények értelmezési tartománya különböző volt. A feladatgyűjtemény ezzel nem foglalkozik, hallgatólagosan a $D_f = D_g$ esettel dolgozik, de az előbbi példa tanulsága alapján pontosításra van szükség. Tehát ha $D_f = D_g$, és a közös értelmezési tartományon f sehol sem nulla, akkor a (4.3) egyenletből az $f(x)$-szel való osztás után már valóban az adódik, hogy $g(x+p) = g(x)$, vagyis ekkor g is periodikus p szerint. Vagy általában $D_f \neq D_g$ esetén azt is mondhatjuk, hogy g periodikussága csak a $D_f \cap D_g$ intervallumra vonatkozóan következik. □

A feladatgyűjtemény 6035. számú, emelt szintűnek jelzett feladata hozzárendelési szabályukkal adott függvények jellemzését tűzi ki. Ezek közül a következő néhány érinti a dolgozat témakörét.

4.16. Feladat ([22] 6035. Feladat)**.** Periodikusak-e az alábbi függvények?

a) $p(x) = \lg(\sin x)$

b) $q(x) = 2^{\cos x}$

c) $s(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (2k, 2k+1], \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{ha } x \in (2k+1, 2k+2], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

A feladatgyűjtemény megoldásai között felsorolás jelleggel található meg, hogy az egyes függvények periodikusak-e, és ha igen, akkor mi egy periódusuk.

A 4.16. Feladat megoldása. A p és q függvények az 1.13. Állítás alapján periodikusak 2π szerint az értelmezési tartományukon. Azt is könnyen meggondolhatjuk, hogy nincs 2π-nél kisebb pozitív periódusuk, hiszen például a $[0, 2\pi)$ intervallumon p pontosan egyszer veszi fel a 0 értéket, méghozzá az $x = \pi/2$ helyen (ahol $\sin x = 1$), és q pontosan egyszer veszi fel a 2 értéket, méghozzá az $x = 0$ helyen (ahol $\cos x = 1$).

Az s függvény periodikus 2 szerint. Valóban, ha $x \in (2k, 2k+1]$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor

$$x + 2 \in (2k+2, 2k+3] = \big(2(k+1), 2(k+1)+1\big],$$

és ha $x \in (2k+1, 2k+2]$ $(k \in \mathbb{Z})$, akkor

$$x + 2 \in (2k+3, 2k+4] = \big(2(k+1)+1, 2(k+2)\big],$$

tehát minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $s(x+2) = s(x)$. Azt sem nehéz belátni, hogy a 2 a legkisebb pozitív periódusa s-nek, hiszen ha $0 < p \leq 1$, akkor $s(0+p) = 1 \neq 0 = s(0)$, tehát p nem periódus. Illetve ha $1 < p < 2$, akkor $s(2-p) = 1 \neq 0 = s(2)$.

□

A feladatgyűjtemény 6038. számú feladata hozzárendelési szabályukkal megadott függvények periodikusságának vizsgálatát kéri. A részfeladatok közül az első négy emelt szintűnek jelzett, az utolsót pedig kiegészítő feladatnak szánta a könyv.

4.17. Feladat ([22] 6038. Feladat)**.** Határozzuk meg az alábbi függvények periódusát:

a) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$,

b) $g(x) = \sin 3x$,

c) $h(x) = \{x\} + \{2x\}$,

d) $i(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$,

e) $j(x) = \sin\frac{x}{a} + \cos\frac{x}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Q}^+)$.

Az 1.15. Állítás alapján ha egy függvény periodikus, akkor végtelen sok periódusa van, ezért kissé pontatlan a kérdés. A feladatmegoldások közben viszont érdemes végiggondolni, hogy van-e legkisebb pozitív periódusa a függvényeknek.

A 4.17. Feladat megoldása. Az első három részfeladat esetében a feladatgyűjtemény megoldása bizonyítás nélkül közli a függvényeknek egy-egy periódusát.

Az 1.24. Állítás alapján az f és g függvények legkisebb pozitív periódusai rendre a $2\pi/(1/2) = 4\pi$ és $2\pi/3$ számok.

A h függvény esete már valamivel összetettebb. Az 1.7. Példában láttuk, hogy az $\{x\}$ törtrész-függvény legkisebb pozitív periódusa 1. A függvénytranszformációk legkisebb pozitív periódusra való hatásával foglalkozó 1.24. Állítás alapján a $\{2x\}$ függvény legkiseb periódusa $1/2$, így az 1.15. Állítás szerint $1/2$-nek bármely nem nulla egész számszorosa is periódusa, tehát az 1 is. Vagyis az $\{x\}$ és a $\{2x\}$ függvényeknek az 1 közös periódusa, ezért az 1.11. Állításból következően az összegfüggvényüknek, tehát h-nak is periódusa. A h függvénynek nincs 1-nél kisebb pozitív periódusa, hiszen például a $[0, 1)$ intervallumon csak az $x = 0$ helyen veszi fel a 0 értéket, mert $\{x\}$ és $\{2x\}$ minden x esetén nem negatív, és csak ezen a helyen 0 az értékük a megadott intervallumban.

Az i függvény $a = 2, b = 3$ választással a j általános hozzárendelési szabállyal megadott függvénycsalád egy speciális esete, ezért először gondoljuk végig a j függvény esetét. Mivel a, b nem nulla racionális számok, így $1/a$ és $1/b$ is racionálisak, tehát összemérhetők. Ekkor a 2.18. Tétel alapján a j függvény legkisebb pozitív periódusa a $2\pi/(1/a) = a2\pi$ és $2\pi/(1/b) = b2\pi$ számok legkisebb közös többszöröse. Speciálisan az i függvény legkisebb pozitív periódusa a $2\pi/(1/2) = 4\pi$ és $2\pi/(1/3) = 6\pi$ számok legkisebb közös többszöröse, ami 12π. A feladatgyűjteményben szereplő megoldás a periódusok legkisebb közös többszörösének az általános meghatározásával foglalkozik, azonban azt nem vizsgálja, hogy van-e kisebb pozitív periódus. □

A feladatgyűjtemény *Függvények tulajdonságai* című fejezetének végén kiegészítő anyagként van kitűzve a 6042. számú feladat.

4.18. Feladat ([22] 6042. Feladat)**.** Határozzuk meg az alábbi függvények periódusát:

a) $f(x) = \sin\{x\}$,

b) $g(x) = \sin[x]$,

c) $h(x) = \{x\} + \sin x$.

A 4.18. Feladat megoldása. Az f függvény az 1.13. Állítás alapján periodikus 1 szerint, hiszen a belső, törtrész-függvényről az 1.7. Példában láttuk, hogy periódusa az 1. Az f függvénynek nincs 1-nél kisebb pozitív periódusa, mivel például a $[0, 1)$ intervallumon pontosan egyszer veszi fel a 0 értékét, mégpedig az $x = 0$ helyen, hiszen $\{x\} = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ a szóban forgó intervallumban csak ebben a pontban teljesül.

A g összetett függvény esetén, melynek grafikonja a 4.1. ábrán látható, csupán a külső függvény periodikus, és az 1.14. Megjegyzésben láttuk, hogy ebből nem következik az összegfüggvény periodikussága. Megmutatjuk, hogy a g függvény nem periodikus.

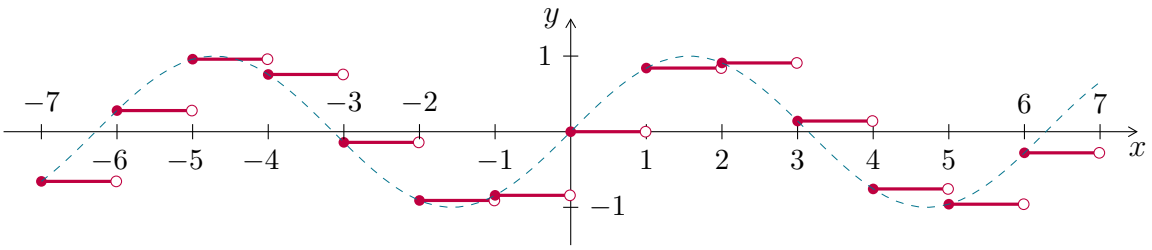
Az $[x]$ egészrész-függvény a $[k, k + 1)$ $(k \in \mathbb{Z})$ intervallumon felvett értéke a k konstans, így ezen az intervallumon g a $\sin k$ értéket veszi fel. Ezek az értékek páronként különbözőek, ugyanis $\sin k_1 = \sin k_2$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \neq k_2)$ esetén a szinuszfüggvény tulajdonságai alapján az adódna, hogy valamely n egész számra

$$k_1 = k_2 + n2\pi \quad (n \neq 0) \quad \text{vagy} \quad k_1 = \pi - k_2 + n2\pi,$$

ahonnan π-t kifejezve

$$\pi = \frac{k_1 - k_2}{2n} \quad \text{vagy} \quad \pi = \frac{2(k_1 + k_2)}{2n+1},$$

ami ellentmondás, hiszen π nem racionális szám. Tehát a g függvény a $\sin k$ értéket csak a $[k, k+1)$ intervallumon veszi fel, ezért nem lehet periodikus.



4.1. ábra. A $g(x) = \sin[x]$ függvény grafikonja

A h függvény (grafikonja a 4.2. ábrán látható) esetében két periodikus függvény összegének periodikusságát kell megvizsgálnunk.

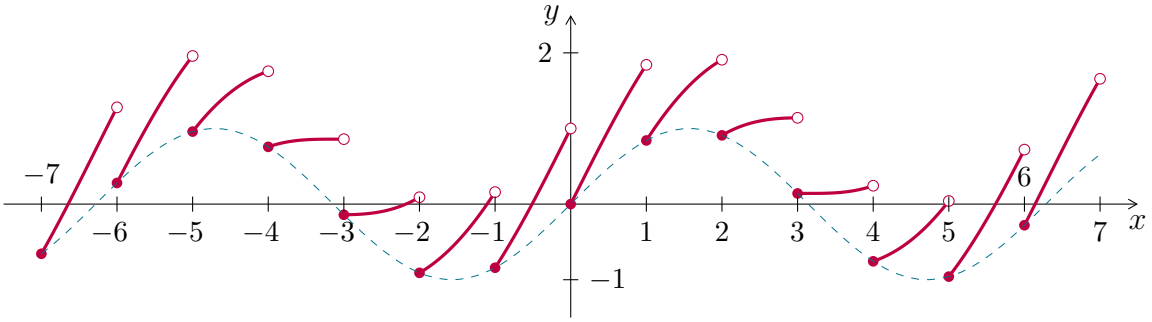
Az $\{x\}$ és $\sin x$ függvények legkisebb pozitív periódusai rendre az 1 és 2π valós számok, melyek nem összemérhetők. A 2.1. szakaszban viszont láttuk, hogy periodikusság szempontjából az összegükről általában semmit sem mondhatunk. A feladatgyűjteményben található megoldás szerint a h függvény nem periodikus, mert a törtrészfüggvény miatt a periódus csak pozitív egész lehet, a szinuszfüggvény miatt pedig 2π többszöröse. Ez viszont nem helytálló kijelentés, hiszen a 2.8. Példában olyan függvényeket mutattunk, melyek legkisebb pozitív periódusai nem összemérhetők, az összegfüggvényük viszont mégis periodikus. A dolgozatban igazoltuk a 2.11. Tételt, amely szerint ha legalább az egyik függvény folytonos, akkor az összegük csak úgy lehet periodikus, ha a két függvény legkisebb pozitív periódusa összemérhető. Ezzel a kiegészítéssel teljes lenne a feladatgyűjteményben szereplő megoldás, hiszen a szinuszfüggvény folytonos. Tehát a h függvény valóban nem periodikus, amit indirekt úton a következőképpen is beláthatunk.

Tegyük fel, hogy p periódusa a h függvénynek. Ekkor $h(p) = h(0)$ alapján

$$\{p\} + \sin p = 0, \tag{4.4}$$

továbbá $h(-p) = h(0)$ folytán

$$\{-p\} + \sin(-p) = 0. \tag{4.5}$$



4.2. ábra. A $h(x) = \{x\} + \sin x$ függvény grafikonja

A szinuszfüggvény páratlan volta miatt $\sin(-p) = -\sin p$, így a (4.4) és (4.5) egyenletek összegéből adódik, hogy

$$\{p\} + \{-p\} = 0.$$

Minthogy minden x valós szám esetén $\{x\} \geq 0$, és egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha x egész, ezért szükségképpen p egész szám. De ekkor a (4.4) összefüggés miatt $\sin p = 0$, ami viszont $p = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) esetén teljesül, ám így $p/k = \pi$ alapján π racionális lenne, ami lehetetlen. □

4.3. Periodikusság egyéb tankönyvcsaládokban

Ebben a szakaszban néhány, az elmúlt egy-két évtizedben forgalomban lévő tankönyvcsaládnak a periodikusság fogalmához kapcsolódó részeit tekintjük át. Sok közös vonást fogunk találni bennük, ugyanakkor bizonyos tankönyvek a szemléletet helyezik előtérbe, míg mások a pontos definíció irányába mozdulnak el.

4.3.1. Az Újgenerációs tankönyvcsalád

A kompetenciaalapú Újgenerációs tankönyvcsaládban a periodikusság fogalmával először a 11. osztályosoknak szóló kötetben ([6]) találkozunk, méghozzá a szinuszfüggvénnyel foglalkozó leckében. A függvény jellemzői között találjuk meg azt, hogy periodikus 2π szerint. A tankönyv nem ad pontos definíciót, inkább az egybevágósági transzformációk fogalmán keresztül a következőképp magyarázza: „Ha a függvény grafikonját az x tengellyel párhuzamosan eltoljuk 2π-vel, akkor az eredeti függvény grafikonját kapjuk.” Mivel a grafikon x tengellyel párhuzamos, p hosszúságú eltolása az $f(x+p)$ és $f(x-p)$ függvénytranszformációval érhető el, így a tankönyv által megfogalmazott tulajdonság formálisan azt jelenti, hogy minden x esetén $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$. A könyv azt is írja, hogy ez a szinuszfüggvényre vonatkozóan az egységkörös definíciójából látható, hiszen az $x+2\pi$ az x-hez képest az egységvektor egy teljes körbefordulását jelenti, így valóban „bármely x valós szám esetén $\sin(x+2\pi) = \sin x$.”

Ez a tankönyv is a legkisebb pozitív periódust nevezi periódusnak: „A 2π-nél rövidebb eltolás esetén (ha az eltolás hossza nem nulla) ez [az eredeti függvénybe érkezés] nem fordulhat elő. Ezért nevezzük a 2π-t a szinuszfüggvény periódusának.”

4.3.2. Hajnal Imre: Matematika a gimnáziumok számára

A Hajnal Imre által az 1990-es évek elején a gimnáziumok számára írt matematika tankönyvcsaládot a 2000-es évek elején az akkoriban bevezetett kerettanterveknek megfelelően átdolgozták. Ennek a sorozatnak a 10. osztályosoknak szóló kötetében ([18]) szintén a szinuszfüggvény bevezetésénél találkozhatunk először a periodikusság fogalmával. Az egységkörös definíció után olvasható, hogy: „az egységvektor 360°-os elforgatása után az előző helyzetbe tér vissza, [...] ezért $\sin(x+360°) = \sin x$.” A fokok használata kissé zavaró lehet ugyanúgy, mint a 4.7. Feladatban, hiszen a szinuszfüggvény a valós számokon értelmezett függvényként van definiálva a tankönyvben, a 360° viszont nem valós szám. Valamint a következőben azt is látni fogjuk, hogy a periódusról is mint valós számról beszél a könyv. A periodikusság fogalmát ezután vezeti be, mint „hétköznapi szóhasználat” említi először, hogy a szinuszfüggvény előbbi tulajdonságára azt mondjuk, hogy a szinuszértékek periodikusan ismétlődnek. Leírja viszont, hogy

ezt a tulajdonságot matematikai fogalomként tekintjük, ezért meg kell adni a pontos definícióját. A precíz megfogalmazás előtt a könyv egy $H \subset \mathbb{R}$ halmazon értelmezett f függvény esetén beszél általánosan a periodikusság jelentéséről. A könyv szerint az x helyen felvett $f(x)$ érték ismétlődik, ha egy másik helyen is felveszi a függvény ugyanezt az értéket. Ez a hely legyen p-vel nagyobb az eredetinél, tehát $f(x+p) = f(x)$. A gondolatmenet szerint ennek minden x esetén igaznak kell lennie, így az

$$f(x+2p) = f(x), \quad f(x+2p) = f(x), \quad \ldots$$

egyenlőségek is teljesülnek. Ezután kimondja, hogy a p számot a függvény periódusának nevezzük. Ebben a magyarázatban nem szerepel p előjele, de mivel csak p pozitív egész számszorosairól fogalmazza meg a függvényértékek ismétlődését, így például félegyenesen értelmezett függvényeket is periodikusnak tekint. Ezek után viszont a következő definíció szerepel a tankönyvben kiemelt környezetben.

4.19. Definíció (A [18] könyvben szereplő definíció)**.** Az $f\colon H \to \mathbb{R}$ függvényt periodikusnak mondjuk, ha létezik olyan $0 < p$ konstans, hogy minden x-re ($x \in H$) fennáll

$$x + p \in H \quad \text{és az} \quad f(x+p) = f(x)$$

egyenlőség. Ha p a legkisebb olyan szám, amelyre ez teljesül, akkor a p konstanst az f függvény periódusának nevezzük.

A definíció a félegyenesen értelmezett függvények problémáját most is tartalmazza, viszont p-t már pozitívként rögzíti. Pontosít abban a tekintetben, hogy hozzáveszi a feltételekhez, hogy $x + p$ is az értelmezési tartományban van. Azonban a periódus fogalma ellentmond a definíció előtt írottaknak, hiszen már csak a legkisebb pozitív periódust nevezi periódusnak. Ezek után megjegyzésként a [6] tankönyvben szereplő, eltoláson alapuló szemléletes képet is megadja.

A 12. osztályos diákoknak szóló kötetben ([19]) a függvényjellemzők ismétlésénél szintén a 4.19. Definíció szerepel.

4.3.3. Heuréka tankönyvsorozat

A Heuréka tankönysorozat 10. osztályos tanulóknak íródott matematika tankönyvében ([12]) a szinuszfüggvény definíciójánál találkozunk a periodikusság fogalmával. Először a szinuszfüggvény grafikonja utáni függvényjellmezésben olvashatjuk magyarázat nélkül, hogy periódusa 2π. A jellemzés alatt ugyanúgy, mint [18] tankönyvben az áll, hogy a szinuszértékek periodikus ismétlődése egy hétköznapi szóhasználat, de matematikai fogalomként pontos definícióra van szükség. Ezt követően a [18] könyvben található 4.19. Definícióval szinte szó szerint megegyező értelmezés szerepel.

A könyvsorozat 12. osztályosoknak szóló tankönyvében ([13]) a *Rendszerező összefoglalás* című fejezetben jelenik meg a periodikusság fogalma a függvényjellemzők gyűjteményében. A 4.19. Definíciót azzal egészíti ki, hogy nyilvánvaló módon, ha létezik ilyen p szám, akkor végtelen sok a definíciónak megfelelő szám létezik, hiszen p bármely pozitív egész számszorosa is rendelkezik a megkövetelt tulajdonságokkal. Ezek után azzal zárja a periodikusság fogalmának átismétlését, hogy ha a végtelen sok p szám között van legkisebb, akkor ezt a függvény periódusának nevezzük.

4.3.4. Hajdu Sándor által szerkesztett tankönyvcsalád

A Hajdu Sándor által szerkesztett, középiskolásoknak szóló matematika tankönyvcsalád kilencedik osztályosoknak szóló [15] kötetében a *Hozzárendelés, függvények* című fejezetben találkozhatunk először a periodikusság fogalmával a *Néhány nemlineáris függvény* című leckében. A törtrész-függvény kapcsán kerül elő a fogalom. A valós számok tört részének definíciója után szerepel a törtrész-függvény grafikonjának ábrázolása, majd a grafikonról leolvasott tulajdonság, miszerint: „a függvény szakaszonként ugyanazokat az értékeket veszi fel, azaz *periodikus*". Ezután a könyv megállapítja, hogy a legrövidebb szakasz, amely az előbbi ismétlődést mutatja, 1 hosszúságú, de megemlíti, hogy „a törtrész-függvény értékei ugyanazok $2, 3, 4$ vagy akár 2002 hosszúságú szakaszonként is". Periódusnak a legkisebb ismétlődő szakasz hosszát nevezi. A lecke végén táblázatba foglalva találhatjuk meg a leckében tárgyalt új függvényeket jellemzőikkel. A táblázatban periodikusság szempontjából is jellemezve vannak a függvények, melyek között viszont csak a törtrész-függvény periodikus.

A 10. osztályosoknak szóló tankönyv ([16]) *Szögfüggvények* című fejezetének *Szögfüggvények ábrázolása* című leckéjében a szinusz-, koszinusz-, tangens- és kotangensfüggvények esetében említi meg, hogy a grafikonjuk „azt az ismert tényt is megerősíti, hogy a függvények periodikusak", majd megadja egy-egy periódusukat.

A 12. osztályosoknak szánt kötetben ([17]) a *Függvények* című fejezet *Függvényjellemzők* című leckéjében a 4.19. Definícióval megegyező értelmezését találjuk a periodikus függvényeknek. A definíció alatt példaként sorolja fel a szinusz-, koszinusz-, tangens- és kotangensfüggvényeket legkisebb pozitív periódusukkal. Végül megemlíti, hogy a kimondott definíció alapján az egész számegyenesen értelmezett konstansfüggvény bár periodikus, de periódusa nincs.

4.3.5. Pintér Lajos: Analízis I.

A speciális matematika tanterv szerint tanuló gimnazisták számára készült analízis tankönyvben ([28]) a függvényjellemzéssel foglalkozó szakaszban a függvények monotonitásával kapcsolatban találkozhatunk a Dirichlet-függvénnyel, és a periodikusságának kérdése a lecke végén kitűzött feladatok között szerepel. Itt kerül elő a periodikusság fogalma is a következő definícióval.

4.20. Definíció (A [28] könyvben szereplő definíció)**.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt periodikusnak nevezzük, ha van olyan $p \neq 0$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra $f(x+p) = f(x)$. A p számot a függvény periódusának nevezzük.

A definíció az egész számegyenesen értelmezett függvényről szól, ezért (ahogy már az 1.2. Megjegyzésben is említettük) automatikusan az $x + p$ és $x - p$ helyeken is értelmezve van a függvény, ráadásul $f(x - p) = f(x)$ is teljesül. A definíció után azt jegyezi meg a tankönyv, hogy egy periodikus függvényt elég egy periódusnyi hosszúságú intervallumon megvizsgálni a jellemzéséhez. Ezek után belátja, hogy ha a p szám periódusa egy függvénynek, akkor $2p$ is az, majd feladatként kitűzve szerepel annak igazolása, hogy bármely $n \neq 0$ egész szám esetén np is periódusa. Érdekes példaként a könyv a 2. fejezetben tárgyalt 2.1. Feladatot oldja meg a speciális $n = 1$ esetben. Később a differenciálszámításról szóló részben a 2.4. Feladatot tárgyalja az általunk is ismertetett 1. megoldás gondolatmenetét követve.

Irodalomjegyzék

[1] Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, 9. osztály, Mozaik Kiadó, Szeged, 2009.

[2] Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, 10. osztály, Mozaik Kiadó, Szeged, 2009.

[3] Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, 11. osztály, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[4] Árki Tamás, Konfárné Nagy Klára, Kovács István, Trembeczki Csaba, Urbán János: Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, 12. osztály, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[5] Bakos Tibor, Lőrincz Pál, Tusnády Gábor: Középiskolai Matematikai Versenyek 1969, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[6] Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Kelemenné Kiss Ilona, Bálint Zsuzsanna: Újgenerációs tankönycsalád, Matematika 11. osztály, Eszterházy Károly Egyetem, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Eger, 2017.

[7] R. Beigel: Solution of Problem 1095, *Math. Mag.*, **54** (1981) 142–143.

[8] Besenyei Ádám: Csemegék az analízisből középiskolai ízesítéssel, 2018/2019. őszi félévi speciálelőadás órai jegyzet

[9] R. Caveny, J. Caveny: Periodic Sums of Functions with Incommensurable Periods, *Math. Mag.*, **55** (1982), 280–285.

[10] J. Caveny, W. Page: Periods of Sums of Periodic Functions, *Coll. Math. J.*, **20** (1989), 32–41.

[11] Freud Róbert: Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1998.

[12] Dr. Gerőcs László, Számadó László: Matematika, 10. osztály, Eszterházy Károly Egyetem, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Eger, 2015.

[13] Dr. Gerőcs László, Számadó László: Matematika, 12. osztály, Eszterházy Károly Egyetem, Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Eger, 2015.

[14] Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán, Bevezető analízis I. jegyzet és példatár, https://margitgemes.web.elte.hu/Peldatar_OSZK/bevaBook.pdf (Utolsó megtekintés: 2020. 01. 31.)

[15] Hajdu Sándor: Matematika 9. osztály, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2003.

[16] Hajdu Sándor: Matematika 10. osztály, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2005.

[17] Hajdu Sándor: Matematika 12. osztály, Műszaki Kiadó, Budapest, 2010.

[18] Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia: Matematika a gimnáziumok számára, 10. osztály, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

[19] Hajnal Imre, Számadó László, Békéssy Szilvia: Matematika a gimnáziumok számára, 12. osztály, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004.

[20] Középiskolai Matemetikai és Fizikai Lapok archívuma, http://db.komal.hu/KomalHU/ (Utolsó megtekintés: 2020. 01. 31.)

[21] S. Mortola, R. Peirone: The sum of periodic functions, *Boll. Unione Mat. Ital.*, (8) **2** (1999), 393–396.

[22] Kovács István, Trembeczki Csaba: Sokszínű matematika, Az analízis elemei feladatgyűjtemény, Mozaik Kiadó, Szeged, 2016.

[23] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika tankönyv, 9. osztály, Mozaik Kiadó, Szeged, 2018.

[24] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika tankönyv, 10. osztály, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[25] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika tankönyv, 11. osztály, Mozaik Kiadó, Szeged, 2012.

[26] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: Sokszínű matematika tankönyv, 12. osztály, Mozaik Kiadó, Szeged, 2012.

[27] Schlegl István, Trembeczki Csaba: Sokszínű matematika, Az analízis elemei, Mozaik Kiadó, Szeged, 2018.

[28] Dr. Pintér Lajos: Analízis I., Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[29] Pósa Lajos: Összefoglalás (algebra, függvények, számelmélet, kombinatorika), Calibra, Budapest, 1999.

[30] D. Radcliffe: Sums of periodic functions, http://mathblag.wordpress.com/2013/09/01/sums-of-periodic-functions (Utolsó megtekintés: 2020. 01. 31.)

[31] Varecza Árpád, Rozgonyi Tibor: A tanárképző főiskolák Péter Rózsa matematikai versenyei IV., 1986–2002, Typotex Kiadó, Budapest, 2003.

[32] Versenyvizsga Portál, http://www.versenyvizsga.hu/ (Utolsó megtekintés: 2020. 01. 31.)