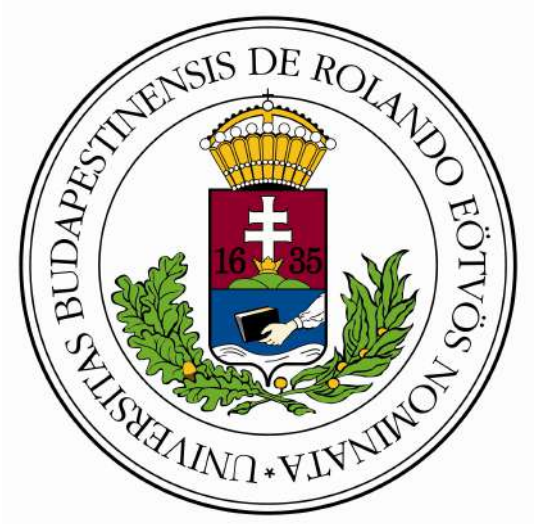
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

INTEGRÁLKÖZELÍTÉSI MÓDSZEREK

Témavezető:
Dr. Sikolya Eszter
egyetemi adjunktus
ELTE Matematikai Intézet
Alkalmazott Analízis és
Számításmatematikai Tanszék

Készítette:
Vágó Csaba
történelemtanár és
állampolgári ismeretek tanára,
matematikatanár
osztatlan tanári mesterképzés



2022

Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott VÁGÓ CSABA (név)

OSE8NE (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE történelemtanár és állampolgári ismeretek tanára, matematikatanár osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2022. 04. 20.

Vágó Csaba

a hallgató aláírása

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Sikolya Eszter tanárnőnek, amiért munkámat figyelemmel kísérte, késéseimet és hibáimat hatalmas türelemmel fogadta. A dolgozat elkészítéséhez, időt és energiát nem sprórolva, rengeteg szakmai segítséggel és építő javaslattal járult hozzá. Köszönettel tartozom családomnak, akik mindvégig támogatásukról biztosítottak az elmúlt hat év folyamán és az egyetemi éveket megelőzően is. Végül köszönet illeti barátaimat, akik mindig ott voltak, ha kételkedni kezdtem önmagamban, vagy a pályában, amit választottam.

Nélkülük ez a dolgozat sohasem készülhetett volna el.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **1**

1. A Riemann-integrál **3**
1.1. Motivációs példa 3
1.2. A Riemann-integrál értelmezése 6

2. Közelítési eljárások **13**
2.1. Téglány-, vagy Riemann-összeg 13
2.2. Középponti szabály vagy érintőformula 17
2.3. Trapézformula 21
2.4. Simpson-formula 24
2.5. A formulák hibáinak összehasonlítása 29

3. Az integrálközelítések matematikai elmélete **31**
3.1. Lagrange-interpoláció 31
3.2. Egyszerű Newton–Cotes kvadratúrák 34
3.3. Összetett kvadratúraképletek 37

4. Módszertani kitekintés **39**
4.1. Határozott integrálás a kerettantervben és érettségi követelményekben . . . 39
4.2. Közelítő integrálás tankönyvekben 41
4.3. Egy szakkör lehetséges tematikus terve feladatokkal 42

Irodalomjegyzék **47**

Bevezetés

A középiskolai emelt szintű matematikaoktatás egyik sarokkövét adja az analízis tudományának mélyebb elsajátítása, köztük a differenciál- és integrálszámítás elemeinek megismerése. Ezen témák rendkívül szerteágazóak, teljes feldolgozásukra aligha lehet idő egy középiskolai osztályban, ugyanakkor vannak csapásirányok, melyek mentén a diákok ismeretei bővíthetőek. Ezeknek távlati haszna, ha a tanulók a megszerzett ismereteket a felsőoktatásban, esetleg munkájuk során tudják kamatoztatni, rövid távon pedig bízhatunk abban, hogy munkánkkal minőségi változást értünk el a tanulókban a matematikáról kialakított képpel kapcsolatban.

A középiskolai határozott integrálás tanítása legtöbbször az elméleti háttér, valamint a közvetlen matematikai és fizikai alkalmazási lehetőségek kimerítését veszi célba, ritkaság számba megy, hogy a feladatmegoldások során a tanulók ne "szép" függvényekkel találkozzanak. Bizonyosan alig merül fel a kérdés: van-e minden függvénynek explicit alakba írható primitív függvénye? Ha a válasz nemleges, akkor bajban vagyunk, hiszen a Newton–Leibniz-tétel nem alkalmas számításaink elvégzésére. De ha van is ilyen primitív függvény, akkor annak megkeresése sokszor bonyolult, sok időt vehet igénybe. Szintén nem sok szó esik arról, mi történik akkor, ha az integrálandó függvény nem ismert, csak bizonyos pontokban ismerünk függvényértékeket, mint például egy mérés során. Mit tehetünk ekkor, ha a nem ismert függvényünk grafikonja alatti területet kívánjuk kiszámolni?

A fentebb vázolt problémák legalább részleges megoldása céljából született ezen szakdolgozat, mely a határozott integrálás témájának egy lehetséges kitekintése. Azon diákok számára, akik természettudományos, informatikai, vagy mérnöki pályán képzelik el jövőjüket, némi előismeretet nyújthat a felsőoktatásban tanított numerikus analízis című tantárgyakhoz, melyeknek ez csak egy kis szeletét teszi ki.

Az első fejezetben a Riemann-integrál bevezetéséről, az ehhez kapcsolódó alapvető és leginkább releváns fogalmakról és eredményekről (például Newton–Leibniz-tétel) értekeztem. Az integrálközelítéseket két fejezetben tárgyaltam, az első jóval közelebb áll a középiskolás szemlélethez, a másik inkább az egyetemi szintű matematika oldaláról vizsgálja a témát. Végül a téma egy lehetséges középiskolai feldolgozásához kívántam némi ismeretet és segítséget nyújtani.

1. fejezet

A Riemann-integrál

1.1. Motivációs példa

A középiskolában sok geometria órát töltöttünk különböző síkidomok területének kiszámításával. Próbáljunk meg most egy intervallumon értelmezett függvény grafikonja és az x-tengely által határolt területet meghatározni, ld. [8], 45–47. oldal.

1.1. Példa. Tekintsük az

$$f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

hozzárendeléssel megadott függvényt, és határozzuk meg a grafikon, az x tengely és az $x = 1$ egyenletű egyenes által közrefogott síkidom területét, melyet a továbbiakban T-vel jelölünk.

Nyilvánvaló, hogy

$$0 \leq T \leq 1,$$

hiszen a síkidom benne van az $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ négyzetben.

Most osszuk fel az x-tengely $[0, 1]$ intervallumát két egyenlő részre! A két részintervallumhoz illesszünk két-két téglalapot, melyek alapjai a megfelelő részintervallumok lesznek, magasságuk pedig a függvény legkisebb, illetve legnagyobb értéke a megadott részintervallumon. (ld. 1.1. ábra) Ezen téglalapok összterülete a síkidom területének egy alsó, illetve felső közelítését adja.

A $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ intervallumon elhelyezkedő kisebb magasságú téglalap területe 0, mivel magassága 0 (elfajult), a téglalapok területei alapján pedig teljesül a következő:

$$\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq T \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2,$$

$$\frac{1}{8} \leq T \leq \frac{5}{8}.$$

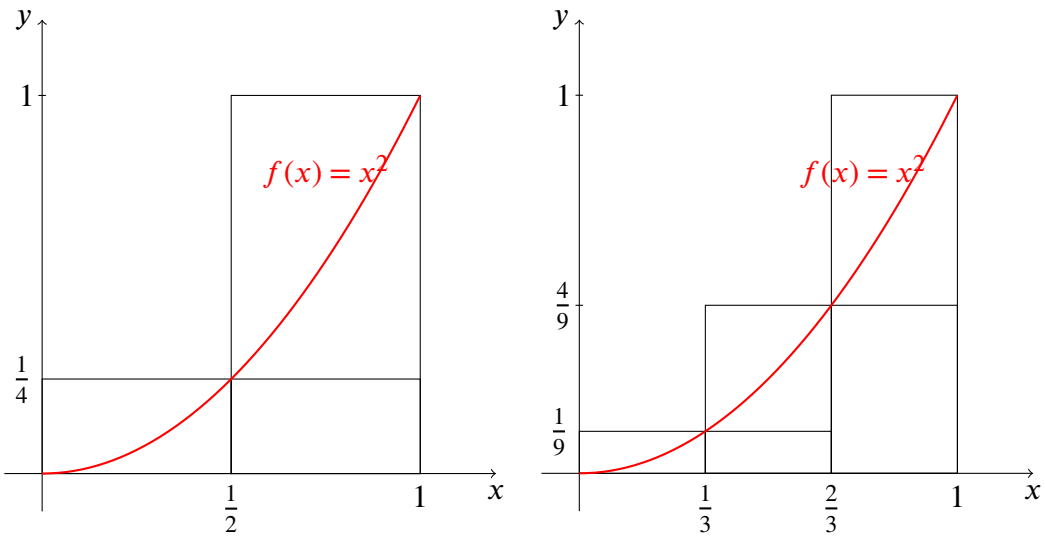
Ha három egyenlő részre osztanánk az intervallumot, és ugyanilyen módon közelítenénk T-t,

akkor a következő adódna:

$$\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\le T\le\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot 1^2,$$

$$\frac{5}{27}\le T\le\frac{14}{27}.$$

Ellenőrizhető, hogy $\frac{1}{3}$ hosszúságú intervallumok esetén nagyobb alsó és kisebb felső becslést kapunk T értékére.



1.1. ábra. Az $f:[0,\,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2$ függvény grafikonja alatti terület közelítése téglalapokkal, két, illetve három egyenlő hosszúságú részintervallumra bontással.

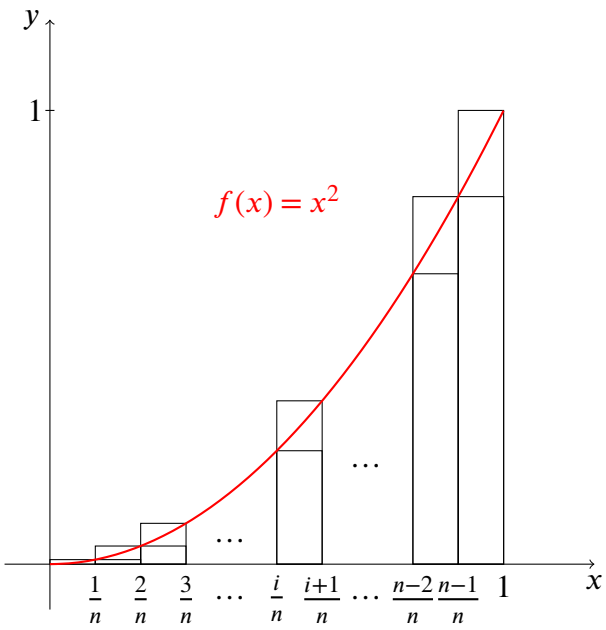
Most osszuk fel hasonlóan az intervallumot n egyenlő részre $\left(n\in\mathbb{N}^+\right)$, és közelítsük T-t a fenti módon téglalapok területeivel! Értelemszerűen minden téglalap alapja $\frac{1}{n}$ hosszúságú lesz. Mivel az $f(x)=x^2$ függvény szigorúan monoton nő minden részintervallumon, így annak bal végpontjában veszi fel minimumát, jobb végpontjában maximumát. Emiatt legyen az i-edik téglalapok magassága $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$, illetve $\left(\frac{i}{n}\right)^2$. Mindez azt jelenti, hogy az $\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$ magasságú téglalapok a keresett terület alsó közelítését, míg az $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ magasságúak egy felső közelítését adják. (ld. 1.2. ábra)

A téglalapok összterülete az alsó közelítés esetén:

$$s_n=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\right).$$

A téglalapok összeterülete a felső közelítés esetén:

$$S_n=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right).$$



1.2. ábra. Az $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$ függvény grafikonja alatti terület közelítése az intervallum n egyenlő részre osztásával.

Tanult összefüggés alapján az első n négyzetszám összege a következő:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ amiből}$$

$$s_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

$$S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Vizsgáljuk meg mindkét kifejezés határértékét a végtelenben:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3}.$$

Ellenőrizhető továbbá, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$s_n < \frac{1}{3} < S_n.$$

Azt kaptuk, hogy az n-edik alsó, illetve felső közelítések $\frac{1}{3}$-hoz tartanak, ha $n \to \infty$. Egyetlen számot találtunk, ami minden s_n-nél nagyobb és minden S_n-nél kisebb, ez alapján a síkidom területe:

$$T = \frac{1}{3}.$$

1.2. A Riemann-integrál értelmezése

Ebben az alfejezetben a határozott, vagy Riemann-integrálás értelmezésének elméleti hátterét mutatom be a [7] tankönyv 348–350., 370–374. és 387–388. oldalai alapján, illetve a [10] jegyzet felhasználásával. A cél nem egy teljeskörű elméleti feldolgozás, hanem egy bevezetés nyújtása, amely valamivel több, mint amit középiskolában tanítani szokás, valamivel pedig kevesebb: az integrálhatóság szükséges és elégséges feltételeire és egyéb más tételekre nem térek ki. A Riemann-integrál fogalma után csak a téma szempontjából leginkább releváns és a dolgozatban is használt Newton–Leibniz-tételt mutatom be.

1.2. Definíció. Legyen adott egy $[a,\ b]$ korlátos és zárt intervallum és egy $n \in \mathbb{N}$ szám. Az $[a,\ b]$ intervallum egy *felosztásán* olyan $\Phi = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ véges sorozatot értünk, amelyre

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Az x_i pontokat $(i = 1, \ldots, n)$ a Φ *osztópontjainak* nevezzük, az $[x_{i-1},\ x_i]$ intervallumok a felosztás *osztóintervallumai*.

1.3. Definíció. A felosztás finomsága az osztóintervallumok hosszainak maximuma, vagyis

$$\delta(\Phi) = \max\left\{x_i - x_{i-1} \ :\ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

1.4. Definíció. A $\widetilde{\Phi}$ felosztás a Φ felosztás finomítása, ha $\widetilde{\Phi}$ a Φ-ből véges sok (akár 0) osztópont hozzávételével adódik.

Megjegyzés. Ekkor Φ minden osztópontja egyben $\widetilde{\Phi}$-nak is osztópontja.

1.5. Definíció. Legyen $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és legyen Φ egy felosztása $[a,\ b]$-nek. Ekkor az f függvénynek a Φ felosztáshoz tartozó *alsó összege*:

$$s_\Phi := \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},\ x_i]} f \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Az f függvénynek a Φ felosztáshoz tartozó *felső összege*:

$$S_\Phi := \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},\ x_i]} f \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Megjegyzés. A két definícióban az $\left(x_i - x_{i-1}\right)$ kifejezés az osztóintervallumok hosszát jelöli, az alsó összeg esetében $\inf\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} f$ a már korábban látott alulról, $\sup\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} f$ pedig a felülről közelítő téglalapok magasságát adja.

Megjegyzés. A továbbiakban

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},\ x_i]} f \quad \text{és} \quad M_i = \sup_{[x_{i-1},\ x_i]} f$$

jelölést használjuk, valamint vegyük észre, hogy $m_i \in \mathbb{R}$ és $M_i \in \mathbb{R}$, hiszen feltettük, hogy f korlátos függvény.

1.6. Állítás. *Tetszőleges f korlátos függvény esetén minden Φ felosztásra igaz, hogy*

$$s_\Phi \leq S_\Phi.$$

Bizonyítás.

$$S_\Phi - s_\Phi = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(M_i - m_i)}_{0\leq} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{0\leq} \geq 0.$$

Vagyis

$$S_\Phi - s_\Phi \geq 0,$$

$$s_\Phi \leq S_\Phi$$ ■

1.7. Állítás. *Új osztópont hozzávételével az alsó összeg nem csökkenhet, a felső összeg nem növekedhet.*

Bizonyítás. Most csak az alsó összegre bizonyítjuk az állítást, a felső összeg esete hasonló.

Vegyünk egy új osztópontot, u-t, amelyre $x_{k-1} < u < x_k$ és legyen $\Phi := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $\widetilde{\Phi} := \{x_0, \ldots, x_{k-1}, u, x_k, \ldots, x_n\}$. Írjuk fel a két felosztáshoz tartozó alsó összeget az alábbi alakokban:

$$s_\Phi = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

$$s_{\widetilde{\Phi}} = \sum_{i=1}^{k-1} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + \widetilde{m_k} \cdot (u - x_{k-1}) + \widetilde{\widetilde{m_k}} \cdot (x_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

ahol

$$\widetilde{m_k} = \inf_{[x_{k-1},\, u]} f \quad \text{és} \quad \widetilde{\widetilde{m_k}} = \inf_{[u,\, x_k]} f\,.$$

A két összeg legtöbb tagja megegyezik, a különbségüket véve:

$$s_{\widetilde{\Phi}} - s_\Phi = \widetilde{m_k} \cdot (u - x_{k-1}) + \widetilde{\widetilde{m_k}} \cdot (x_k - u) - m_k \cdot \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{(x_k - u) + (u - x_{k-1})}.$$

A fenti összeget az alábbi alakra hozhatjuk:

$$s_{\widetilde{\Phi}} - s_\Phi = (\widetilde{m_k} - m_k) \cdot (u - x_{k-1}) + (\widetilde{\widetilde{m_k}} - m_k) \cdot (x_k - u).$$

Ezen kifejezésben minden zárójeles tényező legalább 0, hiszen egy részhalmazon vett infi-

mum legalább akkora, mint a bővebb halmazon vett infimum. Vagyis:

$$\underbrace{(\widetilde{m_k} - m_k)}_{0\leq} \cdot \underbrace{(u - x_{k-1})}_{0\leq} + \underbrace{(\widetilde{\widetilde{m_k}} - m_k)}_{0\leq} \cdot \underbrace{(x_k - u)}_{0\leq} \geq 0.$$

Azaz

$$s_{\widetilde{\Phi}} - s_\Phi \geq 0,$$

$$s_{\widetilde{\Phi}} \geq s_\Phi.$$

■

Tehát egy új osztópont hozzávételével az alsó összeg nem csökkent. Ezt ismételgetve kapjuk, hogy véges sok új osztópont hozzávételével az alsó összeg nem csökkenhet.

1.8. Következmény. *Minden* Φ *és* $\widetilde{\Phi}$ *felosztásra*

$$s_\Phi \leq S_{\widetilde{\Phi}}.$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega = \Phi \cup \widetilde{\Phi}$, vagyis Ω a Φ és $\widetilde{\Phi}$ osztópontjaiból álló felosztás (Φ és $\widetilde{\Phi}$ közös finomítása). Ekkor az 1.7. Állítás miatt

$$s_\Phi \leq s_\Omega \quad \text{és} \quad S_\Omega \leq S_{\widetilde{\Phi}}.$$

Ugyanakkor az 1.6 Állítás miatt

$$s_\Omega \leq S_\Omega.$$

Vagyis:

$$s_\Phi \leq s_\Omega \leq S_\Omega \leq S_{\widetilde{\Phi}},$$

amiből a bizonyítandó állítás adódik. ■

1.9. Következmény. *Az alsó összegek halmaza felülről, a felső összegek halmaza alulról korlátos.*

1.10. Definíció. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény *alsó integrálja* $[a, b]$-n

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx := \sup\{s_\Phi : \Phi \text{ felosztása } [a, b]\text{-nek}\}.$$

Felső integrálja $[a, b]$-n

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx := \inf\{S_\Phi : \Phi \text{ felosztása } [a, b]\text{-nek}\}.$$

1.11. Definíció. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény *Riemann-integrálható* vagy *integrálható*,

ha

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Ekkor ezen közös értéket az f Riemann-integráljának vagy határozott integráljának nevezzük $[a,\ b]$-n és az alábbi módon jelöljük:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

1.12. Definíció. Adott egy $f:\ [a,\ b] \to \mathbb{R}$ függvény, $[a,\ b]$-nek egy $\Phi = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ felosztása és $c_i \in \left[x_{i-1},\ x_i\right]$ közbülső pontok minden i-re. Ekkor

$$\sigma_\Phi := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\left(x_i - x_{i-1}\right)$$

az f függvény Φ felosztáshoz és $(c_1, \ldots, c_n)$-hez tartozó *közelítő* vagy *Riemann-összege*.

Megjegyzés. Belátható, hogy minden Φ felosztásra

$$s_\Phi \le \sigma_\Phi \le S_\Phi.$$

A határozott integrálról sok állítást és tételt lehetne részletezni, szerepeljenek most itt a téma szempontjából a legfontosabbak.

1.13. Állítás. *Ha f integrálható $[a,\ b]$-n, és $c \in \mathbb{R}$, akkor $c \cdot f$ is integrálható $[a,\ b]$-n és*

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

1.14. Állítás. *Ha f, g integrálhatók $[a,\ b]$-n, akkor $f+g$ is integrálható $[a,\ b]$-n, és*

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

1.15. Állítás. *Legyen $a < b < c$, és legyen f függvény értelmezve $[a,\ c]$-n. Ha f integrálható az $[a,\ b]$ és $[b,\ c]$ intervallumokon, akkor $[a,\ c]$-n is integrálható, és*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx.$$

A klasszikus analízis egyik legfontosabb eredménye, hogy az integrálszámítás szoros kapcsolatban áll a differenciálszámítással. A kettő közötti kapcsolat bizonyításához szükségünk lesz a Lagrange-féle középértéktételre, amelyet a differenciálszámítás témaköréből ismerünk, illetve egy definícióra.

1.16. Definíció. Az $f\colon (a,\ b) \to \mathbb{R}$ függvénynek $F\colon (a,\ b) \to \mathbb{R}$ függvény *primitív függvénye*, ha $F' = f$ az $(a,\ b)$-n.

1.17. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)**.** *Legyen $f\colon [a,\ b] \to \mathbb{R}$ folytonos, $(a,\ b)$-n differenciálható függvény. Ekkor létezik olyan $c \in (a,\ b)$, hogy*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ennek segítségével igazolható az alábbi tétel.

1.18. Tétel (Newton–Leibniz-tétel)**.** *Legyen f integrálható függvény $[a,\ b]$-n, $F' = f$, ahol $F\colon [a,\ b] \to \mathbb{R}$, függvény differenciálható $(a,\ b)$-n és folytonos $[a,\ b]$-n. Ekkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Megjegyzés. Egy szokásos jelölés:

$$F(b) - F(a) = [F]_a^b.$$

Bizonyítás. Legyen $\Phi = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ egy felosztása $[a,\ b]$-nek. Alkalmazzuk az 1.17. Tételt a F függvényre az $\left[x_{i-1},\ x_i\right]$ intervallumon! Eszerint létezik olyan $c_i \in \left(x_{i-1},\ x_i\right)$, amelyre

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i) \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right) = f(c_i) \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Adjuk össze $i = 1, \dots, n$-re ezeket a tagokat, ekkor az alábbi teleszkopikus összeget kapjuk:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + \dots$$
$$+ F(x_1) - F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right).$$

Itt a

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

összeg egy közelítő összeg, vagyis teljesül az alábbi minden Φ felosztásra:

$$s_\Phi \le F(b) - F(a) \le S_\Phi.$$

Mivel feltettük, hogy f integrálható függvény, ezért szükségképpen

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

ezzel pedig beláttuk a tételt. ■

Megjegyzés. Az integrálszámítás legfontosabb alkalmazási lehetősége a területszámítás. (ld. részletesebben [5] 143–147. oldalak) Legyen adott a síkban egy $\mathcal{A}$ korlátos síkidom. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{S}_b$ belső sokszöge $\mathcal{A}$-nak, ha $\mathcal{S}_b \subset \mathcal{A}$, hasonlóan $\mathcal{S}_k$ külső sokszöge $\mathcal{A}$-nak, ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_k$. Emiatt $\mathcal{S}_b \subset \mathcal{S}_k$, és ha létezik a belső és külső sokszögeknek területe, akkor igaz, hogy

$$T\left(\mathcal{S}_b\right) \leq T\left(\mathcal{S}_k\right).$$

Legyen $t_1(\mathcal{A})$ a belső sokszögek területéből nyert értékek legkisebb felső korlátja, azaz

$$t_1(\mathcal{A}) = \sup\{T\left(\mathcal{S}_b\right) | \mathcal{S}_b \subset \mathcal{A}\} \cup \{0\},$$

jelölje $t_2(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ sokszög külső sokszögeinek területeinek legnagyobb alsó korlátját, azaz

$$t_2(\mathcal{A}) = \inf\{T\left(\mathcal{S}_k\right) | \mathcal{A} \subset \mathcal{S}_k\}.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ korlátos síkbeli alakzatnak van területe, ha fennáll, hogy $t_1(\mathcal{A}) = t_2(\mathcal{A})$, és ezen közös értéket nevezzük az $\mathcal{A}$ területének.

Vegyük észre, hogy egy korlátos síkidom területének geometriai értelmezése hasonló a Riemann-integrál értelmezéséhez. Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f \geq 0$ függvény Riemann-integrálja nem más, mint annak a korlátos síkidomnak a területe, amelyet az abszcissza tengely $[a, b]$ intervalluma, az $x = a$, $x = b$ egyenesek, illetve az f függvény grafikonja határol. Az értelemezés során valójában nem csináltunk mást, mint speciális magasságú téglalapokból belső és külső sokszögeket alkottunk a grafikon alatti síkidomhoz, ezek területei adták az alsó és felső összeget.

1.19. Példa. Alkalmazzuk a Newton–Leibniz-tételt az 1.1. Példára! Tekintsük az

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

függvényt, és határozzuk meg a grafikon, az x tengely és az $x = 1$ egyenletű egyenes által közrefogott síkidom T területét! Legyen $F(x) = \frac{x^3}{3}$! Erre igaz, hogy $F' = f$, $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, F differenciálható $(0, 1)$-en és folytonos $[0, 1]$-en.

Emiatt alkalmazható a Newton–Leibniz-tétel, amely alapján:

$$T = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ez ugyanannyi, mint amit az 1.1. Példa eredményeként is kaptunk. Vagyis a Newton–Leibniz-tétel alkalmazása jelentősen lerövidítette a számolást.

2. fejezet

Közelítési eljárások

A Riemann-integrál bevezetésekor tetszőleges felosztásait vehettünk az $[a,\ b]$ intervalumnak. Mivel mi most csak a legelemibb közelítési eljárásokat tekintjük át, ezért tekintsük a továbbiakban minden esetben az intervallumok egyenlő hosszúságú részintervallumokra osztását!

2.1. Definíció. Legyen adott az $[a,\ b]$ intervallum egy $\Phi = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ felosztása. A felosztást *egyenletesnek* vagy *ekvidisztánsnak* nevezzük, ha $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = h$ állandó $(k = 1, \ldots, n)$.

A következő alfejezetekben áttekintjük, milyen alakzatok területösszegeivel közelíthetjük a grafikonok alatti területeket, illetve kitérünk az egyes esetek hibabecslésére is. Ha az $[a,\ b]$ intervallumot n részre osztottuk és az X-típusú közelítési eljárással közelítettük ott az integrál értékét, akkor a továbbiakban ezen X_n közelítés hibáját $E(X_n)$-nel jelöljük.

2.1. Téglány-, vagy Riemann-összeg

Az $\int_a^b f(x)\,dx$ határozott integrált $(f \geq 0)$, vagyis az $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja, az x-tengely, illetve az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt területet téglalapok területösszegével közelítjük. Osszuk fel az $[a,\ b]$ intervallumot n darab egyenlő részre! Egy ilyen intervallum hosszát jelölje h, vagyis $h = \frac{b-a}{n}$. Ekkor az egyes osztópontok az alábbiak:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \ldots \quad x_{n-1} = a + (n-1)h, \quad x_n = a + nh = b.$$

Illesszünk minden részintervallumra egy-egy téglalapot! (ld. [1] 318–320. oldalak) Mivel minden részintervallum hossza h, ezért a téglalapok két oldalának hossza is h. Vegyünk minden részintervalumból egy c_j pontot, azaz $c_j \in [x_{j-1},\ x_j]$, $j = 1,\ 2, \ldots, n$. A j-edik intervallumra állított téglalap magassága legyen $f(c_j)$. Ezzel megkaptuk az első közelítésünket, amely a már korábban említett közelítőösszeg, vagy Riemann-összeg. Az ezen általános eljárással kapott integrálközelítést a továbbiaknak C_n-nel jelüljük, ahol n a részintervallumok számát jelöli.

Megjegyzés. Válasszuk a fentebbi eljárás során a téglalapok magasságát mindig a megfelelő részintervallum bal végpontjában felvett függvényértéknek, azaz a j-edik $[x_{j-1},\ x_j]$ $(j = 1,\ 2, \ldots, n)$ intervallumra írt téglalap magassága $f(x_{j-1})$. Ezen közelítést *bal oldali téglányösszegnek* vagy *bal oldali Riemann-összegnek* nevezzük (L_n).

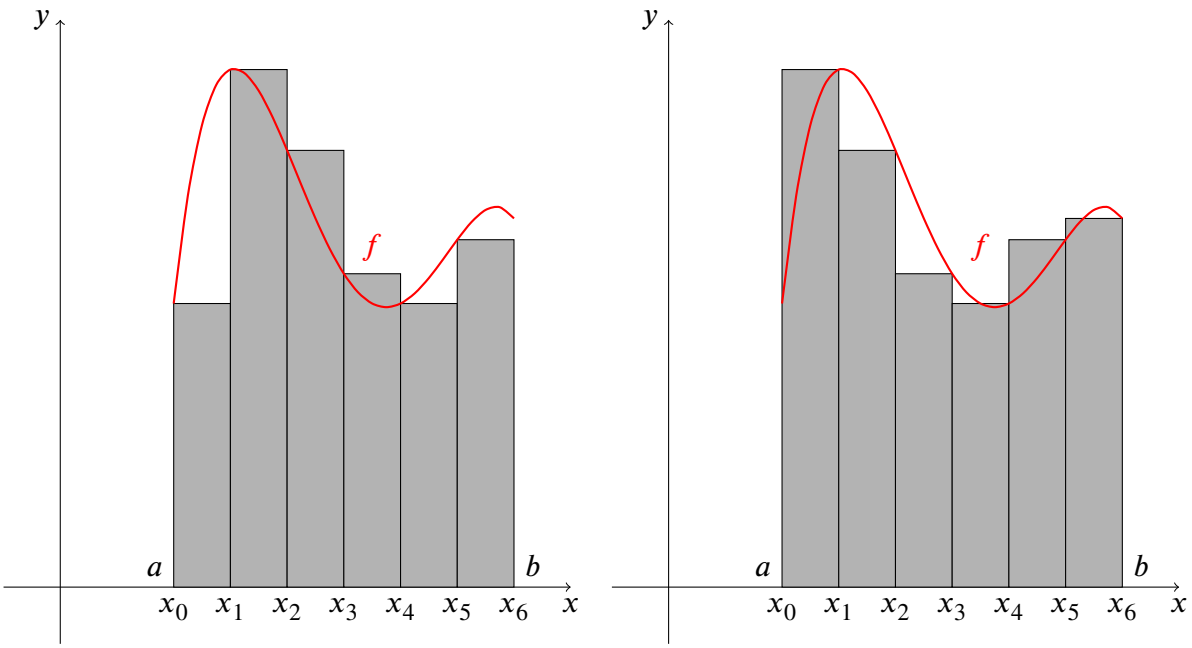
Hasonlóan választhatjuk a téglalapok magasságát az intervallum jobb végpontjában felvett függvényértéknek, vagyis a j-edik téglalap magassága $f(x_j)$. Az így kapott közelítést *jobb oldali téglányösszegnek*, vagy *jobb oldali Riemann-összegnek* nevezzük (R_n). (ld. 2.1. ábra) Láthatóan mindkét eljárás a közelítőösszegek egy-egy speciális esete.

Az első esetben kapott L_n közelítőösszeg:

$$L_n = hf(x_0) + hf(x_1) + \ldots + hf(x_{n-1}) = h\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right),$$

míg a második esetben kapott R_n közelítőösszeg:

$$R_n = h\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right).$$



2.1. ábra. Az $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja alatti terület közelítése bal és jobb oldali téglánymódszerrel.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha a függvény az $[a,\ b]$ intervallumban monoton növő, akkor L_n az integrál alsó korlátja, R_n pedig felső korlátja. Illetve épp fordítva: ha a függvény az $[a,\ b]$-n monoton csökkenő, akkor L_n az integrál alsó, míg R_n az integrál felső korlátja.

Minél nagyobb n-et választunk, azaz minél több egyenlő részre osztjuk fel az $[a,\ b]$ intervallumot, annál pontosabb eredményt kapunk a tényleges integrálra. Számítsuk ki, milyen

hibával dolgozunk, ha ezeket az eljárásokat használjuk! Azt vizsgáljuk, hogy mekkora n-et kell választanunk ahhoz, hogy a hibánk ne haladjon meg egy előre megadott hibahatárt. (A hibabecsléshez ld. [2] jegyzetet.)

Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk most az f függvényt a $[0,\ h]$ intervallumon és vegyük a téglalapok magasságát az intervallum bal végpontjában felvett függvényértéknek, $f(0)$-nak. Innen adódik az alábbi közelítés:

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx h \cdot f(0).$$

A közelítés során elkövetett hiba $E(L_1)$, amit a következő alakba írhatunk:

$$E(L_1) = \int_0^h f(x)\,dx\ - h \cdot f(0).$$

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható. A $\int_0^h f(x)\,dx$ integrálfüggvény deriváltja h szerint $f(h)$, így az $E(L_1)$ hiba h szerinti első és második deriváltjára adódik, hogy

$$E'(L_1) = f(h) - f(0),$$

$$E''(L_1) = f'(h).$$

Utóbbi egyenlet mindkét oldalának az abszolút értékét véve következik az alábbi felső becslés:

$$|E''(L_1)| = |f'(h)| \le M_1, \quad \text{ahol} \quad M_1 = \sup_{t\in[0,\ h]} |f'(t)|.$$

A $[0,\ h]$ intervallumon történő integrálással kapjuk a következő három becsléseket:

$$\begin{aligned} |E''(L_1)| &\le M_1 \\ |E'(L_1)| &\le M_1 h \\ |E(L_1)| &\le M_1 \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

Vagyis a hibánk abszolút értéke:

$$|E(L_1)| \le M_1 \frac{h^2}{2}. \tag{1}$$

Mivel most csak egy h hosszú intervallumra becsültük meg a hibát, adjuk össze mindezt az összes részintervallumra! Tekintsük az f függvényünket az $[a,\ b]$ intervalumon, melyet n darab $h = \frac{b-a}{n}$ hosszú részintervallumra osztottunk fel. Ekkor a közelítésünk:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot h).$$

Az (1)-es becslés alapján a teljes hiba a hibák összege, jelen esetben n-szerese, mivel n darab részintervallum van:

$$E(L_n) \leq n \cdot M_1 \cdot \frac{h^2}{2}.$$

Behelyettesítve h helyére $\frac{b-a}{n}$-et, kapjuk a végleges becslést a hibára:

$$E(L_n) \leq n \cdot M_1 \cdot \frac{(b-a)^2}{2n^2} = M_1 \frac{(b-a)^2}{2n},$$

ahol $M_1 = \sup_{t \in [a,\, b]} |f'(t)|$.

Megjegyzés. A hibaképlet mind a bal, mind a jobb oldali téglánymódszerre igaz.

2.2. Példa. Számítsuk ki a bal és jobb oldali téglánymódszer segítségével közelítőleg az alábbi integrált:

$$I = \int_2^6 x^2 \, dx.$$

Legyen $f(x) = x^2$, $f : [2,\, 6] \to \mathbb{R}$ és $h = 1$, tehát a részintervallumok hossza 1 egység. A részintervallumok végpontjaihoz tartozó függvényértékek pedig:

$$f(2) = 2^2 = 4, \quad f(3) = 3^2 = 9, \quad f(4) = 4^2 = 16, \quad f(5) = 5^2 = 25, \quad f(6) = 6^2 = 36.$$

Ezek alapján a bal oldali téglánymódszerrel adódó közelítőösszeg:

$$L_4 = 1 \cdot (4 + 9 + 16 + 25) = 54,$$

míg a másik módszerrel adódó:

$$R_4 = 1 \cdot (9 + 16 + 25 + 36) = 86.$$

Láthatóan nagy a különbség a két közelítés között. Ennek oka, hogy elég durva felosztást alkalmaztunk. Természetesen a fenti integrál pontos értékét a Newton–Leibniz-tétel segítségével könnyen ki tudjuk számítani:

$$\int_2^6 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^6 = \frac{216}{3} - \frac{8}{3} = \frac{208}{3} = 69\frac{1}{3}$$

Most a hibaképlet alapján számítsuk ki, mennyinek kellett volna választanunk n értékét, ha azt szeretnénk, hogy a hibánk 1-nél kisebb legyen, vagyis $E(L_n) < 1$ és $E(R_n) < 1$.

Nyilvánvaló, hogy $f'(x) = 2x$, melynek felső korlátja (egyben legkisebb felső korlátja) a $[2,\, 6]$ intervallumon $M = 2 \cdot 6 = 12$.

Az ismert adatokat a hibaképletbe helyettesítve:

$$E(L_n) \leq 12 \cdot \frac{(6-2)^2}{2n} = \frac{96}{n} < 1,$$

$$E(R_n) \leq 12 \cdot \frac{(6-2)^2}{2n} = \frac{96}{n} < 1.$$

Átszorozva $n > 0$-val azt kapjuk, hogy ha $n = 97$ egyenlő részre osztjuk az $[2,\ 6]$ intervallumot, akkor a számolás során a hibánk biztosan kisebb lesz 1-nél mind a két esetben.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy hibabecslésünk nem pontos! A hibaképlet alapján 97 egyenlő részre osztással már biztosan jók vagyunk, de ezzel nem zárhatjuk ki, hogy ennél kevesebb részintervallumra osztással is a közelítésünk hibája 1 alatt lesz.

2.2. Középponti szabály vagy érintőformula

A következő közelítési eljárás során is téglalapokat fogunk használni, azonban magasságukat másképp fogjuk megválasztani. (ld. [9] elektronikus jegyzetet) Ismételten osszuk fel az $[a,\ b]$ intervallumot n darab egyenlő részre és egy részintervallum hosszát jelölje h, ahol $h = \frac{b-a}{n}$.

Ekkor a j-edik ($j = 1, \ldots, n$) részintervallum $[x_{j-1},\ x_j]$, amelyre

$$x_{j-1} = a + (j-1) \cdot h \quad \text{és} \quad x_j = a + j \cdot h.$$

Keressük meg minden részintervallum közepét! Az $[x_{j-1},\ x_j]$ intervallum c_j felezőpontja a végpontjainak számtani közepe, vagyis

$$c_j = \frac{a + (j-1) \cdot h + a + j \cdot h}{2} = \frac{2a + h \cdot (2j-1)}{2} = a + h \cdot \left(j - \frac{1}{2}\right).$$

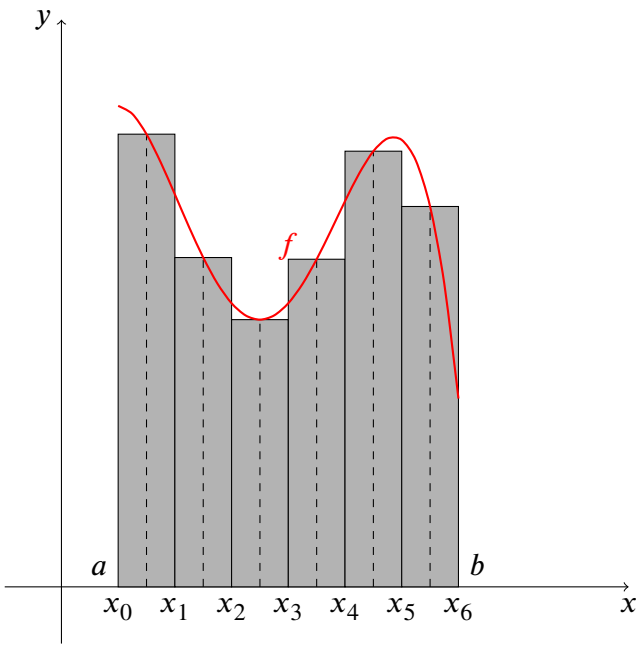
Válassszuk a j-edik részintervallumra írt téglalap magasságát $f(c_j)$-nek! Az így kapott téglalap területe $h \cdot f(c_j)$. Ebből adódik, hogy az eljárással történő közelítés ezen téglalapok területeinek összege, vagyis:

$$K_n = h \cdot f(c_1) + h \cdot f(c_2) + \ldots + h \cdot f(c_n) = h \cdot \big(f(c_1) + f(c_2) + \ldots + f(c_n)\big).$$

Ezt a közelítési eljárást a továbbiaknak *középponti szabálynak* hívjuk. (ld. 2.2. ábra)

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy f differenciálható függvény. Ekkor a k-adik téglalap $h \cdot f(c_k)$ területe megyegyezik annak a derékszögű trapéznak a területével, melynek magassága h, középvonalának hossza $f(c_k)$ és a trapéz egyik oldala érinti a függvény grafikonját a $(c_k,\ f(c_k))$ pontban. (ld. 2.3 ábra)

Hogy ezt bizonyítsuk, írjuk fel a grafikon érintőjének egyenletét ebben a pontban! Ehhez a differenciálszámításnál megismert összefüggést fogjuk használni, amely alapján a $(c_k,\ f(c_k))$



2.2. ábra. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja alatti terület közelítése a középponti szabály alapján.

pontban az érintő egyenlete:

$$y = f(c_k) + f'(c_k) \cdot (x - c_k).$$

Számoljuk ki a trapéz párhuzamos oldalainak hosszát! Az x_{k-1} abszcisszán található oldal hossza:

$$l_k = f(c_k) + f'(c_k) \cdot (x_{k-1} - c_k),$$

míg az x_k abszcisszán találhatóé:

$$r_k = f(c_k) + f'(c_k) \cdot (x_k - c_k).$$

A trapéz területe az ismert területképlet alapján:

$$T_{\text{trap}} = \frac{h \cdot (l_k + r_k)}{2}.$$

Fejtsük ki a fenti összefüggések alapján a területképletet:

$$T_{\text{trap}} = h \cdot \frac{2f(c_k) + f'(c_k) \cdot (x_{k-1} - c_k + x_k - c_k)}{2}.$$

Mivel c_k az $[x_{k-1},\ x_k]$ intervallum felezőpontja, ezért

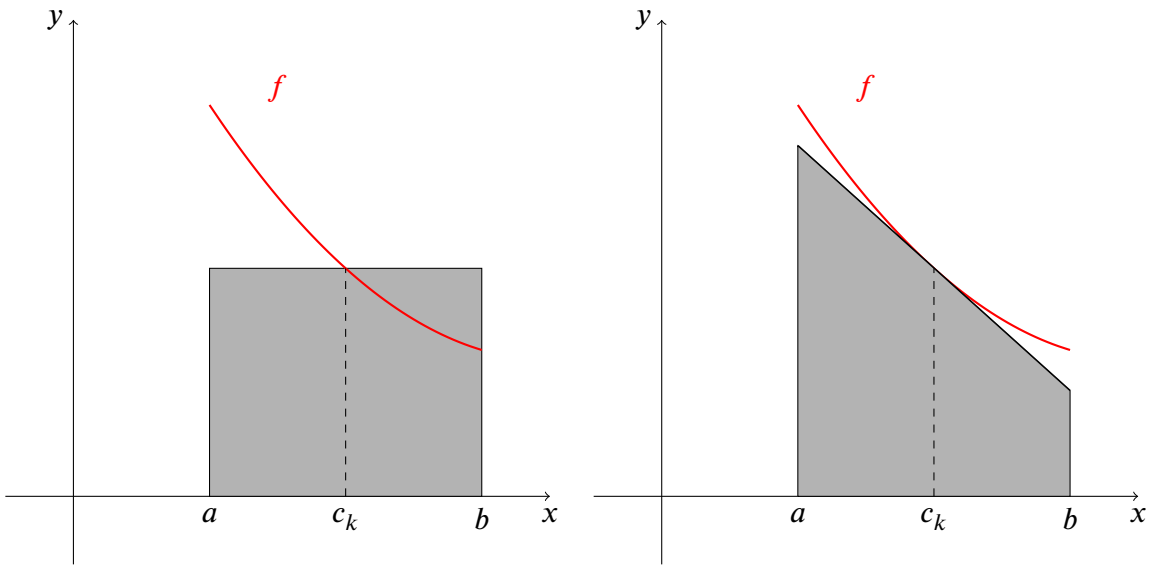
$$2c_k = x_{k-1} + x_k.$$

Ezzel:

$$T_{\text{trap}} = h \cdot \frac{2f(c_k) + f'(c_k) \cdot \overbrace{(x_{k-1} - c_k + x_k - c_k)}^{0}}{2} = h \cdot f(c_k),$$

ahol $h \cdot f(c_k)$ pedig a középponti szabály által nyert k-adik intervallumra illesztett téglalap területe, és ezt szerettük volna belátni.

Azt kaptuk, hogy a középponti szabály által kialakított téglalap területe megegyezik a függvényhez a $\big(c_k, f(c_k)\big)$-ba húzott érintőegyenes alatti területtel. Ezen utóbbi módszert szokás *érintőformulának* nevezni.



2.3. ábra. Ugyanazon intervallumon értelmezett függvény grafikonja alatti terület közelítése a középponti szabály alapján és érintőformulával. A szürkével jelölt területek megegyeznek.

Felmerül újra a kérdés: mekkora hibával dolgoztunk a közelítések során? Erra a kérdésre ad választ a középponti szabály, és a vele közelítés szempontból azonos érintőformula hibabecslése.

2.3. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n darab egyenlő részre. Ekkor tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén a középponti szabály által kiszámolt közelítés E_n hibájára igaz az alábbi felső becslés:*

$$E_n \leq \frac{M \cdot (b-a)^3}{24n^2},$$

ahol a $|f''|$ korlátos függvénynek M felső korlátja az $[a, b]$ intervallumon.

A tételt annak nehézsége miatt nem bizonyítjuk. Inkább alkalmazzuk a módszert és annak hibabecslését egy egyszerűbb, már ismert példán!

2.4. Példa. Közelítsük az alábbi integrál értékét a középponti szabály segítségével:

$$I = \int_2^6 x^2 \, dx.$$

A feladat megegyezik a korábbi alfejezet 2.2 Példájával. Használjunk ugyanúgy $n = 4$ egyenlő intervallumot, így a részintervallumok hossza minden esetben $h = 1$ lesz. A középponti szabályhoz ezen részintervallumok középeire van szükségünk, amelyek rendre: $2,5$; $3,5$; $4,5$; $5,5$. Ezen pontokban a függvényértékek:

$$f(2,5) = 2,5^2 = 6,25, \quad f(3,5) = 3,5^2 = 12,25, \quad f(4,5) = 20,25, \quad f(5,5) = 30,25.$$

Innen a középponti szabály alapján az K_n közelítőösszeg $n = 4$ esetben:

$$K_4 = h \cdot \big(f(c_1) + f(c_2) + \ldots + f(c_n)\big) = 1 \cdot (6,25 + 12,25 + 20,25 + 30,25) = 69,$$

amely már majdnem megegyezik az integrál pontos értékével. Vegyük észre, hogy itt csak négy adattal számoltunk, míg a korábbi esetben öt pontra volt szükségünk.

A középponti szabály hibaformulája alapján számoljuk ki, mekkorának kellene vennünk n értékét, hogy a közelítési hibánk 10^{-2}-nál kisebb legyen!

Ehhez vegyük az $f(x) = x^2$ függvény második deriváltját, amely $f''(x) = 2$, vagyis $M = 2$ jó felső korlát. Az ismert adatokat behelyettesítve a hibaképletbe:

$$E_n \leq \frac{2 \cdot (6-2)^3}{24n^2} = \frac{128}{24n^2} = \frac{16}{3n^2}.$$

Mi azt szeretnénk, hogy a hibánk kisebb 10^{-2}-nál, azaz

$$E_n \leq 10^{-2},$$

vagyis az alábbi egyenlőtlenséget kell kiszámítanunk:

$$E_n \leq \frac{16}{3n^2} < 10^{-2}.$$

Az második egyenlőtlenségben $n^2 > 0$-val felszorozva és az egyenlőtlenség mindkét oldalából gyököt vonva ($n > 0$) az alábbit kapjuk:

$$\frac{40\sqrt{3}}{3} < n.$$

Ez azt jelenti, hogy n értékének $\frac{40\sqrt{3}}{3}$-nál nagyobb értéket kell vennünk. Ezen numerikus érték közelítőleg $23,094$, és mivel n potizív egész, így legalább 24 egyenlő részre kell osztanunk a $[2,\ 6]$ intervallumot, hogy a hibánk 10^{-2}-nál kisebb legyen.

Ellenőrizhető, hogy $n = 24$ esetén a középponti szabállyal kiszámolt integrál közelítőértéke $\approx 69,324$, melynek hibája ténylegesen kevesebb, mint 10^{-2}.

2.3. Trapézformula

Az előző alfejezetben megismert érintőformula során a függvény alatti terület közelítéséhez speciális trapézokat használtunk. Ezen részben hasonlóan trapézokat fogunk felhasználni az integrálközelítés során, ld. [11] tankönyv 262–264. oldalak. Tegyük fel ismételten, hogy az $[a,\ b]$ intervallumot n darab egyenlő részre osztottuk fel, így minden egyes részintervallum hossza $h = \frac{b-a}{n}$. Ekkor az i-edik ($i = 1, \ldots, n$) részintervallum $[x_{i-1},\ x_i]$, ahol

$$x_{i-1} = a + (j-1) \cdot h \quad \text{és} \quad x_i = a + i \cdot h.$$

Az i-edik ($i = 1,\ \ldots,\ n$) részintervallum fölé illesszünk trapézt úgy, hogy annak magassága a részintervallum h hossza, alapjai pedig $f(x_{i-1})$, illetve $f(x_i)$ hosszúságúak.

Ekkor az i-edik részintervallum feletti trapéz területe a geometriából jól ismert területszámítási módszer alapján:

$$T_i = h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right).$$

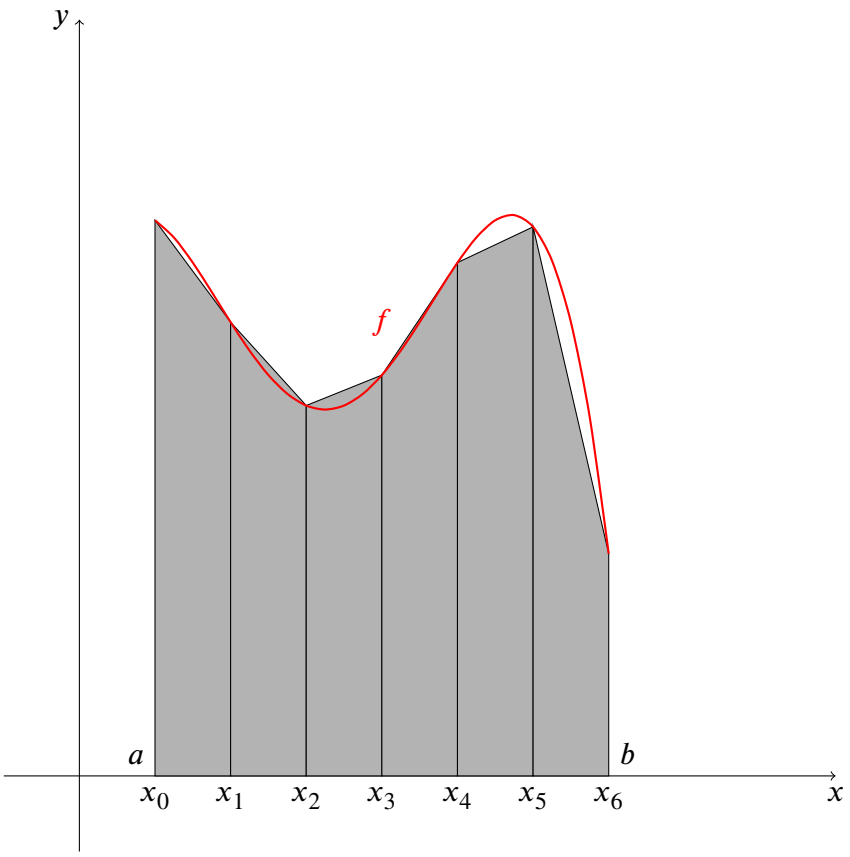
Minden részintervallumra ezt a módszer alkalmazva kapjuk, hogy a trapézokkal történő T_n közelítésünk:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}\left(f(x_0) + f(x_1) \right) h + \ldots + \frac{1}{2}\left(f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) \right) h + \frac{1}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n) \right) h = \\ &= h\left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right) = \\ &= \frac{h}{2}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \big). \end{aligned}$$

Ezen közelítési eljárást a továbbiakban *trapézformulának* fogjuk nevezni. (ld. 2.4. ábra) Belátható, hogy minél sűrűbb egyenletes felosztást veszünk, annál pontosabban fogják közelíteni a trapézok területösszegei a pontos integrálértéket.

Ismét felmerül a kérdés, mennyit hibáztunk. (Ehhez ld. [2] szakirodalom.) Először keressük meg, mennyit hibáztunk egy részintervallumon! Ehhez tekintsük az f függvényt a $[0,\ h]$ intervallumon! Ekkor az ezen intervallumon egy trapézzal történő közelítés:

$$\int_0^h f(x)\, dx \approx h \cdot \frac{f(h) + f(0)}{2},$$



2.4. ábra. Az $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja alatti terület közelítése a trapézformula segítségével.

vagyis az $E(T_1)$ hibánk:

$$E(T_1) = \int_0^h f(x)\,dx\ - h \cdot \frac{f(h)+f(0)}{2}.$$

tegyük fel, hogy a függvényünk kétszer folytonosan differenciálható, és deriváljuk $E(T_1)$-et h szerint:

$$E'(T_1) = f(h) - \left(\frac{1}{2}\big(f(h)+f(0)\big) + \frac{h}{2}f'(h)\right) = \frac{1}{2}f(h) - \frac{1}{2}f(0) - \frac{h}{2}f'(h)$$

$$E''(T_1) = \frac{1}{2}f'(h) - \frac{1}{2}f'(h) - \frac{h}{2}f''(h) = -\frac{h}{2}f''(h).$$

Az $|E''(T_1)|$ felülbecsülhető az alábbi módon:

$$|E''(T_1)| = \frac{h}{2}|f''(h)| \le \frac{h}{2}M_2, \quad \text{ahol} \quad M_2 = \max_{t\in[0,\ h]}|f''(t)|.$$

Innen integrálással adódnak az alábbiak:

$$|E''(T_1)| \leq M_2 \frac{h}{2}$$
$$|E'(T_1)| \leq M_2 \frac{h^2}{4}$$
$$|E(T_1)| \leq M_2 \frac{h^3}{12}.$$

Most csak egy h hosszú intervallumra becsültük meg a hibát. Adjuk össze az összes részintervallumra! Ismételten tekintsük az f függvényt az $[a,\ b]$ intervallumon, amelyet n darab $h = \frac{b-a}{n}$ hosszú részintervallumra osztottunk. Az egyes részintervallumok hibái összeadódnak, vagyis

$$E(T_n) \leq n \cdot M_2 \cdot \frac{h^3}{12}.$$

Beírva az összefüggésbe $h = \frac{b-a}{n}$-et, kapjuk a hibabecslésünket:

$$E(T_n) \leq n \cdot M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^3} = M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2},$$

ahol M_2-re teljesül, hogy $|f''| \leq M_2$ az $[a,\ b]$ intervallumon.

2.5. Példa. Közelítsük a trapézformulval az alábbi integrál értékét:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx.$$

Az integrál értékét pontosan is kiszámíthatjuk a Newton–Leibniz-tétel alkalmazásával, hiszen

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = [ln\ x]_1^2 = ln\ 2 - ln\ 1 = ln\ 2.$$

Vagyis ebben a példában az $ln\ 2$ egy közelítő értékét számítjuk ki. Osszuk fel az intervallumot $n = 4$ részre, vagyis $h = 0,25$, és alkalmazzuk a trapézformulát!

$$T_4 = h\left(\frac{f(1)}{2} + f(1,25) + f(1,5) + f(1,75) + \frac{f(2)}{2}\right),$$

ahol $f(1) = 1$, $f(1,25) = \frac{4}{5} = 0,8$, $f(1,5) = \frac{2}{3}$, $f(1,75) = \frac{4}{7}$ és $f(2) = \frac{1}{2}$.

$$T_4 \approx 0,25 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \approx 0,697.$$

Az integrál tényleges értéke három tizedesjegyre kerekítve $0,693$, vagyis a közelítés 4 ekvidisztáns részintervallum esetén kifejezetten pontos. Végül számoljuk ki, mennyinek kellett volna választani a hibabecslés alapján n értékét, hogy a közelítésünk három tizedesjegyre

pontos legyen. Vagyis azt szeretnénk, hogy

$$E(T_n) < 10^{-3}.$$

Deriváljuk az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt kétszer:

$$f'(x) = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$f''(x) = (-x^{-2})' = \frac{2}{x^3}.$$

Az [1, 2] intervallumon a második derivált abszolút értéke monoton csökken, maximumát ezért az intervallum bal végpontjában veszi fel, így M_2 értékének választhatjuk a 2-t. Ezután helyettesítsünk be a hibaképletbe:

$$E(T_n) \leq 2 \cdot \frac{(2-1)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2} < 10^{-3}.$$

Átalakítva az egyenlőtlenség jobb oldalát kapjuk, hogy

$$\frac{10^3}{6} < n^2.$$

Ebből az következik, hogy n értékét legalább 13-nak választva a közelítésünk három tizedesjegyre már biztosan pontos lesz.

2.4. Simpson-formula

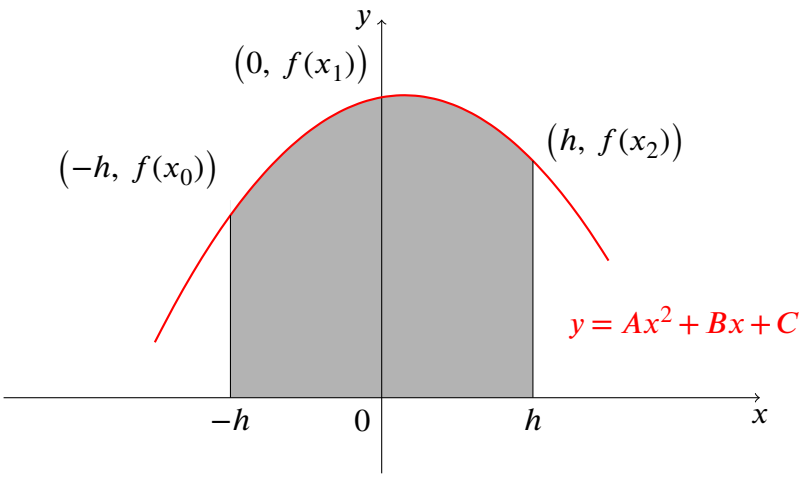
Az előző közelítési eljárások során mindig olyan síkidomokkal közelítettük a függvények grafikonjai alatti területet, melyeket egyenes vonalak határoltak. Ehelyett a következőkben parabolákkal közelítjük a függvény grafikonját minden részintervallum felett, ld. [11], 267–269. oldalak. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő részre! Egyenest illetszeni mindig tudtunk két pontra, egy parabola illesztéséhez viszont három pontra lesz szükségünk, ezért n értékét párosnak választjuk meg. Tegyük fel, hogy $f > 0$ $[a, b]$-n, és két egymás melletti részintervallumon a grafikont azzal a parabolával közelítjük, amely illeszkedik az $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, f(x_i))$ és $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ pontokra. Hogy egyszerűbben számolhassunk, tegyük fel, hogy $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ és $x_2 = h$, vagyis ha szükséges, toljuk el a függvényt a kívánt helyre, így a terület nem változik. (ld. 2.5. ábra) Egy parabola általános egyenlete:

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

az alatta lévő terület pedig a $[-h,\ h]$ intervallumon

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2+Bx+C)\,dx.$$

Használjuk a Newton–Leibniz-tételt ennek kiszámolására!



2.5. ábra. Egy általános $y = Ax^2+Bx+C$ egyenletű parabola alatti terület a $[-h;\ h]$ intervallumon.

$$\int_{-h}^{h} (Ax^2+Bx+C)\,dx = \left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right]_{-h}^{h} = \frac{2Ah^3}{3}+2Ch = \frac{h}{3}(2Ah^2+6C).$$

Mivel a parabolánk áthalad a $(-h,\ f(x_0))$, $(0,\ f(x_1))$ és $(h,\ f(x_2))$ pontokon, ezért

$$f(x_0) = Ah^2-Bh+C, \quad f(x_1) = C, \quad f(x_2) = Ah^2+Bh+C.$$

Innen adódnak az alábbiak:

$$\begin{aligned} C &= f(x_1) \\ Ah^2-Bh &= f(x_0)-f(x_1) \\ Ah^2+Bh &= f(x_2)-f(x_1) \\ 2Ah^2 &= f(x_0)+f(x_2)-2f(x_1). \end{aligned}$$

Ezek segítségével kifejezhetjük a parabola alatti T területet, amely

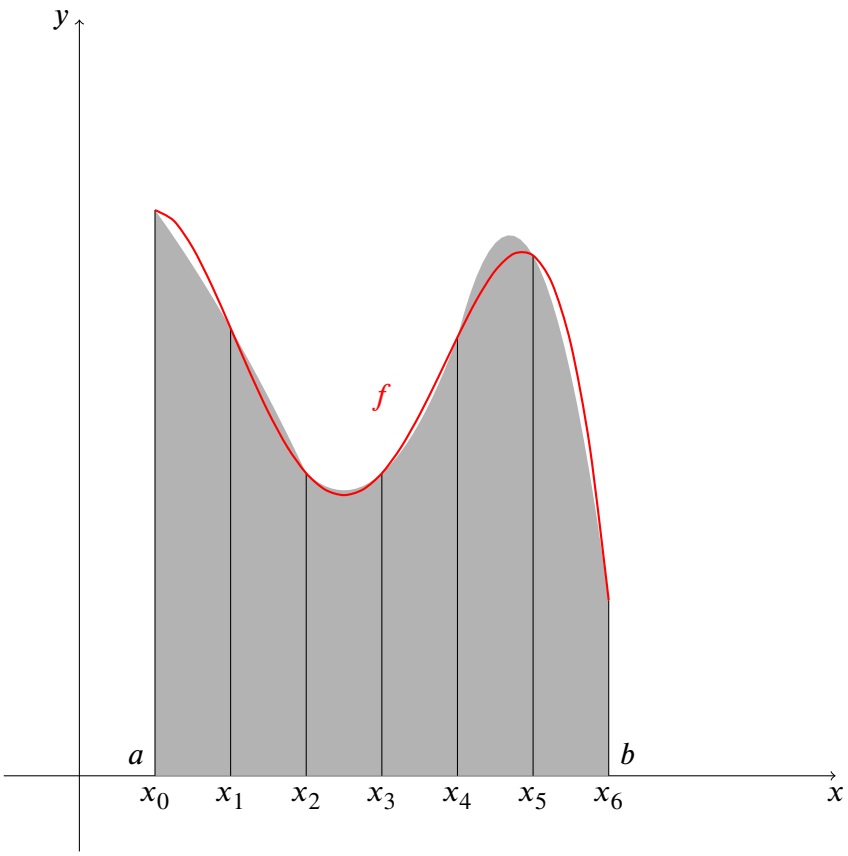
$$T = \frac{h}{3}\left(2Ah^2+6C\right) = \frac{h}{3}\Big(f(x_0)+f(x_2)-2f(x_1)+6f(x_1)\Big) = \frac{h}{3}\big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\big).$$

Mozgassuk vissza a parabolát az eredeti helyére, ezzel az alatta lévő terület nem változott meg. Ha minden egyes ilyen parabolával való közelítéssel ezt tesszük, akkor adódik az in-

tegrál közelítő értéke a parabolák alatti területösszegekből:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\Big)+\frac{h}{3}\Big(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\Big)+\ldots\\ &\ldots+\frac{h}{3}\Big(f(x_{n-4})+4f(x_{n-3})+f(x_{n-2})\Big)+\frac{h}{3}\Big(f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big)=\\ &=\frac{h}{3}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big).\end{aligned}$$

Az így kapott összefüggést nevezzük *Simpson-formulának* (ld. 2.6 ábra), amely Thomas Simpson, 18. századi angol matematikusról kapta a nevét.



2.6. ábra. Az $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$ függvény grafikonja alatti terület közelítése a Simpson-formula alapján az $[a,\,b]$ intervallum 6 egyenlő részre osztásával.

Ismételten tegyük fel a kérdést, mekkora hibával számoltunk? Újra csak egy, a $[-h,\,h]$ intervallumba eltolt közelítést felírva (ld. [2] szakirodalom):

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\big(f(-h)+4f(0)+f(h)\big),$$

ahonnan a közelítés $E(S_1)$ hibája:

$$E(S_1)=\int_{-h}^{h} f(x)\,dx-\frac{h}{3}\big(f(-h)+4f(0)+f(h)\big).$$

Az integrál additivitásáról szóló tétel segítségével és az integrálási határok felcserélésével írjuk az eredeti integrált egy kissé más alakba:

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{h} f(x)\,dx = \int_{0}^{h} f(x)\,dx - \int_{0}^{-h} f(x)\,dx.$$

A fenti egyenlet jobb oldalán szereplő mindkét kifejezés integrálfüggvény, deriváltjaik rendre $f(h)$, illetve $-f(-h)$. Tegyük fel, hogy f függvény legalább négyszer folytonosan differenciálható, és számoljuk is ki $E(S_1)$ első három deriváltját h szerint:

$$\begin{aligned}
E'(S_1) &= f(h) + f(-h) - \frac{1}{3}\big(f(-h) + 4f(0) + f(h)\big) - \frac{h}{3}\big(-f'(-h) + f'(h)\big) = \\
&= \frac{2}{3}f(h) + \frac{2}{3}f(-h) - \frac{4}{3}f(0) + \frac{h}{3}\big(f'(-h) - f'(h)\big) \\
E''(S_1) &= \frac{2}{3}f'(h) - \frac{2}{3}f'(-h) + \frac{1}{3}\big(f'(-h) - f'(h)\big) + \frac{h}{3}\big(-f''(-h) - f''(h)\big) = \\
&= \frac{1}{3}f'(h) - \frac{1}{3}f'(-h) - \frac{h}{3}\big(f''(-h) + f''(h)\big) \\
E'''(S_1) &= \frac{1}{3}f''(h) + \frac{1}{3}f''(-h) - \frac{1}{3}f''(-h) - \frac{1}{3}f''(h) - \frac{h}{3}\big(-f'''(-h) + f'''(h)\big) = \\
&= -\frac{h}{3}\big(-f'''(-h) + f'''(h)\big).
\end{aligned}$$

Végezzük el az alábbi átalakítást:

$$E'''(S_1) = -\frac{h}{3}\big(-f'''(-h) + f'''(h)\big) = -\frac{h}{3} \cdot 2h \cdot \frac{f'''(h) - f'''(-h)}{h - (-h)}$$

Mivel feltettük, hogy a függvényünk 4-szer folytonosan differenciálható, ezért erre a törtre alkalmazhatjuk a Lagrange-féle középértéktételt:

$$E'''(S_1) = -\frac{2h^2}{3} f^{(IV)}(t),$$

ahol $t \in [-h,\ h]$. A részintegrálásokat mellőzve ebből a formából kaphatjuk, hogy

$$|E(S_1)| \le M_4 \cdot \frac{h^5}{90}, \quad \text{ahol} \quad M_4 = \sup_{t \in [-h,\ h]} |f^{(IV)}(t)|.$$

Eddig csak az egy parabolával való közelítés hibáját számoltuk ki. Az $\frac{n}{2}$ darab parabolával való köszelítés hibája az egyes parabolák közelítési hibájának összege, azaz

$$E(S_n) \le \frac{n}{2} \cdot M_4 \cdot \frac{h^5}{90}.$$

Ebbe helyettesítve $h = \frac{b-a}{n}$-et, kapjuk, hogy

$$E(S_n) \leq \frac{n}{2} \cdot M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{90n^5} = M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4},$$

amely a Simpson-formula hibabecslése, ahol M_4-re teljesül, hogy $|f^{(IV)}| \leq M_4$ az $[a,\ b]$ intervallumon.

Megjegyzés. Az egy parabolára vonatkozó hibaképlet levezetésénél maradhattunk volna a harmadik deriválnál is ahelyett, hogy középértéktétel segítségével megjelenítettük volna a függvény negyedik deriváltját. Ekkor az alábbi hibaképletet kaptuk volna:

$$E(S_1) \leq M_3 \cdot \frac{h^4}{36}, \quad \text{ahol} \quad M_3 = \sup_{t \in [-h,\ h]} |f'''(t)|.$$

Ezen hibákat szummázva egy másik hibabecslést kapunk:

$$E(S_n) \leq M_3 \cdot \frac{(b-a)^4}{72n^3},$$

ahol M_3-ra teljesül, hogy $|f'''| \leq M_3$ az $[a,\ b]$ intervallumon. Ez az összefüggés is egy hibabecslést ad a Simpson-formulára, de mi a korábban levezetettet fogjuk használni.

2.6. Példa. A 2.5. Példához hasonlóan határozzuk meg $ln\ 2$ közelítő értékét az alábbi integrál kiszámításával:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx.$$

Osszuk fel az intervallumot $n = 4$ részre, vagyis $h = 0,25$, és alkalmazzuk a Simpson-formulát!

$$S_4 = \frac{h}{3}\big(f(1) + 4f(1,25) + 2f(1,5) + 4f(1,75) + f(2)\big),$$

ahol $f(1) = 1$, $f(1,25) = \frac{4}{5} = 0,8$, $f(1,5) = \frac{2}{3}$, $f(1,75) = \frac{4}{7}$ és $f(2) = \frac{1}{2}$.

$$S_4 \approx \frac{1}{12}\left(1 + 4 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) \approx 0,693.$$

Ezt a három jegyre történő kerekítést összehasonlítva a korábbi példával, látható, hogy valamivel jobb közelítést kaptunk $ln\ 2$ értékére, mint a trapézformulával. Számítsuk ki, mennyinek kellett volna választanunk n értékét, ha három tizedesjegyre pontos eredményt szeretnénk kapni! Ehhez kell, hogy

$$E(S_n) < 10^{-3}.$$

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény negyedik deriváltja:

$$f^{(IV)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

A negyedik derivált abszolút értéke az $[1,\ 2]$ intervallumon monoton csökken, így maximumát az intervallum bal végpontján veszi fel, ezért M_4 értékének válasszuk a 24-et. Helyettesítsünk be a hibaképletünkbe:

$$E(S_n) \leq 24 \cdot \frac{(2-1)^5}{180n^4} = \frac{2}{15n^4} < 10^{-3}.$$

Átalakítva az egyenlőtlenség jobb oldalát azt kapjunk, hogy

$$\frac{2 \cdot 10^3}{15} < n^4.$$

A számolást elvégezve azt láthatjuk, hogy n értékét legalább 4-nek kell választanunk ahhoz, hogy a közelítésünk 10^{-3}-nál pontosabb legyen, mi pedig pont ennyinek választottuk korábban. A 2.5. Példában a trapézformula alkalmazásakor a 10^{-3} pontosság eléréséhez a hibaképlet szerint 13 egyenlő részre kellett volna felosztanunk az $[1,\ 2]$ intervallumot, míg ez a Simpson-formula alkalmazásakor csak 4 volt. Ebből azt sejthetjük, hogy utóbbi formula használata ugyanolyan felosztás esetén jobb közelítést ad az integrál eredeti értékére.

2.5. A formulák hibáinak összehasonlítása

Az előző fejezet végén megsejthettük, hogy egy adott $[a,\ b]$ intervallum egyenletes felosztása esetén a Simpson-formula általában jobb közelítést ad, mint az ugyanekkora felosztással dolgozó trapézformula. Egy konkrét példán számítsuk ki, hogy a megismert öt eljárás milyen pontossággal dolgozik $n = 2,\ 4,\ 8,\ 16$ egyenlő részintervallummal.

2.7. Példa. Számítsuk ki az alábbi integrál értékét:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx.$$

Ismerjük fel az integrandusban az $\frac{1}{1+x^2}$ függvényt, melynek primitív függvénye $\arctan x$, innen:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx = 4 \cdot [\arctan x]_0^1 = 4 \cdot (\arctan 1 - \arctan 0) = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi.$$

A fentebbi közelítési eljárásokkal ezek szerint a π értékét fogjuk közelíteni, melynek első néhány tizedesjegyét a középiskolások többsége ismerni szokta. A továbbiakban az értékeket 10 tizedesjegy pontossággal fogjuk kiírni és kerekíteni, így $\pi = 3,1415926535$.

A 2.1. táblázatból leszűrhető, hogy ugyanolyan egyenletes felosztás mellett az integrálközelítések közül a Simpson-formula konvergál leggyorsabban az eredeti értékhez. A trapézformula és a középponti szabály hasonló eredményességgel, de lassabban közelítette a π

n	2	4	8	16
L_n	3,6	3,3811764706	3,2639884945	3,2034416120
R_n	2,6	2,8811764706	3,0139884945	3,0784416120
K_n	3,1623529512	3,1468005184	3,1428947296	3,1419181743
T_n	3,1	3,1311764706	3,1389884945	3,1409416120
S_n	3,1333333333	3,1415686275	3,1415925024	3,1415926512

2.1. táblázat. Az integrál közelítés a bal oldali (L_n), illetve a jobb oldali (R_n) téglánymódszerrel, a középponti szabály alapján (K_n), trapézmódszerrel (T_n) és a Simpson-formulával (S_n) 2, 4, 8 és 16 egyenlő részintervallumra bontással. Az értékek 10 tizedesjegy pontossággal szerepelnek.

n	2	4	8	16
$\lvert E(L_n)\rvert$	0,4584073465	0,2395838171	0,1223958410	0,0618489585
$\lvert E(R_n)\rvert$	0,5415926535	0,2604161829	0,1276041590	0,0631510415
$\lvert E(K_n)\rvert$	0,0207604877	0,0052078649	0,0013020761	0,0003255208
$\lvert E(T_n)\rvert$	0,0415926535	0,0104161829	0,0026041590	0,0006510415
$\lvert E(S_n)\rvert$	0,0082593202	0,0000240260	0,0000001511	0,0000000023

2.2. táblázat. A π értéke és a 2.1. táblázatban szereplő értékek különbségének abszolút értéke az egyes esetekben.

értékét, míg a bal és jobb oldali Riemann-összeg a leglassabban.

Ugyanezt mutatja a 2.2. táblázat is, amely a hibákat reprezentálja az egyes esetekben. Látható, hogy egyre nagyobb egyenletes felosztás esetén az abszolút hibák egyre kisebbek lesznek (azaz $n \to \infty$ esetén $|E(X_n)| \to 0$), viszont itt is szembetűnő, hogy a leggyorsabban a Simpson-formula közelíti ez eredeti értéket.

A példán bemutatott, empirikusan levont következtetés nem véletlen. Tegyük fel, hogy $M_2 = \max\limits_{x\in[a,\,b]} |f''(x)|$ és $M_4 = \sup\limits_{x\in[a,\,b]} |f^{(IV)}(x)|$ értékek végesek egy adott $f : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ függvény esetén. Alkalmazzuk a trapéz- és a Simpson-formulát n darab egyenletes részintervallumra, azaz közelítsük T_n-nel és S_n-nel f függvényünk Riemann-integrálját. Ekkor a hibatagok hányadosának a végtelenben vett határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_4 \cdot \frac{(b-a)^5}{180n^4}}{M_2 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{M_4}{M_2} \cdot \frac{(b-a)^2}{15}}_{c \text{ konstans}} \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} c \cdot \frac{1}{n^2} = 0.$$

Mindez az jelenti, hogy ugyanolyan egyenletes felosztás mellett a Simpson-formula hibája gyorsabban konvergál 0-hoz, mint a trapézformula hibája. Ebből következik, hogy S_n gyorsabban tart az eredeti integrál értékéhez, mint T_n.

Megjegyzés. Ha összevetnénk S_n és a fentebb tárgyalt többi integrálközelítési módszer hibáját, hasonló következtetésre juthatnánk.

3. fejezet

Az integrálközelítések matematikai elmélete

3.1. Lagrange-interpoláció

Vizsgáljuk meg a következő feladatot (ld. [3] 6.1. és 6.2. szakaszait): tegyük fel, hogy adottak $(x_i;\ y_i)$, $i = 0,\ 1, \ldots,\ n$ pontpárok, ahol $x_i \neq x_j$, ha $i \neq j$. Keresünk egy olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely az x_i *alappontokon* a hozzájuk tartozó y_i értékeket veszi fel, vagyis $f(x_i) = y_i,\ i = 0,\ 1, \ldots,\ n$. Ezt nevezzük a továbbiakban *interpolációnak*. Ha még azt is feltesszük, hogy az f függvényt polinom formájában keressük, akkor *polinominterpolációról* beszélünk. A Lagrange-interpoláció egy $n+1$ alappontból álló pontsorozatra egy n-edfokú polinomot illeszt, amelyről bebizonyítható, hogy egyértelmű és mindig létezik.

Tegyük fel, hogy az $L_n(x)$ polinom interpolálja az adott alappontjainkat, ekkor értelemszerűen teljesülnie kell, hogy $L_n(x_i) = y_i$, $(i = 0,\ 1\ \ldots,\ n)$. Mindebből következik, hogy $n+1$ alappont esetén

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = y_i \quad (i = 0,\ 1\ \ldots,\ n).$$

Ez egy lineáris egyenletrendszert határoz meg a keresett a_k együtthatókra vonatkozóan, melyet az úgynevezett Vandermonde-mátrixszal az alábbi alakban írhatunk:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Lineáris algebrából ismeretes, hogy egy Vandermonde-mátrix determinánsa az alábbi alak-

ban írható fel:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{j<i}(x_i - x_j).$$

3.1. Definíció. Adott $n+1$ darab alappont esetén az

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} = \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

($k = 0,\ 1,\ \dots,\ n$) polinomot a *k-adik alapponthoz tartozó Lagrange-féle alappolinomnak* nevezzük.

3.2. Tétel. *Az $L_n(x)$ interpolációs polinom $n+1$ alappont esetén*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

alakban írható.

Bizonyítás. A Lagrange-féle alappolinomok n-ed fokúak, emiatt az $L_n(x)$ polinom is legfeljebb n-ed fokú. Továbbá adódik, hogy ha $l_k(x)$-be x_k-t helyettesítünk, akkor a tört számlálójában és nevezőjében ugyanazon tényezők szerepelnek, így $l_k(x_k) = 1$. Ha viszont $l_k(x)$-ben x helyére x_j-t ($j \neq k$) helyettesítünk, akkor az $l_k(x_j)$ tört számlálójában lesz egy olyan tényező, amely 0, vagyis $l_k(x_j) = 0$.

Összegezve:

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = k \\ 0, & \text{ha } i \neq k \end{cases}$$

Emiatt a tételbeli L_n polinomra minden k esetén $L_n(x_k) = f(x_k)$ lesz, vagyis az $L_n(x)$ interpolációs polinom az x_k helyen $f(x_k)$ értéket fog felvenni.

A létezés mellett fontos, hogy $L_n(x)$ polinomból csupán egy van. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy létezik két különböző $L_n(x)$, illetve $\widetilde{L_n}(x)$ polinom, amelyek interpolálják a megadott pontpárokat. Ezek mindegyike legfeljebb n-ed fokú. Vegyük az $L_n(x) - \widetilde{L_n}(x)$ polinomot, mely szintén legfeljebb n-ed fokú. Ezen különbségpolinomnak a megadott $n+1$ darab alappontban zérushelye kell legyen, ez viszont ellentmondásra vezet, hiszen egy n-ed fokú polinomnak nem lehet $n+1$ darab zérushelye az algebra alaptétele miatt. Ezzel az unicitást is igazoltuk. ■

3.3. Példa. Legyenek adva az alábbi alappontok: $x_0 = -4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, valamint

az ezekhez tartozó értékek: $y_0 = 1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 2$, $y_3 = -1$. Adjuk meg az ezen pontpárokra illeszkedő Lagrange-féle interpolációs polinomot! (ld. 3.1. ábra)

Mivel 4 különböző alapponttal dolgozunk, így az interpolációs polinom legfeljebb harmadfokú lehet. A jobb átláthatóság kedvéért rendezzük táblázatba a pontpárjainkat:

x_i	-4	-1	0	1
y_i	1	-1	2	-1

Írjuk fel a Lagrange-féle alappolinomokat:

$$l_0(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(-4+1)(-4-0)(-4-1)} = \frac{x-x^3}{60}$$

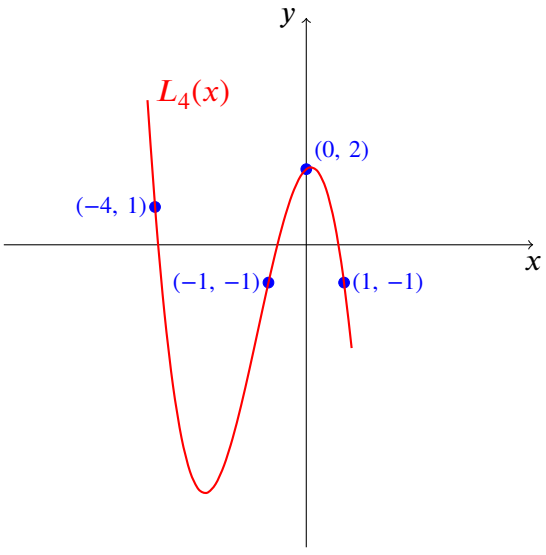
$$l_1(x) = \frac{(x+4)(x-0)(x-1)}{(-1+4)(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^3+3x^2-4x}{6}$$

$$l_2(x) = \frac{(x+4)(x+1)(x-1)}{(0+4)(0+1)(0-1)} = \frac{-x^3-4x^2+x+4}{4}$$

$$l_3(x) = \frac{(x+4)(x+1)(x-0)}{(1+4)(1+1)(1+0)} = \frac{x^3+5x^2+4x}{10}.$$

Írjuk fel az adott pontpárokra illeszkedő interpolációs polinomot:

$$L_4(x) = 1 \cdot \frac{x-x^3}{60} + (-1) \cdot \frac{x^3+3x^2-4x}{6} + 2 \cdot \frac{-x^3-4x^2+x+4}{4} + (-1) \cdot \frac{x^3+5x^2+4x}{10} =$$
$$= -\frac{47}{60}x^3 - 3x^2 + \frac{47}{60}x + 2.$$



3.1. ábra. A megadott pontpárokra illesztett $L_4(x) = -\frac{47}{60}x^3 - 3x^2 + \frac{47}{60}x + 2$ polinom.

3.2. Egyszerű Newton–Cotes kvadratúrák

Tekintsük a következő feladatot (ld. [3], 197–200. oldal): vegyük az $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ függvényt, keressük ennek határozott integrálját az értelmezési tartományon, azaz keresendő

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ezt a Newton–Leibniz-tétel segítségével az alábbiak szerint számolhatjuk: ha $F' = f$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ugyanakkor nincs minden f függvénynek elemi módszerekkel meghatározható F primitív függvénye, vagy ha van, akkor az nem feltétlenül írható zárt alakban. Más esetekben ezen F függvény meghatározása lehetséges, de bonyolult. Mérések esetében előfordulhat, hogy csak a függvénygrafikon bizonyos pontjait ismerjük, az azokra illeszkedő f függvényt nem.

Azon eljárást, amikor egy függvény határozott integrálját nem a Newton–Leibniz-tétel alapján számítjuk ki, hanem valamilyen módon közelítjük, *numerikus integrálásnak* nevezzük. Ennek alapfeladata, hogy ismerjük a függvényünk értékét néhány *alappontban*, legyenek ezek:

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b,$$

az ezen alappontokhoz tartozó függvényértékek pedig $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$. Legyen az integrálandó f függvény $[a,\ b]$ intervallumon vett határozott integráljának értéke $I(f)$. Az $I(f)$ közelítését az

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i), \quad x_i \in [a,\ b],$$

alakban keressük, ahol n az alappontok számát jelöli. Ezen formulát *kvadratúraformulának* nevezzük, az a_i együtthatókat pedig *súlyoknak*.

3.4. Definíció. A fenti kvadratúraformulát *zárt kvadratúraformulának* nevezzük, ha szerepelnek bennük az $a = x_0$ és $b = x_n$ alappontokhoz tartozó függvényértékek, egyébként *nyílt kvadratúraformulának* hívjuk.

3.5. Definíció. Egy kvadratúraformulát *interpolációs kvadratúraformulának* hívunk, ha az alappontokbeli függvényértékekre illesztett interpolációs polinom integrálját adja meg.

3.6. Definíció. Ha egy interpolációs kvadratúraformulában az alappontok egyforma távol vannak egymástól, akkor a formulát *Newton–Cotes-formulának* hívjuk.

A továbbiakban ezen típusú kvadratúrák előállításával foglalkozunk. Legyen ismét adott $n+1$ darab alappont: x_0, x_1, …, x_n, a hozzájuk tartozó függvényértékek $f(x_0)$, $f(x_1)$, …,

$f(x_n)$. Zárt interpolációs kvadratúraformula esetén a numerikus integrálás értéke az alappontbeli függvényértékekre illesztett interpolációs polinom adott intervallumon vett integrálját adja meg, azaz

$$I_n(f) = \int_a^b L_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)\right) dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \underbrace{\int_a^b l_k(x)\,dx}_{a_k}.$$

Az egyenlőség utolsó részét összevetve a kvadratúraformulák általános alakjával megállapítható, hogy az l_k alappolinomok adják a kvadratúraformulák a_k súlyait, vagyis

$$a_k = \int_a^b l_k(x)\,dx.$$

Alkalmazzuk a fenti integrálban az $x = a + t(b-a)$ helyettesítést, ahol $t \in [0,\ 1]$. Ekkor az a_k súlyra az alábbi adódik:

$$a_k = \int_a^b l_k(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 l_k\big(a + t(b-a)\big)\,dt.$$

Az egyenlőség jobb oldalán álló kifejezésre bevezetjük az $N_{\text{zárt}}^{n,\,k}$ jelölést, amelynek néhány lehetséges értékét fogjuk kiszámolni. Az eljárás a következő: adott n érték esetén, amely az interpolációs polinom fokát jelöli (vagyis az alappontok számánál eggyel kevesebb), megadjuk a k-adik Lagrange-féle alappolinom integrálját, amely a kvadratúraformulánk megfelelő súlyát fogja jelenti.

Ha $n = 1$, akkor $x_0 = a$ és $x_1 = b$, a k-adik Lagrange-féle alappolinom pedig

$$l_k = \prod_{j=0, j\neq k}^{1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0,\ 1.$$

Tehát az alábbiakat kapjuk l_0 és l_1 értékére:

$$l_0 = \frac{x-b}{a-b}, \quad l_1 = \frac{x-a}{b-a}$$

Innen:

$$N_{\text{zárt}}^{1,\,0} = \int_0^1 \frac{a + t(b-a) - b}{a-b}\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt = \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$N_{\text{zárt}}^{1,\,1} = \int_0^1 \frac{a + t(b-a) - a}{b-a}\,dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Vagyis $n = 1$ esetben a kvadratúránk súlyai:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}.$$

Az integrál közelítése pedig ebből az alábbi alakban számolható:

$$I_1(f) = (b-a) \cdot \frac{1}{2} \cdot f(x_0) + (b-a) \cdot \frac{1}{2} \cdot f(x_1) = (b-a) \cdot \left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} \cdot f(b) \right)$$

Ezzel megkaptunk a korábban már elemi módszerekkel kiszámolt $[a,\ b]$ intervallumra felírt trapézformulát.

Írjuk fel most az $n = 2$ esetet, ekkor $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ és $x_2 = b$ lesznek az alappontjaink.

$$l_0 = \frac{x - \dfrac{a+b}{2}}{a - \dfrac{a+b}{2}} \cdot \frac{x-b}{a-b} = \frac{2x-a-b}{a-b} \cdot \frac{x-b}{a-b}$$

$$l_1 = \frac{x-a}{\dfrac{a+b}{2} - a} \cdot \frac{x-b}{\dfrac{a+b}{2} - b} = 4 \cdot \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{x-b}{a-b}$$

$$l_2 = \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{x - \dfrac{a+b}{2}}{b - \dfrac{a+b}{2}} = \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{2x-a-b}{b-a}.$$

Innen a formula súlyai az átalakításokat és számolásokat mellőzve:

$$N^{2,\,0}_{\text{zárt}} = (b-a) \int_0^1 l_0\big(a + t(b-a)\big)\ dt = \frac{1}{6}$$

$$N^{2,\,1}_{\text{zárt}} = (b-a) \int_0^1 l_1\big(a + t(b-a)\big)\ dt = \frac{4}{6}$$

$$N^{2,\,2}_{\text{zárt}} = (b-a) \int_0^1 l_2\big(a + t(b-a)\big)\ dt = \frac{1}{6}.$$

Vagyis $n = 2$ esetben a kvadratúraformulánk az alábbi alakban írható:

$$I_2(f) = (b-a) \cdot \left(\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{1}{6} f(b) \right)$$

Ez pedig az $[a,\ b]$ intervallumra felírt Simpson-formula együtthatóit adja meg, melyet korábban szintén elemi módon levezettünk. Adott n esetén a zárt Newton–Cotes formula együtthatóit az alábbi táblázat szemlélteti ($n = 1,\ 2,\ 3$ esetekben):

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=1$	$1/2$	$1/2$		
$n=2$	$1/6$	$4/6$	$1/6$	
$n=3$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Megjegyzés. A táblázat urolsó sorában lévő együtthatókból képzett kvadratúra formulát szokás *Simpson* $3/8$*-ad módszernek* nevezni.

Röviden emlékezzünk meg a nyílt Newton–Cotes formulákról is, amelyek esetén a végpontbeli függvényértékek nem szerepelnek a kvadratúraképletben, de Newton–Cotes kvadratúra lévén az alappontok egyenlő távolságra vannak egymástól. A vizsgált $[a,\ b]$ intervallumot két egyenlő részre bontva egyértelmű, hogy az osztópont $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Az integrál pontos értékét most is a Lagrange-féle interpolációs polinommal kell közelítenünk:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_0)\int_a^b l_0(x)\,dx.$$

Az $l_0(x)$ egy egytényezős szorzat, így az alappolinom értéke 1, ahonnan

$$\int_a^b 1\,dx = [x]_a^b = b-a.$$

Bevezetve az $a_k = (b-a)\cdot N_{\text{nyílt}}^{n,\,k}$ jelölést a súlyokra, $n=0$, $k=0$ esetben

$$N_{\text{nyílt}}^{0,\,0} = 1,$$

Vagyis ebben az esetben az integrálközelítésünk:

$$I_0(f) = (b-a)f(x_0).$$

alakban írható, amellyel megkaptunk az érintőformulánk esetét. A következő táblázat szemlélteti a legegyszerűbb nyílt Newton–Cotes kvadratúrák együtthatóit:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$n=0$	1		
$n=1$	$1/2$	$1/2$	
$n=2$	$2/3$	$-1/3$	$2/3$

3.3. Összetett kvadratúraképletek

Az előző alfejezetben egyre magasabb fokú polinomokkal közelítettünk egy f függvényt az $[a,\ b]$ intervallumon. Igazolható, hogy ezzel az eljárással az $\int_a^b f$ értéket egyre kisebb hibával tudjuk közelíteni. Az egyre magasabb fokú polinomok előállítása helyett azonban

lehetőségünk van az $[a,\ b]$ intervallumot részekre osztani, és azokon elvégezni a megismert közelítéseket. (Ezekről részletesebben ld. [3], 202–208. oldalai.)

Legyen f integrálható az $[a,\ b]$ intervallumon és osszuk fel az intervallumot n egyenlő részre: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, ahol $h = \frac{b-a}{n}$ egy részintervallum hossza. Az f függvény [a, b]-n vett határozott integrálja az 1.15. Állítás miatt az alábbi alakban írható

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \right).$$

Ha a jobb oldali összegben alkalmazzuk a trapézformulát, akkor a teljes intervallumon történő közelítésre az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_{i-1}) \left(\frac{1}{2} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_{i-1}) \right) \right] = h \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_{i-1}) \right] = \\ &= h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) + \ldots + \frac{1}{2} f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right) = \\ &= h \left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right),\end{aligned}$$

ezzel megkaptuk az összetett trapézformulát.

Alkalmazzuk most a Simpson-formulát a fenti összegre! Ehhez az eredetileg n részre osztott $[a,\ b]$ intervallumot $2n$ egyenlő részre bontjuk a részintervallumok felezőpontjaival:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - x_{i-1}) \left(\frac{1}{6} f(x_{i-1}) + \frac{4}{6} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) + \frac{1}{6} f(x_i) \right) \right] = \\ &= \frac{h}{6} \left(f(x_0) + 4 f\left(\frac{x_0 + x_1}{2} \right) + \ldots + 4 f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right) + f(x_n) \right),\end{aligned}$$

mellyel megkaptuk az összetett Simpson-formulát, amely annyiban különbözik a korábban elemi úton bizonyított közelítéstől, hogy itt a teljes intervallumot nem n, hanem $2n$ részre osztottuk.

Végül az érintőformulát alkalmazzuk az összegben. Nyílt kvadratúraformula lévén az x_i alappontok helyett a részintervallumok felezőpontjait használjuk:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \left[f\left(\frac{x_0 + x_1}{2} \right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right) \right].$$

Az adott integrálási intervallum felosztásával számításainkat tovább pontosíthatjuk, bizonyítható, hogy az intervallum egyre sűrűbb felosztásával az integrál értékét tetszőleges pontossággal közelíthetjük. További kérdésként felmerülhet, van-e olyan módszer, amely alapján érdemes megválasztani az intervallum osztópontjait annak érdekében, hogy minél kisebb hibával számoljunk az integrálközelítés során. Erre a kérdésre a *Gauss-kvadratúra* adja meg a választ, erről azonban ezen dolgzat már nem értekezik.

4. fejezet

Módszertani kitekintés

4.1. Határozott integrálás a kerettantervben és érettségi követelményekben

A 2020. szeptember 1-jétől hatályba lépő új Nemzeti alaptanterv felmenő rendszerben kezdte el módosítani a magyar közoktatást. Az 1., 5. és 9. évfolyamok tanulói a 2020-2021-es tanévtől már az új Nat alapján tanulnak, ezen szakdolgozat írásának idejében pedig 6 évfolyam (1., 2., 5., 6., 9. és 10.) tanul az új rendszerben. A további évfolyamokra még a 2012-es Nemzeti alaptanterv vonatkozik.

Matematikából a 2012-es és 2020-as Nat-hoz tartozó kerettantervek több pontban is eltérnek, azonban a legnagyobb különbséget az adja, hogy korábban készültek néhány tantárgyból emelt óraszámú kerettantervek, így matematikából is. A 2020-as Nemzeti alaptantervhez csak egy kerettanterv készült matematikából, mely nem tér ki az emelt szintű oktatás kereteinek szabályozására, csupán a kimeneti követelményekből tájékozódhatunk, mit is kell tudnia egy diáknak, ha emelt szintű érettségit kíván tenni ebből a tantárgyból.

Tekintsük át és elemezzük röviden azt a néhány központi dokumentumot, amelyben van szó az integrálszámításról! A 2012-es Nat-hoz illeszkedő, a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára készült emelt óraszámú metematika kerettantervének A változatában (ld. [12], 28–30. fizikai oldalszámok) az integrálás témaköre a 11-12. osztályos felosztás témakörei között szerepel Integrálszámítás és térgeometria címmel. A téma az utolsó két tanév összesen 10 témájából a nyolcadik, ami azt jelenti, hogy bizonyosan csak 12. osztály során kerül sor a tárgyalására. Ezt igazolja a témához szükséges előzetes tudás mennyisége is: folytonos függvények, a területszámítás elemei, sorozatok, véges sorok és a differenciálási szabályok.

A kerettantervi ajánlás a terület- és térfogatszámítás alapelveit tárgyalja korábban. Ez nem véletlen, hiszen az integrálszámítás alkalmazásaként ezen két témakör szokott leggyakrabban előfordulni (függvénygrafikon alatti terület számítása és forgástestek térfogata). Az integrálszámítás tárgyalását bevezető feladatokkal indítja a kerettanterv: függvények grafikonja alatti terület kiszámításával. Ezen motivációs feladatok közül egy részletesen is szerepel a dolgozat

elején, a fizikai alkalmazások (sebesség-idő, valamint erő-út grafikonk alatti terület) ehhez hasonlók. A következő egység, ahogyan mi is tettük, az intervallumok felosztása és a finomítással nyert alsó és felső összegek értelmezése. A téma elvárja a véges összegekkel való közelítés ismeretét, amely már-már a numerikus integrálás témajába is tartozhat. A határozott vagy Riemann-integrál fogalmánál elvárt a pontos definíció ismerete, melyet néhány dologgal kiegészítettek: példa nem integrálható függvényre, negatív függvény határozott integrálja, az előjeles terület, az integrál kapcsolata a területszámítással és az integrálás grafikus ábrázolása számítógép segítségével. Ezek a témakör mélyebb elsajátítását és megértését célozzák. Itt kerül elő az integrál közelítő kiszámítása, mely a szakdolgozat témája, ugyanakkor itt még a Newton–Leibniz-tétel tárgyalásának híján sok esetben nehezen összevethető az integrál pontos és közelítő értéke. A határozott integrál tulajdonságai, folytonos és monoton függvények, valamint az integrál mint a felső határ függvénye nem témája ezen dolgozatnak, az integrálfüggvény szintén csak érintőlegesen szerepelt. Ami a kimeneti követelmények szempontjából fontosabb, az a primitív függvények fogalma és a határozatlan integrálás esete, mely közvetlenül kapcsolódik témánkhoz. A kerettanterv csupán a legalapvetőbb függvények határozatlan integrálájának ismeretét várja el, inverz függvények hiányában aligha beszélhetünk egyébként a 2.7. Példáról. Végül sor kerül az elemi fontosságú Newton-Leibniz-tételre, illetve az integrálási módszerekre, melyek közül a kerettanterv a helyettesítéses integrál esetét emeli ki. Mint a matematikai témák többségénél, itt is a végére maradnak az alkalmazások, jelen esetben függvénygörbék alatti területek és forgástestek térfogatának kiszámítása, nem mellesleg itt lehet, és érdemes numerikus integrálásról szót ejteni. A témakört végül az improprius integrálás tárgyalása zárja. Látható, hogy a témakör sokrétű, a 40 órás javasolt időkeret a teljes témakörre viszont kifejezetten kevés.

Vessük össze mi érthető ezekből tetten a régi és új Nat-hoz tartozó érettségi követelményekben (ld. [13], 9. oldal és [14], 12. oldal). Észrevehető, hogy a két érettségi követelménye között ebben a témában nincs különbség, ugyanakkor a korábban ismertetett kerettantervhez képest jóval kevesebb az elvárás. Ez érthető, hiszen az érettségi több év anyagát kéri számon a tanulóktól, egy adott témakör esetén több lehetőség van az ismeretek bővebb átadására és számonkérésére is. Hiány tapasztalható az integrálás elméleti hátterében, illetve az érettségi már nem is várja el exponenciális és logaritmikus függvények, valamint a szinusz- és koszinuszfüggvényeken kívül más trigonometrikus függvények grafikonja alatti terület kiszámítását. Nem szerepel az érettségiben numerikus integrálás, azaz a szakdolgozat témája sem.

A két elvárásbeli különbség és a témára ajánlott kevés időkeret egyik következménye lehet, hogy a téma bővebb ismertetésére nem kerül sor, így a közelítő integrálás témája is "áldozatul eshet" ezen okoknak. A téma feldolgozását, ezen szempontokat figyelembe véve, csak szakkörön, esetleg speciális matematika tantervű osztályban tartom lehetségesnek. Mielőtt egy, a feldolgozásban irányt adó tematikus terv kerülnek ismertetésre, tekintsünk át néhány olyan tankönyvet, amely sikerrel forgatható mind középiskolai tanárok, mind esetleg diákok számára ezen téma kapcsán.

4.2. Közelítő integrálás tankönyvekben

A Bolyai-sorozat kötetei között látott napvilágot egy integrálszámításról szóló könyv, egyben példatár. Utóbbi jellegéből fakad, hogy az itt tárgyalt numerikus integrálás alfejezet (ld. [1], 318–349. oldalak) inkább feladatorientált, az elméleti megalapozásra kevesebb hangsúlyt helyez. A téglánymódszer, trapézformula és Simpson-formula rövid elemi bemutatása után több feladat következik, melyeket a szerző minden esetben részletes megoldással közöl. Ugyanakkor nem történik meg sem a formulák összehasonlítása, sem a hibabecslések tárgyalása.

A Nemzeti Tankönyvkiadó Matematika (fakultatív B változat) IV. osztály című tankönyve sok évvel ezelőtt használt tankönyv volt az oktatásban. A részletesen kidolgozott könyv az integrálszámítás fejezetének utolsó alfejezetében (ld. [4], 70–72. oldal) foglalkozik az integrál közelítő kiszámításával. Az alfejezet érdekessége, hogy problémafelvetéssel indít, miszerint ha tudjuk, hogy $\int_a^b f(x)\,dx$ létezik, de nem tudjuk meghatározni, milyen módszerhez nyúlhatunk a kiszámítását illetően. A könyv ezután az $[a,\ b]$ intevallum egyenlő felosztására hívja fel a figyelmet, majd 4 módszert említ a határozott integrál közelítésére: a téglányformulát nem túl részletesen, a trapézformulát (a tankönyvben trapézszabály), az érintő formulát (érintőszabály), valamint a Simpson-féle formulát. A közelítési eljárások levezetését, ahogyan először mi is tettük, elemi módszerekkel tárgyalja, hibabecslésről egyik esetben sincs szó. A fejezet végén két feladat található, melyekben négy egyenlő részintervallumra bontással kell a megismert négy formula alapján határozott integrálokat közelíteni. A két példa intuitív képet adhat a tanulóknak, hogy ugyanolyan felosztás esetén mely formula ad jobb becslést az integrálra, arra viszont nem tesz kísérletet, hogy egy feladaton belül egyre több részintervallumra bontással alakítsa ki a diákokban azt a képet, hogy n értékének növelésével egyre pontosabb becslést kapunk az integrálra.

Teljesen hasonló felépítésben dolgozik a speciális matematika osztályok számára készült Analízis II. című könyv egy fejezete az integrálközelítésekkel (ld. [8], 17. fejezet). A korábbi tankönyvvel összevetve mondhatjuk, hogy annak kissé lerövidített változata. A problémafelvetés és az egyes integrálközelítések tárgyalása után tesz említést a hibabecslésről, de annak vizsgálatát nem ezen könyv feladatának tartja. A könyv feladatmegoldást nem tartalmaz: gyakorlásként tanácsot ad egy ismert határozott integrál közelítésére a megadott formulák alapján.

Hasonló, de jóval részletesebb feldolgozást ad a Tankönyvkiadó gondozásában megjelent Szemléletes integrálszámítás című könyv, mely problémaközpontúan tárgyalja az integrálszámítás egyes elemeit, így külön fejezet foglalkozik a numerikus integrálással (részletesebben ld. [6], V. fejezet). Bevezetésként maga a numerikus integrálás fogalma is röviden tárgylásra kerül. A könyv behatóan foglalkozik az egyes módszerekkel, és ahogyan ezen dolgozat is tette, mindegyik után kidolgozott hibabecslést is kap az olvasó az adott formulákhoz, kivéve a Simpson-formulához. Az egyes módszerekhez alkalmazásához bonyolultabb példákat hoz,

ugyanakkor megtörténik ezek összevetése. A könyv érdekességét az adja, hogy a numerikus integrálást épp úgy alkalmasnak tarja a határozott integrál számítására, mint magát a Newton–Leibniz-formulát, valamint felhívja a figyelmet majd 50 év távlatából napjaink adottságaira is, amikor már a számítógépek jelentősen megkönnyítik a numerikus integrálás számítását.

4.3. Egy szakkör lehetséges tematikus terve feladatokkal

A szakdolgozat Közelítési eljárások című fejezetét, a hibaképletek levezetése nélkül, emelt szinten érettségiző középiskolások számára is elsajátíthatónak tartom. Mint korábban szó volt róla, a határozott integrálásra szánt kerettantevi ajánlott időkeret csekély, valamint kimeneti követelményként sem szerepelnek integrálközelítések az érettségin, ebből fakadóan egy iskolai szakkör néhány órája, esetleg egy speciális matematika tantervű osztály esetén lehetséges a téma feldolgozása. A következőkben egy általam felvázolt 8 órás szakköri tematikus terv olvasható, melyet inkább ajánlásnak szánok, az itt leírtak nem kőbe vésettek, kipróbálásukra eddig nem volt lehetőségem. Az órákat nagyjából 45 percesnek képzeltem el, a határozott integrálás elméleti hátterét és az integrálási technikákat pedig ismertnek feltételezem. Egyes óráknál több feladatot is igyekeztem felsorolni, melyek akár az órán, akár otthon is feldolgozhatók. A feladatok többsége a lentebbi szakirodalmi tételekből származik (részletesebben ld. [1], 322–348. oldalak, illetve [11], 8.7. szakasza), ezek megoldását az olvasóra bízom.

1. óra: Használjuk a Newton–Leibniz-formulát!

Az óra célja: A határozott integrálásról tanultak átismétlése a diákokkal, felmérni, mennyire emlékeznek a témára. A Newton–Leibniz-tétel alkalmazásának felfrissítése.
Előzetes ismeretek: Differenciálszámítás, határozatlan és határozott integrálás, ezek tulajdonságai, a határozott integrál és a terület kapcsolata, alapvetőbb integrálási technikák (köztük a parciális integrálás), Newton-Leibniz-formula.
Munkaforma: Verseny, közös gondolkodás
Az óra első 30 perce egy 10 kérdéses kvízzel kezdődne, a kérdések néhány egyszerű és kevésbé egyszerű határozott integrál kiszámítása lenne, melyek típusait a diákok már korábbról ismerik. A kivetített 10 kis számozott négyzet közül a tanulók választanak, egy-egy négyzet egy-egy példára mutat, melyek a következők:

a) $\int_0^4 x^2\,dx$

b) $\int_2^3 2x+x^3\,dx$

c) $\int_2^3 \frac{1}{x}\,dx$

d) $\int_0^2 \frac{2}{x^3}\,dx$

e) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$

f) $\int_0^\pi sin\,x\,dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\ x\ dx$

h) $\int_1^2 x \cdot cos\ x\ dx$

i) $\int_2^3 ln\ x\ dx$

j) $\int_0^4 x \cdot e^{-x}\ dx$

Az egyéni feladatmegoldás után megbeszélésre kerülnének azok a feladatok, melyeket a tanulók nehezebbnek találtak. Gondolkodásra ajánlani nekik a következő határozatlan integrálok kiszámítását:

$$\int e^{-x^2}\ dx, \qquad \int \frac{1}{ln\ x}\ dx, \qquad \int sin(x^2)\ dx, \qquad \int \frac{sin(x)}{x}\ dx.$$

Ha nem sikerül megtalálniuk a megfelelő primitív függvényeket, akkor nézzenek utána az interneten, mit találnak róluk! Vannak-e ezeknek a függvényeknek elemi módszerekkel meghatározható primitív függvényei?

2. óra: Közelítés téglalapokkal

Az óra célja: Megismertetni a tanulókkal a legalapvetőbb integrálközelítési technikát, a téglánymódszert. Rutin kialakítása a közelítésekkel való számolásban.
Előzetes ismeretek: ld. a korábbi óránál.
Munkaforma: Közös gondolkodás, feladatmegoldás.
Megkérdezni a diákoktól találtak-e az előző órai integrálokhoz primitív függvényeket. Röviden mesélni nekik arról, hogy több olyan függvény is van, melyeknek megkeresni a primitív függvényét nehéz feladat, egyeseknek pedig nincs explicit alakba írható primitív függvényük. Ennek ellenére tetszőleges pontossággal megmondhatjuk ezen függvények egy $[a,\ b]$ intervallumon vett határozott integrálját. A legegyszererűbben téglalapokat illesztünk az $[a,\ b]$ intervallumra. A számolást azzal egyszerűsítjük, hogy az intervallumot mindig n egyenlő részre fogjuk osztani.

A tanulóknak egy általános $f > 0$ függvényre megmutatható a bal és jobb oldali téglánymódszer az $[a,\ b]$ egy, kettő, három, majd tetszőleges n egyenlő részintervallumra osztásával. A diákokkal közösen megbeszélhető a 2.2. Példa a hibabecslés nélkül, az eredmény pedig az integrál pontos értékével összevethető. A függvénygrafikon felrajzolásával levonható az a következtetés is, hogy monoton növő függvények esetén a bal oldali téglányösszeg az integrál alsó, a jobb oldali téglányösszeg az integrál felső korlátja. Monoton csökkenő függvények esetén pedig ez pont fordítva van.

Végül időtöbblet esetén megbecsülhetőek az alábbi integrálok a bal és jobb oldali téglánymódszer segítségével $n = 4$ részintervallumra bontással!

a) $\int_{-1}^1 (x^2+1)\ dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx$

c) $\int_2^4 \sqrt{2+x^3}\ dx$

d) $\int_1^5 \frac{1}{x}\ dx$

e) $\int_4^8 \sqrt[3]{1+x^2}\ dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+sin^2(x)}\ dx$

Minden részszámítás esetén érdemes legalább 2 tizedesjegyre kerekíteni a közelítéseinket.

3. óra: A középponti szabály

Az óra célja: Az előző órán megismert téglánymódszer alapján felírni a tanulókkal közösen a középponti szabály általános összefüggését. Közösen bebizonyítani, hogy a középponti szabály által kapott téglalap területe megegyezik az ugyanezen intervallumra illesztett érintőtrapéz területével.
Előzetes ismeretek: Téglánymódszer, függvény grafikonjának egy pontjában vett érintő egyenlete.
Munkaforma: Egyéni modellalkotás, feladatmegoldás.
A korábbi alkalmon megismert módszerre hivatkozva feltenni a diákoknak a kérdést: a téglalapok másik oldalának miért épp a részintervallumok bal vagy jobb oldali végpontjában felvett függvényértéket választottuk? Választhatunk-e mást ezen oldalnak? Ha az i-edik részintervalum $[x_{i-1},\ x_i]$ felezőpontja c_i, akkor az erre illesztett téglalap másik oldala lehet $f(c_i)$ is. Ez alapján n részintervallumra bontással megkaptuk a középponti szabály általános alakját. Az előző alkalom példájára a tanulók egyénileg is felírhatják a középponti szabályt, ahogyan mi tettük a 2.4. Példában, a kapott érték összevethető a korábbi értékekkel és az integrál pontos értékével is.

A diákokkal közösen írjuk fel a c_i felezőpontban a függvénygrafikonunk érintőjét, melyenk összefüggése ismert kell legyen körükben. Az ezen eljárással kapott érintőtrapézok területe megegyezik a középponti szabállyal kapott téglalapok területével, ennek levezetése megmutatható számukra is.

Feladatmegoldás gyanánt a korábbi óra feladatai mérvadóak. Minden esetben vessük össze a középponti szabály által és a téglánymódszerekkel kapott integrálközelítési értékeket!

4-5. óra: Trapézformula és Simpson-formula

Az óra célja: Az előző órákon megismert integrálközelítési módszerek analógiájára a diákokkal közösen levezetni a trapézformula és a Simpson-formula általános alakját.
Előzetes ismeretek: Téglánymódszer, középponti szabály.
Munkaforma: Egyéni modellalkotás, feladatmegoldás.
A dolgozatban is megtalálható elemi eszközökkel és a diákokkal való közös gondolkodással levezethetőek a két formula általános alakjai. Ezeket alkalmazhatjuk a korábbi példákra, esetleg újakra. Minden esetben érdemes a különböző formulákkal adott közelítéseket összevetni, hogy intuitív képet kapjanak a diákok, mely formula használata lehet a leginkább célravezető.

6. óra: A formulák hibának összevetése

Az óra célja: A korábban megismert formulák hibáinak felírása, a hibák elemzése és összevetése.
Előzetes ismeretek: Téglánymódszer, középponti szabály, trapézformula, Simpson-formula.
Munkaforma: Demonstráció, közös gondolkodás.
Felírni a diákoknak minden megismert formula mellé annak hibaképletét, értelmezni az azokban megjelenő M_n értékeket, melyek az integrálni kívánt f függvény n-edik deriváltjának az integrálási intervallumon vett legkisebb felső korlátja. Ezt gyakran szintén csak becsülni tudjuk. Elmagyarázni a tanulóknak, hogy a hibabecslések általában nem adják meg pontosan a közelítés során elkövetett hibát, ugyanakkor az integrál értéke bármilyen előre kiszabott hibahatáron belül kiszámítható, az csak az n, vagyis az egyenlő hosszúságú osztóintervallumok számától függ. Ennek igazolására a különböző hibaformulák végtelenben vett határértékét elég vizsgálni, hiszen ezek mindegyike 0-hoz tart. A hibaformulákat a diákoknak ki is oszthatjuk, hogy egyénileg beláthassák, a hibák ténylegesen 0-hoz konvergálnak.

Ezután, ahogy ezen dolgozatban is sor került rá, az $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ integrál közelítése is megtörténhet $n = 2, 4, 8, 16$ egyenlő részintervallumra osztással. Fontos, hogy rögzítsük előre, hány tizedesjegy pontossággal számolunk, jelen esetben 10-12 tizedesjegy pontosságra is szükség van az eredmények összevethetősége érdekében. A különböző formulákat hasznos lehet a diákok között kiosztani, így mindenkinek egyénre szabott feladata lesz, nem mellesleg gyorsítjuk a csoport munkáját. A számolásban az alábbi weboldalakat érdemes segítségül hívni a pontosabb és gyorsabb számolás érdekében:
https://www.emathhelp.net/en/calculators/calculus-2/riemann-sum-calculator/
https://www.emathhelp.net/en/calculators/calculus-2/simpsons-rule-calculator/

A különböző eredményeket rögzítsük egy táblázatban, például a Microsoft Excel program segítségével. Az eredményekből azonnal leolvasható, hogy valójában a π értékét közelítettük. Az is szembetűnő, hogy melyik megismert formula használata közelíti általában legjobban az integrál eredeti értékét. A hibák összehasonlítása természetesen más példákon keresztül is lehetséges.

7. óra: Minimális szükséges részintervallumszám

Az óra célja: A hibabecslések megismerése után azokat konkrét példákon keresztül is használni.
Előzetes ismeretek: Téglánymódszer, középponti szabály, trapézformula, Simpson-formula. Mindezen formulák hibabecslései.
Munkaforma: Közös gondolkodás, feladatmegoldás.
Az adott órán arra a kérdésre keressük közösen a választ, minimum hány egyenlő hosszúságú részintervallumra kell osztanunk egy előre megadott integrál alapintervallumát, hogy a közelítésünk egy bizonyos hibahatár alatt legyen. Rögzítsünk előzetesen egy adott hibahatárt a

diákokkal (például 10^{-4}), érdemes konzekvesen ezzel számolni a továbbiakban. Egy konkrét példán mindez mind a négy formulával megbeszélhető, utána a diákok válogathatnak az alábbi feladatokból:

a) $\int_1^3 (2x-1)\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

c) $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$

d) $\int_0^2 sin(x+1)\,dx$

8. óra: Integrálközelítések a mindennapokban

Az óra célja: A megismert formulák használata szöveges feladatokra, közös kísérlet során demonstrálni az integrálközelítések használatát.
Előzetes ismeretek: ld. a korábbi óránál.
Munkaforma: Közös gondolkodás, feladatmegoldás.
A tanulókkal közös kísérlet végzése, melyhez szükség van egy vékony talpú vázára, mely jó közelítéssel forgástestnek mondható, egy madzagra és egy hosszabb vonalzóra. A diákokkal adott magasságonként a madzag segítségével közösen lemérhetjük a váza kerületét, és kiszámíthatjuk az adott kerülethez tartozó keresztmetszetek területét. Az így nyert adatokkal számítható a váza térfogata a trapézformula, illetve a Simpson-formula segítségével. Egy megfelelő űrtartalmú és beosztású mérőedény, valamint víz segítségével szintén kimérhető a váza térfogata, a kétfajta mérés eredményei összevethetőek.

További feladat lehet a következő, melyet megoldunk a tanulókkal: egy téglalap alakú medence szélessége 30, hosszúsága 50 méter. A $h(x)$-szel jelölt mélységét hosszanti irányba 5 méterenként lemértük, a mérési eredményeket az alábbi táblázat szemlélteti:

Pozíció (x m)	**Mélység** ($h(x)$ m)
0	1,2
5	1,2
10	1,3
15	1,7
20	2,1
25	2,5
30	2,9
35	3,3
40	3,4
45	3,4
50	3,4

Becsüljük meg a medence térfogatát a trapézformula segítségével! A diákoknak kiadható gyűjtőmunka, hogy keressenek ezekhez hasonló valóságközeli feladatokat, illetve ők maguk is készíthetnek hasonló, numerikus integrálásra vezető problémákat.

Irodalomjegyzék

[1] Bárczy Barnabás: *Integrálszámítás. Példatár*. Műszaki Kiadó, Budapest. 2006.

[2] Prof. Dr. Andrei Duma: *Numerische Integration*. 2002. (Proszemináriumi segédlet: https://telle-online.de/fernuni/studium/prosem1092.pdf)

[3] Faragó István, Horváth Róbert: *Numerikus módszerek*. Typotex Kiadó, Budapest, 2016.

[4] Hajnal Imre, dr. Nemetz Tibor, dr. Pintér Lajos, dr. Urbán János: *Matematika IV. osztály. (Fakultatív B változat)* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004.

[5] Hajós György: *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[6] Jánossy Lajos, Jánossy István: *Szemléletes integrálszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[7] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: *Valós analízis I.* Typotex Kiadó, Budapest, 2012.

[8] Pintér Lajos: *Analízis II.* Typotex Kiadó, Budapest, 2007.

[9] George A. J. Sparling: Three numerical approximations to integrals and their errors. (elektronikus jegyzet) (http://www.math.pitt.edu/~sparling/23021/23022numapprox2/node4.html)

[10] Sikolya Eszter: *Analízis jegyzet*. ELTE, 2017. (http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/allbooksp3.jsp?bookId=161)

[11] George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: *Thomas-féle kalkulus II.* Typotex Kiadó, 2006.

[12] A 2012-es Nemzeti alaptantervhez illeszkedő kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára. Emelt óraszámú kerettantervek, matematika, A változat. (https://kerettanterv.oh.gov.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html)

[13] Közismereti érettségi vizsgatárgyak 2023. október-novemberi vizsgaidőszakig érvényes, 2012-es Nat-ra épülő vizsgakövetelményei. Matematika vizsgakövetelmények. (https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2017/matematika_vk.pdf)

[14] Közismereti érettségi vizsgatárgyak 2024. május-júniusi vizsgaidőszaktól érvényes, a 2020-as Nat-ra épülő vizsgakövetelményei. Matematika vizsgakövetelmények. (https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/erettsegi/vizsgakovetelmenyek2024/matematika_2024_e.pdf)