

ALKALMAZOTT MATEMATIKUS MESTERSZAK: ZÁRÓVIZSGAKÉRDÉSEK (2023 után felvetteknek)

Összesen legalább 40 kreditnyi tárgyat kell választani.

Szakmai törzsanyag kérdései

Választandó: 3 témakörből legalább 15 kreditnyi tárgy.

1. **Közönséges differenciálegyenletek numerikus módszerei** (kredit: 6) *Fekete Imre*

TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

- a) Általános egy lépéses módszerek és vizsgálatuk (konzisztencia, konvergencia, abszolút stabilitás)
- b) Runge–Kutta módszerek és vizsgálatuk (explicit. módszerek, kollokáció alapú implicit módszerek, konzisztencia, A-stabilitás)
- c) Lineáris többlépéses módszerek és vizsgálatuk (konzisztencia, Adams- és BDF-módszerek, stabilitás fogalmak, konvergencia)

2. **Dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek** (kredit: 6) *Simon Péter*

TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

- a) Dinamikai rendszerek ekvivalenciái. Lineáris rendszerek topologikus osztályozása.
- b) Lokális vizsgálat egyensúlyi pontban. Hartman–Grobman tétel. Stabil és instabil sokaság tétel. Centrális sokaság és redukciós tétel

3. **Operátorfélcsoportok** (kredit: 6) *Sikolya Eszter*

TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

- a) Motiváló példák (egyenletesen folytonos félcsoportok, eltolás- és szorzásfélcsoport, hővezetési egyenlet, stb.), alapfogalmak (generátor, rezolvens, megoldásfogalmak), félcsoportok alaptulajdonságai, Cauchy-probléma jóldefiniáltsága, Laplace transzformáció, rezolvens tulajdonságai.
- b) Generálási tételek (Hille–Yosida, Lumer–Phillips), perturbációs tételek.
- c) Spektrum és aszimptotika: spektrálleképezés-tételek, stabilitásfogalmak, Datko–Pazy és Gearhart–Prüss–Greiner tétele, hiperbolikusság.
- d) Félcsoportok approximációja, Trotter–Kato-tételek.

4. **Algoritmuselemzés** (kredit: 6) *Király Zoltán*

TÉMAKÖR: Diszkrét matematika és algoritmuselemzés

- a) Diszkrét és gyors Fourier-transzformáció. Dijkstra algoritmusának alkalmazásai; Suurballe és Tarjan algoritmusai.
- b) Minimális átlagú kör keresése. Hopcroft–Karp és Dinic algoritmusai. Diszjunkt utak keresése. Többtermékes folyamatok.
- c) Lineáris hálózati kódok. Közeli, illetve párhuzamos algoritmusok.

5. **Bonyolultságelmélet** (kredit: 6) *Grolmusz Vince*

TÉMAKÖR: Diszkrét matematika és algoritmuselmélet

- a) Randomizált, illetve párhuzamos számítások (választható)
- b) Algebrai és egyszerű döntési fák, zárkózottság
- c) Kolmogorov bonyolultság
- d) Boole hálózatok, alsó becslések kismélységű hálózatokra
- e) Interaktív bizonyítások
- f) Tárkorlátos számítások, polinomiális hierarchia, hierarchia-tételek

6. **Diszkrét matematika** (kredit: 6) *Csikvári Péter*

TÉMAKÖR: Diszkrét matematika és algoritmuselmélet

- a) Spektrál gráfelmélet: Pszeudorandom gráfok. Gráfparaméter becslések sajátértékekkel. Erősen reguláris gráfok. Laplace-sajátértékek és feszítőfák.
- b) Algebrai és analitikus eszközök: kombinatorikus nullstellensatz és alkalmazásai. Generátorfüggvények, "snake oil" módszer, Stirling-számok.
- c) Valószínűségi módszerek: első és második momentum módszer és alkalmazásai. Nagy területű és kromatikus számú gráfok létezése. Véletlen gráfok és küszöbfüggvények.

7. **Speciális sztochasztikus folyamatok** (kredit: 6) *Michaletzky György*

TÉMAKÖR: Sztochasztikus folyamatok

- a) Felújítási folyamatok. A felújítási függvény, felújítási egyenlet. A megoldás egyértelműsége. A felújítási folyamat aszimptotikus viselkedése (1 valószínűségű konvergencia.). A felújítási függvény aszimptotikus viselkedése. A felújítási tétel. Speciális indítás esetén a pontos megoldás, illetve a hátralévő élettartam.
- b) Elágazó folyamatok. Diszkrét paraméterű eset. A kihalás valószínűsége. A várható értékkel normalizált folyamat aszimptotikus viselkedése, a határérték várható értéke.
- c) Diszkrét paraméterű Markov-láncok. Az állapotok osztályozása, periódus. Visszatérő állapotok karakterizálása. Ergodikus Markov-lánc: az átmenet valószínűségek határértéke. Stacionárius eloszlás. Markov-lánc funkcionálja számtani közepének aszimptotikus viselkedése.

8. **Modern statisztikai módszerek** (kredit: 6) *Csáji Balázs Csanád*

TÉMAKÖR: Sztochasztikus folyamatok

- a) Többdimenziós valószínűségi számítás megalapozása, kopulák, szimuláció. Többdimenziós normális és t eloszlás, Wishart eloszlás, tulajdonságaik, alkalmazásuk.
- b) Regressziószámítás, GLS (korrelált zaj), Szórásanalízis. Ridge Regresszió, LASSO.
- c) Változószelekció, kritériumok: MCp, AIC, cross validation, outlier detektálás (Cook-t), logisztikus regresszió, ROC, AUC, GLM.

9. **Diszkrét optimalizálás** (kredit: 6) *Jordán Tibor*

TÉMAKÖR: Operációkutatás

- a) Gráfok a diszkrét optimalizálásban – minimax tételek és algoritmusok. (Mohó algoritmus, legolcsóbb fenyő, irányítási problémák, fedés és pakolás fákkal és fenyőkkel, színezések, szubmoduláris függvények.)
- b) Gráfok a diszkrét optimalizálásban – párosításelmélet és alkalmazásai. (Kőnig és Egerváry tételei, a Berge–Tutte formula, Edmonds–Gallai-tétel, Edmonds párosítási algoritmus, faktorkritikus gráfok, merevítés pontok leszúrásával.)
- c) Matroidok a diszkrét optimalizálásban. (Ekvivalens axiómarendszerek, rangfüggvény, matroidosztályok, összefüggő matroidok, a duális matroid. Mohó algoritmus. Matroidok metszete és uniója. Ritkasági matroidok, alkalmazások.)

10. **Folytonos optimalizálás** (kredit: 6) *Bérczi Kristóf*

TÉMAKÖR: Operációkutatás

- a) Konvex függvények, Első- és másodrendű optimalitási feltételek, Szeparáló hipersíkok, Poláris halmazok, Duális norma, Konjugált függvény
- b) Konvex optimalizálás dualitáselmélete, Konvex program, Duális feladat, Lagrange-függvény, Gyenge és erős dualitás, Optimalitási feltételek, Karush-Kuhn-Tucker feltétel
- c) Gradiens módszer, Bregman divergencia, Multiplikatív frissítés és mirror descent módszer

Differenciált szakmai anyag

Specializáció nélküli képzés esetén legalább 20 kredit a felsorolt tárgyakból
Specializált képzés esetén legalább 15 kredit a saját specializáció tárgyaiból

Differenciált szakmai anyag kérdései: alkalmazott analízis szakirány

1. Modellalkotás és szimulációs módszerek (kredit: 6) *Izsák Ferenc*

- a) A diffúzió modellezése. Feltevés a fluxusról. Harmadfajú peremfeltétel levezetése. A modell matematikai tulajdonságai.
- b) Áramlási feladatok modellezése egyszerű advekciónal, peremfeltételek. A megmaradási törvények általános alakja. A Navier–Stokes-egyenletek és az Euler-egyenletek levezetésének elve.
- c) Kémiai reakciók tömeghatás típusú modellje. Feltevések a modellben. A kinetikai differenciálegyenlet-rendszer felírása, matematikai tulajdonságai.

2. Elliptikus parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazásai (kredit: 8) *Karátson János*

- a) A véges differenciák módszere. (A módszer konstrukciója téglalapon, a lineáris rendszer tulajdonságai. Stabilitás és konvergencia. Általánosabb feladatok.)
- b) A végelem-módszer. (A módszer elméleti alapjai, konstrukció, nevezetes bázisfüggvények. A konvergencia és becslései, rendje.)
- c) A többrácsos (multigríd-)módszer. (A kétrácsos módszer alapelve, konstrukciója, konvergenciája. Többrácsos V-és W-ciklusok, műveletigény.)
- d) Nemlineáris elliptikus feladatok végelelemes megoldása: konstrukció, konvergencia, Newton-iteráció.

3. Időfüggő parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei és alkalmazásai (kredit: 7) *Izsák Ferenc*

- a) Teljes diszkretizáció és szemidiszkretizáció. Az ezekkel kapott egylépéses sémák normalkonzisztenciájának és (feltételes) stabilitásának fogalma. A Lax-féle ekvivalenciatétel és ennek módosítása a hullámegyenlet megoldásához.
- b) Stabilitásvizsgálati módszerek: elégséges feltétel stabilitásra, vizsgálat Fourier- transzformációval és Gersgorin-tétellel. Nevezetes eredmények az diffúziós egyenletre vonatkozó explicit sémákra, a Crank–Nicolson-séma és tulajdonságai. ADI típusú sémák.
- c) Sémák egydimenziós advekciónal feladatokra, upwind, downwind és Lax–Wendroff séma. A CFL-feltétel konvergenciára.

4. Nemlineáris és numerikus funkcionálanalízis (kredit: 6) *Karátson János*

TÉMAKÖR: Alkalmazott analízis

- a) Nemlineáris operátorok alapfogalmai. (Gâteaux- és Fréchet-derivált. Potenciáloperátorok, a potenciál fogalma és létezése. Monoton operátorok, konvex funkcionálok. Példa nemlineáris elliptikus operátorra.)
- b) Nemlineáris operátoregyenletek megoldhatósága. (Variációs elv, funkcionál minimumának létezése. Kvadratikus funkcionál. Megoldhatóság nem potenciálos operátorra. Alkalmazás nemlineáris differenciálegyenletekre.)

- c) Közelítő módszerek. (Ritz-Galjorkin-féle projekciós módszerek lineáris és nem lineáris operátorokra. Iterációs módszerek: gradiens-módszer Hilbert-térben, Newton-Kantorovics-módszer és változatai Banach-térben.)

5. **Bevezetés a folyadékdinamika numerikus módszereibe** (kredit: 6) *Karátson János*

- a) Áramlástan alapegyenletek
- b) Stacionárius lineáris modellek végeselemes megoldása: konvekció-diffúziós egyenletek és SDFEM, Stokes-feladat és LBB-feltétel, Uzawa-iteráció.
- c) Stacionárius Navier-Stokes-feladat és végeselemes megoldása, Picard- és Newton-iteráció.
- d) Megmaradási törvényekre vonatkozó konzervatív sémák általános alakja és tulajdonságai
- e) A Godunov-séma, rekonstrukciós sémák. Monotonitás és TVD tulajdonság.

6. **Operátorfélcsoportok a numerikus analízisben** (kredit: 6) *Csomós Petra*

- a) Térbeli diszkretizációk (generátor approximációja, általános Trotter-Kato-tételek, példák: véges különbséges és spektrális módszerek).
- b) Időbeli diszkretizációk (félcsoportok approximációja, konzisztencia, konvergencia, stabilitás, Lax-féle ekvivalencia-tétel és annak a rendre vonatkozó változata, Chernoff-tétel, példa: implicit Euler-módszer).
- c) Racionális approximációk, mint speciális időbeli diszkretizációk (stabilitási függvény, stabilitási tartomány, analitikus félcsoportok esete, példák); Teljes diszkretizáció.

Differenciált szakmai anyag kérdései: sztochasztika szakirány

1. Diszkrét és folytonos paraméterű Markov-láncok (kredit: 3) *Csiszár Villő*

- a) Alapfogalmak. Ergodikus Markov láncokra vonatkozó tételek. Stacionárius eloszlás és reguláris mérték, megfordított láncok.
- b) Véges állapotterű Markov láncok, Perron–Frobenius-tételek. A konvergenciasebesség becslése. MCMC-módszerek.
- c) Folytonos paraméterű Markov láncok infinitezimális generátora. Születési-halálozási folyamatok. A Kolmogorov-féle differenciálegyenletek megoldhatósága.

2. Sztochasztikus folyamatok (kredit: 6) *Prokaj Vilmos*

- a) Wiener folyamat: konstrukció, Donsker tétel, tükrözési elv, erős Markov tulajdonság. Maximum és a szintelérési idő eloszlása.
- b) Sztochasztikus integrál, kvadratikus variáció, Ito formula, Lévy karakterizáció, Girsanov tétel.
- c) Sztochasztikus differenciálegyenletek, erős és gyenge megoldás, eloszlásbeli és trajektóriánkénti unicitás. Tételek a megoldás létezéséről és unicitásáról.

3. Stacionárius folyamatok (kredit: 6) *Prokaj Vilmos*

- a) Stacionárius folyamatok. Kovariancia függvény. Bochner-Hincsin-tétel. (Herglotz-tétel) Spektrálelőállítás.
- b) Karhunen-Loeve-sorfejtés, Kotelnikov-Shannon-tétel - a mintavételezés sűrűsége.
- c) Wold-felbontás. Teljesen reguláris és szinguláris folyamatok.
- d) Stacionárius folyamatok várható-értékének és kovariancia-függvényének becslése.

4. Idősorok elemzése 1 (kredit: 6) *Márkus László*

- a) Stacionárius folyamatok alapfogalmai. Autokorreláció. Spektrálelőállítás, spektrálsűrűségfüggvény. Stacionárius folyamatok modelljei: autoregressziós (AR(p)), mozgóátlag (MA(q)), ARIMA(p,d,q), ARCH(p), GARCH(p,q), bilineáris, véletlen együtt-hatós AR, és a SETAR folyamatok, stacionaritása és a stacionárius eloszlás tulajdonságai. Sztochasztikus rekurziós egyenletek stacionárius megoldásának létezési feltétele Ljapunov-exponenssel, Kesten-Vervaat-Goldie tétel reguláris változású eloszlással bíró stacionárius megoldás létezéséről, alkalmazás ARCH(1)-re.
- b) Idősorok becslésmélete: Az átlag és az autokovariancia függvény becslése, tulajdonságai és határeloszlása (ARCH eset is). Paraméterbecslés AR és MA folyamatra. Rendszelektió Akaike és Bayes információs kritériumok. A periodogram a diszkrét spektrum becslésére

5. Pénzügyi folyamatok 1 (kredit: 3) *Arató Miklós*

- a) Európai opció ára, piacok arbitrázsmertessége, teljessége, eszközárzás első és második alaptétele diszkrét idejű részvény-kötvény piacon. Teljesség, ármérce pár, "market price of risk" folyamat és a martingál mérték kapcsolatai. A Black-Scholes piac teljessége.

- b) Amerikai opció ára diszkrét idejű kereskedésben. Példa nem teljes piacra, és eszközárak nem teljes diszkrét idejű piacon. A Black-Scholes formula mint a Cox-Ross-Rubinstein árazás határértéke. Több részvényes Black-Scholes modell teljessége.

6. Pénzügyi folyamatok 2 (kredit: 3) *Arató Miklós*

- a) A Black-Scholes differenciálegyenlet, kapcsolat a Feynman-Kac formulával. PIDE az ugró folyamatok esetén, pszeudodifferenciál operátorral. Amerikai opció ára szintátlépéses megállítások mellett folytonos idejű kereskedésben. Összetett Poisson-folyamat. A Lévy-Itó felbontás. Exponenciális ugró diffúziós modellek: Merton, Kou, Bates.
- b) Implikált és realizált volatilitás. Profit and Loss egyenlet. Az implikált volatilitás mosoly. Az implikált eloszlás és a Breeden-Litzenberger formula. Lokális volatilitás modellek (pl. CEV), Dupire egyenlete. Sztochasztikus volatilitás: Hull-White, Ornstein-Uhlenbeck, CIR, Heston. Ugró eszközármodellek. Szubordinátor, business time. Átskálázott Brown mozgás: Variance Gamma, és NIG modellek, tulajdonságaik.

7. Statisztikai becsléelmélet (kredit: 3) *Rásonyi Miklós*

- a) A sűrűségfüggvény becslése. Cramér-Rao típusú egyenlőtlenségek: Chapman-Robbins, Bhattacharyya-határ. Valódi és általánosított Bayes-becslések, a Jeffrey-féle neminformatív a priori mérték.
- b) Ekvivariáns becslések. A ML- és a Bayes-becslés ekvivarianciája. Folytonos eloszlásfüggvény ekvivariáns becslése. A Pitman-becslés és tulajdonságai. Véges sokaságból való mintavétel. Godambe és Joshi tételei. A Horvitz-Thompson becslés tulajdonságai.
- c) L-statisztikák és határeloszlásuk. Legkisebb négyzetes becslés korrelált hibájú lineáris modellben. Optimális L-becslés eltolás- és skálaparaméteres családban. Aszimptotikusan optimális L-becslés az eltolásparaméterre. M-becslések, aszimptotikus normalitásuk. Robusztusság. A Huber-becslés minimax tulajdonsága. Az M- és az L-becslések ekvivalenciája.

8. Statisztikai hipotézisvizsgálat (kredit: 3) *Móri Tamás*

- a) Exponenciális eloszláscsalád. A Neyman-Pearson lemma általánosítása. Egy- és kétoldali ellenhipotézis vizsgálata. Neyman-struktúra, hipotézisvizsgálat zavaró paraméterek jelenlétében.
- b) Az általánosított likelihood-hányados próba. Az empirikus folyamat konvergenciája a Szkorohod-térben. Karhunen-Loeve sorfejtés. Klasszikus nemparaméteres próbák. Konfidenciahalmazok. Kapcsolat a hipotézisvizsgálattal. Likelihoodra épülő aszimptotikus konfidenciahalmazok.

9. Sztochasztikus analízis (kredit: 3) *Prokaj Vilmos*

- a) Kolmogorov kiterjesztési tétel. Folytonossági lemma, trajektóriák Hölder folytonossága. Gyenge konvergencia, Portmanteau tétel. Feszesség, Prohorov tétel. Donsker tétel.
- b) Wiener folyamat tulajdonságai: Nagy számok erős törvénye, invariancia tulajdonságok, Wiener-folyamat null-halmaza, "sehol sem monotonitás", Dvoretzky-Erdős-Kakutani tétel, Paley-Wiener-Zygmund tétel, Iterált logaritmus tétel.

- c) Doob-Meyer felbontás, Ito integrál, kvadratikus varáció, Ito formula.
10. **Többdimenziós statisztikai eljárások** (kredit: 6) *Michaletzky György*
- a) A többdimenziós normális eloszlás paramétereinek becslése.
- b) Főkomponensanalízis.
- c) Faktoranalízis.
- d) Diszkriminanciaanalízis.
11. **Életbiztosítás** (kredit: 3) *Arató Miklós*
- a) A hagyományos és a modern életbiztosítási díjkalkulációs logika. Ezek különbségei.
- b) A hagyományos életbiztosítások díjtartalékszámítása és az azokhoz kapcsolódó aktuáriusi számítások (visszavásárlás, díjmentesítés, nyereségosztás).
12. **Általános biztosításmatematika** (kredit: 3) *Arató Miklós*
- a) Nevezetes kárszám- és káreloszlások.
- b) Összetett eloszlások. Panjer rekurzió.
13. **Bevezetés az információelméletbe** (kredit: 3) *Csiszár Villő*
- a) Entrópia, kölcsönös információ, relatív entrópia (divergencia). Veszteségmentes adattömörítés, a kódszóhosszakra (Kraft-egyenlőtlenség) és az átlagos kódszóhosszra vonatkozó korlátok. Kódolási módszerek és hatékonyságuk: Shannon kód, Shannon-Fano-Elias (alfabetikus) kód, aritmetikai kód, Huffman kód.
- b) Sztochasztikus folyamatok (források) betűnkénti entrópiája. Tipikus sorozatok, információstabilis források (AEP: asymptotic equipartition property). Állandó hosszúságú blokk-kódok előírt hibavalószínűséggel, Fano egyenlőtlenség. Elérhető ráták. A hibaexponens i.i.d. forrás esetén (Rényi entrópia). Korrelált források kódolása: Slepian-Wolf tétel.
- c) Zajos csatorna, szimmetrikus és gyengén szimmetrikus csatornák. Csatornkapacitás és kiszámítása (Arimoto-Blahut algoritmus). Csatornakódolási tétel, visszacsatolásos csatornák. Forrás- és csatornakódolás lineáris kódokkal. A Hamming-féle hibajavító kódok elemei. Differenciális entrópia, összevetés a diszkrét esettel. Gauss-csatorna.
14. **Statisztikus tanuláselmélet és kernel módszerek** (kredit: 3) *Csáji Balázs Csanád*
- a) Reprodukáló magú Hilbert terek (RKHS). Moore-Aronszajn tétel. Minimális normájú interpoláció. Reprezentációs tétel regularizációval. Mercer tétel. Univerzális és karakterisztikus kernelek. Feltételes valószínűségi eloszlások RKHS-ekbe ágyazása.
- b) Statisztikai és gépi tanulási módszerek kernelizálása. Kernelizált lineáris- és logisztikus regresszió. Kernelizált szupport vektor klasszifikáció és regresszió. Kernel főkomponens analízis. Egyenletes stabilitás. Garanciák általánosításra, PAC korlátok.
15. **Markov döntési folyamatok és megerősítéses tanulás** (kredit: 3) *Csáji Balázs Csanád*

- a) Markov döntési folyamatok: véges horizontú-, sztochasztikus legrövidebb út-, diszkontált- és átlagos-költségű problémák. Bellman operátorok és Bellman egyenletek. Dinamikus programozás, lineáris-kvadratikus regulátor. Érték- és politika iteráció, valamint lineáris programozás alapú megoldások.
- b) Megerősítéses tanulás: Monte Carlo politika kiértékelés. SARSA, TD- és Q-tanulás. Felfedezés-kihasználás dilemma. Sztochasztikus többkarú rabló problémák. UCB és változatai. Sztochasztikus approximáció alapjai: konzisztencia Ljapunov függvény, kontraktilitás és monotonitás alapján.

Differenciált szakmai anyag kérdései: számítástudomány szakirány

1. **Adatbányászat** (kredit: 6) *Lukács András*
 - a) Klasszifikáció modelljei I. (döntési fák, Bayes-módszerek, boosting)
 - b) Klasszifikáció modelljei II. (neurális hálózatok, lineáris szeparáción alapuló módszerek, kernel módszerek)
 - c) Gyakori mintázat kereső algoritmusok (Apriori, partíciós és Toivonen-algoritmus, FP-growth)
 - d) Klaszterező algoritmusok (particionáló, sűrűség alapú, hierarchikus módszerek)
2. **WWW és hálózatok matematikája** (kredit: 3) *ifj. Benczúr András*
 - a) PageRank és bolyongás gráfokon
 - b) Kleinberg linkgyűjtemény - meghatározó tartalom (hub-authority) algoritmus (HITS) és mátrixok szinguláris felbontása
 - c) Véletlengráf modellek: Barabási-Albert; Kleinberg kis világ modellje
3. **Kriptológia** (kredit: 6) *Villányi Viktória*
 - a) Titkosítás és pszeudovéletlenség (tökéletes biztonság ekvivalens definíciói, one-time pad, tökéletes biztonság korlátai, számítási biztonság definíciói, pszeudovéletlenség, konstrukciók lehallgatás és nyílt szövegű támadás ellen)
 - b) Üzenet autentikálás és hash-függvények (üzenetek integritása, üzenet autentikáló kódok (MAC) definíciója, konstrukciók, hash-függvények biztonsági kritériumai, születésnap támadás, Merkle-Damgård konstrukció)
 - c) Nyilvános kulcsú titkosítások (biztonság definíciók, RSA módszer, ElGamal titkosítás, Rabin titkosítás)
4. **Haladó algoritmusok (Algoritmusok és adatstruktúrák tervezése, elemzése és implementálása I)** (kredit: 6) *Király Zoltán*
 - a) Randomizált algoritmusok. Karger és Stein algoritmus. A VPND feladat. On-line algoritmusok randomizált bonyolultsága.
 - b) Gráfok síkbarajzolása. Determináns-számítás gyűrűk felett.
 - c) Optimális fa-felbontás konstans favastagság esetén. FPT: iteratív összenyomás.
5. **Adatstruktúrák (Algoritmusok és adatstruktúrák tervezése, elemzése és implementálása II)** (kredit: 3) *Király Zoltán*
 - a) Unió-holvan adatstruktúrák; kupacok; vEB-struktúra
 - b) Szótárak, hash-elés
 - c) Geometriai adatstruktúrák; dinamikus fák
6. **Kódok és szimmetrikus struktúrák** (kredit: 3) *Szőnyi Tamás*
 - a) Perfekt kódok
 - b) MDS kódok
 - c) Négyzetes blokkrendszerek

Kombinatorikus algoritmusok 1, Gráfelmélet: lásd az operációkutatás szakiránynál.
Statisztikus tanuláselmélet és kernel módszerek: lásd a sztochasztika szakiránynál.

Differenciált szakmai anyag kérdései: operációkutatás szakirány

1. Egészértékű Programozás 1 (kredit: 3) *Kis Tamás*

- a) Meyer tétele, Hilbert bázisok, teljes duális egészértékűség.
- b) Heurisztikus algoritmusok az utazó ügynök feladatra, approximációs eredmények, Held–Karp-korlát, módszerek a kiszámolására.
- c) Gomory egész és vegyes vágás, a diszjunktív elv, metszet vágások.

2. Gráfelmélet (kredit: 3) *Jordán Tibor, Király Zoltán*

- a) Gráfok összefüggősége: leemelések, az élösszefüggőség növelése, irányítások, előállítási tételek, pontszétszedések
- b) Gráfok színezése: él- és pontszínezés, él- és pont listaszínezés, páros gráfok, síkgráfok, merevkörű gráfok esetei, kernelek.
- c) Éldiszjunkt utak, Lucchesi-Younger tétel, aciklikus digráfok esete, Okamura-Seymour tétel, párhuzamos igényél kötegek.

3. Kombinatorikus algoritmusok 1 (kredit: 6) *Jordán Tibor*

- a) Gráfok bejárása, algoritmusok az összefüggőség tesztelésére, ritka tanúk, vágásokvi-valens fák.
- b) Dinamikus programozás, gráfok favastagsága.
- c) Merev gráfok és szerkezetek.

4. Matroidelmélet (kredit: 6) *Bérczi Kristóf*

- a) Matroidelméleti algoritmusok: mohó algoritmus, matroid metszet, matroid unió.
- b) Matroidok halmazfüggvényekből: polimatroid függvények, szubmoduláris függvények, metszön szubmoduláris függvények.
- c) Alkalmazások: Seymour listaszínezési tétele, Greene-Magnanti tétel, fedések és pakolások erdőkkel és fákkal.

5. Approximációs algoritmusok (kredit: 3) *Kis Tamás*

- a) Adjon eljárásokat a halmazfedési problémára különböző approximációs garanciákkal, és vázolja azok helyességét.
- b) Ismertessen véletlent használó approximációs algoritmusokat a MAX-SAT problémára. Mutassa meg azt is, hogyan lehet "derandomizálni" az eljárásokat.
- c) Ismertesse a primál-duál sémát approximációs algoritmusok tervezéséhez. Mutassa be az eljárást a többtermékes folyam - többször vágás fákon problémán.

6. Ütemezélmélet (kredit: 3) *Jordán Tibor*

- a) Egygépes feladatok: rendezésen alapuló eljárások (súlyozott befejezési idők összege, maximális késés), megszakíthatóság, késő munkák számának minimalizálása.

- b) Többgépes feladatok: Bonyolultsági eredmény a maximális befejezési idő minimalizálására, és $2-1/m$ approximációs algoritmus (m a gépek száma). Különböző sebességű gépeken megszakítható munkák maximális befejezési idejének minimalizálása.
- c) A shop modellek: 2-gépes flow-shopban a maximális befejezési idő minimalizálása. Open shop-ban 2-approximációs algoritmus a max. befejezési idő minimalizálására, és polinomiális idejű algoritmus megszakítható munkák esetében.

7. Poliéderes kombinatorika (kredit: 3) *Király Tamás*

- a) Teljesen duális egészértékűség (TDI-ség). A párosítás politóp poliéderes megadása és a leírás TDI-sége. A teljes párosítás politóp poliéderes leírása.
- b) Fedési és pakolási poliéderek, ideális és perfekt hipergráfok.
- c) Polimatroidok és általánosításai. Szubmoduláris áramok. Alkalmazások gráfrányítási problémákra.

8. Játékelmélet 1 (kredit: 3) *Király Tamás*

- a) Kombinatorikus játékok: k-nim, Grundy-számozás, sövényvágó játék, Hex.
- b) Stratégiai játékok: dominálás, Nash-egyensúly, Nash tétele. Kétszemélyes 0-összegű játékok, Neumann-tétel.
- c) Stabil párosítások, felső körcsere algoritmus, taktikázás-biztosság.

9. Egészértékű programozás 2 (kredit: 3) *Király Tamás*

- a) Gomory-Chvátal-vágások. Vágások az utazó ügynök feladatra és a hátizsák-feladatra. Vágások felemelése.
- b) Rácsok, redukált bázisok, LLL algoritmus.

10. Játékelmélet 2 (kredit: 3) *Király Tamás*

- a) Kooperatív játékok: mag, Shapley-érték, konvex játékok.
- b) Árverések, igazságos felosztás.
- c) Közlekedési játékok, korrelált egyensúly.